Landeswettbewerb Mathematik 2005/2006
Bayern
Lösungsvorschläge für die
Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1

Eine natürliche Zahl besteht aus paarweise verschiedenen Ziffern, von denen keine Null ist. Streicht man in dieser Zahl eine beliebige Ziffer k, so ist die neu entstandene Zahl durch k teilbar.

Bestimme die größte Zahl mit dieser Eigenschaft.

Lösung:

Die Zahl 9721368 erfüllt alle Teilbarkeitsbedingungen der Aufgabe:
1 teilt 972368.
2 teilt 971368, da die Endziffer 8 gerade ist.
3 teilt 972168, da die Quersumme 33 durch 3 teilbar ist.
6 teilt 972138, da die Zahl gerade ist und die Quersumme 30 durch 3 teilbar ist.
7 teilt 921368, da $921368 = 7 \cdot 131624$.
8 teilt 972136, da für die Zahl aus den letzten drei Ziffern gilt: $136 = 8 \cdot 17$.
9 teilt 721368, da die Quersumme 27 durch 9 teilbar ist.

Es wird nun gezeigt, dass es keine Zahl N gibt, die größer als 9721368 ist und zugleich die geforderten Eigenschaften besitzt.

Im Folgenden ist N(k) die Zahl, die entsteht, wenn man aus der Zahl N die Ziffer k streicht.

Da die Ziffer 0 nicht verwendet werden darf, kann auch die Ziffer 5 nicht in der Darstellung von N auftreten, da nach dem Streichen der Ziffer 5 die Zahl N(5) nicht durch 5 teilbar sein kann, denn sie müsste entweder mit der Ziffer 0 oder mit der Ziffer 5 enden.

Die Zahl N kann nicht aus allen verbleibenden acht Ziffern bestehen, denn die Quersumme von N(9) wäre dann $1+2+3+4+6+7+8 = 31$, so dass N(9) nicht durch 9 teilbar sein kann.
N kann also höchstens sieben Stellen besitzen. Streicht man eine dieser Ziffern, so ergibt sich nur im Fall des Streichens von 4 eine Quersumme, die durch 9 teilbar ist, nämlich 27.

Eine siebenstellige Zahl mit den geforderten Eigenschaften kann also nur aus den Ziffern 1, 2, 3, 6, 7, 8 und 9 bestehen.

Die letzte Ziffer von N kann nicht ungerade sein, denn beim Streichen jeder der drei geraden Ziffern k muss N(k) gerade sein.
Streicht man diese letzte Ziffer, so erkennt man, dass aus dem gleichen Grund die vorletzte Ziffer gerade sein muss.

Damit kommen nur die Endziffernkombinationen 26, 28, 62, 68, 82 und 86 in Frage.

Die Zahl N(8) muss auch durch 4 teilbar sein. Aus diesem Grund kommen sowohl die Endziffernkombination 26 als auch 62 nicht in Frage, da diese Zahlen nicht durch 4 teilbar sind, was sie nach der bekannten Teilbarkeitsregel für 4 sein müssten.
Es bleiben also die vier Fälle 28, 68, 82 und 86 zu betrachten.

In allen vier Fällen endet N(8) auf Ziffer 2 oder auf Ziffer 6. Aus der Teilbarkeit von N(8) durch 8 und damit auch durch 4 folgt, dass die drittletzte Ziffer von N ungerade sein muss, denn: Nur die zweistelligen Zahlen 12,32,52, 72 und 92 bzw. 16, 36, 56, 76 und 96 sind durch 4 teilbar und enden mit der Einerziffer 2 bzw. 6.

Da nach dem Gezeigten 8 an der Einer- oder Zehnerstelle steht, müsste eine Zahl größer als 9721368, die die angegebenen Bedingungen erfüllt, auch mit der Ziffernkombination 97 beginnen. Untersucht man die vier Fälle der möglichen Endziffernkombinationen 28, 68,82 und 86 systematisch, so sind pro Fall nur noch vier Zahlen zu betrachten, denn in jedem dieser vier Fälle bleiben für die drei mittleren Stellen drei Ziffern. Dabei muss die drittletzte Ziffer von N ungerade sein.

