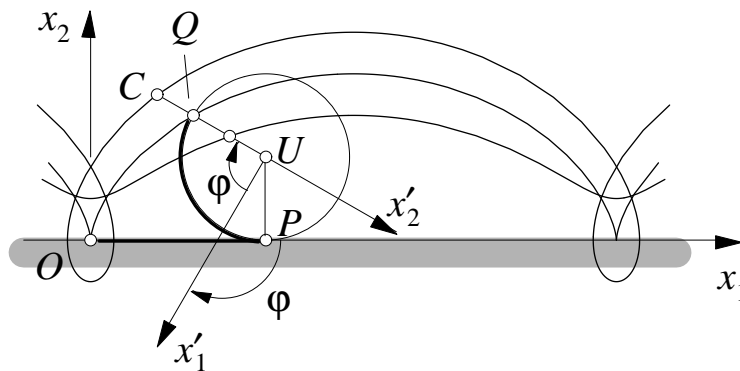


SCRIPT ZUR VORLESUNG

EBENE KINEMATIK

Prof. Dr. G. BÄR
Institut für Geometrie
TU Dresden

WS 2007/2008



Vorwort

Inhalt der Vorlesung

- Beschreibung von stetigen Bewegungsvorgängen geometrischer (starrer) Objekte und ihrer Eigenschaften;
- Geometrische und zeitliche Eigenschaften werden untersucht, wie
 - Punktbahnen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Formgebung, Anordnung, Abmessungen;
 abstrahiert wird von Massen und Kräften

Anwendungen in der Technik

Analyse und Synthese von Mechanismen, Getrieben und Robotern.

Die folgenden Figuren aus [3] zeigen Beispiele.

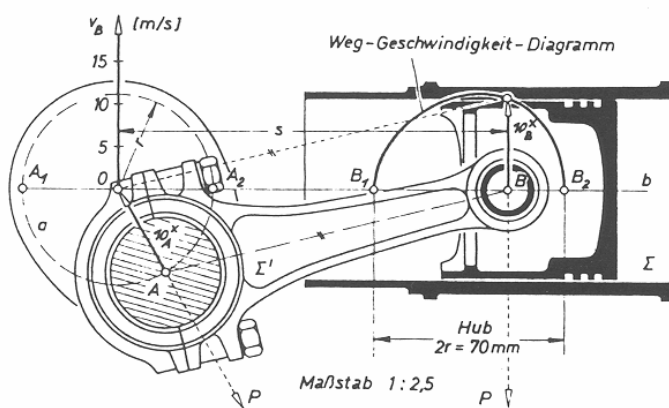


Abb. 12 Ermittlung der Kolbengeschwindigkeit

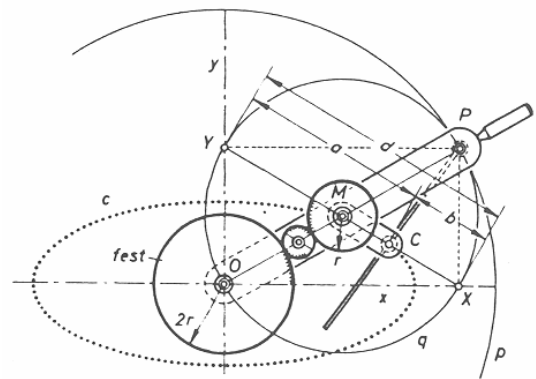


Abb. 27 Ellipsenzirkel mit Schneidensteuerung (Planetengetriebe)

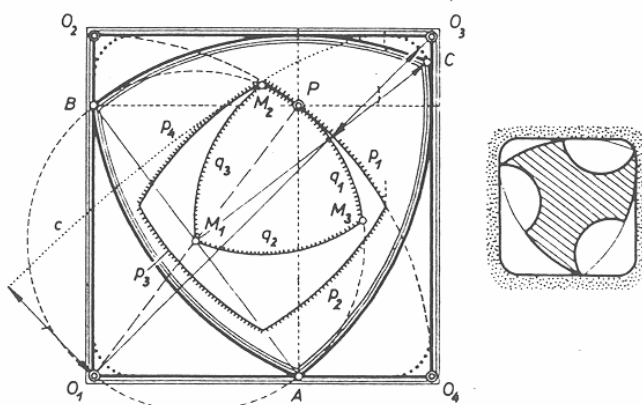


Abb. 32 Reuleaux-Dreieck im Quadrat

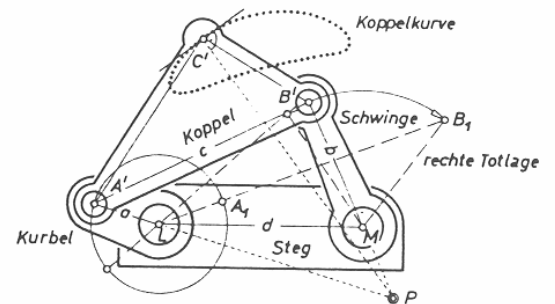


Abb. 48 Gelenviereck (Kurbelschwinger)

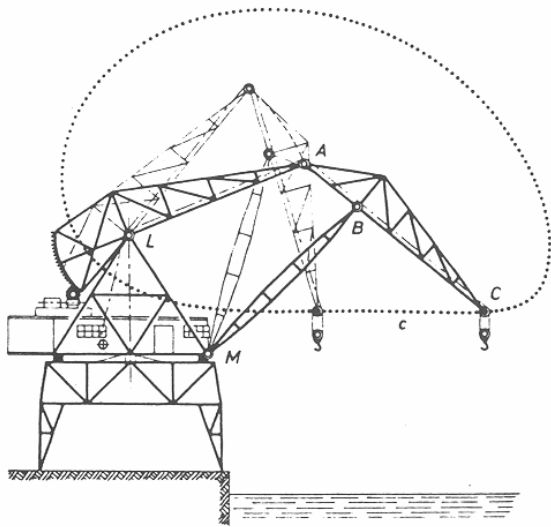


Abb. 64 Angenäherte Geradföhrung bei einem Wippkran

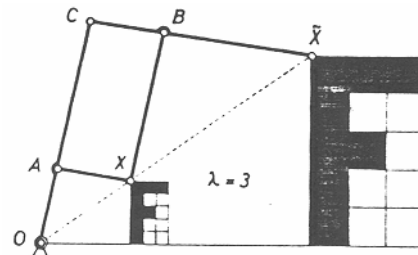


Abb. 73 Storchschnabel (Pantograph) von SCHEINER

Voraussetzungen

Grundkenntnisse in Analytischer- und Differentialgeometrie der euklidischen Ebenen und des Raumes

Literaturempfehlungen

mathematisch orientiert

- [1] Blaschke, W.; Müller, H. R.: *Ebene Kinematik*. Oldenburg 1956
- [2] Müller, H. R.: *Kinematik*. W. de Gruyter 1963
- [3] Wunderlich, W.: *Ebene Kinematik*. Mannheim: Bibl. Inst. 1968
- [4] Bottema, O.; Roth, B.: *Theoretical Kinematics*, New York: Dover Publ. 1990
- [5] Husty, M. et al.: *Kinematik und Robotik*. Berlin: Springer 1997

mathematisch-technisch orientiert

- [6] Beyer, R.: *Technische Raumkinematik*. Berlin: Springer 1963
- [7] Luck, K.; Modler, K.-H.: *Getriebetechnik*. Akademieverlag Berlin 1990
- [8] Krames, J. L.: *Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer*. Wien 1956
- [9] Hohenberg, F.: *Konstruktive Geometrie in der Technik*. Wien 1961

Inhaltsverzeichnis

1 Ebene Zwanglaufbewegungen	1
1.1 Geometrie in der GAUSSschen Zahlenebene	1
1.1.1 Die komplexe Zahl als Punktmodell	1
1.1.2 Addition und Schiebung	1
1.1.3 Multiplikation und Darstellungen des Kreises	2
1.1.4 Satz von ROBERTS	3
1.1.5 Produkte und ihre Anwendungen	4
1.2 Darstellung einer ebenen Zwanglaufbewegung	5
2 Geschwindigkeit und Momentanpol	7
2.1 Absolut- und Führungsgeschwindigkeit	7
2.2 Gang- und Rastpolkurve	9
2.3 BEREISSche Polkette	10
2.4 Bewegung und Umkehrbewegung	11
2.5 FRENET-SERRET-Zwanglauf und Evolventenbewegung	15
2.5.1 Zur Differentialgeometrie ebener Kurven	15
2.5.2 FRENET-SERRET-Zwanglauf	17
2.5.3 Evolventenbewegung	19
2.6 Radlinien	21
2.6.1 Erzeugung und Klassifikation	21
2.6.2 Eigenschaften	23
3 Hüllkurven	26
3.1 Definition und Eigenschaften	26
4 Kinematische Ketten	28
4.1 Dreipolsatz	28
4.2 Anwendungen	30
5 Krümmung von Bahn- oder Hüllkurven	34
5.1 Konstruktion von EULER-SAVARY	34
5.2 Krümmungsmittelpunkt einer Hüllkurve	35
5.3 Analytische Lösung und die Krümmungsverwandschaft	36
5.4 Wendekreis und Wendepol	38
5.5 Satz von BOBILLIER	41
5.6 Krümmung der Hüllkurve einer Geraden	45

1 Ebene Zwanglaufbewegungen

1.1 Geometrie in der GAUSSschen Zahlenebene

1.1.1 Die komplexe Zahl als Punktmodell

Ein probates Handwerkszeug für die geometrische Kinematik in der Ebene sind die komplexen Zahlen. Eine komplexe Zahl wird durch einen Punkt in der GAUSSschen Zahlenebene geometrisch veranschaulicht:

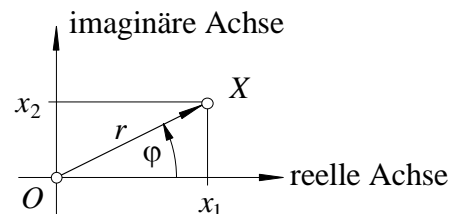
$$X \in E^2 \leftrightarrow X = x_1 + i x_2 = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \quad \text{mit } x_1 = \operatorname{Re}(X), x_2 = \operatorname{Im}(X). \quad (1.1)$$

Der *Absolutbetrag* (*Polradius*) von X ist

$$r = |X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0.$$

Das *Argument* (*Polarwinkel*) von X ist

$$\varphi = \arg X = \operatorname{Arctan}(x_1, x_2) \quad \text{mit } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$



Nach der EULERSchen Formel gilt

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

1.1.2 Addition und Schiebung

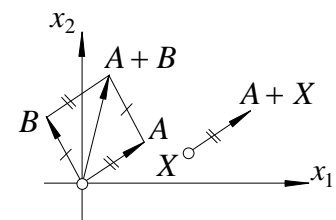
Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen $A = a_1 + i a_2$ und $B = b_1 + i b_2$ folgt der Formel

$$A \pm B = (a_1 \pm b_1) + i(a_2 \pm b_2).$$

Sei $A = a e^{i\varphi}$ eine Konstante. Dann beschreibt die Abbildung

$$X \rightarrow \sigma_A(X) = A + X \quad (1.2)$$

eine *Translation* (*Schiebung*) mit A als Schiebvektor.



