Lucas (1972) モデルにおける複数均衡

—先行研究と松井 (2011a,b) との関連を中心に—

南山大学 経営学部　松井宗也

2012 年 11 月　No.1202

Lucas (1972) モデルにおける複数均衡

− 先行研究と松井 (2011a,b) との関連を中心に −

松井宗也　　南山大学経営学部*

平成 24 年 11 月 16 日

概 要

Lucas (1972) はマクロモデルに情報の不完全性を導入することで，古典的な貨幣の中立性とフィリップス曲線における失業とインフレ率の関係を矛盾なく説明した．そこでは，貨幣供給量自体はその水準に比例する形で物価が変化するため，実体経済に影響を及ぼさない．これは貨幣数量説の成り立つことを意味する．ところが Lucas (1972) モデルにおいて貨幣が非中立的となる均衡の存在が複数の研究で確認されている．さらに，均衡では一般に貨幣は非中立的になることまで証明された．実は貨幣中立性な均衡の存在には特殊な仮定が必要であり，その特殊な仮定でのみ貨幣数量説な結論が導かれるのである．本稿では Lucas (1972) モデルを取り扱った文献をまとめそれらの関係を明らかにする．特に貨幣がモデルにもたらす影響を中心にして，各文献の類似点や差異を明らかにする．詳しく取り扱う論文は Otani (1985) と松井 (2011a,b) である．新しく得られたことは，前者の具体例において後者のアイデアを再現することで，貨幣非中立的な均衡がより簡単に導出できた点である．証明もより簡単になった．関連する先行研究 Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) と Otaki (2011) も解説する．

キーワード：貨幣の中立性，世代重複モデル，Lucas(1972) モデル，貨幣数量説，貨幣供給ルール，時間選好.

*郵便番号 466-8673　愛知県 名古屋市 昭和区 山里町 18.　E-mail: mmuneya@nanzan-u.ac.jp

1　導入

はじめに Lucas (1972) モデルにおける（Lucas の主張する）経済学的なインプリケーションを述べ，後続する研究の流れを貨幣の中立性と関連付けて説明する[1]．その後，先行研究を参照にして本論文の貢献を述べる．

Lucas (1972) はマクロモデルに情報の不完全性を導入することで，古典的な貨幣の中立性とフィリップス曲線における失業とインフレ率の関係を矛盾なく説明した．つまり情報が完全であれば，人々は正しく貨幣供給量を知りそれに比例する形で物価を変化させるため実体経済は何ら影響を受けない．すなわち貨幣は中立的となる．その一方で予期せぬ貨幣的ショックは，それが実体的（リアル）なショックと区別できないために人々はこれら 2 つによるリスクをヘッジする行動を採り，そのため実体経済は貨幣的な影響を受ける．このことから失業は（予見できる）金融政策により操作不可能であると結論づけられる[2]．この論文はその後マクロ経済学における金融政策のあり方に大きな影響を与えた．

ところがその後，Grandmont 氏の指摘により，実は貨幣数量説の成り立つ均衡物価関数は存在のみ証明され，一意性は証明されていないことが分かった（Lucas (1983)）．言い換えれば，それ以外の均衡物価関数（貨幣数量説の成り立たない）が存在しないことが，完全には証明されていないことが分かった．実は，この解の一意性を否定するものとして，モデルをより簡単化した枠組みのもとで貨幣が非中立的となる均衡解の存在が具体例をもって示されている（Chiappori and Guesnerie (1990, 1992)）．そこでは，若年期の消費のない効用関数を具体的に与え，さらに実物的なショックと貨幣的なショックにそれぞれ独立に対数正規分布を仮定したもとで，均衡解が無限級数の形で導かれている．その解の形から，貨幣が非中立になる非線形解が連続的に存在することがわかる．その後，松井 (2011a,b) においてLucas (1972) モデルと同様の設定で，均衡物価関数は一般に貨幣中立的とならないことが確認されている[3]．その証明は特に具体的な均衡解に頼ることなく一般的なものである．更には，これらの文献に先行し Otani (1985) では，Lucas (1972) の均衡において貨幣中立的となるためには，ルーカス型の貨幣供給ルールと人々が貨幣数量説的な期待を持つことを明らかにした．そして貨幣供給ルールを変更すれば，完全情報化でも貨幣が非中立的なることを示した．このアイデアを発展させて Otaki (2011) では不確実性のない OLG（世代重複）モデルにおいて貨幣が一般に非中立的になることが示されている[4]．Otaki (2011) のモデルではChiappori and Guesnerie (1990, 1992) や松井 (2011a,b) と同じく，特に貨幣供給ルールの変

[1]Lucas (1972) モデルの解釈や関連する問題点は様々で多くの議論がある．執筆者はこの点に深く立ち入らないし，そうできる程の教養と判断能力もない．関心のある読者は吉川 (2000) 等の議論を参考にされたい．ただし強調したいことがひとつある．それは，歴史的な解釈や位置付けは，時代により大きく変わるという点である．本稿ではモデルには複数均衡が存在することを詳しく説明し，それによってモデルの経済学的な含意が影響を受けることを指摘することに止める．

[2]ここで経済主体は与えられた情報をもとに期待値を考える意味で常に合理的に行動している．すなわち経済学における効用最大化原理に矛盾していないことに注意が必要である．このことから合理的期待形成の考え方を厳密に定式化したとされる．

[3]松井 (2011a) では労働供給量に上限のある場合を，松井 (2011b) ではない場合が取り扱われている．本質的なアイデアは同じであるが，本稿では主に松井 (2011b) を中心に解説する．

[4]近刊の和書，大瀧 (2011) にモデルのより体系的な説明がなされている．

更が無くとも非中立的な均衡が得られている[5]．その他関連する文献は邦文のものを含めて多岐にわたる．

本稿では，松井 (2011b) を中心として上に述べた文献をいくつか取り上げ，経済における貨幣供給の機能という観点からそのつながりを明らかにする．つまり，それら文献の類似点や差異に注目し，モデルにおける貨幣供給の役割をより鮮明に浮かび上がらせる．さらにこれらの文献から得られるアイデアを組み合わせ，モデルのより良い解釈につなげる．それは Otani (1985) の具体例を以ってなされる．そこにおいて松井 (2011b) のアイデアが再現され，貨幣が非中立的となる均衡が導かれる．この具体例は Lucas (1972) の設定から外れることがなく，Azariadis (1981) による大胆に簡略化された設定以外に魅力ある例を提供してくれるものである．