Endziffernkombination 28 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 6, 3 und 1.)
9763128: N(7) = 963128 = 137589 · 7 + 5 ist nicht durch 7 teilbar.
9761328: N(7) = 961328 = 137332 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9736128: N(7) = 936128 = 133732 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9716328 ist kleiner als 9721328
(Bemerkung: 9716328 erfüllt auch die gestellten Bedingungen.)

Endziffernkombination 68 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 3, 2 und 1.)
9732168: N(7) = 932168 = 133166 · 7 + 6 ist nicht durch 7 teilbar.
9723168: N(7) = 923168 = 131881 · 7 + 1 ist nicht durch 7 teilbar.
9721368: erfüllt alle Eigenschaften (siehe oben).
9712368 ist kleiner als 9721368.

Endziffernkombination 82 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 6, 3 und 1.)
9763182: N(7) = 963182 = 137597 · 7 + 3 ist nicht durch 7 teilbar.
9761382: N(7) = 961382 = 137340 · 7 + 2 ist nicht durch 7 teilbar.
9736182: N(7) = 936182 = 133740 · 7 + 2 ist nicht durch 7 teilbar.
9716382 ist kleiner als 9721368.

Endziffernkombination 86 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 3, 2 und 1.)
9732186: N(7) = 932186 = 133169 · 7 + 3 ist nicht durch 7 teilbar.
9723186: N(7) = 923186 = 131883 · 7 + 5 ist nicht durch 7 teilbar.
9721386: N(7) = 921386 = 131626 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9712386 ist kleiner als 9721368.

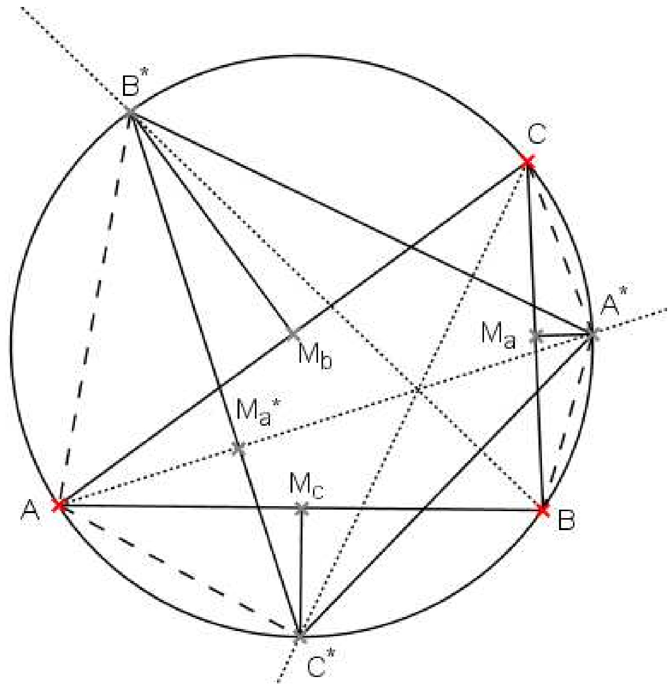
Da alle Fälle vollständig behandelt wurden, ist gezeigt, dass 9721368 die größte Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist.

Aufgabe 2

In den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks ABC werden die Lote auf die Seiten nach außen errichtet. Diese schneiden den Umkreis des Dreiecks ABC in den Punkten A^*, B^* und C^*.

Zeige, dass der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A^*B^*C^*$ zugleich der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist.

1. Lösungsmöglichkeit:



Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten [BC], [AC] und [AB] werden mit M_a, M_b und M_c bezeichnet.

Zunächst wird gezeigt, dass AA^*, BB^* und CC^* die Innenwinkelhalbierenden von ΔABC sind; ihr Schnittpunkt ist demnach der Mittelpunkt des Inkreises von ΔABC.

M_aA^* ist die Mittelsenkrechte von [BC].

