

Das Restmoment der Torsionsschwingungen von Maschinenwellen

Schaefer, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 6, 1954,
S. 243-254



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Das Restmoment der Torsionsschwingungen von Maschinenwellen

Von Hermann Schaefer

Mit 3 Abbildungen

Summary: The "remainder torque" method of Holzer-Tolle, widely used in the determination of the torsional vibrations of crank-shafts, is a "cut-and-try" process. In this paper several proposals are given and discussed suitable to abbreviate the computations of the natural frequencies.

Das bekannte „Restmomentenverfahren“ von Holzer-Tolle zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen ist ein Probierv erfahren. In der vorliegenden Abhandlung werden einige Vorschläge für die Verminderung der Rechenarbeit gebracht und zum Teil ausführlich diskutiert.

1. Einleitung

Unter den zahlreichen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen (vgl. Literaturhinweis [1]) zählt das sogenannte „Restmomentenverfahren“ von Holzer-Tolle zu den einfachsten und übersichtlichsten.

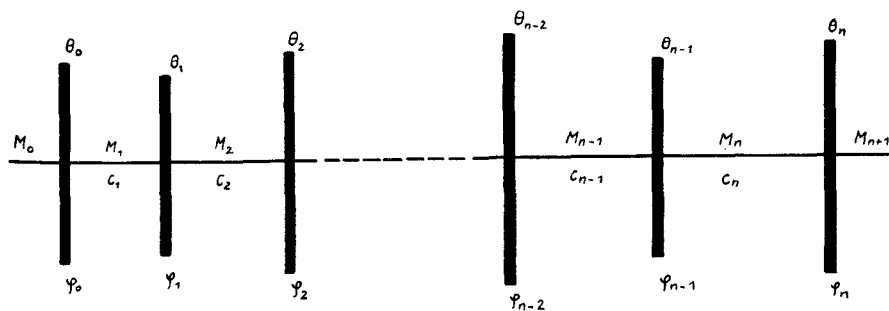


Abb. 1. Das Ersatzsystem einer Maschinenwelle

Zunächst wird die Maschinenwelle in der üblichen Weise auf ein Ersatzsystem (Abb. 1) abgebildet. Ein solches Ersatzsystem besteht aus einer elastischen Welle, die abschnittsweise die Torsionssteifigkeiten c_1, c_2, \dots, c_n besitzt, und deren einzelne Abschnitte durch festaufsitzende Drehmassen mit den Trägheitsmomenten $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ begrenzt sind.

Die Winkelamplituden der schwingenden Drehmassen seien $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$; die entsprechenden Torsionsmomente der Wellenabschnitte M_0, M_1, \dots, M_{n+1} . Ist die Welle, wie üblich, an beiden Enden frei, so verschwindet links M_0 und rechts M_{n+1} .

Zwischen Drehmassen, Torsionssteifigkeiten, Drehwinkel und Torsionsmomenten bestehen nun die beiden folgenden, in sich zusammenhängenden Gleichungssysteme:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{M_1}{c_1} \\ \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{M_2}{c_2} \\ \dots \\ \varphi_n - \varphi_{n-1} = \frac{M_n}{c_n} \end{array} \right\} (1,1) \quad \left. \begin{array}{l} M_1 = -\lambda \Theta_0 \varphi_0 \\ M_2 - M_1 = -\lambda \Theta_1 \varphi_1 \\ \dots \\ M_n - M_{n-1} = -\lambda \Theta_{n-1} \varphi_{n-1} \\ M_{n+1} - M_n = -\lambda \Theta_n \varphi_n \end{array} \right\} (1,2)$$

In (1,2) ist M_0 bereits Null gesetzt worden. Für jede Eigenschwingung des Systems muß ferner $M_{n+1} = 0$ sein. ω sei die Kreisfrequenz einer Wellenschwingung; zur Abkürzung wurde in (1,2) $\omega^2 = \lambda$ gesetzt.

Im Restmomentenverfahren wird nun folgendermaßen gerechnet: φ_0 bekommt einen festgewählten Wert, etwa $\varphi_0 = 1$. Dann wird für eine Reihe von λ -Werten rekursiv das Restmoment M_{n+1} berechnet. Etwa so, daß aus der ersten Gleichung (1,2) M_1 berechnet wird, dann aus der ersten Gleichung (1,1) φ_1 . Aus der zweiten Gleichung (1, 2) folgt dann M_2 , und so fort, bis die letzte Gleichung (1,2) das Restmoment M_{n+1} ergibt. Auf diese Weise erhält man M_{n+1} in Abhängigkeit von dem bei jedem Rechnungsgang gewählten λ -Werte. $M_{n+1}(\lambda)$ ist natürlich eine stetige Kurve, von der durch dieses Restmomentenverfahren beliebig viele Punkte berechnet werden können. Die Nullstellen λ_r dieser Restmomentenkurve geben dann die Torsionseigenfrequenzen $\omega_r = \sqrt{\lambda_r}$ der Welle.