論文の構成は以下のようになる．第 2 章では Lucas (1972) モデルの概略を述べる．そして，第 3 章では松井 (2011b) による貨幣中立的でない均衡解の存在を示す．関連して Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) による非中立的な均衡を第 4 章で解説する．5 章では Otani (1985) の結果とそこで用いられた具体例を説明する．その具体例にもとづいて松井 (2011b) のアイデアが再現される．さらに大瀧 (1994) の結果も簡単に解説する．最終章ではまとめと今後の課題を述べる．証明の多くは補論にまとめた．なお記号は各小節毎に完結し，節が異なれば同一の記号でも意味が異なってくるので注意されたい．多数の論文を解説していることを鑑みご理解頂ければ幸いである．

2　Lucas (1972) モデル

詳しい解説は松井 (2011a,b)，あるいは大瀧 (1994)，岩田 (1990, 1991) と芳賀・板垣 (1995) を参照されたい．ここでは概要のみ説明し，主要な目的であるモデルの分析へと向かう．

2.1　モデルの構成

2 つの経済圏からなる経済を考える．この経済では人は毎期 N 生まれ，若年期（0 期）と老年期（1 期）の 2 期間を生きる．若者は各経済圏に $\theta/2$ と $1-\theta/2$ の割合で振り分けられ，生産活動を行い得られた財を消費する．そして余った財を老人に売り貨幣を手にする．老年期を迎えると今度は各経済圏に貨幣供給量が等しくなるように移住させられる．老年期は消費するのみで，それは若年期の貯蓄（政府による利子率を加えたもの）で賄われる．すなわち労働投入量を n，若者と老人の消費をそれぞれ c_0, c_1 とおくと集約された予算制約式は

$$D := \{c_0, c_1, n \mid c_0 + c_1 \leq n, \quad c_0, c_1 \geq 0, \quad 0 \leq n \leq \overline{n}\} \tag{1}$$

[5]本稿の完成直近になり，執筆者は Otaki (2012) を知ったがここでは時間選好と貨幣供給率に依存関係を持たせている．つまり Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) や松井 (2011a,b) と同様に貨幣供給が時間選好に影響する均衡を考えることで，不確実性のない Lucas (1972) モデルにおいて，貨幣が非中立的となることを確認している．ただし物価水準は貨幣供給率の影響を受けない設定となっている．いづれにせよ Otaki (2011) やそれ以前の論文 Otaki (2007, 2009) とは明確に異なるので，新しい機会を設け検討したいと考える．本稿では論文を紹介するに止める．

となる．ここで $\overline{n}$ は労働供給量の上限で，1 単位の労働で 1 単位の財が生産される．この経済における撹乱要因は，実物的ショック θ と貨幣的ショック x で，そのベクトル (θ, x) は時間によらず同一の確率分布に従うものとする．

個人に共通の効用関数は,

$$U(c_0, n) + E[V(c_1)] \tag{2}$$

で与えられ，U と V はそれぞれ今期と来期の効用関数である．E は期待値を表すオペレーターである．効用関数 U と V の厳密な設定は松井 (2011b) の 2 章を参照されたい．以下では来期の効用 $E[V(c_1)]$ を詳しく見た後，最適化問題を定式化する．老年期の消費 c_1 の予算制約式は，貯蓄 λ，来期の価格 p_1 と貨幣の増加率 x_1 に依存して $c_1 \leq x_1\lambda/p_1$ となる．等号条件のときに最適となるから $c_1 = x_1\lambda/p_1$ とおく．変数 x_1 と p_1 は現在の貨幣流通量 m と現在の価格 p に依存すると仮定し，分布関数を $F(x_1, p_1 \mid m, p)$ と書く．すると家計の最大化すべき目的関数は

$$f_0(c, n, \lambda) := U\,(c, n) + \int V\left(\frac{x_1\lambda}{p_1}\right) dF(x_1, p_1 \mid m, p) \tag{3}$$

と書ける．制約条件は (1) の D と $c_1 = x_1\lambda/p_1$ に注意して

$$c \geq 0,\ 0 \leq n \leq \bar{n},\ \lambda \geq 0,\ p(n-c) \geq \lambda$$

となる．この最適解が存在すればそこで財市場が均衡する．Kuhn-Tucker 条件は整理すると

$$\begin{aligned}
U_c(c,n) - p\mu \leq 0, &\quad \text{等号条件は} \quad c > 0, & (4)\\
U_n(c,n) + p\mu \geq 0, &\quad \text{等号条件は} \quad 0 < n < \bar{n}, & (5)\\
U_n(c,n) + p\mu \geq 0, &\quad \phantom{\text{等号条件は}} \quad 0 < n = \bar{n}, & (6)\\
p(n-c) - \lambda \geq 0, &\quad \text{等号条件は} \quad \mu > 0, & (7)\\
\int V'\left(\frac{x_1\lambda}{p_1}\right)\frac{x_1}{p_1} dF(x_1, p_1 \mid m, p) - \mu \leq 0 &\quad \text{等号条件は} \quad \lambda > 0 & (8)
\end{aligned}$$

を満たす解 (c, n) とベクトル (λ, μ) が存在することである．これらの条件を解くと，消費 c は実質貨幣残高 λ/p の減少関数であり，消費の限界効用 U_c は λ/p の関数となる．従って

$$h\left(\frac{\lambda}{p}\right) := U_c\left(c\left(\frac{\lambda}{p}\right), c\left(\frac{\lambda}{p}\right) + \frac{\lambda}{p}\right) \tag{9}$$

とおくと，最終的に

$$h\left(\frac{\lambda}{p}\right)\frac{1}{p} = \int V'\left(\frac{x_1\lambda}{p_1}\right)\frac{x_1}{p_1} dF(x_1, p_1 \mid m, p) \tag{10}$$

が成り立てば最適解が存在することが分かる．この式の左辺は実質貨幣残高（実質貯畜）の今期における限界効用を表し，右辺はその来期における期待限界効用を表す．これが家計の Euler 方程式となる．

最後に貨幣市場の均衡を考える．総貨幣供給量は Nmx であるから，老人の移動に伴いそれぞれの経済圏では貨幣量は $Nmx/2$ となる．従って 1 人当たりの貨幣供給量は $(Nmx/2)/(\theta N/2)$ となり貨幣市場の均衡は $\lambda = mx/\theta$ となる[6]．これを (8) 式に代入して均衡条件

$$h\left(\frac{mx}{\theta p}\right)\frac{1}{p} = \int V'\left(\frac{mxx_1}{\theta p_1}\right)\frac{x_1}{p_1}dF(x_1, p_1 \mid m, p) \tag{11}$$