$\Rightarrow \quad \overline{BA^*} = \overline{CA^*}$

$\Rightarrow \quad \angle BAA^* = \angle A^*AC$ (Umfangswinkelsatz)

$\Rightarrow \quad \angle A^*AC = \dfrac{\alpha}{2}$

Analog:

$\angle CBB^* = \dfrac{\beta}{2}$ und $\angle ACC^* = \dfrac{\gamma}{2}$

Nun wird bewiesen, dass AA^*, BB^* und CC^* auch senkrecht auf den Seiten von $\Delta A^*B^*C^*$ stehen; ihr Schnittpunkt ist demnach der Höhenschnittpunkt von $\Delta A^*B^*C^*$.

Fasskreisbogen über $[CB^*]$ liefert: $\angle CAB^* = \angle CBB^* = \dfrac{\beta}{2}$

Fasskreisbogen über $[AC^*]$ liefert: $\angle AB^*C^* = \angle ACC^* = \dfrac{\gamma}{2}$

Mit $\{M_a^*\} = AA^* \cap B^*C^*$ gilt in Dreieck $AM_a^*B^*$:

$$\begin{aligned}\angle B^*M_a^*A &= 180^o - \angle A^*AB^* - \angle AB^*C^*\\ &= \angle 180^o - \angle A^*AC - \angle CAB^* - \angle AB^*C^*\\ &= 180^o - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = 180^o - \frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta+\gamma) = 180^0 - 90^o = 90^o\end{aligned}$$

Daraus folgt: $AA^* \perp B^*C^*$

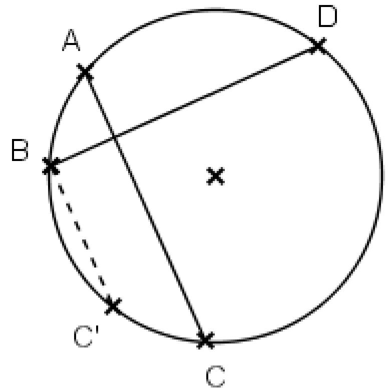
Analog: $BB^* \perp A^*C^*$ und $CC^* \perp A^*B^*$

2. Lösungsmöglichkeit:

Sind X und Y zwei Kreispunkte, so wird im Folgenden mit b(XY) die Länge des Kreisbogens von X nach Y in mathematisch positiver Drehrichtung bezeichnet.

Vorbemerkung:

Gegeben sind zwei Sehnen [AC] und [BD] eines Kreises mit Umfang u.
Ist b(DA) + b(BC) = u:2, so sind die Strecken [AC] und [BD] orthogonal.

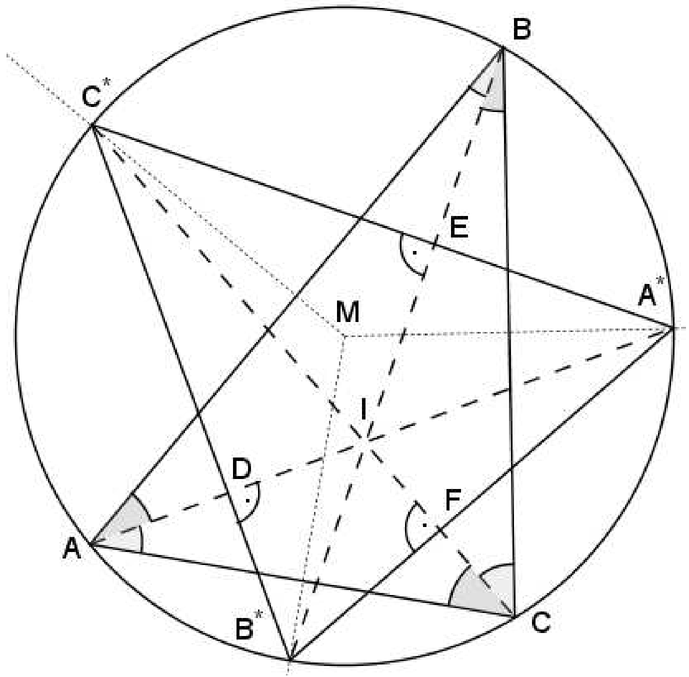


Begründung:

Die Parallele zu AC durch B schneidet den Kreis in dem weiteren Punkt C'.
Bei Spiegelung an der Mittelsenkrechten von [AC] wird A auf C und B auf C' abgebildet.
$\Rightarrow$ b(AB) = b(C'C) $\Rightarrow$ b(AC') = b(BC)

Da nach Voraussetzung b(DA) + b(BC) = u:2 ist, folgt: b(DA) + b(AC') = u:2,
d. h. die Sehne [DC'] ist Durchmesser des Kreises.
Nach dem Satz von Thales sind demnach BD und BC' orthogonal.
Da BC' und AC parallel sind, sind auch die Strecken [AC] und [BD] orthogonal.