Dieses monotone Rechenverfahren würde sich vorzüglich für ein programmgesteuertes elektronisches Rechengerät eignen, das in kurzer Zeit Hunderte oder gar Tausende von Punkten der Kurve $M_{n+1}(\lambda)$ produzieren könnte, also praktisch den ganzen Kurvenverlauf.

Der Handrechner am Schreibtisch dagegen wird sich vernünftigerweise überlegen, wie er solche, bei vielen Drehmassen wahrhaft stumpfsinnige und zeitraubende Rechenarbeit durch geschickte Wahl der λ -Werte abkürzen kann.

Mit dieser Fragestellung beschäftigen sich die folgenden Ausführungen.

2. Der Zusammenhang zwischen Restmomentenkurve und Frequenzdeterminante

Wir wollen zunächst zeigen, daß es nicht sinnvoll ist, eine viel größere Zahl von Punkten der Restmomentenkurve durch obiges Verfahren zu berechnen, als die Zahl unserer Drehmassen, nämlich $n + 1$, beträgt.

Nach Ersetzen der Torsionsmomente in (1,2) durch die Gleichungen (1,1) entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} (-c_1 + \lambda \Theta_0) \varphi_0 + c_1 \varphi_1 &= 0 \\ c_1 \varphi_0 + (-c_1 - c_2 + \lambda \Theta_1) \varphi_1 + c_2 \varphi_2 &= 0 \\ c_2 \varphi_1 + (-c_2 - c_3 + \lambda \Theta_2) \varphi_2 + c_3 \varphi_3 &= 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ c_{n-1} \varphi_{n-2} + (-c_{n-1} - c_{n-2} + \lambda \Theta_{n-1}) \varphi_{n-1} + c_n \varphi_n &= 0 \\ M_{n+1} + c_n \varphi_{n-1} + (-c_n + \lambda \Theta_n) \varphi_n &= 0 \end{aligned} \right\} (2,1)$$

Wird hierin M_{n+1} Null gesetzt, dann haben wir ein homogenes Gleichungssystem für die $n + 1$ Winkelamplituden $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ der Eigenschwingungsformen vor uns. Die Nullstellen $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ der $n + 1$ -reihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} -c_1 + \lambda \Theta_0 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & -c_1 - c_2 + \lambda \Theta_1 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & -c_2 - c_3 + \lambda \Theta_2 & c_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & c_n & -c_n + \lambda \Theta_n & \end{vmatrix} = D_{n+1}(\lambda) \quad (2,2)$$

dieses homogenen Gleichungssystems sind die Eigenwerte (bzw. Eigenfrequenzen $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$). Für $\lambda = 0$ wird $D_{n+1} = 0$, weil die Zeilen- oder Spaltensummen von $D_{n+1}(0)$ gleich Null sind. Dieser kleinste Eigenwert $\lambda_0 = 0$, zu dem nach (2,1) $\varphi_0 = \varphi_1 = \dots = \varphi_n = 1$ und $M_{n+1} = 0$ gehört, spiegelt die Tatsache wieder, daß die Welle, an beiden Enden frei, im unverformten Zustand rotieren kann.

Der einfache Bau der Determinante $D_{n+1}(\lambda)$ (nur in der Haupt- und in den beiden Nebendiagonalen treten von Null verschiedene Glieder auf) gestattet die explizite Berechnung des Restmomentes M_{n+1} aus (2,1), wenn φ_0 und λ gegeben sind. Man erhält nach der Cramerschen Regel

$$M_{n+1}(\lambda) = \frac{\varphi_0 D_{n+1}(\lambda)}{(-1)^{n+1} c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n} \quad (2,3)$$

Die Restmomentenkurve ist demnach bis auf einen von Null verschiedenen Faktor identisch mit der Frequenzdeterminante und ist wie diese eine ganze rationale Funktion vom Grade $n + 1$ mit der Nullstelle $\lambda_0 = 0$.