を得る．ある期の経済の状態は当該期の変数 (m, x, θ) によって完全に表現できるので，均衡物価は存在するとして (m, x, θ) の関数として $p(m, x, \theta)$ と書ける．すると，来期の均衡物価は今期の変数を (m, x_0, θ_0) として

$$p_1 = p(m_1, x_1, \theta_1) = p(mx_0, x_1, \theta_1)$$

と表せる．つまり p_1 は m を所与（条件付き）とすると，3 つの (x_0, x_1, θ_1) の確率変数から決まる．そうすると関数方程式は改めて

$$\begin{aligned} &h\left(\frac{mx_0}{\theta_0 p(m, x_0, \theta_0)}\right)\frac{1}{p(m, x_0, \theta_0)} \\ &\quad = \int V'\left(\frac{mx_0 x_1}{\theta_0 p(mx_0', x_1, \theta_1)}\right)\frac{x_1}{p(mx_0', x_1, \theta_1)}dF_0(x_0', x_1, \theta_1 \mid p(m, x_0, \theta_0)) \end{aligned} \tag{12}$$

と書ける．この式を静学的に分析すると，m が所与のもとで $p(m, x, \theta)$ と x/θ は 1 対 1 に対応することがわかる[7]．以上が Lucas (1972) モデルの概略である．以降の章でモデルにおける均衡物価関数の存在と性質が論じられる．

3 松井 (2011b) による均衡物価関数

まず Lucas (1972) による均衡物価関数を解説する．Lucas (1972) では $p(m, x, \theta) = m\varphi(x/\theta)$ と先験的に物価関数の関数形を仮定している[8]．そして (12) 式を満す φ が存在することを示した（Lucas (1972) の Theorem 1 参照）．この仮定は均衡でも引き継がれ，得られる均衡物価関数は $p^*(m, x, \theta) = m\varphi^*(x/\theta)$ となり，φ^* は m に依存せず貨幣の中立性が成り立つ．

次に松井 (2011b) による一般的な均衡解を説明する．それは先験的な仮定を $p(m, x, \theta) = \pi(m)\varphi(x/\theta)$ と変更して (12) 式を満たす $\varphi(x/\theta)$ の存在を証明することで得られる．$\pi(m)$ は $(0, \infty)$ 上で連続な関数と仮定する．$\pi(m) = m$ ならば Lucas (1972) と同様である．(12) 式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} &h\left(\frac{mx_0}{\pi(m)\theta_0\varphi(x_0/\theta_0)}\right)\frac{mx_0}{\pi(m)\theta_0\varphi(x_0/\theta_0)} \\ &\quad = \int V'\left(\frac{mx_0 x}{\pi(mx_0)\theta_0\varphi(x/\theta)}\right)\frac{mx_0 x}{\pi(mx_0)\theta_0\varphi(x/\theta)}dF\left(x_0, x, \theta \,\middle|\, \frac{x_0}{\theta_0}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

[6] θ には対称性が仮定されているためひとつの経済圏を考えれば十分である．

[7] この証明は当初 Lucas (1972) に与えられていたが，後にそれでは不十分なことが分かった．完全な証明は Lang (1985) に与えられている．

[8] もちろんこのように仮定したからといって，一般に均衡解も同様になるとは言えない．

と書ける．条件付き分布で m は所与であるから，$F(x_0,x,\theta \mid p) = F(x_0,x,\theta \mid x_0/\theta_0)$ とおいた．分布 F の密度関数を具体的に与える．確率ベクトル (x_0,θ_0) と (x,θ) は iid であることに注意して $z_0 = x_0/\theta_0, z = x/\theta$ とおく．また z を与えたときの x の確率密度関数を $f_{x|z}(x)$ とし，(θ,z) の密度関数を $f_{z,\theta}(z,\theta)$ とおく．すると (13) 式は

$$\begin{aligned} &h\left(\frac{m}{\pi(m)}\frac{z_0}{\varphi(z_0)}\right)\frac{m}{\pi(m)}\frac{z_0}{\varphi(z_0)} \\ &\quad = \int V'\left(\frac{mz_0}{\pi(mx_0)}\frac{\theta z}{\varphi(z)}\right)\frac{mz_0}{\pi(mx_0)}\frac{\theta z}{\varphi(z)}f_{x_0|z_0}(x_0)dx_0 f_{z,\theta}(z,\theta)dzd\theta \end{aligned} \tag{14}$$

と簡潔になる．この関数方程式に縮小写像定理を用いて，未知の関数 φ の存在を示す．以下は松井 (2011b) において得られた均衡の存在証明である．

定理 3.1 貨幣数量 $m>0$ は固定された定数とする．そのとき関数方程式 *(14)* には連続解 $\varphi(z)$ が $(0,\infty)$ 上で一意的に存在する．ここで $\varphi(z)$ は連続な正値関数であり，$z/\varphi(z)$ は $(0, \frac{\bar{n}m}{\pi(m)})$ 上で有界となる．

詳しい証明は，松井 (2011b) の定理３．１を参照されたい．ここでは得られた均衡で貨幣が非中立的となることを説明する．定理の証明は

$$\frac{m}{\pi(m)}\frac{x/\theta}{\varphi(x/\theta)} = \Lambda(x/\theta; m)$$

とおいて，関数方程式を Λ で再定義し，それを満たす関数 Λ^* の存在を示すことでなされる[9]．すると，均衡物価関数 $p(m,x/\theta) = \pi(m)\varphi^*(x/\theta)$ は改めて

$$P(m,x,\theta) = \frac{mx/\theta}{\Lambda^*(x/\theta,m)}$$

と表せ，貨幣供給量 m と，区別できないショック x/θ の関数となることが分かる．この関数形をみれば均衡で貨幣が非中立的となることは容易に分かる．以上が松井 (2011b) による Lucas (1972) モデルにおける貨幣非中立的な均衡の存在証明である．

4 Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) の結果

Chiappori and Guesnerie (1990, 1992) は効用関数を

$$U(c_0,n) = -\frac{n^2}{2}, \quad V(c_1) = c_1$$

とおき，２つのショック (x,θ) の分布がそれぞれ独立に対数正規分布に従うと仮定して，具体的な解を無限級数の形で求めた．そこでは $p(m,x,\theta) = \psi(m,x/\theta)$ が仮定され，さらに $\phi(m,x/\theta) = (mx/\theta)/\psi(m,x/\theta)$ とおくことで均衡式 (12) が

$$E\left[\frac{\theta}{\theta_0}\phi(mx_0,x/\theta) \mid \frac{x_0}{\theta_0}\right] = \phi^2(m,x_0/\theta_0)$$

[9] 関数 Λ は松井 (2011b) における $G_1(\Psi(x/\theta,m))$ のことである．松井 (2011b) の p.265 参照．また Λ^* が m に依存することは，松井 (2011b) の定理３．２において厳密に証明される．

と表される[10]．その上で，Chiappori and Guesnerie (1990) では解 ϕ の形を $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)m^{\lambda k}$, Chiappori and Guesnerie (1992) では $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)m^{-\lambda k}$ とそれぞれ特定し，関数 $a_k(z)$ と正数 $\lambda > 0$ を明示的に求めている．解の形から，ある $k > 0$ に対し $a_k > 0$ ならば，貨幣が非中立的になることが容易にわかる．つまり Lucas (1972) モデルにおける複数均衡の存在は，1990 年代初頭には示されていたことになる．