Beweis:



Da A^* auf der Mittelsenkrechten von [BC] liegt, gilt:

(1) $b(CA^*) = b(A^*B)$,
analog: $b(BC^*) = b(C^*A)$ und
$b(AB^*) = b(B^*C)$
$\Rightarrow$ $b(B^*A^*) + b(C^*A) =$
$b(B^*C) + b(CA^*) + b(C^*A)$
$b(C^*A) + b(A^*B) + b(B^*C) = u:2$
Nach Vorbemerkung steht demnach $[AA^*]$ senkrecht auf $[B^*C^*]$.
Somit ist $[DA^*]$, wobei $AA^* \cap B^*C^* = \{D\}$, Höhe in $\Delta A^*B^*C^*$.

Analog sind $[EB^*]$ und $[FC^*]$ die weiteren Höhen in $\Delta A^*B^*C^*$, wobei $BB^* \cap A^*C^* = \{E\}$ und $CC^* \cap A^*B^* = \{F\}$.

Der Höhenschnittpunkt von $\Delta A^*B^*C^*$ ist also der gemeinsame Schnittpunkt von AA^*, BB^* und CC^*.

(2) $\overline{A^*B} = \overline{A^*C}$

Demnach gilt nach dem Umfangswinkelsatz: $\angle CAA^* = \angle A^*AB$.
Daraus folgt: AA^* ist Winkelhalbierende von $\angle CAB$.
Analog: BB^* ist Winkelhalbierende von $\angle ABC$ und CC^* ist Winkelhalbierende von $\angle BCA$.

Somit ist der Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden von ΔABC ebenfalls der Schnittpunkt von AA^*, BB^* und CC^*.

Der Inkreismittelpunkt von ΔABC ist also der Höhenschnittpunkt von $\Delta A^*B^*C^*$.

Aufgabe 3

Nach folgendem Verfahren werden Zahlenketten gebildet:
(V1) Die erste Zahl ist eine natürliche Zahl größer als 1.
(V2) Ist eine Zahl gerade, so ist die nächste Zahl halb so groß.
(V3) Ist eine Zahl ungerade und größer als 1, so ist die nächste Zahl um 1 kleiner.
(V4) Die Kette endet mit dem Erreichen der Zahl 1.

(Beispiele: 20 / 10 / 5 / 4 / 2 / 1 oder 19 / 18 / 9 / 8 / 4 / 2 / 1)

Bestimme zu gegebenem n > 1 die größte und die kleinste Anfangszahl, die zu einer Kette mit n Gliedern führt.

1. Lösungsmöglichkeit:

Die folgenden Operationen bewirken eine Umkehrung der Kettenbildung:
(V1*) Das erste Glied der Kette ist 1.
(V2*) Ist ein Kettenglied ungerade, so erhält man das nächste Kettenglied durch Multiplikation mit 2.
(V3*) Ist ein Kettenglied gerade, so kann das nächste Glied entweder durch Multiplikation mit 2 oder durch Addition von 1 erhalten werden.

Wir betrachten nun Ketten (1 / 2 / a_3 / … / a_n), die durch diese Operationen gebildet werden können.

Teil 1:
Bestimmung der größten Zahl $a_{n,max}$, die durch eine Kette der Länge n erreicht werden kann:

(1) Für a_m (1 < m < n) gilt:
$a_m > 1 \Rightarrow 2\cdot a_m - (a_m + 1) = a_m - 1 > 0 \Rightarrow 2\cdot a_m > a_m + 1$
$\Rightarrow$ Die Multiplikation mit 2 führt zu einem größeren Folgeglied als die Addition mit 1.
(2) Für die Bildung einer Kette der Länge n sind (n-1) Rechenoperationen notwendig.

Daraus folgt: $a_{n,max} = 2^{n-1}$.