1.1.3 Multiplikation und Darstellungen des Kreises

Die Multiplikation komplexer Zahlen $A = a e^{i\alpha}$ und $B = b e^{i\beta}$ folgt der Formel

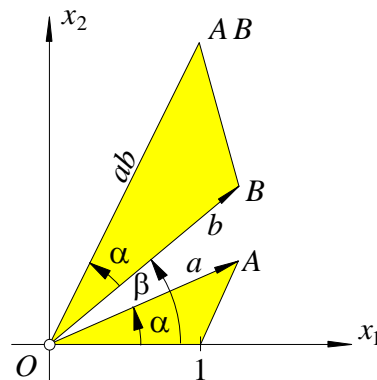
$$AB = ab e^{i(\alpha+\beta)},$$

so daß für den Absolutbetrag bzw. das Argument des Produktes gilt

$$|AB| = ab, \quad \arg(AB) = \alpha + \beta.$$

Bemerkung: $\triangle OIB$ und $\triangle OA(AB)$ haben bei O den gleichen Winkel β und es ist $b:1 = ab:a$.

$\triangle OIB$ und $\triangle OA(AB)$ sind gleichsinnig ähnlich.



Geometrische Deutung: Sei $A = a e^{i\alpha}$ eine Konstante. Dann beschreibt die Abbildung

$$X \rightarrow \psi_A(X) = AX \tag{1.3}$$

eine *Drehstreckung* mit Zentrum O , dem Drehwinkel α und dem Streckfaktor A .

Betrachten wir ein KS($M; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$). Dann gilt

$$\tilde{Z} = A\tilde{X}$$

für den Bildpunkt \tilde{Z} bei Drehstreckung um M mit A . Eine Koordinatentransformation auf das achsenparallele KS($O; x_1, x_2$) lautet

$$X = M + \tilde{X} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{X} = X - M, \quad \tilde{Z} = Z - M.$$

Somit wird eine *Drehstreckung* mit Zentrum M , dem Drehwinkel α und dem Streckfaktor A durch

$$Z - M = (X - M) a e^{i\alpha} \quad \text{bzw.} \quad Z = M + (X - M) a e^{i\alpha} \tag{1.4}$$

beschrieben.

Aus dem letzten Resultat erhalten wir sofort für $a = 1$ eine Darstellung der Drehung eines Punktes X um M durch α nach den Bildpunkt Z :

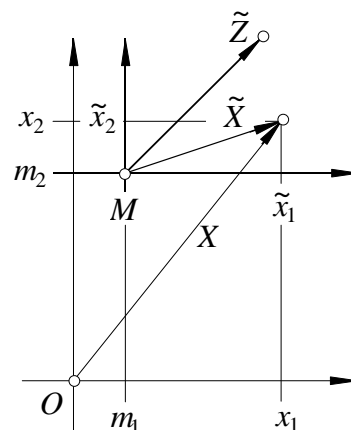
$$X \rightarrow Z = M + (X - M) e^{i\alpha}. \tag{1.5}$$

Mit $X = M + r$ als Urbildpunkt folgt eine Parameterdarstellung des Kreises $k(M, r)$ mit t als Polarwinkel von Z :

$$Z(t) = M + r e^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi. \tag{1.6}$$

Eine Gleichung des Kreises $k(M, r) = \{Z: |M - Z| = r\}$ erhalten wir, indem die Bedingung

$$|M - Z| = r$$



unter Beachtung von $A\bar{A} = a_1^2 + a_2^2 = a^2$ für alle komplexen Zahlen $A = a_1 + ia_2$ ausgerechnet wird. (Die zu A konjugiert komplexe Zahl sei $\bar{A} = a_1 - ia_2$.)

Es folgt eine Gleichung der Gestalt

$$aZ\bar{Z} + \bar{B}Z + B\bar{Z} + c = 0 \quad \text{mit } a, c \in \mathbb{R} \quad \text{und } B \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

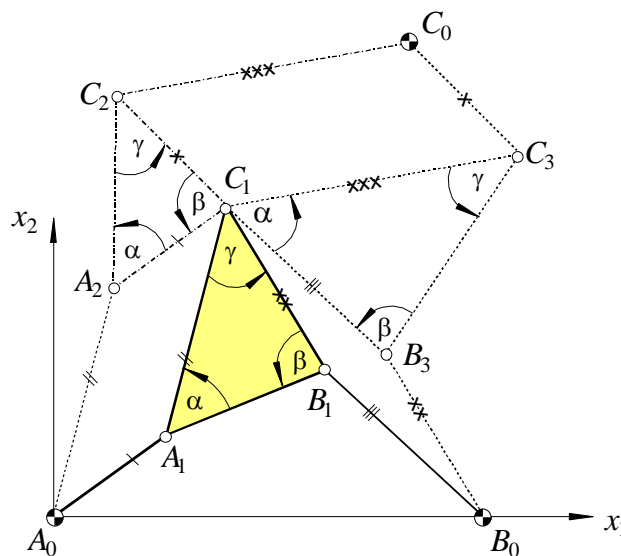
Aus dieser Gleichung ergeben sich Mittelpunkt und Radius gemäß

$$M = -\frac{B}{a}, \quad r^2 = -\frac{c}{a} + M\bar{M}. \quad (1.8)$$

Ü1: Bestätigen Sie die Gleichungen (1.7) und (1.8).

1.1.4 Satz von ROBERTS

Ein *Gelenkviereck* mit den Elementen *Steg* A_0B_0 , *Kurbel* A_0A_1 , *Schwinge* B_0B_1 und *Koppel* A_1B_1 ist nach der Figur definiert. Dreht sich die Kurbel um A_0 , so wird die Koppel A_1B_1 zwangsläufig angetrieben und ein damit starr verbundener Punkt C_1 beschreibt eine Bahnkurve – die *Koppelkurve* c von C_1 .



Wir ergänzen das gegebene Viereck $A_0B_0A_1B_1$ gemäß obiger Figur durch die Parallelogramme $A_0A_1C_1A_2$ und $B_0B_1C_1B_3$. Die Dreiecke $A_2C_1C_2$ und $C_1B_3C_3$ werden als ähnliche Dreiecke zu dem Dreieck $A_1B_1C_1$ konstruiert.

Der Streckfaktor ist dabei

$$\rho = \frac{|C_1 - A_1|}{|B_1 - A_1|} = \frac{|C_2 - A_2|}{|C_1 - A_2|} = \frac{|C_3 - C_1|}{|B_3 - C_1|}.$$

Wegen (1.4) ist dann

$$\begin{aligned} C_1 - A_1 &= Z(B_1 - A_1) \\ C_2 - A_2 &= Z(C_1 - A_2) \quad \text{mit } Z = \rho e^{i\alpha}. \\ C_3 - C_1 &= Z(B_3 - C_1) \end{aligned}$$

Das Parallelogramm $C_1C_3C_0C_2$ wird ergänzt. Dann gilt

$$C_0 - A_0 = (A_2 - A_0) + (C_2 - A_2) + (C_0 - C_2),$$

wobei

$$\begin{aligned} C_0 - C_2 &= C_3 - C_1 = Z(B_3 - C_1) = Z(B_0 - B_1) \\ C_2 - A_2 &= Z(C_1 - A_2) = Z(A_1 - A_0) \\ A_2 - A_0 &= C_1 - A_1 = Z(B_1 - A_1). \end{aligned}$$

Das Einsetzen ergibt

$$C_0 - A_0 = Z(B_1 - A_1) + Z(A_1 - A_0) + Z(B_0 - B_1) = Z(B_0 - A_0) = \text{const.}$$

Das Dreieck $A_0B_0C_0$ ist ebenfalls gleichsinnig ähnlich zum Dreieck $A_1B_1C_1$. Die Lage des Punktes C_0 ist vom Antriebswinkel der Kurbel unabhängig – und damit ist bewiesen:

Theorem 1 (Satz von ROBERTS): *Jede Koppelkurve eines Vieregelenks kann durch zwei weitere Vieregelenke erzeugt werden.*

1.1.5 Produkte und ihre Anwendungen

Das *innere Produkt* zweier komplexer Zahlen $A = a_1 + ia_2 = a e^{i\alpha}$ und $B = b_1 + ib_2 = b e^{i\beta}$ wird folgendermaßen definiert:

$$(A, B) := \text{Re}(A)\text{Re}(B) + \text{Im}(A)\text{Im}(B). \quad (1.9)$$

Es gilt

- $$\begin{aligned} (A, B) &= a_1b_1 + a_2b_2 \\ &= ab \cos(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(A\bar{B} + \bar{A}B) \end{aligned}$$
- $$\cos(\beta - \alpha) = \frac{(A, B)}{ab}$$
- $$(A, B) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder } \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi & (k = 0, \pm 1, \dots) \\ \text{oder } ab = 0. \end{cases}$$

Das *äußere Produkt* von A und B sei

$$[A, B] := \text{Re}(A)\text{Im}(B) - \text{Im}(A)\text{Re}(B). \quad (1.10)$$

Damit gilt

- a) $[A, B] = a_1 b_2 - a_2 b_1$
 $= ab \sin(\beta - \alpha)$
 $= \frac{i}{2}(A\bar{B} - \bar{A}B)$
- b) $[A, B] = -[B, A]$
- c) $[[A, B]]$ ist Flächeninhalt des von A und B aufgespannten Parallelogramms
- d) $[A, B] = 0 \Leftrightarrow A$ und B sind linear abhängig
- e) $\sin(\beta - \alpha) = \frac{[A, B]}{ab}$.

