$K = \operatorname{Conv}\left(\bigcup_{|\alpha|\leqslant 1} \alpha B\right)^a$ бикомпактно в слабой топологии X. Положим $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$ и обозначим через $p(x)$ функционал Минковского множества K. Тогда, поскольку K слабо бикомпактно в Y, функционал $p(x)$ определяет в Y норму. Это означает, что система $\{\alpha K\}$ $(\alpha > 0)$ образует фундаментальную систему окрестностей нормированного линейного пространства Y и Y является B-пространством, потому что множество K бикомпактно. Следовательно, пространство Y—бочечное. С другой стороны, так как K ограничено в X, топология, определяемая в пространстве Y нормой $p(x)$, сильнее, чем относительная топология Y как подмножества пространства X. Множество T как бочка пространства X замкнуто в X. Следовательно, множество $T \cap Y$ замкнуто в Y относительно топологии, определяемой нормой $p(x)$. Поэтому множество $T \cap Y$ — бочка B-пространства Y, и, следовательно, оно является окрестностью нуля в B-пространстве Y. Таким образом, мы доказали, что $T \cap Y$ и тем более T поглощает множество $K \supseteq B$.

4. Теорема Эберлейна — Шмульяна

Эта теорема имеет ряд очень важных приложений.

Теорема (Эберлейн — Шмульян). Для того чтобы B-пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякая сильно ограниченная последовательность его элементов содержала подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X.

Для доказательства нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. Если сильно сопряженное X'_s к B-пространству X сепарабельно, то и само пространство X сепарабельно.

Лемма 2 (Банах). Для того чтобы линейное подпространство M' сопряженного X' к B-пространству X было замкнуто в слабой* топологии, необходимо и достаточно, чтобы M' содержало все слабо* предельные точки всякого сильно ограниченного подмножества из M'.

Лемма 1 уже доказана в § 2 гл. V.

Необходимость условия леммы 2 очевидна; остается доказать его достаточность.

Доказательство (Хилле — Филлипс [1]). Из условия следует, что множество M' сильно замкнуто. Пусть точка $x'_0 \notin M'$. Можно показать, что для всякой постоянной C, удовлетворяющей неравенству $0 < C < \inf_{x' \in M'} \|x' - x'_0\|$, найдется элемент $x_0 \in X$, такой, что $\|x_0\| \leqslant 1/C$ и

$$\langle x_0, x'_0 \rangle = 1, \quad \langle x_0, x' \rangle = 0 \text{ для всех } x' \in M'. \tag{1}$$

Отсюда следует, что сильно замкнутое множество M' должно содержать все свои слабо* предельные точки.

Для доказательства существования x_0 возьмем возрастающую последовательность чисел $\{C_n\}$, такую, что $C_1 = C$ и $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \infty$. Тогда найдется конечное подмножество σ_1 единичного шара $S = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$, такое, что из неравенств $\|x' - x_0'\| \leqslant C_2$ и $\sup\limits_{x\in\sigma_1} |\langle x, x'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_1$ следует, что $x' \notin M'$. Действительно, если это не так, то каждому конечному подмножеству σ шара S соответствует элемент $x_\sigma' \in M'$, такой, что

$$\|x_\sigma' - x_0'\| \leqslant C_2 \quad \text{и} \quad \sup_{x\in\sigma} |\langle x, x_\sigma'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_1.$$

Эти множества σ мы можем частично упорядочить с помощью отношения включения; обозначим слабые* замыкания множеств $\{x_{\sigma'}';\ \sigma' \succ \sigma\}$ через N_σ'. Ясно, что множества N_σ' образуют центрированное семейство. Но в то же время, поскольку множество M' содержит слабо* предельные точки всех своих сильно ограниченных подмножеств, из следствия теоремы 1 § 1 этого приложения вытекает, что множество

$$M_{C'}' = \{x' \in M';\ \|x'\| \leqslant C'\}$$

слабо* бикомпактно. Следовательно, $N_\sigma' \subseteq M_{C'}'$ при $C' = C_2 + \|x_0'\|$, и поэтому найдется элемент $x_1' \in \bigcap\limits_\sigma N_\sigma' \subseteq M'$. Значит, $\sup\limits_{x\in S} |\langle x, x_1'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_1$, откуда $\|x_1' - x_0'\| \leqslant C_1$ вопреки предположению $0 < C_1 < \inf\limits_{x'\in M'} \|x' - x_0'\|$. Итак, множество σ_1 существует.