Nachdem man also für $n + 1$ beliebige von Null verschiedene λ -Werte das Restmoment berechnet hat, liegt die Restmomentenkurve mathematisch fest. Sind etwa die λ -Werte äquidistant gewählt worden, so gewinnt man rasch die ganze Restmomentenkurve durch ein Interpolationspolynom $(n + 1)$ -ten Grades, dessen Nullstellen sich in der bekannten Weise nach dem Horner'schen Schema berechnen lassen.

Mathematisch ist die Restmomentenkurve auch bestimmt durch die $n + 1$ Ableitungen von $M_{n+1}(\lambda)$ nach λ an einer vorgegebenen Stelle $\bar{\lambda}$. Wir zeigen

im nächsten Abschnitt, daß die Berechnung dieser $n + 1$ Ableitungen wesentlich weniger Rechenarbeit erfordert als die $n + 1$ malige Anwendung des Holzer-Tolleschen Restmomentenverfahrens.

3. Die Ableitungen der Restmomentenkurve

Wir gehen von dem Gleichungssystem (1,1) und (1,2) aus.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{M_1}{c_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{M_{k+1}}{c_{k+1}} \\ k = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right\} \quad (3,1) \quad \left. \begin{array}{l} M_1 = -\bar{\lambda} \Theta_0 \varphi_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{k+1} - M_k = -\bar{\lambda} \Theta_k \varphi_k \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (3,2)$$

Durch Summation aller Gleichungen (3,2) entsteht

$$M_{n+1} = -\bar{\lambda} \sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k \quad (3,3)$$

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\varphi_k^{(\mu)} = \frac{d^\mu \varphi_k}{d\lambda^\mu} \quad ; \quad M_k^{(\mu)} = \frac{d^\mu M_k}{d\lambda^\mu} \quad (3,4)$$

Nun sei wiederum φ_0 fest vorgegeben, etwa $\varphi_0 = 1$, und werde konstant gehalten, so daß

$$\varphi_0^{(1)} = 0 \quad (3,5)$$

Wir bilden nun die erste Ableitung nach λ an der Stelle $\lambda = \bar{\lambda}$ der Gleichungssysteme (3,1) und (3,2).

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1^{(1)} = \frac{M_1^{(1)}}{c_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{k+1}^{(1)} - \varphi_k^{(1)} = \frac{M_{k+1}^{(1)}}{c_{k+1}} \\ k = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right\} \quad (3,6) \quad \left. \begin{array}{l} M_1^{(1)} = -\Theta_0 \varphi_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{k+1}^{(1)} - M_k^{(1)} = -\bar{\lambda} \Theta_k \varphi_k^{(1)} - \Theta_k \varphi_k \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (3,7)$$

Durch Summation aller Gleichungen (3,7) entsteht

$$M_{n+1}^{(1)} = -\bar{\lambda} \sum_{k=1}^n \Theta_k \varphi_k^{(1)} - \sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k \quad (3,8)$$

Bei der Bildung der zweiten Ableitungen wird zunächst

$$M_1^{(2)} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1^{(2)} = 0, \quad (3,9)$$

und dann

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_2^{(2)} = \frac{M_2^{(2)}}{c_2} \\ \dots \\ \dots \\ \varphi_{k+1}^{(2)} - \varphi_k^{(2)} = \frac{M_{k+1}^{(2)}}{c_{k+1}} \\ k = 2, 3, \dots, n-1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_2^{(2)} = -2 \Theta_1 \varphi_1^{(1)} \\ \dots \\ \dots \\ M_{k+1}^{(2)} - M_k^{(2)} = -\bar{\lambda} \Theta_k \varphi_k^{(2)} - 2 \Theta_k \varphi_k^{(1)} \\ k = 2, 3, \dots, n \end{array} \quad (3,11)$$

Durch Summation der Gleichungen (3,11) kommt

$$M_{n+1}^{(2)} = -\bar{\lambda} \sum_{k=2}^n \Theta_k \varphi_k^{(2)} - 2 \sum_{k=1}^n \Theta_k \varphi_k^{(1)} \quad (3,12)$$

Bei jedem Differentiationsschritt fällt ein Gleichungspaar fort. Bei Bildung der μ -ten Ableitung werden

$$M_{\mu-1}^{(\mu)} = 0 \text{ und } \varphi_{\mu-1}^{(\mu)} = 0 \text{ und} \quad (3,13)$$

$$M_{n+1}^{(\mu)} = -\bar{\lambda} \sum_{k=\mu}^n \Theta_k \varphi_k^{(\mu)} - \mu \sum_{k=\mu-1}^n \Theta_k \varphi_k^{(\mu-1)} \quad (3,14)$$