Teil 2:
Bestimmung der kleinsten Zahl $a_{n,min}$, die durch eine Kette der Länge n erreicht werden kann:

Vorbemerkung: Ist 1 < m < n, so gilt:
- Ist $a_{m,min}$ ungerade, so ist $a_{m+1,min} = 2\cdot a_{m,min}$ gerade und $a_{m+1,min} + 1 < 2\cdot a_{m+1,min}$
  $\Rightarrow a_{m+2,min} = 2\cdot a_{m,min} + 1$
- Ist $a_{m,min}$ gerade, so ist $2\cdot a_{m,min} + 1 < 2\cdot(a_{m,min} + 1) < 2\cdot 2\cdot a_{m,min}$
  $\Rightarrow a_{m+2,min} = 2\cdot a_{m,min} + 1$

Behauptung 1: Ist n ungerade, so gilt: $a_{n,min} = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsbeginn: $a_{1,min} = 2^{\frac{1+1}{2}} - 1 = 2^1 - 1 = 1 = a_1$

Induktionsannahme: $a_{n,min} = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$

Induktionsschluss: $a_{n+2,min} = 2\cdot a_{n,min} + 1 = 2\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}} - 1\right) + 1 = 2^{\frac{n+1}{2}+1} - 2 + 1 = 2^{\frac{(n+2)+1}{2}} - 1$

Behauptung 2: Ist n gerade, so ist $a_{n,min} = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsbeginn: $a_{2,min} = 3 \cdot 2^{\frac{2}{2}-1} - 1 = 3 \cdot 2^0 - 1 = 3 - 1 = 2 = a_2$

Induktionsannahme: $a_{n,min} = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1$

Induktionsschluss: $a_{n+2,min} = 2 \cdot a_{n,min} + 1 = 2 \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1\right) + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1+1} - 2 + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n+2}{2}-1} - 1$

Alternative Beweismöglichkeit zu den Behauptungen 1 und 2 unter Verwendung von Dualzahlen:

Die Rechenoperation „mal 2 plus 1“, angewandt auf eine Dualzahl, gewirkt, dass an diese rechts eine 1 geschrieben wird.

Für n ungerade, d. h. es existiert ein $k \in$ N mit $n = 2 \cdot k - 1$, gilt:
Startet man mit $a_1 = 1 = (1)_2$, so liefert $a_{n+2,min} = 2 \cdot a_{n,min} + 1$ Dualzahlen mit lauter Ziffern 1.

Folglich ist: $a_{n,min} = \left(\underbrace{1...1}_{k \text{ Ziffern } 1}\right)_2 = 2^k - 1 = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1.$

Für n gerade, d. h. es existiert ein $k \in$ N mit $n = 2 \cdot k$, gilt:
Startet man mit $a_2 = 2 = (10)_2$, so liefert $a_{n+2,min} = 2 \cdot a_{n,min} + 1$ Dualzahlen der Form $(101\ldots1)_2$.

Folglich ist: $a_{n,min} = \left(10\ \underbrace{1...1}_{k-1 \text{ Ziffern } 1}\right)_2 = (2^{k+1} - 1) - 2^{k-1} = 4 \cdot 2^{k-1} - 1 - 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1} - 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1$

Aufgabe 4

Auf einem Kreis liegen die Punkte A, B und C mit $\angle BAC < 90^o$.
Es gibt Kreispunkte P, für die der Thaleskreis über [AP] die Halbgeraden [AB und [AC in A und in je einem weiteren Punkt schneidet. Diese Schnittpunkte werden mit S bzw. T bezeichnet.

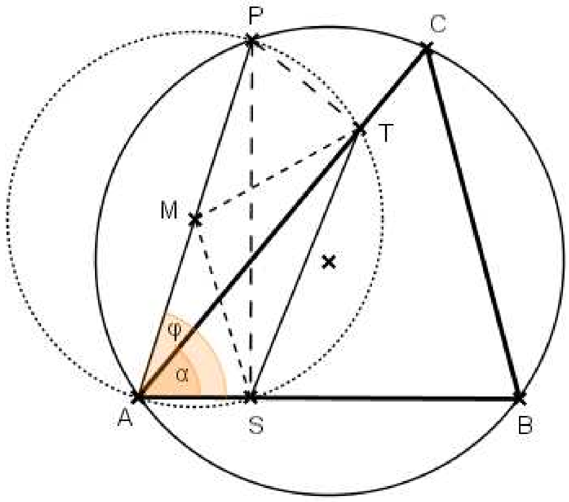
Für welchen dieser Kreispunkte P hat die Strecke [ST] maximale Länge?