Anwendung: Darstellung einer Geraden $g = PQ$

- 1) Parameterdarstellung: $Z = P + \lambda(Q - P)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- 2) Gleichung $[Z - P, Q - P] = 0$

Ausrechnen liefert die allgemeine Geradengleichung

$$\bar{A}Z + A\bar{Z} = b, \tag{1.11}$$

wobei A ein „Normalenvektor“ von g ist, d. h.

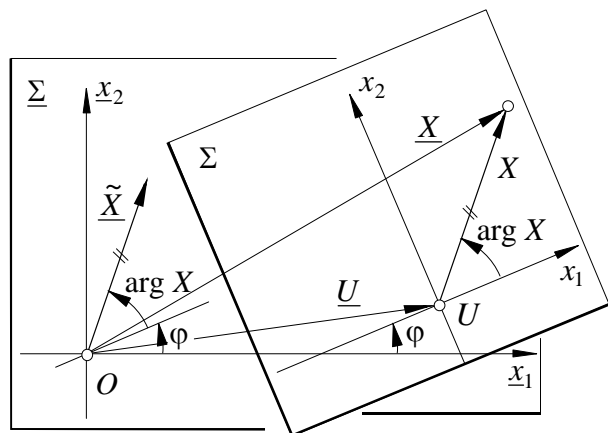
$$(A, Q - P) = 0.$$

1.2 Darstellung einer ebenen Zwanglaufbewegung

Die Ebene in zwei übereinanderliegenden Exemplaren denken – einer *Rastebene* $\underline{\Sigma}$ und einer *Gangebene* Σ . In $\underline{\Sigma}$ bzw. Σ wird ein *Rast-* bzw. ein *Gangkoordinatensystem* gewählt und mit $\underline{\Sigma}$ bzw. Σ identifiziert:

$$\underline{\Sigma} = \text{KS}(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2) \text{ bzw. } \Sigma = \text{KS}(U; x_1, x_2).$$

Der Ursprung U wird in $\underline{\Sigma}$ durch \underline{U} dargestellt. Der Winkel zwischen der ersten Rast- und der ersten Gangkoordinatenachse sei $\varphi := \sphericalangle \underline{x}_1, x_1$.



Transformation von Richtungsvektoren

Werden alle zu \overrightarrow{UX} paralleleichen Vektoren durch $V \in \Sigma$ bzw. durch $\underline{V} \in \underline{\Sigma}$ repräsentiert, dann gilt

$$\underline{V} = |V|e^{i(\varphi + \arg V)} = Ve^{i\varphi}. \quad (1.12)$$

Transformation von Punktkoordinaten

Wird ein Punkt der Ebene durch $X \in \Sigma$ bzw. $\underline{X} \in \underline{\Sigma}$ dargestellt, dann gilt

$$\underline{X} = \underline{U} + \tilde{\underline{X}} = \underline{U} + Xe^{i\varphi}. \quad (1.13)$$

Ändert sich die Lage von Σ gegenüber $\underline{\Sigma}$ in Abhängigkeit von einem reellen Parameter, einem *Zwanglaufparameter*, z. B. der Zeit t , dann liegt eine *ebene Zwanglaufbewegung* $\Sigma / \underline{\Sigma}$ vor. Sie wird nach Wahl von Σ und $\underline{\Sigma}$ durch

$$\underline{X}(t) = \underline{U}(t) + Xe^{i\varphi(t)} \quad (1.14)$$

beschrieben, wobei $\underline{U}(t)$ und $\varphi(t)$ über einem gemeinsamen Definitionsbereich genügend oft stetig differenzierbar seien.

2 Geschwindigkeit und Momentanpol

2.1 Absolut- und Führungsgeschwindigkeit

Sei X mit der Zeit t in Σ beweglich. Dann heißt

$$V_r = \frac{d}{dt} X(t) \quad (2.1)$$

die *Relativgeschwindigkeit* von X . Sie hat bezüglich $\underline{\Sigma}$ die Darstellung

$$\underline{V}_r = V_r e^{i\varphi(t)} = \dot{X} e^{i\varphi(t)}. \quad (2.2)$$

Die *Absolutgeschwindigkeit* von X gewinnt man durch Differentiation von (1.14):

$$\begin{aligned} \underline{V}_a &:= \frac{d}{dt} (\underline{U}(t) + X(t) e^{i\varphi(t)}) \\ &= \underline{\dot{U}} + i \dot{\varphi} X e^{i\varphi} + \dot{X} e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man

$$\underline{V}_f := \underline{\dot{U}} + i \dot{\varphi} X e^{i\varphi} \quad (2.3)$$

als die *Führungsgeschwindigkeit* von X , dann folgt

$$\underline{V}_a = \underline{V}_f + \underline{V}_r. \quad (2.4)$$

Wenn X in Σ fest ist, dann gilt

$$\underline{V}_r = 0 \quad \text{und} \quad \underline{V}_a = \underline{V}_f. \quad (2.5)$$

Wegen $\underline{V} = V e^{i\varphi(t)}$ und $V = \underline{V} e^{-i\varphi(t)}$ folgt aus (2.3)

$$V_f = \underline{\dot{U}} e^{-i\varphi} + i \dot{\varphi} X. \quad (2.6)$$

Für welche Punkte $X \in \Sigma$ gilt $V_f = 0$?

Die Beantwortung der Frage erfordert eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $\dot{\varphi}(t) = 0$.

Dann ist $V_f := \underline{\dot{U}} e^{-i\varphi}$ für alle $X \in \Sigma$, d. h. die Bewegung $\Sigma / \underline{\Sigma}$ ist momentan eine Schiebung mit der für alle Punkte gleichen Führungsgeschwindigkeit V_f .

Fall 2: $\dot{\varphi}(t) \neq 0$.

Dann ist die Bedingung $V_f = 0$ für genau einen Punkt erfüllt, den wir aus (2.6) erhalten:

$$X = \frac{-1}{i\dot{\varphi}} \underline{\dot{U}} e^{-i\varphi} = \frac{i}{\dot{\varphi}} \underline{\dot{U}} e^{-i\varphi} =: P. \quad (2.7)$$

In Rastkoordinaten hat dieser Punkt P die Darstellung

$$\underline{P} = \underline{U} + P e^{i\varphi} = \underline{U} + \frac{i}{\dot{\varphi}} \dot{\underline{U}} \Leftrightarrow \dot{\underline{U}} = i\dot{\varphi}(\underline{U} - \underline{P}). \quad (2.8)$$

Der momentan stillstehende Punkt P der Gangebene heißt 1. *Momentanpol* der Zwanglaufbewegung $\Sigma / \underline{\Sigma}$, kurz 1. *Pol*.

Als Punkt der Gang- bzw. Rastebene aufgefaßt, wird der 1. Pol auch als *Gang-* bzw. *Rastpol* bezeichnet.

Bis auf Widerruf betrachten wir nur Punkte, die in Σ fest sind, und sprechen deshalb kurz von deren Geschwindigkeit anstelle von Führungsgeschwindigkeit.

Es soll nun eine Darstellung der Geschwindigkeit mit Hilfe des 1. Pols P erreicht werden. Wegen (2.3) und (2.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \dot{\underline{U}} + i\dot{\varphi} X e^{i\varphi} = i\dot{\varphi}(\underline{U} - \underline{P}) + X i\dot{\varphi} e^{i\varphi} \\ &= i\dot{\varphi}(\underline{U} + X e^{i\varphi} - \underline{P}) = i\dot{\varphi}(\underline{X} - \underline{P}) \\ &= \dot{\varphi} e^{i\frac{\pi}{2}}(\underline{X} - \underline{P}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die geometrische Interpretation dieser Formel besagt, daß die Geschwindigkeit \underline{V} eines Punktes X durch eine Drehstreckung mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ und dem Streckfaktor $\dot{\varphi}$ entsteht, angewendet auf $\underline{X} - \underline{P}$. Wegen

$$|\underline{V}| = |\dot{\varphi}| |\underline{X} - \underline{P}| =: |\omega| \cdot r$$

ist der Absolutbetrag der Geschwindigkeit proportional zur Entfernung $r = |\underline{X} - \underline{P}|$ mit dem Proportionalitätsfaktor $|\omega|$.

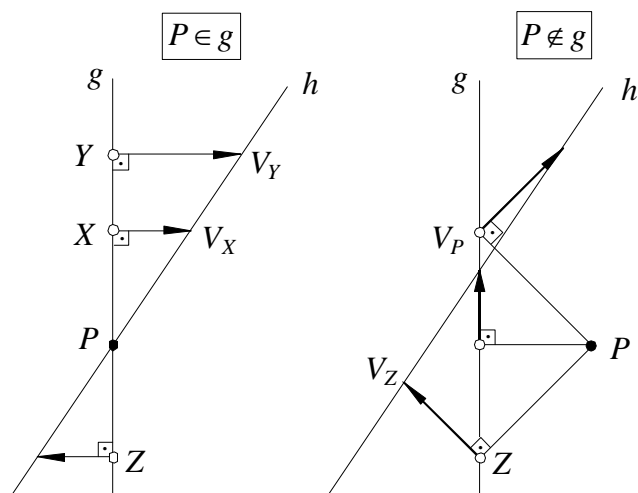
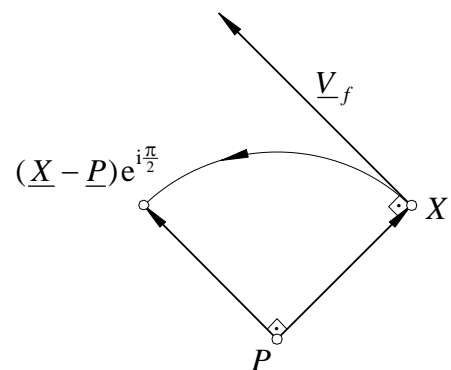
Man nennt

$$\omega := \dot{\varphi}$$

die *Winkelgeschwindigkeit* von $\Sigma / \underline{\Sigma}$.

Satz 1: Das Geschwindigkeitsfeld der Bewegung $\Sigma / \underline{\Sigma}$ ist momentan das Geschwindigkeitsfeld einer Drehung um den 1. Pol P mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Dabei geht die Bahnnormale eines beliebigen Punktes durch den 1. Pol.

Die Vektorspitzen der Geschwindigkeiten der Punkte einer Geraden g liegen auf einer Geraden h .