Der Differentiationsprozeß endet mit

$$\left. \begin{array}{l} M_{n+1}^{(n)} = -\bar{\lambda} \Theta_n \varphi_n^{(n)} - n (\Theta_{n-1} \varphi_{n-1}^{(n-1)} + \Theta_n \varphi_n^{(n-1)}) \\ M_{n+1}^{(n+1)} = - (n+1) \Theta_n \varphi_n^{(n)} \\ M_{n+1}^{(n+2)} = 0 \end{array} \right\} \quad (3,15)$$

Die Restmomentenkurve ist durch

$$M_{n+1}(\lambda) = M_{n+1}(\bar{\lambda}) + \sum_{\mu=1}^{n+1} \frac{(\lambda - \bar{\lambda})^\mu}{\mu!} M_{n+1}^{(\mu)}(\bar{\lambda}) \quad (3,16)$$

dargestellt.

Für $\bar{\lambda} = 0$ vereinfacht sich diese Darstellung zu

$$\begin{aligned} -\frac{M_{n+1}(\lambda)}{\lambda} &= \varphi_0 \sum_{k=0}^n \Theta_k + \lambda \sum_{k=1}^n \Theta_k \varphi_k^{(1)} + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{k=2}^n \Theta_k \varphi_k^{(2)} + \dots \\ &+ \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=n-1}^n \Theta_k \varphi_k^{(n-1)} + \frac{\lambda^n}{n!} \Theta_n \varphi_n^{(n)} \end{aligned} \quad (3,17)$$

4. Die rekursive Berechnung der Koeffizienten der Frequenzgleichung

Wir knüpfen an (3,17) an und schreiben die Frequenzgleichung in der Form

$$A_0 - \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 - \lambda^3 A_3 + \dots + (-1)^n \lambda^n A_n = 0 \quad (4,1)$$

Zwecks Gewinnung eines einfachen Rechenschemas, in dem nur positive Zahlen auftreten, werde gesetzt:

$$\varphi_k = \varphi_0 = \alpha^0 \quad ; \quad 1/c_k = d_k \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_k^{(\mu)}}{\mu!} = (-1)^\mu \alpha_k^{(\mu)}$$

Dann folgt, den Entwicklungen des vorstehenden Kapitels entsprechend, nacheinander:

$$\begin{array}{ll} \beta_1^{(1)} = \Theta_0 \alpha^{(0)} & \alpha_1^{(1)} = d_1 \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(1)} = \Theta_1 \alpha^{(0)} + \beta_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} = d_2 \beta_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \\ \dots & \dots \\ \beta_n^{(1)} = \Theta_{n-1} \alpha^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)} & \alpha_n^{(1)} = d_n \beta_n^{(1)} + \alpha_{n-1}^{(1)} \\ A_0 = \Theta_n \alpha^{(0)} + \beta_n^{(1)} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \beta_2^{(2)} = \Theta_1 \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(2)} = d_2 \beta_2^{(2)} \\ \beta_3^{(2)} = \Theta_2 \alpha_2^{(1)} + \beta_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} = d_3 \beta_3^{(2)} + \alpha_2^{(2)} \\ \dots & \dots \\ \beta_n^{(2)} = \Theta_{n-1} \alpha_{n-1}^{(1)} + \beta_{n-1}^{(2)} & \alpha_n^{(2)} = d_n \beta_n^{(2)} + \alpha_{n-1}^{(2)} \\ A_1 = \Theta_n \alpha_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} & \end{array}$$

usw., bis dieser Rechenprozeß abbricht. Allgemein ist für ein bestimmtes μ

$$\beta_k^{(\mu)} = \Theta_{k-1} \alpha_{k-1}^{(\mu-1)} + \beta_{k-1}^{(\mu)} \quad ; \quad \alpha_k^{(\mu)} = d_k \beta_k^{(\mu)} + \alpha_{k-1}^{(\mu)} \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots, n$$

$$A_{\mu-1} = \Theta_n \alpha_n^{(\mu-1)} + \beta_n^{(\mu)}$$

und μ selbst läuft von 1 bis $n + 1$.

Dabei ist zu beachten, daß $\alpha_k^{(\mu)} = \beta_k^{(\mu)} = 0$ für $k < \mu$.

Die Aufstellung der Frequenzgleichung (4,1) nach diesem Rechenschema erfordert $(n - 1)^2$ Additionen und, sofern mit $\alpha^{(0)} = 1$ gerechnet wird, $(n - 1) n$ Multiplikationen.