以下では Chiappori and Guesnerie (1992) を取り上げ均衡物価についてより詳しい説明を述べる．そこでは上述した関数方程式を満たす均衡が

$$\phi(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-\alpha\lambda_0 k+\beta/2} m^{-\lambda_0 k}$$

と具体的に求まる．ここで α と β は 2 つの対数正規分布のパラメーターより決まる．さらに定数 A, B, C もそれらのパラメーターから与えられる定数とすると，λ_0 は

$$A^{\lambda_0^2+4\lambda_0} C^{\lambda_0^2+\lambda_0} = 2$$

より決まる．また係数 $u_k,\ k = 0,1,2,\ldots$ は A, B, C により以下のように与えられる．まず $u_0 = A^3 B$ となる．次に u_1 が与えられると $u_k,\ k > 1$ は

$$u_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}}{u_0(A^{\lambda_0^2 k^2+4\lambda_0 k} C^{\lambda_0^2 k^2+\lambda_0^k} - 2)}, \quad k > 1$$

から再帰的に値が求まる．任意に与えられた $u_1 > 0$ のもとで，この級数は収束することが分かっている．そして $u_1 = 0$ ならば Lucas 型の均衡が得られ，$u_1 \neq 0$ ならば貨幣非中立的な均衡となる．

級数展開のままでは解析が難しいため，論文では価格関数 $\psi(m,z)$ と生産量 $y = \phi(m,z)$ のグラフが，Lucas 型の均衡（$u_1 = 0$ のとき）と非 Lucas 型の均衡（$u_1 > 0$ のとき）のそれぞれの場合に与えられている．それは m か z のどちらかが所与のもとで残ったもう一方の変数のグラフを描くというものである.（Chiappori and Guesnerie (1992) の Figure 4.1 と Figure 4.2 参照.）

グラフの分析からは以下のことが主張されている．まず z と m の両方もしくは一方の値が十分に大きいと非 Lucas 型均衡と Lucas 型均衡の間に差はない．どちらも z が大きくなるにつれて m の値によらず価格と労働供給量の両方が $+\infty$ 発散する．しかし非 Lucas 型の均衡では z が小さくなるにつれ（m は固定）労働供給量は $+\infty$ に近づき，これは Lucas 型の場合に 0 に収束することと対称的である．さらに z を一定にして m を小さくしたときにも，両均衡での労働供給量の乖離は大きくなる．こういった関数型の違いはあるものの，両均衡ともに価格関数は z に関し単調であり，均衡解となる条件を満たしていることも確認できる．

さらに，Chiappori and Guesnerie (1992) では Lucas の原論文と矛盾し[11]かつ現実的でない点として，非 Lucas 型の均衡では労働供給量が $+\infty$ に近づくことに注目している．つまり正の確率で非常に大きな値をとってしまう点である．これに対しては，解析解を得るという大

[10] これは Lucas-Azariadis equation と呼ばれるものである．

[11] 設定を変更したために矛盾する点が出てくる点に注意が必要である．

きな目的ためにはAzariadisによる設定の簡略化が重要で，この簡略化から生じる非現実的な点は足らないもの (Red herring) と主張している．その上でChiappori and Guesnerie (1989) を引用し，動学システムにおけるこういった（連続的な）複数均衡はheteroclinic orbits より一般的な場合というだけなのではないかと推測している，そしてこの観点から考えると，労働供給が $+\infty$ となる場合は特別な定常に対応していると述べてある．

本稿ではこの現象の経済学的な解釈を述べておこうと思う[12]．ショック $z = x/\theta$ の不決定性を除去するため実物的ショック θ を捨像しショックは全て貨幣的なもの x と考える．するとこの経済では貨幣供給量 z が非常に小さいとき，物価水準が異常に低くなるがみてとれる．（前述したFigureを参照.）これは次のことを意味する．若者はどんなに働いて貯蓄をしてもその大部分を税金として取られる．しかし老年期の物価水準が非常に低いために僅かでも貯蓄があれば大きく消費できる．すなわち，たくさん働く不効用よりも，大きな消費から得られる効用が多いため，労働供給量をいくらでも増やすのである．これが執筆者によるこの均衡の解釈である．

経済厚生に関するChiappori and Guesnerie (1992) の分析を述べ章を閉じることにする．この経済では非Lucas型の均衡 $u_1 > 0$ がLucas型のそれを常にPareto優越する，つまり貨幣が非中立的な均衡が常に中立的なそれを経済厚生の意味で優越するのである．以上のように，Azariadisの簡略化された設定のもとではあるものの，一般的には均衡では貨幣が非中立的となり，それゆえ経済学的な解釈も大きく変わることが確認された．

5　Otani (1985) の具体例

5.1　Otani (1985) における貨幣非中立性のアイデア

Otani (1985) は1980年代に既に貨幣が中立的なるためには,（１）情報が完全であり人々が貨幣数量説的な期待を持つこと,（２）特殊な貨幣供給ルールが必要であるということを理解していた．そして政府による貨幣供給ルールを次のように変えれば，貨幣が非中立的になることを示した．政府は毎期，若者1人に対し貯蓄 λ に利子率 $(x-1)$ を掛けさらに $\overline{m}$ を加えた額を供給する（$\overline{m} > 0$ は定数）．その結果，老年期を迎えるにあたって貨幣残高は1人あたり $x\lambda + \overline{m}$ となる．言うまでもなく $\overline{m} = 0$ ならばLucas (1972) のそれと同様となる．

証明は具体例を以ってなされる．以下では前章の議論を参考にその具体例の設定を説明し，貨幣が非中立的となることを確認する．まずモデルから実物的ショックを捨象する．すると価格関数 p は，現在の貨幣残高と貨幣的ショックに依存し，今期は $p(m, x)$ 来期は $p(mx + \overline{m}, x')$ と書ける．貨幣的ショック x と x' の同時分布はその独立性から

$$\begin{aligned} G(x, x'|p) &= P(X \leq x \text{ and } X' \leq x' \,|\, p(m, X) = p) \\ &= P(X \leq x \,|\, p(m, X) = p) \times P(X' \leq x') \end{aligned}$$

[12] これはChiappori and Guesnerie (1992) の主張でなく，あくまで執筆者に依る解釈である．執筆者は非現実的な点は取るに足らない点ではなく，やはり何らかの経済学的な意味があるのではないかと考えるからである．