Beweis: Gerade AB : $X = A + \lambda(B - A)$

Geschwindigkeit von X : $\underline{V} = \dot{\phi}(X - P)e^{i\frac{\pi}{2}}$

Geschwindigkeit von $X \in AB$: $\underline{V} = \dot{\phi}(A + \lambda(B - A) - P)e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\underline{V} = \underbrace{\dot{\phi}(A - P)e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\text{fest}} + \lambda \underbrace{\dot{\phi}(B - A)e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\text{fest}} \Rightarrow \underline{V} = \underline{V}(\lambda) \text{ ist eine Gerade.} \quad \square$$

Beispiel:

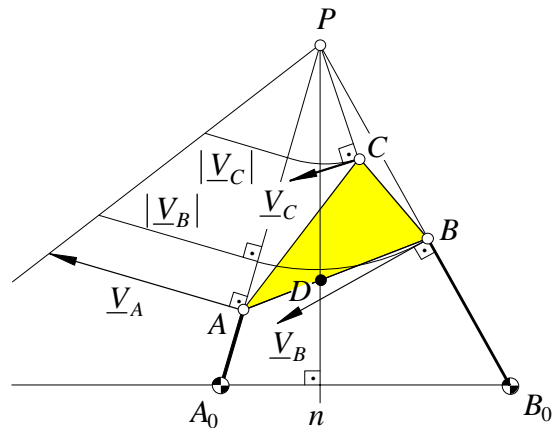
Gegeben: Viereck A_0ABB_0 mit Koppelpunkt C
 Geschwindigkeit \underline{V}_A des Punktes A

Gesucht: 1. Geschwindigkeiten \underline{V}_B und \underline{V}_C
 2. Punkt D auf AB , der sich momentan parallel zu der Geraden A_0B_0 bewegt

Lösung: A_0A und B_0B sind Bahnnormalen von A bzw. B und schneiden sich im Pol P .

Zu 1: Aus $|A - P| : |\underline{V}_A| = |B - P| : |\underline{V}_B|$ wird \underline{V}_B gefunden.

Zu 2: Wegen $\underline{V}_D \parallel A_0B_0$ liegt D auf der Normalen n zu A_0B_0 durch P . Deshalb $D = n \cap AB$.



2.2 Gang- und Rastpolkurve

Die Menge aller Gang- bzw. Rastpole bildet die *Gang-* bzw. *Rastpolkurve*

$$p: G := P(t) \text{ bzw. } \underline{p}: R := \underline{P}(t)$$

in der Gang- bzw. Rastebene.

Satz 2: Bei $\Sigma / \underline{\Sigma}$ rollt die Gangpolkurve p auf der Rastpolkurve \underline{p} gleitungslos ab.

Beweis: Zuerst wird gezeigt, daß sich diese Kurven stets im 1. Pol berühren, d. h. daß die Richtungsvektoren der Gang- und Rastpolkurventangente linear abhängig sind:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\frac{i}{\phi} \dot{U}}_{=F} e^{-i\phi} \right) = \dot{F} e^{-i\phi} + (-i\dot{\phi}) e^{-i\phi} F$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (U + \frac{i}{\phi} \dot{U}) = \frac{\partial}{\partial t} (U + F) = \dot{U} + \dot{F}$$

Darstellung von $\frac{\partial G}{\partial t}$ in $\underline{\Sigma}$:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} e^{i\phi} = \dot{F} + (-i\dot{\phi})F = \dot{F} + (-i\dot{\phi}) \frac{i}{\phi} \dot{U} = \dot{F} + \dot{U}$$

Also gilt

$$\frac{\partial \underline{R}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{G}}{\partial t} = \underline{\dot{U}} + \underline{\dot{F}} =: \underline{V}_P. \quad (*)$$

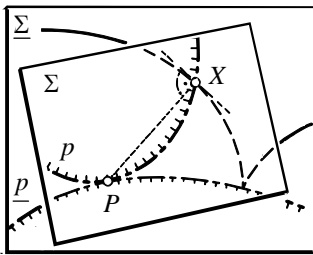
Damit ist die Berührung von Gang- und Rastpolkurve im 1. Pol gezeigt. Darüber hinaus zeigt (*), daß der 1. Pol die beiden Kurven mit der gleichen Geschwindigkeit \underline{V}_P durchläuft. Diese heißt die *Polwechselgeschwindigkeit* \underline{V}_P .

Vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 legt der 1. Pol auf p bzw. \underline{p} den Weg

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{G}| dt \quad \text{bzw.} \quad \underline{s} = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{R}| dt$$

zurück. Wegen (*) gilt $s = \underline{s}$ für beliebige Zeitpunkte t_1 und t_2 . Deshalb rollen Gang- und Rastpolkurve gleitungslos aufeinander ab.

Folgerung: Abgesehen von ihrem zeitlichen Verlauf kann eine Bewegung so erzeugt werden, daß auf der Kurve \underline{p} von $\underline{\Sigma}$ die Kurve p von Σ gleitungslos abrollt.



Praktische Hilfsmittel für ein einfaches Modell:

$\underline{\Sigma}$ = Zeichenblatt, Σ = Transparentblatt;

gleiche Bogenlängenabschnitte auf beiden Kurven markieren

Entartungen:

- a) $P(t) \equiv \text{const.}$: p und \underline{p} entarten in einen gemeinsamen Punkt, um den eine (kontinuierliche) Drehung erfolgt.
- b) $\dot{\varphi}(t_0) = 0$: Es liegt eine momentane Schiebung mit der Geschwindigkeit $\underline{\dot{U}}$ vor. Dann ist P der Fernpunkt der zur Schiebgeschwindigkeit senkrechten Geraden.
- c) $\dot{\varphi}(t) \equiv 0$: $\Sigma / \underline{\Sigma}$ ist eine Schiebung. Die Gang- und Rastpolkurve bestehen nur aus Fernpunkten.

2.3 BEREISSche Polkette

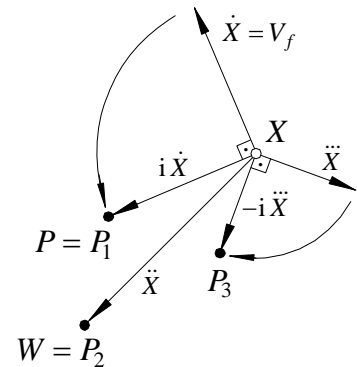
Der Pol i-ter Ordnung (i. Pol) P_i sei jener Punkt von Σ , der durch das Verschwinden der i. Ableitung nach dem Drehwinkel φ als Bewegungsparameter gekennzeichnet ist. Damit $\varphi = t$ und $\dot{\varphi} = 1$. Durch fortgesetzte Differentiation und Umstellung von (1.14) findet man der Reihe nach diese Punkte und nennt sie die *BEREISSche Polkette*

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \underline{U} - \underline{\dot{U}} / i && \text{(Momentanpol } P) \\
 P_2 &= \underline{U} - \underline{\ddot{U}} / i^2 = \underline{U} + \underline{\ddot{U}} && \text{(Wendepol } W) \\
 &\vdots \\
 P_n &= \underline{U} - \underline{U}^{(n)} / i^n.
 \end{aligned}$$

Drückt man die i . Ableitung mit Hilfe des i . Poles aus, so folgt

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X - P_1)i \\ \ddot{X} &= (X - P_2)i^2 \\ &\vdots \\ X^{(n)} &= (X - P_n)i^n. \end{aligned}$$

Die Figur zeigt die geometrischen Zusammenhänge zwischen den Ableitungen und den Polen bis zur 3. Ordnung.



2.4 Bewegung und Umkehrbewegung

Bei $\Sigma / \underline{\Sigma}$ befindet sich der „Beobachter“ der Bewegung in $\underline{\Sigma}$.

Diese Bewegung ist jedoch für einen „Beobachter“ in Σ eine Bewegung von $\underline{\Sigma}$ in Σ , die als zugehörige *Umkehrbewegung* (inverse Bewegung) $\underline{\Sigma} / \Sigma$ bezeichnet wird.

Beim Übergang zur Umkehrbewegung vertauschen die Rast- und Gangpolkurven ihre Bedeutung. Wenn bei $\Sigma / \underline{\Sigma}$ ein Punkt C eine Bahnkurve \underline{c} durchläuft, dann gleitet bei $\underline{\Sigma} / \Sigma$ die Kurve \underline{c} stets durch den Punkt C .

Wegen $\Sigma / \underline{\Sigma}$: $\underline{X} = \underline{U} + X e^{i\varphi}$ ergibt sich durch Umstellung

$$X = (\underline{X} - \underline{U})e^{-i\varphi} = -\underline{U}e^{-i\varphi} + \underline{X}e^{i(-\varphi)}$$

und damit die Bewegungsgleichung der Umkehrbewegung $\underline{\Sigma} / \Sigma$:

$$\underline{X} = \underline{U} + \underline{X}e^{i\psi} \quad \text{mit} \quad \underline{U} = -\underline{U}e^{i\psi}, \quad \psi = -\varphi.$$

Folgerung: Die Winkelgeschwindigkeit der inversen Bewegung ist entgegengesetzt gleich zur Winkelgeschwindigkeit der Bewegung: $\dot{\psi} = -\dot{\varphi}$.