Die Berechnung eines Punktes der Restmomentenkurve nach Holzer-Tolle erfordert $3 n + 1$ Multiplikationen.

Zur Berechnung der linken Seite von (4,1) für einen gegebenen Wert λ benötigt das Horner'sche Schema $n - 1$ Multiplikationen.

Sollen nun i Punkte der Restmomentenkurve berechnet werden, so ist die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen im

$$\text{Restmomentenverfahren } (3 n + 1) i \quad (4,2)$$

$$\text{neuen Verfahren } (n - 1) n + (n - 1) i \quad (4,3)$$

Es empfiehlt sich demnach die Benutzung des neuen Verfahrens, wenn

$$(3n + 1)i > (n - 1)(n + i)$$

oder

$$i > \frac{(n - 1)n}{2(n + 1)} \quad (4,4)$$

Wir verändern diese Ungleichung zu Ungunsten des neuen Verfahrens, wenn wir die rechte Seite vergrößern und

$$i > \frac{n + 1}{2} \quad (4,5)$$

schreiben. Also immer dann, wenn die Anzahl der zu berechnenden Punkte der Restmomentenkurve größer ist als die Hälfte der Drehmassen des Wellensystems, ist unser neues Verfahren dem Restmomentenverfahren von Holzer-Tolle überlegen. Diese Bedingung ist praktisch immer erfüllt. Die Vorteile aber, die das Horner'sche Schema bei einer zielbewußten Berechnung der Nullstellen von (4,1) bietet, sind im obigen Vergleich noch gar nicht einkalkuliert.

Hat man beispielsweise ein System von 6 Massen ($n = 5$) zu berechnen und interessiert sich nur für die drei unteren Eigenfrequenzen, so wird man sicherlich 10 Punkte ($i = 10$) der Restmomentenkurve benötigen. Die Anzahl der Multiplikationen nach Holzer-Tolle beträgt 160, nach dem neuen Verfahren jedoch nur 60.

Allgemein verhält sich der Rechenaufwand nach Holzer-Tolle zu dem des neuen Verfahrens grob wie

$$3i : n + i \quad (4,6)$$

Die hierin steckende Abrundung kommt dem Restmomentenverfahren zugute.

5. Restmoment und Rayleigh'scher Quotient

Wir kehren noch einmal zu den Gleichungssystemen (1,1) und (1,2) des üblichen Restmomentenverfahrens zurück. Für ein fest gewähltes φ_0 und vorgegebenes λ seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ und M_{n+1} berechnet worden. Wir multiplizieren jetzt die Gleichungen (1,2) der Reihe nach mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ und erhalten:

$$M_{n+1} \varphi_n + \lambda \sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2 = \sum_{k=1}^n M_k (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \quad (5,1)$$

Mit Hilfe von (1,1) ergibt sich ferner:

$$\sum_{k=1}^n M_k (\varphi_k - \varphi_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c_k (\varphi_n - \varphi_{k-1})^2 \quad (5,2)$$

$$\lambda_R = \frac{\sum_{k=1}^n c_k (\Phi_k - \Phi_{k-1})^2}{\sum_{k=0}^n \Theta_k \Phi_k^2} \quad (5,3)$$

ist der Rayleigh'sche Quotient (abgekürzt R.-Q.) des hier betrachteten mechanischen Schwingungssystems. Er hat bekanntlich folgende Eigen-

schaften: λ_R , als Funktion der $n + 1$ Werte Φ_k betrachtet, wird stationär dann und nur dann, wenn die Φ_k eine Eigenschwingungsform des Systems bilden. Das Maximum von λ_R wird erreicht für die Eigenschwingungsform höchster, das Minimum für die Eigenschwingungsform niedrigster Ordnung.

Für die Eigenschwingungsform $\varphi_{\nu,k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) irgendeiner Ordnung ν ist nach (1,1) und (1,2) $\lambda = \lambda_\nu = \omega_\nu^2$ und $M_{n+1} = 0$. Aus (5,1) und (5,2) folgt dann

$$\lambda_\nu = \frac{\sum_{k=1}^n c_k (\varphi_{\nu,k} - \varphi_{\nu,k-1})^2}{\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_{\nu,k}^2} \quad (5,4)$$

Die stationären Werte des R.-Q. sind demnach die $n + 1$ Eigenwerte $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Mechanisch besagt (5,4), daß der Scheitelwert der kinetischen Energie einer Eigenschwingungsform gleich ist dem Scheitelwert der zugehörigen Verformungsenergie.