Lösung:

Die Strecke [ST] hat genau dann maximale Länge, wenn [AP] Kreisdurchmesser ist.

1. Lösungsmöglichkeit:

Bezeichnungen: $\angle BAC = \alpha$ und
$\angle BAP = \varphi$ (Fall 1 und 2) bzw. $\angle PAB = \varphi$ (Fall 3)



Fall 1: P liegt auf dem Kreisbogen über [AC], auf dem B nicht liegt, d.h. α ≤ φ.

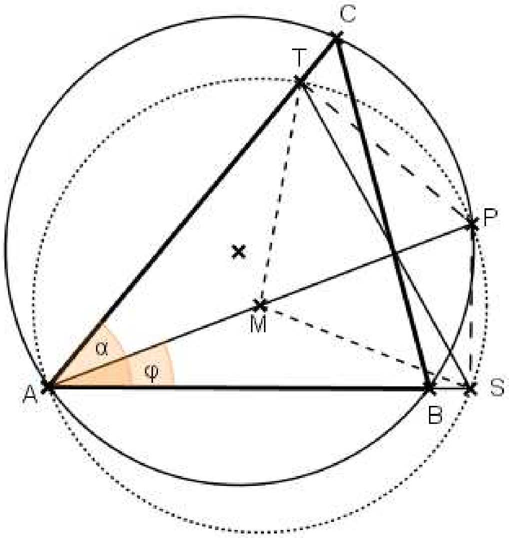
Da $\overline{MA} = \overline{MS} \Rightarrow \angle AMS = 180^o - 2 \cdot \varphi$ (1)

Da S, T $\in$ Thaleskreis über [AP]
$\Rightarrow PS \perp AB \wedge PT \perp AC$
$\Rightarrow \angle SPT = \alpha \wedge \angle APS = 90^o - \varphi$
$\Rightarrow \angle APT = \angle APS + \angle SPT = 90^o - \varphi + \alpha$

Da $\overline{MP} = \overline{MT} \Rightarrow$
$\angle TMP = 180^o - 2(90^o - \varphi + \alpha) = 2\varphi - 2\alpha$ (2)

Aus (1) und (2) folgt:
$\angle SMT = 180^o - (\angle AMS + \angle TMP) = 180^o - (180^o - 2\varphi + 2\varphi - 2\alpha) = 2\alpha$

Fall 2: P liegt auf dem Kreisbogen über [BC], auf dem A nicht liegt, d.h. 0 ≤ φ ≤ α



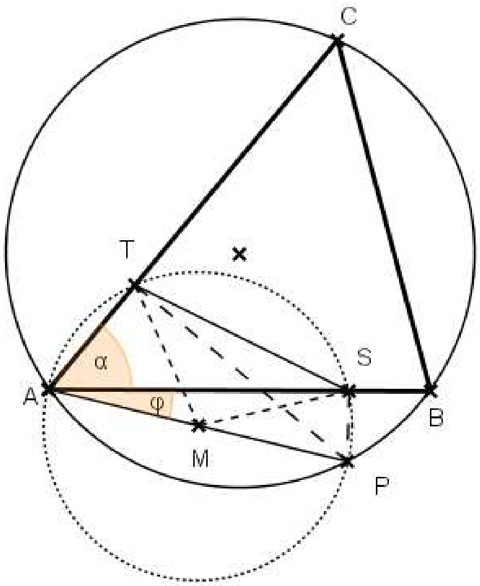
Da $\overline{MA} = \overline{MS}$
$\Rightarrow \angle AMS = 180^o - 2 \cdot \varphi \Rightarrow \angle SMP = 2 \cdot \varphi$ (1)

Da S und T auf dem Thaleskreis über [AP] liegen, gilt:
$\angle TPS = 180^0 - \alpha \wedge \angle APS = 90^0 - \varphi$
$\Rightarrow \angle TPA = \angle TPS - \angle APS =$
$180^0 - \alpha - (90^0 - \varphi) = 90^0 - \alpha + \varphi$

Da $\overline{MP} = \overline{MT}$
$\Rightarrow \angle PMT = 180^0 - 2(90^0 - \alpha + \varphi) = 2\alpha - 2\varphi$ (2)

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \angle SMT = \angle SMP + \angle PMT = 2\varphi + 2\alpha - 2\varphi = 2\alpha$

Fall 3: P liegt auf dem Kreisbogen über [AB], auf dem C nicht liegt.