Beispiel: Kreuzschieberbewegung und ihre Umkehrbewegung

Gegeben: Führungen der Punkte A bzw. B auf den Geraden \underline{x}_1 bzw. \underline{x}_2 , wobei $\overline{AB} = 2r$

Gesucht: Bewegungsgleichung, Polbahnen, Bahnkurven

Lösung: $\underline{A} = s$ (variabel)

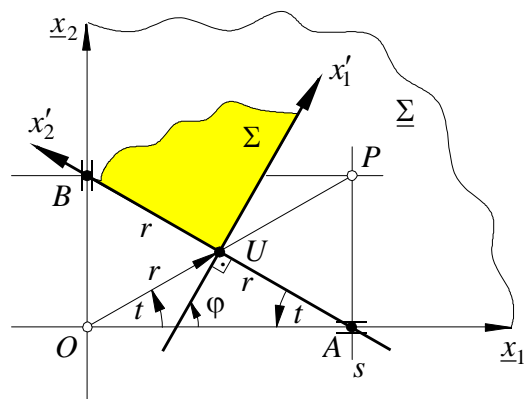
$$\underline{B} = i\sqrt{(2r)^2 - s^2} \quad (\text{Pythagoras})$$

$$\underline{U} = \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{B}) = \frac{s}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{(2r)^2 - s^2}$$

$$|\underline{U}|^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}((2r)^2 - s^2) = r^2$$

\Rightarrow Der Punkt U bewegt sich auf einem Kreis um O vom Radius r mit der Parameterdarstellung

$$\underline{U} = re^{it} \quad (t := \arg U \text{ als Bewegungsparameter}).$$



Weiter folgt aufgrund der Winkelbeziehungen im gleichschenkligen Dreieck OUA :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - t.$$

Mit (1.14) ergibt sich die *Bewegungsgleichung*

$$\underline{X}(t) = \underline{U}(t) + X e^{i\varphi} = r e^{it} + X e^{i(\frac{\pi}{2}-t)}. \quad (2.10)$$

Der 1. Pol ergibt sich als Schnittpunkt der Bahnnormalen der Punkte A und B . Nach dem Satz des THALES liegt der Gangpol G in Σ demnach stets auf dem Kreis mit dem Durchmesser \overline{AB} , der Mitte U und dem Radius r .

Als Rastpol liegt P stets im Abstand $2r$ von O . Deshalb sind *Gang- bzw. Rastpolkurve der Kreis $p(U, r)$ bzw. der Kreis $\underline{p}(O, 2r)$* . (Dies kann man über die Formeln (aus 2.3) auch analytisch bestätigen.)

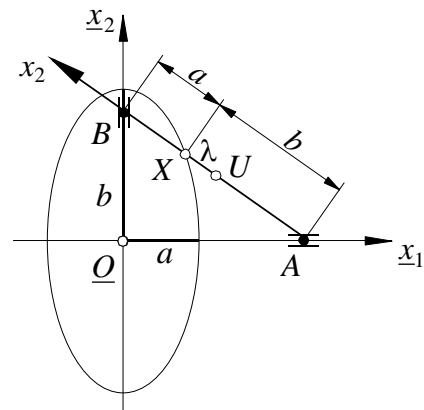
Bahnkurven:

1. Mittelpunkt U von \overline{AB} läuft auf dem Kreis (O, r) .
2. Ein Punkt

$$X = i\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda \neq \pm r)$$

auf der Geraden AB von Σ durchläuft die Bahnkurve

$$\begin{aligned} \underline{X}(t) &= r e^{it} + (i\lambda) e^{i(\frac{\pi}{2}-t)} \\ &= r(\cos t + i \sin t) + i\lambda(\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}_{\sin t} + i \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}_{\cos t}) \\ &= \underbrace{a}_{(r-\lambda)} \cos t + i \underbrace{b}_{(r+\lambda)} \sin t. \end{aligned}$$



Das ist eine *Ellipse mit dem Mittelpunkt O und den Halbachsenlängen a bzw. b auf der x_1 - bzw. x_2 -Achse.*

Anwendung: Ellipsenzirkel, Papierstreifenkonstruktion der Ellipse

3. Ein Punkt $Y = r e^{i\alpha}$ des Gangkreises p durchläuft die Bahnkurve

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t) &= r e^{it} + r e^{i\alpha} e^{i(\frac{\pi}{2}-t)} = r(e^{it} + e^{i(\frac{\pi}{2}-t+\alpha)}) \\ &= r(\cos t + i \sin t + \cos \psi + i \sin \psi) \\ &= r \underbrace{(\cos t + \cos \psi)}_{2 \cos \frac{t+\psi}{2} \cos \frac{t-\psi}{2}} + i \underbrace{(\sin t + \sin \psi)}_{2 \sin \frac{t+\psi}{2} \cos \frac{t-\psi}{2}} = 2r \cos \frac{t-\psi}{2} e^{i \frac{t+\psi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{t+\psi}{2} &= \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\arg \underline{Y}(t) = \text{const. und } \left| 2r \omega \cos \frac{t-\psi}{2} \right| \leq 2r.$$

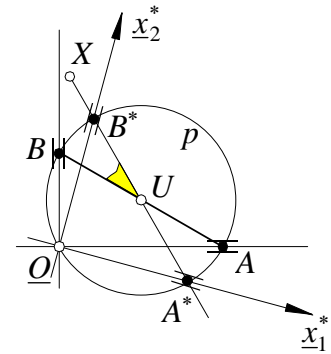
Folglich durchläuft $Y \in p$ einen Durchmesser des Rastkreises, wie dies speziell die Punkte A und B tun.

4. Ein Punkt $X \in \Sigma$ ($X \neq U$, $X \notin p$) bewegt sich in starrer Verbindung mit A und B und dem Gangkreis p .

Die Schnittpunkte A^* bzw. B^* von UX mit p laufen (nach 3.) auf einer Geraden \underline{x}_1^* bzw. \underline{x}_2^* durch O .

Nach dem Satz von THALES gilt $\underline{x}_1^* \perp \underline{x}_2^*$.

Die Punkte A^* und B^* auf \underline{x}_1^* und \underline{x}_2^* bilden einen „neuen“ Kreuzschieber. Nach 2. läuft X deshalb *auf einer Ellipse* mit den Hauptachsen auf \underline{x}_1^* bzw. \underline{x}_2^* .

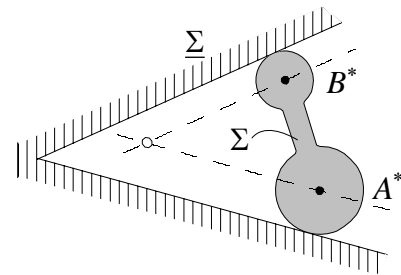


Zusammenfassung

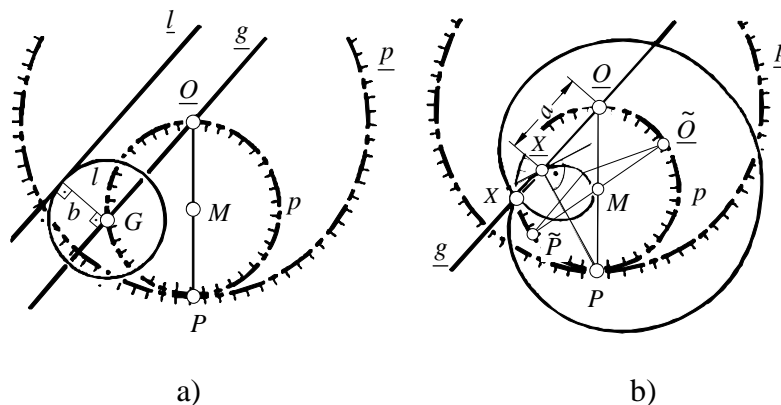
Abgesehen von den Punkten des Gangkreises, die auf Durchmessern des Rastkreises laufen, bewegen sich die anderen Punkte auf konzentrischen Ellipsen. Die Kreuzschieberbewegung heißt deshalb auch *Ellipsenbewegung*.

Bemerkungen:

1. Werden zwei Punkte eines beliebigen starren Systems auf zwei nicht parallelen Geraden geführt, so liegt eine Ellipsenbewegung vor. Entsprechend gilt eine Verallgemeinerung der Papierstreifenkonstruktion der Ellipse.
2. Auch hier liegt Ellipsenbewegung vor, wenn das 8-förmige Objekt im Winkelbereich geführt wird.



Die Umkehrbewegung der Ellipsenbewegung heißt *Konchoidenbewegung*. Dabei rollt \underline{p} jetzt auf p ab.



Eigenschaften:

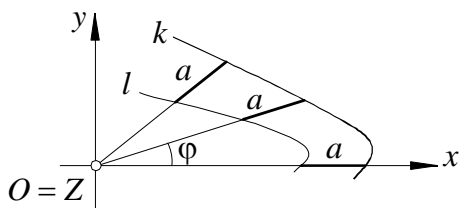
1. Fig a): Bei Ellipsenbewegung läuft $G \in p$ auf g durch Q . Bei der Umkehrbewegung (Konchoidenbewegung) geht eine Gerade g durch Q deshalb stets durch $G = g \cap p$.

Eine zu g parallele Gerade l im Abstand b berührt deshalb stets einen Kreis l vom Radius b um G . Bei Konchoidenbewegung ist die Hüllkurve*) jeder Geraden ($\ni Q$) ein Kreis.

2. Fig. b): Ein Punkt $X \in \Sigma$ definiert $g = OX$ und damit den Schnittpunkt $X = p \cap g$. Nach 1. dreht sich g um X , wobei $OX = a$ fest ist.

Die Bahnkurve (PASCALSche Schnecke, Kreiskonchoide) von X entsteht, indem von $Q = g \cap p$ stets die Länge a abgetragen wird und sich dabei g um $X \in p$ dreht.

Verallgemeinerung:



Eine Grundkurve $l: r = f(\varphi)$ und das Zentrum $Z = O$ definieren die Konchoide $k: r = f(\varphi) + a$ (Polargleichung).

Gleichung der Kreiskonchoide

Kreis $l: f(\varphi) = d \cos \varphi, Z \in l$

Kreiskonchoide: $r = d \cos \varphi + a$

In diese Polargleichung werden kartesische Koordinaten

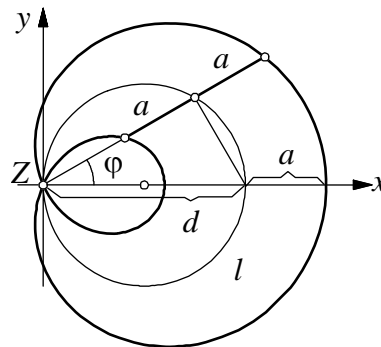
$x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$ eingeführt, dann folgt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = d \frac{x}{r} + a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = dx + a \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} - dx = a \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 - dx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$



Diese Gleichung zeigt, dass die Kreiskonchoide eine algebraische Kurve 4. Ordnung ist.

*) **Definition:** Kurve k in Σ erzeugt bei Σ / Σ eine Kurvenschar $S(k)$.

Eine Kurve, die in jedem Punkt von einer Kurve aus $S(k)$ berührt wird, heißt *Hüllkurve* von k bei Σ / Σ .