Wir untersuchen nun den R.-Q. (5,3) für den Fall, in dem rechts für Φ_k diejenigen φ_k eingesetzt werden, die für irgendein λ nach dem Restmomentenverfahren berechnet worden sind. Wenn φ_0 für alle λ einen festen Wert hat, wird λ_R eine Funktion des Parameters λ , die für $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ stationär ist, ihr Maximum für $\lambda = \lambda_n$ und ihr Minimum für $\lambda = 0$ annimmt. Der R.-Q. lautet jetzt

$$\lambda_R = \frac{\sum_{k=1}^n c_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2}{\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2 + M_{n+1} \varphi_n}{\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2} \quad (5,5)$$

wobei der Zähler mit Hilfe von (5,1) und (5,2) umgeformt worden ist, also

$$\lambda_R = \lambda + \frac{M_{n+1} \varphi_n}{\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2} \quad (5,6)$$

Das Restmoment M_{n+1} und die φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sind Funktionen von λ .

Wir zitieren Klotter [1] (wobei wir uns einige Bezeichnungsänderungen erlauben):

„Ein Vorschlag von F. Söchting geht ferner noch dahin, zunächst nach dem Restmomentenverfahren mit einem angenommenen Wert von λ die Ausschläge φ_k zu bestimmen, die Aufzeichnung der Restmomentenkurve aber dadurch zu umgehen, daß man (nach Rayleigh) aus den ‚angenäherten‘ Werten φ_k mit Hilfe des R.-Q. einen neuen Wert $\lambda_R = \bar{\lambda}$ ausrechnet; er liegt dem wahren näher. Mit diesem Wert $\bar{\lambda}$ werden dann neue Ausschläge $\bar{\varphi}_k$ errechnet, aus ihnen ein weiterer Wert $\lambda_R = \bar{\bar{\lambda}}$ und so fort, bis keine Änderung der Frequenz mehr eintritt.

Über die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens wird in der Arbeit von Söchting nichts gesagt. Hinsichtlich der Grundfrequenz ist die Konvergenz

anderweitig festgestellt; für die höheren Frequenzen scheint sie nicht in jedem Fall gesichert zu sein.“

Die hier von Klotter aufgeworfene Frage der Konvergenz kann nun mit Hilfe der Darstellung (5,6) des R.-Q. beantwortet werden.

Wir erinnern zunächst an den Zusammenhang (2,3) zwischen Restmoment und Frequenzdeterminante. Eine entsprechende Darstellung für φ_n gewinnt man aus (2,1), indem man dort die letzte Gleichung fortläßt und φ_n nach der Cramerschen Regel bestimmt:

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{\varphi_0 D_n(\lambda)}{(-1)^n c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n} \quad (5,7)$$

$D_n(\lambda)$ ist diejenige Hauptunterdeterminante von $D_{n+1}(\lambda)$ (vgl. 2,2), die durch Streichung der letzten Zeile und Spalte entsteht. Die Nullstellen von $D_n(\lambda)$ bzw. $\varphi_n(\lambda)$ sind Eigenfrequenzen unserer Welle, wenn die rechte Drehmasse Θ_n festgehalten wird. Sie mögen mit λ_0^* , λ_1^* , ..., λ_{n-1}^* bezeichnet werden.

Es folgt jetzt eine Zwischenrechnung, die der Diskussion des Kurvenverlaufs $\lambda_R(\lambda)$ nach (5,6) dient. Wir bilden zunächst die Ableitung

$$\frac{d\lambda_R}{d\lambda} = 1 + \frac{M_{n+1}^{(1)}\varphi_n + M_{n+1}\varphi_n^{(1)}}{\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2} + M_{n+1}\varphi_n \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2} \right) \quad (5,8)$$

Nach (3,7) ist

$$\sum_{k=0}^n (M_{k+1}^{(1)} - M_k^{(1)}) \varphi_k = -\lambda \sum_{k=1}^n \Theta_k \varphi_k \varphi_k^{(1)} - \sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2 \quad (5,9)$$

und nach (3,2)

$$\sum_{k=0}^n (M_{k+1} - M_k) \varphi_k^{(1)} = -\lambda \sum_{k=1}^n \Theta_k \varphi_k \varphi_k^{(1)} \quad (5,10)$$

wobei zu beachten ist, daß $M_0 = M_0^{(1)} = \varphi_0^{(1)} = 0$. (5,9) wird von (5,10) subtrahiert, anschließend wird eine partielle Summation vorgenommen:

$$\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2 = \sum_{k=1}^n M_k^{(1)} (\varphi_k - \varphi_{k-1}) - \sum_{k=1}^n M_k (\varphi_k^{(1)} - \varphi_{k-1}^{(1)}) + M_{n+1} \varphi_n^{(1)} - M_{n-1}^{(1)} \varphi_n \quad (5,11)$$