Повторяя эти рассуждения, мы можем построить последовательность конечных подмножеств $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ шара S, такую, что

$$\text{если } \|x' - x_0'\| \leqslant C_k \text{ и } \sup_{x\in\sigma_i} |\langle x, x'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1), \text{ то } x' \notin M'.$$

Но тогда, поскольку $\lim\limits_{i\to\infty} C_i = \infty$, мы видим, что если

$$|\langle x, x'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C \text{ для всех } x \in \left(\frac{C}{C_j}\right)\sigma_j \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

то $x' \notin M'$. Занумеруем последовательно точки множеств $(C/C_j)\sigma_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$; мы получим последовательность $\{x_n\}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и, следовательно, $L(x') = \{\langle x_n, x'\rangle\}$ — это ограниченное линейное отображение пространства X_s' в B-пространство (c_0).

Мы знаем, что точка $\{\langle x_n, x'_0\rangle\} \in (c_0)$ лежит на расстоянии $> C$ от линейного подпространства $L(M')$. Поэтому, согласно следствию теоремы 3, гл. IV, § 6, существует непрерывный линейный функционал $\{\alpha_n\} \in (c_0)' = (l^1)$, такой, что

$$\|\{\alpha_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leqslant \frac{1}{C}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, x'_0\rangle = 1$$

$$\text{и} \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, x'\rangle = 0 \quad \text{для всех } x' \in M'.$$

Ясно, что элемент $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ удовлетворяет условию (1).

Следствие. Пусть $\langle x', x''_0\rangle = F(x')$ — линейный функционал, определенный на сопряженном X' к B-пространству X. Если множество $N(F) = N(x''_0) = \{x' \in X';\ F(x') = 0\}$ слабо* замкнуто, то существует элемент $x_0 \in X$, такой, что

$$F(x') = \langle x', x''_0\rangle = \langle x_0, x'\rangle \quad \text{для всех } x' \in X'. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, что $N(F) \neq X'$, так как в противном случае мы могли бы взять $x_0 = 0$. Пусть $x'_0 \in X'$ — такой элемент, что $F(x'_0) = 1$. Так же, как в лемме 2, можно показать (см. (1)), что найдется элемент $x_0 \in X$, для которого

$$\langle x_0, x'_0\rangle = 1 \text{ и } \langle x_0, x'\rangle = 0 \text{ для всех } x' \in N(F). \tag{3}$$

Поэтому для всякой точки $x' \in X'$ функционал

$$x' - F(x')\,x'_0 = y' \in X'$$

удовлетворяет условию $F(y') = 0$, т. е. $y' \in N(F)$. Отсюда, используя (3), мы получаем условие (2).