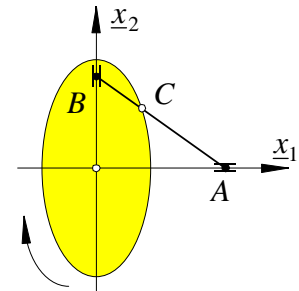
Bezeichnungen:

- $a < d$: verschlungene Kreiskonchoide (siehe Figur)
- $a > d$: gestreckte Kreiskonchoide (isolierter Doppelpunkt Z)
- $a = d$: gespitzte Kreiskonchoide (Kardioide).

3. Ellipsenbewegung: Punkt $C \in AB$ läuft auf einer Ellipse e

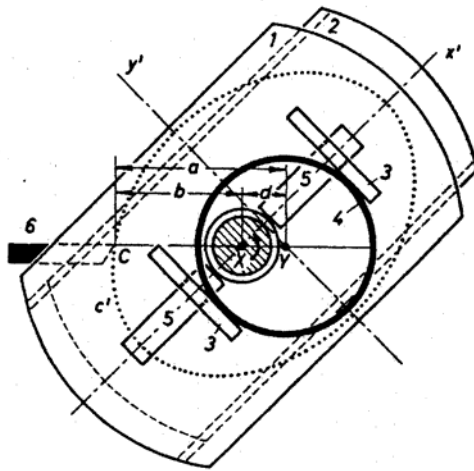
Konchoidenbewegung: Die Geraden \underline{x}_1 und \underline{x}_2 laufen durch feste Punkte A, B .

Die Ellipse e läuft stets durch den festen Punkt C .



Anwendungen:

1. In C Schneide eines Werkzeugs anbringen – diese schneidet eine Ellipse.
 \Rightarrow *Ovalwerk* (Zusatzvorrichtung für Drehbank) zum Drehen elliptischer Querschnitte



2. OLDHAM-Kupplung paralleler Wellen



2.5 FRENET-SERRET-Zwanglauf und Evolventenbewegung

2.5.1 Zur Differentialgeometrie ebener Kurven

Eine Kurve c : $X = X(s)$ sei natürlich parametrisiert, d. h.

$$T(s) := \frac{d}{ds} X(s) = X'(s) = t_1(s) + i t_2(s)$$

ist *Einheitsvektor in Tangentenrichtung* an c bei jeder Stelle s . Weiter sei

$$N(s) := \text{Vierteldrehung}(T(s)) = -t_2(s) + i t_1(s)$$

Kurvennormaleneinheitsvektor.

Es gelten die FRENETSchen Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T, \end{aligned} \tag{2.11}$$

wobei

$$\kappa = \kappa(s) = [X', X''] = x_1' x_2'' - x_2' x_1''.$$

Für eine Kurve $c: Z = Z(t)$ mit irgendeinem Parameter t gilt

$$\kappa = \kappa(t) = \frac{[\dot{Z}, \ddot{Z}]}{|\dot{Z}|^3}. \tag{2.12}$$

Die Geraden sind durch $\kappa \equiv 0$ gekennzeichnet.

$W \in c$ heißt ein *Wendepunkt*, wenn dort $\kappa = 0$ gilt.

An einer Stelle t mit $\kappa \neq 0$ heißt

$$M = Z + \frac{1}{\kappa} N \tag{2.13}$$

der *Mittelpunkt* des *Krümmungskreises* $k(M, \rho)$ mit dem *Krümmungsradius* $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

In der orientierten euklidischen Ebene hat das Vorzeichen der Krümmung κ eine geometrische Bedeutung:

Wenn $\kappa > 0$ (< 0), dann liegt M links (rechts) der Kurventangente bezüglich der durch T gegebenen Orientierung.

Im Fall $\kappa = 0$ ist M der Fernpunkt der Kurvennormale.

Bemerkungen:

1. Mit dem *Kontingenzwinkel* $\varphi := \sphericalangle(T(t), T(t + \Delta t))$ und der Bogenlänge $s = \widehat{Z(t)Z(t + \Delta t)}$ gilt

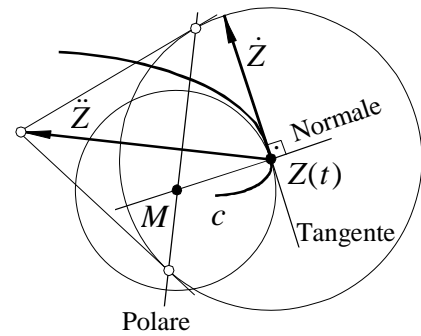
$$\kappa = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi}{s}. \tag{2.14}$$

2. Sei n bzw. n_Δ die durch $N(t)$ bzw. $N(t + \Delta t)$ bei $Z(t)$ bzw. $Z(t + \Delta t)$ bestimmte Kurvennormale.

Wenn $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} n_\Delta = n$, dann gilt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (n_\Delta \cap n) = M. \tag{2.15}$$

Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer ebenen Kurve c bildet wieder eine Kurve – die *Evolute* c^* von c .



3. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes nach BEREIS:

Ein Punkt S auf $c : Z = Z(t)$ heißt *Scheitel(punkt)*, wenn

$$\kappa' = \frac{d}{ds} \kappa = 0$$

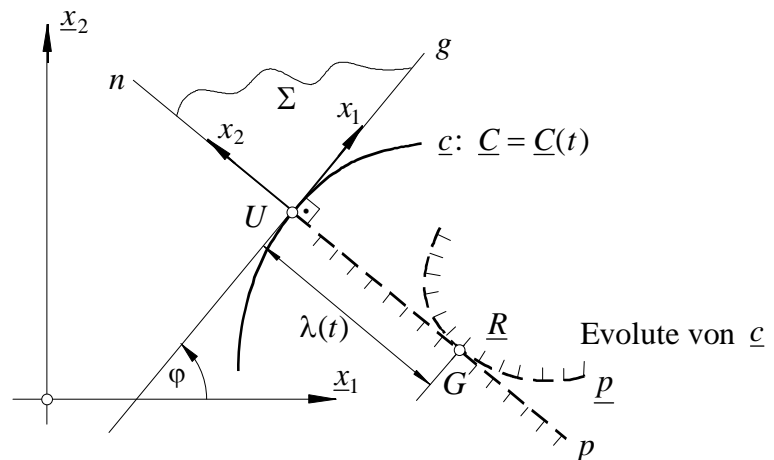
(das ist ein Punkt stationärer Krümmung). Mit (2.12) findet man die

Scheitelbedingung:

$$[\dot{Z}, \ddot{Z}](\dot{Z}, \dot{Z}) - 3\dot{Z}, \ddot{Z} = 0.$$

2.5.2 FRENET-SERRET-Zwanglauf

Wenn ein Punkt U von Σ eine Kurve c durchläuft und dabei eine Gerade g von Σ so geführt wird, daß sie stets mit der Tangente von c im Punkt U zusammenfällt, dann heißt die Bewegung $\Sigma / \underline{\Sigma}$ der FRENET-SERRET-Zwanglauf oder die *Begleitbewegung* B_c der Kurve c von $\underline{\Sigma}$.



Zur analytischen Darstellung von B_c wählen wir $\Sigma = (U; x_1, x_2)$ mit $x_1 = g$.

Dann ist

$$B_c: \underline{X}(t) = \underline{C}(t) + X e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arg \dot{\underline{C}}.$$

Wir berechnen die Gang- und Rastpolkurve:

Es ist

$$G = \frac{i}{\dot{\varphi}} \dot{\underline{U}} e^{-i\varphi} \quad \text{gemäß (2.7),}$$

wobei hier

$$\dot{\underline{U}} = \dot{\underline{C}} = |\dot{\underline{C}}| e^{i\varphi}, \quad \dot{\underline{C}} =: \dot{a} + i \dot{b}, \quad \varphi = \arg \dot{\underline{C}} = \arctan \frac{\dot{b}}{\dot{a}}.$$

Wegen

$$\dot{\varphi} = \left(\arctan \frac{\dot{b}}{\dot{a}} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{\dot{b}}{\dot{a}} \right)^2} \frac{\ddot{b}\dot{a} - \dot{b}\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1}{\dot{a}^2 + \dot{b}^2} (\ddot{b}\dot{a} - \dot{b}\ddot{a}) = \frac{1}{|\dot{\underline{C}}|^2} [\dot{\underline{C}}, \ddot{\underline{C}}]$$

folgt für $[\dot{\underline{C}}, \ddot{\underline{C}}] \neq 0$,

$$G = \frac{i|\dot{\underline{C}}|^2}{[\dot{\underline{C}}, \ddot{\underline{C}}]} |\dot{\underline{C}}| e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = \frac{|\dot{\underline{C}}|^3}{[\dot{\underline{C}}, \ddot{\underline{C}}]} i.$$

D. h. geometrisch: Der Gangpol G liegt für alle t auf der Kurvennormalen n (hier die x_2 -Achse) und der Abstand \overline{UG} ist

$$\lambda(t) = \frac{|\dot{\underline{C}}|^3}{[\dot{\underline{C}}, \ddot{\underline{C}}]}.$$

Ein Vergleich mit (2.12) zeigt, daß G der Krümmungsmittelpunkt von \underline{c} ist. Mit (2.15) folgt:

Satz 1: Die Rastpolkurve \underline{p} der Begleitbewegung B_c ist die Evolute \underline{c}^* von \underline{c} . Die Gangpolkurve p ist die Normale n zu g durch U in Σ .

Jede Kurvennormale von \underline{c} berührt die Evolute \underline{c}^* im zugehörigen Krümmungsmittelpunkt, der mit dem 1. Pol zusammenfällt.

Die Evolute \underline{c}^* ist die Hüllkurve aller Kurvennormalen von \underline{c} .

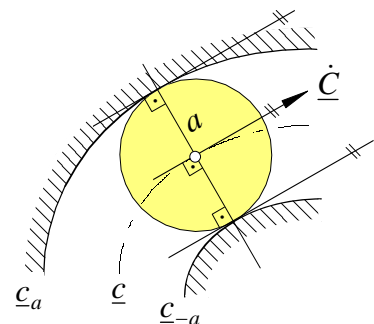
Definition: Eine Kurve \underline{c} : $\underline{C} = \underline{C}(t)$ bestimmt die Parallelkurve (Äquidistante)

$$\underline{c}_a: \underline{X}(t) = \underline{C}(t) + a \underbrace{i \frac{\dot{\underline{C}}}{|\dot{\underline{C}}|}}_{\text{Normaleneinheitsvektor von } \underline{c} \text{ an der Stelle } t}$$

im Abstand $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Anwendung: Führung einer Rolle zwischen \underline{c}_a und \underline{c}_{-a}

Mitte der Rolle läuft auf \underline{c} ;
Rollendurchmesser ist $2|a|$



Satz 2: Jede Parallelkurve \underline{c}_a einer Kurve \underline{c} erzeugt die gleiche Begleitbewegung wie die Kurve \underline{c} selbst. Folglich stimmen die Evoluten von \underline{c}_a und \underline{c} überein.