Mit Hilfe von (3,1) und 3,6) erkennt man, daß sich die beiden Summen rechts in (5,11) wegheben, so daß schließlich

$$\sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2 = M_{n+1} \varphi_n^{(1)} - M_{n-1}^{(1)} \varphi_n \quad (5,12)$$

wird. Jetzt können die Ableitungen von λ_R nach λ an den Stellen $M_{n+1} = 0$ und $\varphi_n = 0$ bestimmt werden. Man erhält

$$\text{a) für } M_{n+1} = 0: \quad \lambda_R = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \quad \frac{d\lambda_R}{d\lambda} = 0 \quad (5,13)$$

Dieses Ergebnis mußte auf Grund der Extremaleigenschaften des R.-Q. erwartet werden.

$$b) \text{ für } \varphi_n = 0; \lambda = \lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n-1}^* \quad \frac{d \lambda_R}{d \lambda} = 2 \quad (5,14)$$

Wir berechnen noch den Wert λ_R für $\lambda \rightarrow \infty$. Dazu bemerken wir, daß die φ_k des Restmomentenverfahrens, weil $\varphi_k^{(\mu)} = 0$ für $\mu > k$, ganze rationale Funktionen vom Grade k in λ sind. Für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt deshalb

$$\sum_{k=1}^n c_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 \longrightarrow c_n \left(\frac{\lambda^n}{n!} \varphi_n^{(n)} \right)^2 \quad \sum_{k=0}^n \Theta_k \varphi_k^2 \longrightarrow \Theta_n \left(\frac{\lambda^n}{n!} \varphi_n^{(n)} \right)^2,$$

so daß

$$\lambda_R \longrightarrow \frac{c_n}{\Theta_n} \quad (5,15)$$

Da die Eigenschwingung höchster Ordnung immer einen Knoten zwischen Θ_{n-1} und Θ_n besitzt, ist ihr Eigenwert λ_n immer größer als c_n/Θ_n .

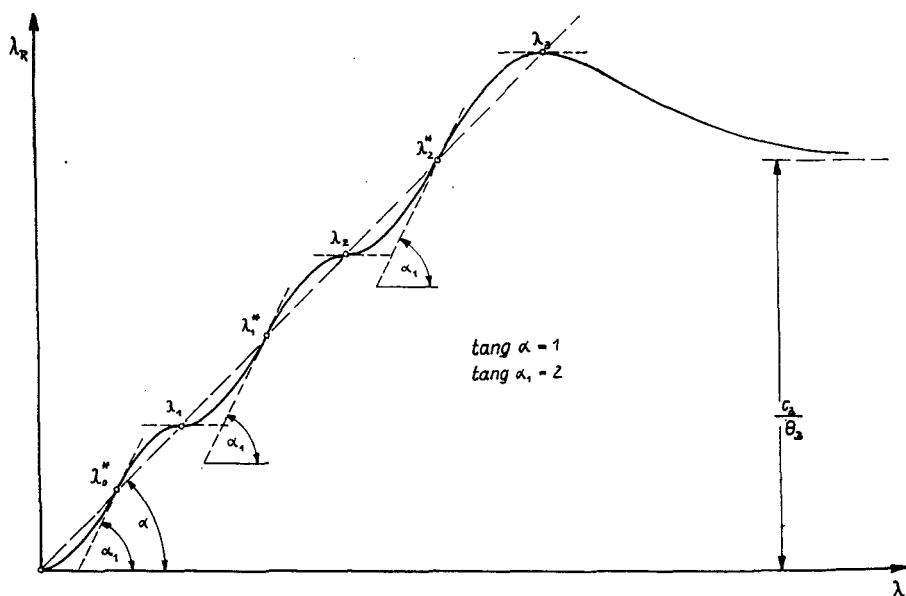


Abb. 2. Der Rayleighsche Quotient λ_R
in Abhängigkeit von dem beim Restmomentenverfahren gewählten $\lambda = \omega^2$

In Abb. 2 ist der charakteristische Verlauf von λ_R über λ für das Beispiel $n = 3$ (4 Drehmassen) aufgezeichnet. Da der R.-Q. nur an den Stellen $\lambda_0 = 0$, λ_1 , λ_2 und λ_3 stationär ist, verläuft die Kurve ständig steigend bis zu ihrem Maximum $\lambda_R = \lambda_3$ an der Stelle $\lambda = \lambda_3$ und strebt dann, ständig fallend, für große λ dem Werte c_3/Θ_3 zu.