となる．ここで $p(m,\xi)$ は ξ に関して単調増加または単調減少を仮定する[13]．そして $p(m,\tilde{x}) = p$ として

$$G(x,x' \mid p) = P(X \le x \mid X = \tilde{x}) \times P(X' \le x') = \begin{cases} F(x') & \text{if } \tilde{x} \le x' \\ 0 & \text{if } \tilde{x} > x' \end{cases} \tag{15}$$

とおく．これは $p(X \le x \mid X = \widetilde{x})$ が 1 点分布であることを意味する．家計は以上の情報を既知として効用

$$U(n,c) + \int V\Big(\frac{x'\lambda + \overline{m}}{P(mx + \overline{m}, x')}\Big) dG(x,x' \mid p) = U(n,c) + \int V\Big(\frac{x'\lambda + \overline{m}}{P(m\tilde{x} + \overline{m}, x')}\Big) dF(x')$$

を予算制約 $p(n-c) = \lambda$ のもとで最大化する．一階の条件より

$$h\Big(\frac{\lambda}{p(m,x)}\Big)\frac{1}{p(m,x)} = \int V'\Big(\frac{x'\lambda + \overline{m}}{p(m\tilde{x} + \overline{m}, x')}\Big)\frac{x'}{p(m\tilde{x} + \overline{m}, x')} dF(x')$$

が満たされるべき関数方程式となる．経済主体は価格関数を正しく理解しているため観測された p より $x = \widetilde{x}$ を知る．これを代入し変形を加えると

$$h\Big(\frac{mx + \overline{m}}{p(m,x)}\Big)\frac{mx + \overline{m}}{p(m,x)} = \int V'\Big(\frac{x'(mx + \overline{m}) + \overline{m}}{p(mx + \overline{m}, x')}\Big)\frac{x'(mx + \overline{m}) + \overline{m}}{p(mx + \overline{m}, x')}\frac{x'(mx + \overline{m})}{x'(mx + \overline{m}) + \overline{m}} dF(x')$$

と (14) 式に対応するものが得られる[14]．さらに今期と来期の効用関数を $U = (\overline{n} - n)^{1/4} c^{1/4}$ と $V = 2(c')^{1/2}$ と特定すると

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\frac{mx + \overline{m}}{p(m,x)}}{\sqrt{\overline{n} - \frac{mx + \overline{m}}{p(m,x)}}} = \int \sqrt{\frac{x'(mx + \overline{m}) + \overline{m}}{p(mx + \overline{m}, x')}}\frac{x'(mx + \overline{m})}{x'(mx + \overline{m}) + \overline{m}} dF(x') \tag{16}$$

となる．これが Otani (1985) の具体例における均衡条件となる．

それでは均衡の分析に移る．Otani (1985) では先見的に $p(m,x)$ が mx の関数となることを仮定し，$\Psi(mx) = \frac{mx + \overline{m}}{p(m,x)}$ とおいた．すると均衡式は

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Psi(mx)}{\sqrt{\overline{n} - \Psi(mx)}} = \int \Psi^{1/2}(x'(mx + \overline{m})) g(mx, x') dF(x') \tag{17}$$

と書ける．ここで $g(mx, x') = \frac{mx + \overline{m}}{p(m,x)}$ とおいた．まず $\overline{m} = 0$ とおくと

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Psi(mx)}{\sqrt{\overline{n} - \Psi(mx)}} = \int \Psi^{1/2}(x'(mx + \overline{m})) dF(x')$$

---

[13] 均衡が存在すれば $p(m,\xi)$ は ξ に関して 1 対 1 となることは既にみた．事後的に ξ に関して連続であることが分かるから均衡物価関数は単調となる．

[14] Otani (1985) では合理的期待関数と呼ばれている．

となり，$\Psi(mx) = \frac{8}{9}\overline{n}$ がひとつの解であることが分かる[15]．これはLucas (1972) の Theorem 2 の特別な場合で貨幣中立的となる均衡である．しかし $\overline{m} \neq 0$ ならば貨幣中立的になることは背理法を用いてすぐ分かる．貨幣中立説が成り立つとすると $\Psi(mx) = a$（a はある定数）だから (17) 式は

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{a}{\sqrt{\overline{n} - a}} = a^{1/2}\int g(mx, x')dF(x')$$

と書ける．$\overline{m} \neq 0$ ならば $g(mx, x')$ は x に依存するため $\Psi(mx) = a = 0$ が導かれる．これでは均衡物価 p が無限大となり解とはならないことが分かる．Otani (1985) ではより一般的に以下の定理が得られている．

定理 5.1 $\overline{m} > 0$ とする．すると (17) 式には $0 < \Psi(mx) < \overline{n}$ で単調増加な解が存在する．

補論に存在の証明のみ述べる[16]．以上で貨幣供給ルールを変えれば，貨幣非中立的な均衡が導かれることが示された．

その上で Otani (1985) は，貨幣供給の影響で重要となるのは，所得効果ではなく代替効果である結論づけている．これをより詳しく述べる．ルーカス型の貨幣供給ルールに加えて経済主体が貨幣数量説な期待を持てば，貨幣供給の増減により，現在財と労働より決まる限界効用と将来財による期待限界効用は変化しないし所得効果もない．すると実体経済になんら変化は生じないから均衡では貨幣は中立的となる．これに対し Otani (1985) の例にある貨幣供給ルールでは，貨幣の増減により現在の貯蓄の限界効用（関数方程式 (17) の左辺）と将来の期待限界効用（右辺）が変化するから，経済主体が期待の意味で合理的であれば，両者が等しくなるような均衡が選択される．つまり均衡において時間選好を変えることが合理的となり現在財，労働と将来財の間に代替効果が働く[17]．これは，均衡では貨幣数量説的な期待はもはや合理的ではないことを意味する．従って貨幣は非中立的となる．

さらに Otani (1985) は，この具体例を拡張して，ルーカス型以外の貨幣供給ルールが一般的に貨幣の非中立性を導くことを明らかにした[18]．当期の政府の金融政策を ξ とすると，貨幣供給関数が $\mu(m, \xi)$ で与えられるとする．ここで m は若者一人当たりの貯蓄である．(17) 式に代入して

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Psi(mx)}{\sqrt{\overline{n} - \Psi(mx)}} = \int \Psi^{1/2}(\mu(m, x), x')\varepsilon(\mu(m, x), x')dF(x') \tag{18}$$

となる．ここで

$$\Psi(m, x) = \mu(m, x)/P(m, x),\ \varepsilon(n, \xi) = \frac{\partial \mu(n, \xi)}{\partial n}\frac{n}{\mu(n, \xi)}$$

---

[15]Otani (1985) の論証では $\overline{m} = 0$ ならば $\psi(mx) = \frac{8}{9}\overline{n}$ となると読めるが，この解が唯一の解となるかは分からない．m と x を分けて $\psi(m, x)$ とすれば別の均衡解が得られることは後述する．