Bemerkung: Die Parallelkurven \underline{c}_a und \underline{c}_{-a} sind zwei Teile der Hüllkurve des Kreises vom Radius $|a|$, dessen Mittelpunkt auf einer Kurve \underline{c} geführt wird.

2.5.3 Evolventenbewegung

Die *Evolventenbewegung* \mathfrak{E} wird durch das Abrollen einer Geraden $g \subset \Sigma$ auf einer Kurve $p \subset \Sigma$ erzeugt (die offenbar als Gang- bzw. Rastpolkurve fungieren).

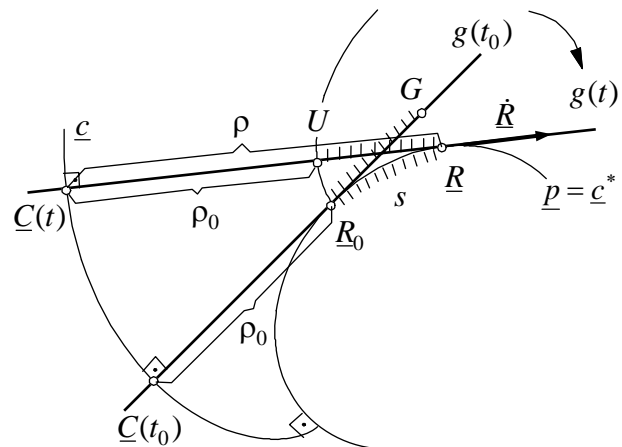
Jeder Punkt $C \in g$ beschreibt eine *gespitzte Evolvente* \underline{c} . (Bei $C \notin g$ entsteht eine verschlungene oder gestreckte Evolvente.)

Da jede Begleitbewegung eine Evolventenbewegung ist, folgt mit den Resultaten aus 2.6.2:

Satz 3: Die Rastpolkurve \underline{p} ist die Evolute von jeder Evolvente der Punkte von g .

Folgerung: Je zwei Evolventen von \mathfrak{E} sind Parallelkurven.

Satz 4: Die Länge eines Bogens auf der Evolute \underline{c}^* einer Evolvente \underline{c} ist gleich dem Betrag der Differenz der zu seinen Endpunkten gehörenden Krümmungsradien von \underline{c} .



Beweis: $\underline{c}^* = \underline{p}$, $\underline{c} =$ Evolvente von C , $s = s(t) - s(t_0)$, $\overline{C(t)R} = \rho$, $\overline{C(t_0)R_0} = \rho_0$.

Da g gleitungslos rollt, folgt $s = \widehat{R_0R} = \widehat{GR} = |\rho - \rho_0|$. □

Folgerung: Wird ein längs \underline{p} gelegter Faden (stets im gespannten Zustand) abgewickelt, so bewegt sich jeder seiner Punkte auf einer Evolvente, die deshalb auch *Abwickelkurve* heißt.

Analytische Darstellung einer Evolventenbewegung \mathfrak{E}

Seien $\underline{p}: \underline{R} = \underline{R}(t)$, $g \subset \Sigma$ die x_1 -Achse und $U = R(t_0)$ der Ursprung von Σ .

Die Abrollbedingung besagt, daß

$$s(t) = \widehat{R_0R} = \widehat{UR}.$$

Mit $\underline{\dot{R}}$ als Richtungsvektor von g in jedem Moment t ist bekanntlich

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\underline{\dot{R}}(\tau)| d\tau.$$

Wir setzen an

$$\mathfrak{E}: \underline{X}(t) = \underline{U}(t) + X e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad \underline{U}(t) = \underline{R} - s(t) \frac{\underline{\dot{R}}}{|\underline{\dot{R}}|}.$$

Weiter ist

$$\varphi = \arg \dot{\underline{R}} =: \mu(t) \Rightarrow \frac{\dot{\underline{R}}}{|\dot{\underline{R}}|} = e^{i\mu}$$

und deshalb

$$\underline{X}(t) = \underline{R} - s(t)e^{i\mu} + X e^{i\mu}.$$

Also \mathfrak{C} : $\underline{X}(t) = \underline{R}(t) + (X - s(t))e^{i\mu}.$

Parameterdarstellung der Evolvente \underline{c} des Punktes $C = (a,0)$ von g :

$$\underline{C}(t) = \underline{R}(t) + (a - s(t))e^{i\mu}.$$

Satz 5: Die Evolvente eines Punktes der Ganggeraden besitzt auf der Rastpolkurve \underline{p} eine Spitze ihrer Bahnkurve. Die Spitzentangente steht zu \underline{p} senkrecht.

Beweisskizze: Ein Punkt S einer Kurve c heißt *Spitze*, wenn

a) in S genau eine Kurventangente existiert,

b) $\lim_{c \ni X \rightarrow S} \frac{1}{\kappa} = 0.$

Zu a) Aus dem kinematischen Erzeugungsprinzip ist die Kurvennormale von \underline{c}_a stets Tangente an \underline{p} – auch im Grenzfall.

Zu b) Im Beweis zu Satz 4 haben wir $\rho = \overline{\underline{C}\underline{R}}$ erkannt. Wenn $\underline{C} \in \underline{c}_a$ gegen \underline{p} konvergiert, dann strebt $\rho = \frac{1}{\kappa}$ gegen Null. □

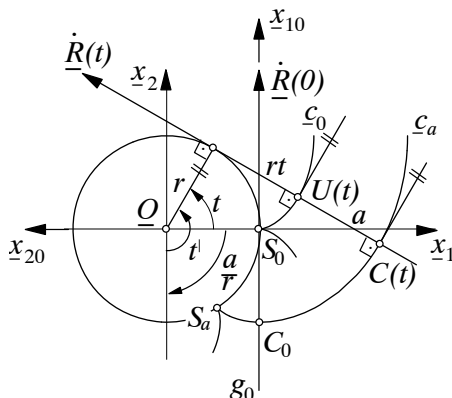
Die *Kreisevolventenbewegung* und eine *Kreisevolvente* ergeben sich für den Spezialfall, daß \underline{p} als Kreis $k(\underline{O}, r)$ vorgegeben wird:

$$\underline{R}(t) = r e^{it}, \quad t_0 = 0, \quad \underline{R}(0) = \underline{R}_0 = r, \quad \underline{U}(t) = r e^{it}$$

$$\dot{\underline{R}}(t) = r i e^{it} \Rightarrow \varphi = t + \frac{\pi}{2} = \mu, \quad s(t) = r t$$

$$\mathfrak{C}_{\text{Kreis}}: \underline{X}(t) = r e^{it} + (X - r t) e^{it} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{X}(t) = (r + i(X - r t)) e^{it}.$$



Beispiele zweier Kreisevolventen:

Kreisevolvente von $C = (a,0)$: $\underline{c}_a: \underline{X}_a(t) = (r + i(a - r t)) e^{it}$

Kreisevolvente von $U = (0,0)$: $\underline{c}_0: \underline{X}_0(t) = r(1 - it) e^{it}$

Satz 6: Die Evolventen eines Kreises sind zueinander kongruent, d. h. für beliebige $a \in \mathbb{R}$ gilt $c_0 \cong c_a$.

Beweis: Für $t=0$ bzw. $t=a/r$ ergeben sich die Spitzen $\underline{s}_0 = \underline{x}_0(0) = r$ bzw. $\underline{s}_a = \underline{x}_a(\frac{a}{r}) = r e^{i\frac{a}{r}}$. Deshalb wird vermutlich eine Drehung um den Kreismittelpunkt durch den Winkel $-a/r$ die Kreisevolvente c_a in c_0 überführen. Wir beweisen diese Vermutung durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} c_a^* : \underline{x}_a(t) e^{-i\frac{a}{r}} &= (r + i(a - rt)) e^{i(t - \frac{a}{r})} = (r + i(a - r(t' + \frac{a}{r}))) e^{it'} \\ &= (r - i r t') e^{it'} \quad \text{mit } t' = t - \frac{a}{r} \\ &=: \underline{x}_a^*(t') \end{aligned}$$

$$\underline{x}_0(t) = \underline{x}_a^*(t')$$

□

2.6 Radlinien

2.6.1 Erzeugung und Klassifikation

Die Radlinienbewegung $\mathfrak{R} = \Sigma / \underline{\Sigma}$ sei durch das Rollen eines Gangkreises p (Radius b ; Mittelpunkt U) auf einem Rastkreis \underline{p} (Radius $a = \mu b$; $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$; Mittelpunkt O) gekennzeichnet. Es sei stets $a > 0$ jedoch sei $b > 0$ bzw. $b < 0$, wenn Gang- und Rastkreis auf derselben bzw. zu verschiedenen Seiten der Polkreistangente liegen. In der Ausgangslage $\alpha = 0$ seien die x_1 - und \underline{x}_1 -Achse gleichgerichtet. Für die Mitte des Gangkreises gilt dann

$$\underline{U} = (a - b) e^{i\alpha} = (\mu b - b) e^{i\alpha} = b(\mu - 1) e^{i\alpha}$$

Wenn p auf \underline{p} von P_0 nach P abgerollt ist, gilt die Winkelbeziehung

$$a\alpha = b\beta = \mu b\alpha$$

und weiter nach dem Außenwinkelsatz

$$\beta = \alpha - \varphi.$$

Damit folgt

$$\varphi = \alpha - \beta,$$

$$\beta = \mu\alpha,$$

$$\varphi = \alpha(1 - \mu).$$

Aus $\underline{X} = \underline{U} + X e^{i\varphi}$ folgt die **Bewegungsgleichung der Radlinienbewegung:**

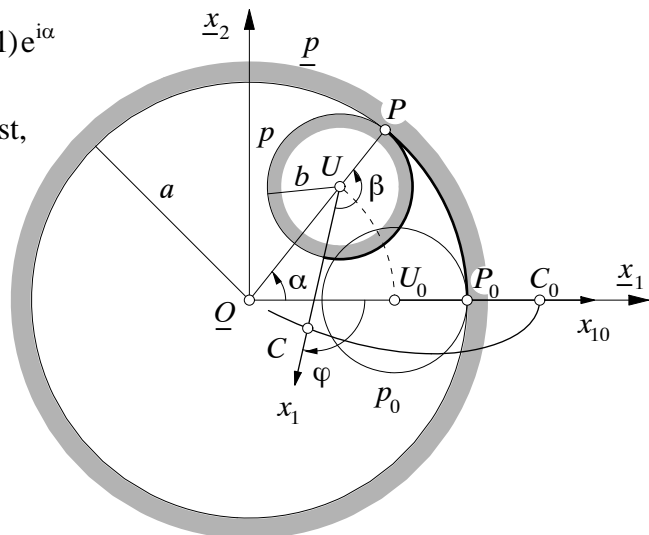
$$\underline{X} = b(\mu - 1) e^{i\alpha} + X e^{i\alpha(1-\mu)}$$

mit α als Zwanglaufparameter.