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $\{x_n\}$ — последовательность из X, такая, что $\|x_n\| = 1$. Сильное замыкание X_0 линейного подпространства, натянутого на элементы последовательности $\{x_n\}$, является сепарабельным B-пространством и, следовательно, бочечным пространством. Покажем, что пространство X_0 рефлексивно. Всякое ограниченное сильно замкнутое множество B_0 в X_0 является также ограниченным и сильно замкнутым в X, поэтому B_0 бикомпактно в слабой топологии X, так как X по предположению рефлексивно. В то же время X_0 как сильно замкнутое линейное подпространство пространства X замкнуто в слабой топологии X (теорема 3, гл. IV, § 6). Следовательно, множество B_0 бикомпактно в слабой топологии пространства X_0. Поэтому, согласно теореме 2 предыдущего параграфа, пространство X_0 рефлексивно. Таким образом, $X_0 = ((X_0)'_s)'_s$. По лемме 1 пространство $(X_0)'_s$ сепарабельно. Пусть $\{x'_n\}$ — сильно плотная последовательность в пространстве $(X_0)'_s$. Тогда слабая топология пространства X_0 определяется счетной системой полунорм $p_m(x) = |\langle x, x'_m\rangle|$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Отсюда нетрудно получить, что последовательность $\{x_n\}$, бикомпактная в слабой топологии X_0, слабо секвенциально компактна и в X_0, и в X. Итак, остается лишь выбрать из $\{x_n\}$ такую подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, чтобы для $m = 1, 2, \ldots$ существовал конечный предел $\lim\limits_{n' \to \infty} \langle x_{n'}, x'_m\rangle$.

Достаточность. Обозначим через M произвольное ограниченное множество в X и предположим, что всякая бесконечная последовательность элементов множества M содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу пространства X. Мы должны показать, что замыкание $\overline{M}$ множества M в слабой топологии пространства X слабо бикомпактно в X. В самом деле, тогда пространство X будет рефлексивным по теореме 2 предыдущего параграфа. Поскольку $X_w \subseteq (X'_s)'_{w^*}$, мы имеем $\overline{M} = \overline{\overline{M}} \cap X_w$, где через $\overline{\overline{M}}$ обозначено замыкание множества $\overline{M}$ в слабой* топологии пространства $(X'_s)'_{w^*}$. Обозначим через S'_r шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $0 \in X'_s$. При помощи соответствия

$$\overline{\overline{M}} \ni m \longleftrightarrow \{\langle x', m\rangle;\ \|x'\| \leqslant 1\} \in \prod_{x' \in S'_1} I_{x'},$$

где

$$I_{x'} = \left\{z;\ |z| \leqslant \sup_{m \in \overline{\overline{M}}} |\langle x', m\rangle|\right\},$$

множество $\overline{\overline{M}}$ можно отождествить с некоторым замкнутым подмножеством тихоновского произведения $\prod\limits_{x' \in S'_1} I_{x'}$. По теореме Тихонова множество $\prod\limits_{x' \in S'_1} I_{x'}$ бикомпактно, и поэтому $\overline{\overline{M}}$ бикомпактно в слабой* топологии пространства $(X'_s)'$. Остается, таким образом, лишь убедиться в том, что $\overline{\overline{M}} \subseteq X_w$.

Пусть $x''_0 \in (X'_s)'$ — предельная точка множества $\overline{M}$ в слабой* топологии пространства $(X'_s)'$. Чтобы доказать включение $x''_0 \in X_w$, нужно только показать, что множество $N(x''_0) = \{x' \in X';\ \langle x', x''_0\rangle = 0\}$ слабо* замкнуто. Действительно, если это так, то по доказанному выше следствию найдется такой элемент $x_0 \in X$, что $\langle x', x''_0\rangle = \langle x_0, x'\rangle$

для всех $x' \in X'$. Сначала мы покажем, что

для каждого конечного множества $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ пространства X' существует такой элемент $z \in \overline{M}$, что

$$\langle x'_j, x''_0 \rangle = \langle z, x'_j \rangle \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Это утверждение доказывается следующим образом. Так как элемент x''_0 входит в слабое* замыкание множества $\overline{M}$, найдутся такие $z_m \in \overline{M}$, что

$$\left| \langle z_m, x'_j \rangle - \langle x_j, x''_0 \rangle \right| \leqslant \frac{1}{m} \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Согласно предположениям, из $\{z_m\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $z \in X$, поэтому $z \in \overline{M}$, так как слабое замыкание множества $\overline{M}$ содержится в $\overline{M}$. Таким образом, утверждение (4) доказано.