[16]執筆者は単調増加の証明を確認していないが，非中立的な均衡解の存在を言うにはこれで十分である．

[17]所得効果も働くと思われるが代替効果と分けて考えることは難しい．

[18]この主張は正しいが，それを示す論拠となる定理（Otani (1985) の Theorem 2）には論理の飛躍があり正確ではないことに注意されたい．

である．$\varepsilon(\mu(m,x),x')$ は今期の貨幣ショックによる来期のショックの弾力性である．以下ではOtani (1985) の上の主張の論拠となる定理（Theorem 2）を述べるが，この定理における必要十分条件は，単に必要条件とするのが正しい考えるのがでそのように修正する．十分条件でないことは次章の議論から分かる．

定理 5.2 実質所得を表す関数 $\Psi(m,x)$ が m と x に無関係となるための必要条件は，$\varepsilon(n,\xi)$ が定数となることである．そしてそれは $\mu(n,\xi)$ が $a(\xi)n^b$ と書けることと同値である．

定理 5.2 の証明
$\Psi(m,x)$ が定数であることから (18) 式は

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{c}{\sqrt{\overline{n}-c}}=c^{1/2}\int\varepsilon(\mu(m,x),x')dF(x').$$

よって，$\partial\mu\neq 0$ ならば，F が任意であるため，$\varepsilon(n,\xi)$ は定数となる． □

5.2 Otani (1985) の具体例における松井 (2011b) の構成の再現

この章ではOtani (1985) の具体例を用いて松井 (2011b) のアイデアを再現する．そして両者の類似点と相違点を明らかにする．結果として，特殊な貨幣供給ルール（2），つまりLucas型貨幣供給ルールのもとでも一般に貨幣は非中立的となることが分かる．同様の主張はOtaki (2011) モデルにおいても言える．

まず，(17) 式において $\overline{m}=0$ とおくと，簡単な計算により

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\frac{mx}{p(m,z)}}{\sqrt{\overline{n}-\frac{mx}{p(m,z)}}}=\int\sqrt{\frac{x'xm}{p(mx,x')}}dF(x')$$

と書けるから，前章と同様に $p(m,x)=\pi(m)\varphi(x)$ とおいて，整理すると

$$\frac{\frac{mx}{\pi(m)\varphi(x)}}{\sqrt{\overline{n}-\frac{mx}{\pi(m)\varphi(x)}}}=2\sqrt{2}\int\sqrt{\frac{x'xm}{\pi(xm)\varphi(x')}}dF(x')=2\sqrt{2}\int\sqrt{\frac{xm}{\pi(m)\varphi(x')}}\sqrt{\frac{\pi(m)x}{\pi(mx)}}dF(x')$$

となる．ここで φ が存在することを言えばよいが，直接 $\Phi(m,x)=\frac{mx}{\pi(m)\varphi(x)}$ とおいて関数方程式を

$$\frac{\Phi(m,x)}{\sqrt{\overline{n}-\Phi(m,x)}}=2\sqrt{2}\int\sqrt{\Phi(m,x')}\sqrt{\frac{\pi(m)x}{\pi(mx)}}dF(x') \tag{19}$$

として $\Phi(m,x)$ が存在することを直接に言う．

定理 5.3 貨幣 $m>0$ が与えられたもとで均衡式 (19) を満たす連続解 $\Phi(m,x)$ は存在して，m に依存する．

Φ が m に依存すること，つまり貨幣が非中立的になることは，前章と同様に，Φ を定数とおけば矛盾が生ずることから分かる．存在の証明は補論を参照されたい．以上で Lucas 型貨幣供給ルールのもとでも貨幣が非中立的となることが示された．

Otani (1985) と松井 (2011b) の相違点を述べる．最も大きな相違点は既に明らかではあるが，Otani (1985) は貨幣供給ルールに注目したのに対し，松井 (2011b) は貨幣に対する価格関数の反応に注目したことである．より踏み込んで述べると，前者は貨幣中立的な均衡を排除するように貨幣供給ルールを設定した．それに対し後者は貨幣供給ルールは Lucas 型のままに，経済主体が貨幣数量説以外の期待を持つ場合を分析した．後者では常に貨幣が中立的な均衡を含み得ることに注意が必要である．それゆえに前者の方がより積極的に貨幣の非中立性を実現できる．さらに均衡物価関数に関して Otani (1985) は（ひとつの具体例としてではあるが）$p(m,x)$ が mx の関数と特定して均衡の存在を示したのに対し松井 (2011b) では $p(m,x)=\pi(m)\varphi(x)$ と分離型のものを仮定している．以上の相違はあるものの大きな類似点もある．それは貨幣が家計の異時点間の選好（Euler 方程式で表せる）に影響を及ぼすという事である．言い換えれば，貨幣の増減が現在消費，労働と将来消費の選好に影響を及ぼし，それらの財が代替的に働くという事である[19]．以上である．

5.3 Otaki (2011) のモデルにおける貨幣

Otaki (2011) のモデルを説明しその中で貨幣供給がどのように働くか考察する[20]．そうすることで Lucas (1972) モデルでの貨幣の役割が鮮明になる．先に述べたように Otaki (2011) モデルは世代重複モデルの一種である．t 期における若年期と老年期の消費を c_{1t} と c_{2t+1} とそれぞれおく．働けば 1，そうでなければ 0 の値をとる定義関数を δ_t とし，労働の不効用を α とする．経済主体は効用

$$U(c_{1t},c_{2t+1},\delta_t)=u(c_{1t},c_{2t+1})-\delta_t\cdot\alpha$$

を予算制約

$$p_tc_{1t}+M_t\le\delta_tW_t,\quad p_{t+1}c_{2t+1}\le M_t$$

のもとで最大化する．ここで $u(\cdot,\cdot)$ が相似拡大的 (homothetic) という重要な仮定をおく．すると生計費用関数 Ψ は，それから得られる効用水準を u とすると

$$\Psi(p_t,p_{t+1},u)=f(u)\psi(p_t,p_{t+1})$$

と分けることができる．ここから名目留保賃金 (Reservation wage) が

$$W_t^R=f(\alpha)\psi(p_t,p_{t+1})$$

と書ける．さらに最適化行動から若年期の消費は

$$C=c\left(\frac{p_{t+1}}{p_t}\right)W_t^Rl_t$$

[19] もちろん所得効果の影響も考えられるが，執筆者は代替効果と所得効果を明示的に分けることには成功していない．この点は今後の研究課題としたい．

[20] Otaki (2007, 2009) もモデルの基本的なアイデアは同じである．

となる．ここで l_t は雇用率を表し $(0,1)$ の値をとる．完全競争的が仮定され，企業は価格所与として行動し利潤は 0 である．つまり均衡で

$$p_t^* = W_t^R = f(\alpha)\psi(p_t^*, p_{t+1}^*)$$

が成り立つ．従って

$$1 = f(\alpha)\psi(1, p_{t+1}^*/p_t^*)$$

となり，均衡では物価上昇率（インフレ率）$\rho^K = p_{t+1}^*/p_t^*$ が定数となる．このことは非常に重要で，均衡において物価上昇率は貨幣供給量 M_t の影響を全く受けない定数となる．政府による貨幣供給は政府支出の形でなされるとすると財市場の均衡は