Die von Klotter aufgeworfene Frage nach der Konvergenz des Iterationsverfahrens von Söchting läßt sich nun sehr rasch beantworten. Abb. 3, ein Ausschnitt aus Abb. 2, zeigt die Reihe der bei einer Iteration durchlaufenen λ -Werte. Man erkennt, daß die Iteration immer monoton zu einem Eigenwerte hin konvergiert. Liegt der Anfangswert λ der Iteration zwischen $\lambda_{\nu-1}$ und λ_{ν} , so wird entweder $\lambda_{\nu-1}$ von oben oder λ_{ν} von unten approximiert, je nachdem der gewählte Anfangswert λ unter- bzw. oberhalb des zwischen $\lambda_{\nu-1}$ und λ_{ν} liegenden Eigenwertes $\lambda_{\nu-1}^*$ der rechts in Θ_n festgehaltenen Welle liegt.

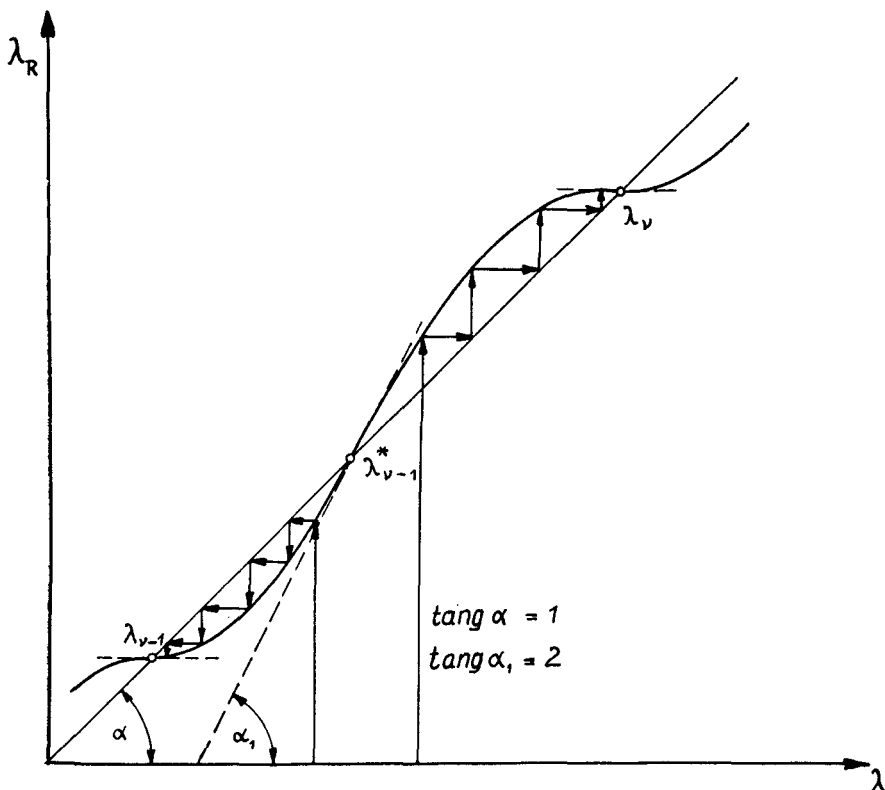


Abb. 3. Die Konvergenz der Söchting'schen Iteration

Die durchaus verständlichen Klotter'schen Bedenken, daß die Konvergenz der von Söchting vorgeschlagenen Iteration nicht in jedem Falle für die höheren Frequenzen gesichert sei, sind durch obigen Konvergenzbeweis zerstreut worden.

Zusammenfassung

Es werden Vorschläge gebracht und Untersuchungen angestellt, wie das bekannte Restmomentenverfahren von Holzer-Tolle zielstrebig gemacht werden kann. Ein einfaches, Rechnung sparendes Verfahren zur rekursiven

254 Hermann Schaefer, Das Restmoment der Torsionsschwingungen usw.

Berechnung der Koeffizienten des Restmomentenpolynoms wird angegeben und der Konvergenzbeweis erbracht für eine iterative Ermittlung der Eigenfrequenzen mit Hilfe des Rayleighschen Quotienten.

Literatur

- [1] Klotter, K.: Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen. Ing.-Arch. XVII. Band (1949), S. 1 bis 60.