Da $\overline{MA} = \overline{MT} \Rightarrow \angle TMA = 180^0 - 2(\alpha + \varphi)$ (1)

Da S auf dem Thaleskreis über [AP] liegt, gilt: $\angle SPA = 90^0 - \varphi$.

Da $\overline{MS} = \overline{MT} \Rightarrow \angle PMS = 2(90^0 - \varphi) = 2\varphi$ (2)

$(1) \wedge (2) \Rightarrow$

$\angle SMT = 180^0 - (\angle TMA + \angle PMS)$

$= 180^0 - (180^0 - 2\alpha - 2\varphi + 2\alpha) = 2\alpha$

Zusammenfassung:
Aus den Fällen 1-3 folgt:

ΔSMT ist gleichschenklig mit dem festen Winkel 2α an der Spitze.

$\Rightarrow$ $\overline{ST}$ ist genau dann maximal, wenn $\overline{SM} = \overline{TM} = 0.5 \cdot \overline{AP}$ maximal ist.
Die Sehne [AP] des Umkreises von ΔABC hat genau dann maximale Länge, wenn [AP] Durchmesser dieses Kreises ist.

2. Lösungsmöglichkeit:

Vorbemerkung:

Der Umfangswinkelsatz wird üblicherweise folgendermaßen formuliert:
Ausgehend von einer festen Sehne [BC] hat bei jeder Lage eines dritten Punktes A auf einem Kreisbogen über [BC] der Winkel $\angle BAC$ die gleiche Größe.

Damit gilt aber auch:
Ist A ein fester Kreispunkt und α eine feste Winkelgröße, so gilt für alle Kreispunkte B und C, für die die Winkel $\angle BAC$ die Größe α haben, dass alle Sehnen [BC] eine feste Länge s haben.

Zusammen mit den Eigenschaften der zentrischen Streckung folgt, dass die Länge s dieser Sehnen bei konstantem α proportional zur Länge d des Kreisdurchmessers ist; d. h. es gibt eine Konstante k(α), so dass gilt: s = d·k(α).

Beweis:

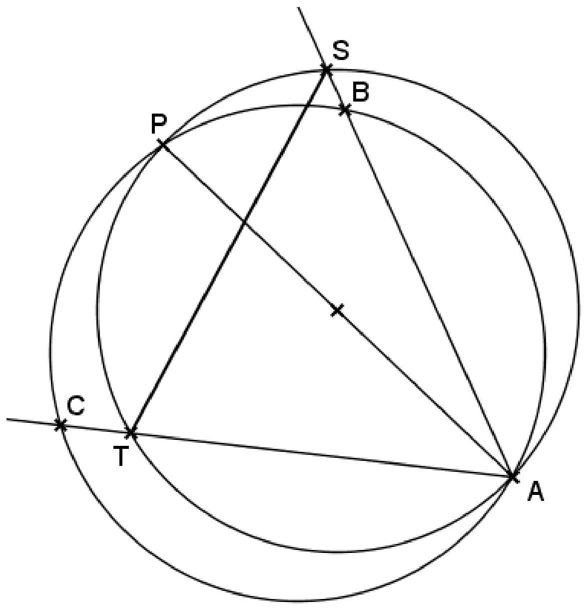
Der Durchmesser des gegebenen Kreises wird mit d bezeichnet.

Nach Konstruktion ist S∈ [AB und T∈ [AC, also ist: $\angle SAT = \angle BAC$. Der Winkel $\angle SAT$ hat also unabhängig von der Lage von P stets die gleiche Größe.