$$Y_t^d = c(\rho^K)W_t^R y_t^s + M_t$$

となる．ここで Y_t^d は需要，$y_t^s = l_t$ は労働供給量，M_t は財政支出を表す．両辺を均衡物価関数 p_t^* で割ると，

$$y_t^d = c(\rho^K)y_t^s + m_t \tag{20}$$

が得られる．この式から Hicks-Samuelson の 45 度線分析が導かれる．以上が Otaki (2011) モデルの概要である．

貨幣の機能を分析する前に Otaki (2011) モデルと Lucas (1972) モデルを比較しておく．ともに OLG を扱っているが，まず自明のこととして前者には不確実性がない．それ以外にも一見するといくつかの相違点（例えば効用関数の関数形や政府支出として貨幣供給がなされる点）が存在するように思われる．しかし，貨幣の影響を分析する視点からはこれらのことは本質的ではない．相違点において一番重要なものは，均衡で家計の時間選好率（インフレ率）が貨幣供給率と無関係に決まるという点である．Lucas (1972) モデルでは，Otani (1985) や松井 (2011b) の分析にあるように家計の時間選好（この場合は家計の Euler 方程式）は貨幣の影響を受ける．この点を踏まえ，次に貨幣がどのように実体経済に影響を及ぼすか考察する．

財市場の均衡式 (20) と実質貨幣供給量 m_t に注目する．t 期の貨幣供給水準 M_t と供給率 ρ^M は政府により外生的に決まる．均衡均衡 p_t とインフレ率 ρ^K には自由度があり，貨幣供給量と関連付けることもできるし無関係に決めることもできる．言い換えれば経済主体は p^M に関して選択的に情報を得ることができ，かつその情報に対し自由に反応することができる[21]．これらの変数が決まると $t+j$ 期の実質貨幣供給量は

$$m_{t+j} = \frac{M_t(\rho^M)^j}{p_t(\rho^K)^j}$$

と定まる[22]．もし家計が ρ^M を正しく知り，物価上昇率もそれに等しくなるという期待 $\rho^K = \rho^M$（貨幣数量説的な期待）を持つならば m_t は一定となり，Lucas 型の均衡が得られる．一方で

[21] ここがモデルの大きな利点であるが，具体的に貨幣給料の影響を求める際には，これら変数の関係を主体的に選択する必要がある．

[22] ここでは簡単化のため Lucas 型の供給ルールのみを考えている．より一般的には Otaki (2009, 2011) 等を参照されたい．

人々がそのような期待を抱かない ($\rho^M \neq \rho^K$) ならば，$m_t \neq m_{t+j}$ となり (20) 式を通じて実体経済は影響を受ける．言い換えれば，人々が貨幣数量説的な期待を持たない限り，生産高（この場合は雇用量と同義）に直接作用することを通じて，実体経済に影響を及ぼすのである．これらのことから貨幣が非中立的となることは容易に分かる．以上が Otaki (2011) モデルにおける貨幣供給の影響である．

6　まとめ

本稿では Lucas(1972) モデルを通じて，貨幣供給が実体経済に与える影響を考察した．論点の１つ目は貨幣供給ルールに関するものである．ルールの与え方により実体経済に与える影響も異なることが示された．２つ目の論点は貨幣が実体経済に働くとしてそれはどのようになされるかである．経済主体の異時点間の時間選好に影響する場合もあれば，そうではなく有効需要を直接刺激し雇用を増やす場合もある．それには経済主体の期待も大きく関わることが明らかになった．現実的には貨幣供給のなされ方やその影響は非常に複雑で，こういったモデルによる分析で全てを明らかにすることは不可能である．しかしながら適切なモデルを通じて貨幣供給の影響を分析することは，金融政策等の拠り所として非常に重要であると考える．

今後のなされるべき研究は多くある．１つには貨幣供給の影響が複数考えられる場合にそれらをどう分けて考えるか．１つのモデルにこれらを組み込むことは可能であるか，また組み込んだとしてどう分析するか．その他オープンエコノミーではその影響はどのように変わるか．あるいは経済主体の期待形成は，期待値を考えるだけで良いのであろうか．このように様々な論点が考えられるが，執筆者の能力はそれ程豊かではないので,「関係する皆様のお知恵を拝借できれば幸いである」と述べるに止め，筆を置くことにしたい[23].

A　補論

定理 5.1 の証明

(17) 式の左辺で

$$\Phi(x) = \frac{\Psi(x)}{\sqrt{\overline{n} - \Psi(x)}}$$

とおくと

$$\Phi(mx) = 2\sqrt{2}\int \Phi(x'(xm+\overline{m}))\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\overline{n}}{\Phi^2(x'(xm+\overline{m}))}}-\frac{1}{2}}\,g(mx,x')dF(x')$$

[23]執筆者の長い間，確率・統計を研究してきたこともあり経済学における配慮を欠いた述懐が在るかもしれない．そういった点をご指摘頂ければ幸いである．

と書ける．この式を満たす Φ の存在を言えばよい．

$$\log\Phi(mx) = \log 2\sqrt{2}\int e^{\log\Phi(x'(xm+\overline{m}))}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\overline{n}}{e^{2\log\Phi(x'(xm+\overline{m}))}}}-\frac{1}{2}}\,g(mx,x')dF(x')$$

とおき，写像 T を

$$Tf(x) = \log 2\sqrt{2}\int e^{f(x'(x+\overline{m}))}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\overline{n}}{e^{2f(x'(x+\overline{m}))}}}-\frac{1}{2}}\,g(x,x')dF(x')$$

と定義する．すると

$$T\log\Phi(x) = \log\Phi(x)$$

となるから，後は T が縮小写像であることを証明すればよい．

$$\begin{aligned}
Tf_1(x)-Tf_2(x) &= \log\int e^{f_1(x'(x+\overline{m}))-f_2(x'(x+\overline{m}))}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_1(x'(x+\overline{m}))}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_2(x'(x+\overline{m}))}}-\frac{1}{2}}}w(x')dF(x') \\
w(x') &= \frac{e^{f_2(x'(x+\overline{m}))}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_2(x'(x+\overline{m}))}}-\frac{1}{2}}\,g(x,x')}{\int e^{f_2(x'(x+\overline{m}))}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_2(x'(x+\overline{m}))}}-\frac{1}{2}}\,g(x,x')dF(x')}
\end{aligned}$$