Далее, если для всякого $r > 0$ множество $N(x''_0) \cap S'_r$ слабо* замкнуто, то, согласно лемме 2, и множество $N(x''_0)$ слабо* замкнуто. Пусть y'_0 принадлежит слабому* замыканию множества $N(x''_0) \cap S'_1$. Нужно показать, что $y'_0 \in N(x''_0) \cap S'_1$. С этой целью возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим три последовательности

$$\{z_n\} \subseteq \overline{M}, \ \{x_n\} \subseteq M \quad \text{и} \quad \{y'_n\} \subseteq N(x''_0) \cap S'_1$$

следующим образом: согласно (4), можно выбрать $z_1 \in \overline{M}$ так, что $\langle z_1, y'_0 \rangle = \langle y'_0, x''_0 \rangle$. Так как z_1 принадлежит слабому замыканию множества M, можно выбрать $x_1 \in M$ так, что $\left| \langle x_1, y'_0 \rangle - \langle z_1, y'_0 \rangle \right| \leqslant \varepsilon/4$. Наконец, поскольку y'_0 лежит в слабом* замыкании множества $N(x''_0) \cap S'_1$, можно найти элемент $y'_1 \in N(x''_0) \cap S'_1$, такой, что $\left| \langle x_1, y'_1 \rangle - \langle x_1, y'_0 \rangle \right| \leqslant \varepsilon/4$. Повторяя эти рассуждения и принимая во внимание (4), мы получим последовательности

$$\{z_n\} \subseteq \overline{M}, \qquad \{x_n\} \subseteq M \qquad \text{и} \qquad \{y'_n\} \subseteq N(x''_0) \cap S'_1,$$

обладающие такими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\langle z_1, y'_0 \rangle = \langle y'_0, x''_0 \rangle, \\
&\langle z_n, y'_m \rangle = \langle y'_m, x''_0 \rangle = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1), \\
&\left| \langle x_n, y'_m \rangle - \langle z_n, y'_m \rangle \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad (m = 0, 1, \ldots, n-1), \\
&\left| \langle x_i, y'_n \rangle - \langle x_i, y'_0 \rangle \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда видно, что

$$|\langle y_0', x_0''\rangle - \langle x_i, y_n'\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Так как $\{x_n\} \subseteq M$, из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке $x \in \overline{M}$. Без ограничения общности можно допустить, что сама последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к $x \in \overline{M}$. Отсюда на основании (5) мы заключаем, что $|\langle x, y_m'\rangle| \geqslant \varepsilon/4$. Так как $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то по теореме Мазура (теорема 2, гл. V, § 1) существует выпуклая комбинация $u = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ $\left(\alpha_j \geqslant 0,\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\right)$, такая, что $\|x - u\| \leqslant \varepsilon/4$. В силу (6) получаем

$$|\langle y_0', x_0''\rangle - \langle u, y_n'\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |\langle y_0', x_0''\rangle - \langle x_j, y_n'\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$|\langle y_0', x_0''\rangle| \leqslant |\langle y_0', x_0''\rangle - \langle u, y_n'\rangle| + |\langle u, y_n'\rangle - \langle x, y_n'\rangle| + |\langle x, y_n'\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|u - x\| \cdot \|y_n'\| + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\langle y_0', x_0''\rangle = 0$, откуда $y_0' \in N(x_0'')$. Вспоминая, что множество S_1' замкнуто в слабой* топологии, мы, наконец, получаем $y_0' \in N(x_0'') \cap S_1'$.

Замечание. Существует обширная литература, посвященная слабым топологиям и сопряженности в B-пространствах; см., например, библиографию в книге Данфорда — Шварца [1].

Параграфы 1—3 этого приложения дают модифицированное и упрощенное изложение материала, имеющегося в книгах Бурбаки [1] и Гротендика [1]. Интересно отметить, что приемы, необходимые для доказательства столь глубокой теоремы Эберлейна [1] — Шмульяна [1], имеются в той или иной форме уже в книге Банаха [1].