Da A, S und T auf dem Thaleskreis über [AP] liegen, schneiden – nach der obigen Vorbemerkung – die Schenkel des Winkels $\angle SAT$ aus dem Thaleskreis eine Sehne – nämlich [ST] – aus, deren Länge proportional zum Durchmesser des Thaleskreises ist; d. h. es ist $\overline{ST} = k \cdot \overline{AP}$ für eine geeignete positive konstante, insbesondere von der Lage von P unabhängige Zahl k.

Es ist also $\overline{ST}$ genau dann maximal, wenn P so liegt, dass $\overline{AP}$ maximal bei gleichzeitiger Existenz von S und T ist.

Die maximale Länge von [AP] ist d.
Falls $\overline{AP} = d$, d. h. [AP] Durchmesser des Ausgangskreises ist, fällt der Thaleskreis über [AP] mit dem vorgegebenen Kreis zusammen, also S mit B und T mit C.
Insbesondere existieren S und T bei dieser Lage von P.
Damit ist die Behauptung bewiesen.



3. Lösungsmöglichkeit:

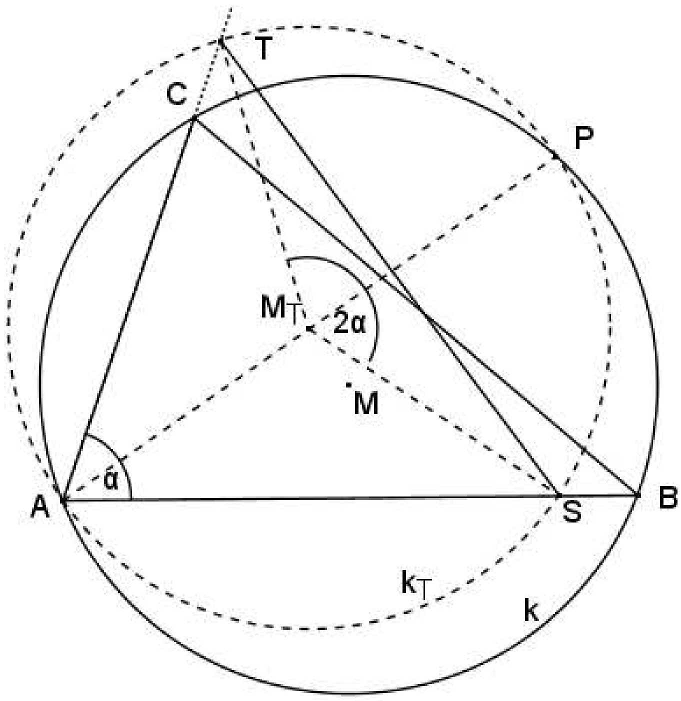
Im Folgenden sind
M der Mittelpunkt des Umkreises k von Dreieck ABC und
M_T der Mittelpunkt des Thaleskreises k_T über [AP].

Für alle Punkte $P \in k$ gilt:

(1) $S, T \in k_T \Rightarrow \overline{M_T S} = \overline{M_T T}$

(2) k_T ist Fasskreis über [ST] und $\angle SAT = \angle BAC = \alpha$
$\Rightarrow \angle SM_T T = 2 \cdot \alpha$

Aus (1) und (2) folgt:
Für alle Punkte P sind die Dreiecke SM_TT ähnlich und gleichschenklig mit Basis [ST].



Daraus folgt: $\overline{ST}$ ist genau dann maximal, wenn $\overline{M_T S} = \overline{M_T T}$ maximal ist.

Da $\overline{M_T A} = \overline{M_T P} = \overline{M_T S}$ ist, folgt:

[ST] ist maximal. $\Leftrightarrow$ $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{M_T A}$ ist maximal.
$\Leftrightarrow$ [AP] ist Durchmesser von k.
$\Leftrightarrow$ k = k_T, M = M_T, S = B und T = C.

Bemerkung:

Da Dreieck SM_TT gleichschenklig, gilt: $\overline{ST} = 2 \cdot \overline{M_T S} \cdot \sin\alpha = \overline{AP} \cdot \sin\alpha$

Da α fest ist, ist $\overline{ST}$ genau dann maximal, wenn $\overline{AP}$ maximal ist.