より，中間値の定理を用いて

$$\begin{aligned}
||Tf_1-Tf_2|| &\le \sup_x\left|\log e^{f_1(x)}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_1(x)}}-\frac{1}{2}}-\log e^{f_2(x)}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_2(x)}}-\frac{1}{2}}\right| \\
&\le \sup_x\left|1-\frac{1}{2}\frac{\overline{n}e^{-2x}}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}}\right|||f_1-f_2||
\end{aligned}$$

となる．簡単な計算により

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\overline{n}e^{-2x}}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}} &\ge \frac{1}{2}\frac{\overline{n}e^{-2x}}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}+\frac{1}{2}\right)} \\
&\ge \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

また

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}-\sqrt{\frac{1}{4}} > \frac{1}{2}\frac{\overline{n}e^{-2x}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}}$$

だから

$$\frac{1}{2}\frac{\overline{n}e^{-2x}}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2x}}} < 1, \qquad 0\le x<\infty$$

となり

$$||Tf_1 - Tf_2|| \leq a||f_1 - f_2||$$

が言える．従って Φ は存在し Ψ も存在する． $\square$

定理 5.3 の証明

定理 5.1 の証明と同様にして

$$\Psi(m,x) = \frac{\Phi(m,x)}{\sqrt{\overline{n} - \Phi(m,x)}}$$

とおくと

$$\Phi(m,x) = \Psi(m,x)^2 \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\overline{n}}{\Psi^2(m,x)}} - \frac{1}{2} \right)$$

だから

$$\Psi(m,x) = 2\sqrt{2} \int \Psi(m,x') \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\overline{n}}{\Psi^2(m,x')}} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi(m)x}{\pi(mx)}} dF(x')$$

を満たす $\Psi(m,x)$ の存在を言えばよい．

$$\log\Psi(m,x) = \log 2\sqrt{2} \int e^{\log\Psi(m,x')} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\overline{n}}{e^{2\log\Psi(m,x')}}} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi(m)x}{\pi(mx)}} dF(x')$$

と変形し写像 T' を

$$T'f(x) = \log 2\sqrt{2} \int e^{f(x')} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\overline{n}}{e^{2f(x')}}} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi(m)x}{\pi(mx)}} dF(x')$$

と定義する．すると

$$T' \log\Phi(x) = \log\Phi(x)$$

となるから，後は T' が縮小写像であることを証明すればよい．

$$\begin{aligned}
T'f_1(x) - T'f_2(x) &= \log \int e^{f_1(x')} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\overline{n}}{e^{2f_1(x')}}} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi(m)x}{\pi(mx)}} dF(x') \\
&\quad - \log \int e^{f_2(x')} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\overline{n}}{e^{2f_2(x')}}} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi(m)x}{\pi(mx)}} dF(x') \\
&\quad \log \int e^{f_1(x') - f_2(x')} \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \overline{n}e^{-2f_1(x')}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \overline{n}e^{-2f_2(x')}} - \frac{1}{2}}} w(x') dF(x').
\end{aligned}$$

ここで

$$w(x') \;=\; \frac{e^{f_2(x')}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_2(x')}}-\frac{1}{2}}}{\int e^{f_2(x')}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}+\overline{n}e^{-2f_2(x')}}-\frac{1}{2}}\,dF(x')}$$

とおいた．後の証明は定理 5.1 の証明と同様であるから省略する． □

参考文献

岩田恒一,「Lucas のマクロ・モデルの構造—貨幣の中立性定理（I）—」,「研究年報『経済学』」, **52** (1), 1990 年: 41-48.

岩田恒一,「Lucas のマクロ・モデルにおける均衡—貨幣の中立性定理（II）—」,「研究年報『経済学』」, **53** (1), 1991 年: 17-26.

大瀧雅之,『景気循環の理論：現代日本経済の構造』, 東京大学出版会, 1994 年.

大瀧雅之,『貨幣・雇用理論の基礎』, 勁草書房, 2011 年.

芳賀半次郎・板垣有記輔,「Lucas の”Expectations and the Neutrality of Money”の再検討と批判的注解: 1 つの覚書」,『創価経済論集』, **24** (3), 1995 年: 1-50.

松井宗也,「Lucas (1972) のモデルにおける貨幣の非中立性」,『社会科学研究』, **63**, 2011 年: 91-109.

松井宗也,「Lucas (1972) のモデルにおける貨幣の非中立性：労働供給量に上限が存在するケース」,『南山経営研究』, **26**, 2011 年: 255-286.

吉川洋,『現代マクロ経済学』, 創文社, 2000 年.

C. Azariadis, A reexamination of natural rate theory, *Am. Econ. Rev.*, **71**, (1981), 946-960.

P. A. Chiappori and R. Guesnerie, Self-Fulfilling Theories: The Sunspot Connection. (1989) Working paper 8919, DELTA, Paris.

P. A. Chiappori and R. Guesnerie, Anticipations, indétemination et non-neutralité de la monnaie, *Annals d'Economie et de Statistiques*, **19**, (1990), 1-25.

P. A. Chiappori and R. Guesnerie, The Lucas equation, indeterminancy, and non-neutrality: an example, In *Economic Analysis of Markets and Games* edited by P. Dasgupta, D. Gale, O. Hart and E. Maskin, The MIT Press, Cambridge, 1992, 445-464.

H. Lang, Expectations and the neutrality of money: a comment, *J.Econ.Theory*, **36**, (1985), 392-393.

R. E. Lucas, Jr., Expectations and the neutrality of money, *J.Econ.Theory*, **4**, (1972), 103-124.

R. E. Lucas, Jr., Corrigendum on, “Expectations and the Neutrality of Money”, *J.Econ.Theory*, **31**, (1983), 197-199.

K. Otani, Rational Expectations and Non-Neutrality of Money, *Weltwirsch. Arch.*, **121**, (1985), 203-216.

M. Otaki, The dynamically extended Keynesian cross and the welfare-improving fiscal policy, *Econ. Lett.*, **96**, (2007), 23-29.

M. Otaki, A welfare economics foundation for the full-employment policy, *Econ. Lett.*, **102**, (2009), 1-3.

M. Otaki, A pure theory of aggregate price determination, *Theoretical Economics Letters*, **1**, (2011), 122-128.

M. Otaki, The Role of Money: Credible Asset or Numeraire?, *Theoretical Economics Letters*, **2**, (2012), 180-182.

N. L. Stokey and R. E. Lucas, Jr., with E. C. Prescott, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, (1989) Harvard Univ. Press, Massachusetts.

R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, (1970) Princeton Univ. Press, New Jersey.