Lage der Pole:

$$\underline{P} = a e^{i\alpha} = \mu b e^{i\alpha}$$

$$P = b e^{i\beta} = b e^{i\mu\alpha}$$



Die Radlinien werden anhand von $\mu = \frac{a}{b}$ ($a > 0, b \neq 0$) klassifiziert:

- a) $1 < \mu \Leftrightarrow 0 < b < a$: *Hypotrochoiden*
- b) $0 < \mu < 1 \Leftrightarrow 0 < a < b$: *Peritrochoiden*
- c) $\mu < 0 \Leftrightarrow b < 0 < a$: *Epitrochoiden*.

Bemerkung:

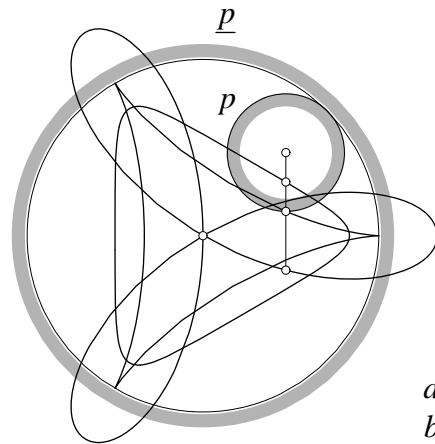
$\mu = 1: a = b \Rightarrow \mathfrak{X}$ ist die Identität.
 $\mu = 0: a = 0 \Rightarrow \underline{p}$ ist Nullkreis $\Rightarrow \mathfrak{X}$ ist

eine gewöhnliche Drehung.

Zu a) $1 < \mu \Rightarrow \frac{\alpha}{\varphi} < 0$

p berührt \underline{p} von innen.
 \underline{p} berührt p von außen.

\mathfrak{X} heißt *hypozyklisch*;
 Radlinien heißen *Hypotrochoiden*.

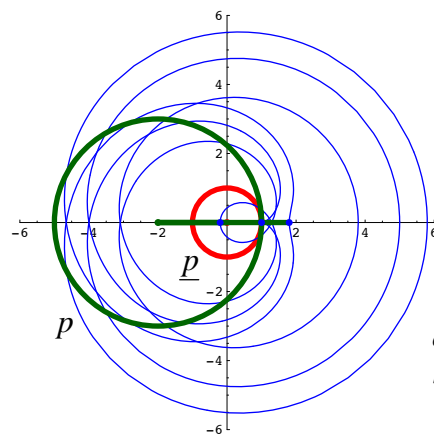


$a = 3$
 $b = 1$

Zu b) $0 < \mu < 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\varphi} > 0$

p berührt \underline{p} von außen.
 \underline{p} berührt p von innen.

\mathfrak{X} heißt *perizyklisch*;
 Radlinien heißen *Peritrochoiden*.

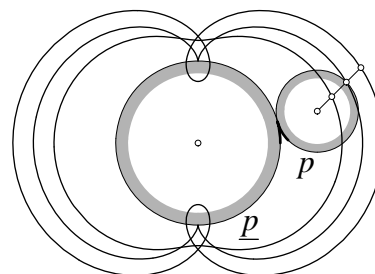


$a = 3$
 $b = 2$

Zu c) $\mu < 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\varphi} > 0$

p berührt \underline{p} von außen.
 \underline{p} berührt p von außen.

\mathfrak{X} heißt *epizyklisch*;
 Radlinien heißen *Epitrochoiden*.



$a = 2$
 $b = -1$

Für alle drei Fälle heißen die Trochoiden zusätzlich *verschlungen*, *gespitzt* oder *gestreckt* in Abhängigkeit von der Lage des erzeugenden Punktes bezüglich des Gangkreises.

Grenzformen:

- a) Gestreckte, gespitzte oder verschlungene Zykloiden entstehen als Bahnkurven, wenn p als Kreis und \underline{p} als Gerade gewählt werden.
- b) Gestreckte, gespitzte oder verschlungene Kreisevolventen entstehen als Bahnkurven, wenn p als Gerade und \underline{p} als Kreis gewählt werden.

2.6.2 Eigenschaften

Das Verhältnis $\frac{\alpha}{\varphi}$ heißt *Charakteristik* von \mathfrak{X} :

$$\frac{\alpha}{\varphi} = \frac{1}{1-\mu} = \frac{b}{b-a}.$$

Satz 7: \mathfrak{X} wiederholt sich periodisch, falls die Charakteristik $\frac{\alpha}{\varphi}$ rational ist, d. h. falls $\mu = \frac{a}{b}$ rational ist.

Beweis: In der Ausgangslage wird $\varphi = 0$ für $\alpha = 0$ vereinbart. Es gilt $\varphi = \varphi(\alpha) = \alpha(1-\mu)$. Die Ausgangslage stellt sich genau dann wiederholt ein, wenn ganzzahlige $k, g (\neq 0)$ existieren, so daß für $\alpha = 2\pi k$ gilt: $\varphi = 2\pi g = 2\pi k(1-\mu)$. Damit $\frac{k}{g} = \frac{1}{1-\mu} = \frac{\alpha}{\varphi}$ rational. Weiter folgt $\mu = \frac{k-g}{k} = \frac{a}{b}$. □

Bemerkungen:

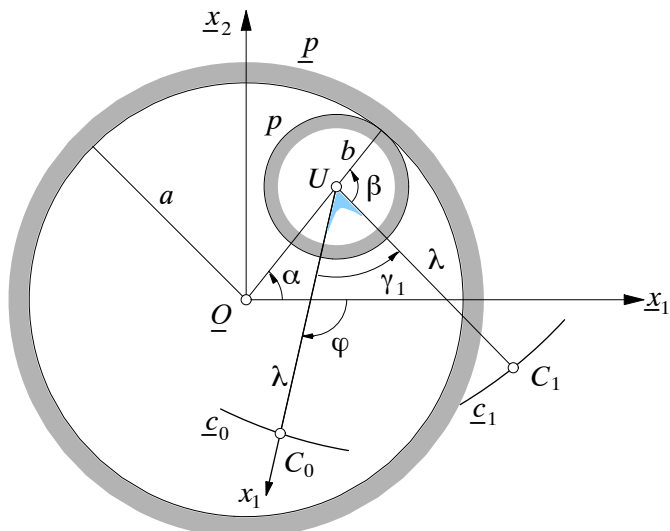
- 1) Σ = Planet (z. B. Erde); $\underline{\Sigma}$ = Sonnensystem:
 \mathfrak{X} ist die Drehung des Planeten um die Sonne und gleichzeitig um sich selbst mit bestimmtem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten. Deshalb heißt \mathfrak{X} auch *Planetenbewegung*.
- 2) Verwirklichung von \mathfrak{X} durch Zahnräder:
 \underline{p} und p mit Zähnen ausstatten, so daß Abrollen realisiert wird; \underline{Q} und U dabei festhalten. Dann überträgt sich die Drehung um \underline{Q} mit ω_1 auf eine Drehung um U mit ω_2 . Es ist ω_1/ω_2 das *Übersetzungsverhältnis* der Zahnräder und \overline{QU} ist ihr *Achsabstand*. ($\mu > 0$: Planetengetriebe)

Jede von $C \in \Sigma$ bei \mathfrak{X} beschriebene Bahnkurve heißt *Radlinie (Trochoide)* und $\frac{\alpha}{\varphi} = \frac{b}{b-a}$ ihre *Charakteristik*.

Satz 8: Die zwei Radlinien zweier Punkte von Σ mit dem gleichen Abstand von U sind kongruent.

Beweis:

- a) Wir wollen zuerst zeigen, daß die Radlinien \underline{c}_1 von $C_1 = \lambda e^{i\gamma_1}$ zu der speziellen



Radlinie \underline{c}_0 des Punktes $C_0 = \lambda$ ($\lambda > 0$) kongruent ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{c}_0: \underline{X}_0(\bar{\alpha}) &= b(\mu-1)e^{i\bar{\alpha}} + \lambda e^{i\varphi}, & \varphi &= (1-\mu)\bar{\alpha} \\ \underline{c}_1: \underline{X}_1(\alpha) &= b(\mu-1)e^{i\alpha} + \lambda e^{i\gamma_1} e^{i\varphi}, & \varphi &= (1-\mu)\alpha. \end{aligned}$$

Drehen wir \underline{c}_0 um \underline{O} durch $\Delta := \frac{\gamma_1}{\mu}$, so erhalten wir

$$\underline{c}_3: \underline{X}_3(\bar{\alpha}) = \underline{X}_0(\bar{\alpha})e^{i\Delta} = b(\mu-1)e^{i(\bar{\alpha}+\Delta)} + \lambda e^{i(\varphi+\Delta)},$$

wobei

$$\varphi + \Delta = (1-\mu)\bar{\alpha} + \frac{\gamma_1}{\mu} = \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{\mu} - \gamma_1 + (1-\mu)\bar{\alpha} = \gamma_1 + \frac{\gamma_1 - \mu\gamma_1}{\mu} + (1-\mu)\bar{\alpha} = \gamma_1 + (1-\mu)(\bar{\alpha} + \Delta) \Rightarrow$$

$$\underline{c}_3: \underline{X}_3(\bar{\alpha}) = b(\mu-1)e^{i(\bar{\alpha}+\Delta)} + \lambda e^{i\gamma_1} e^{i(1-\mu)(\bar{\alpha}+\Delta)},$$

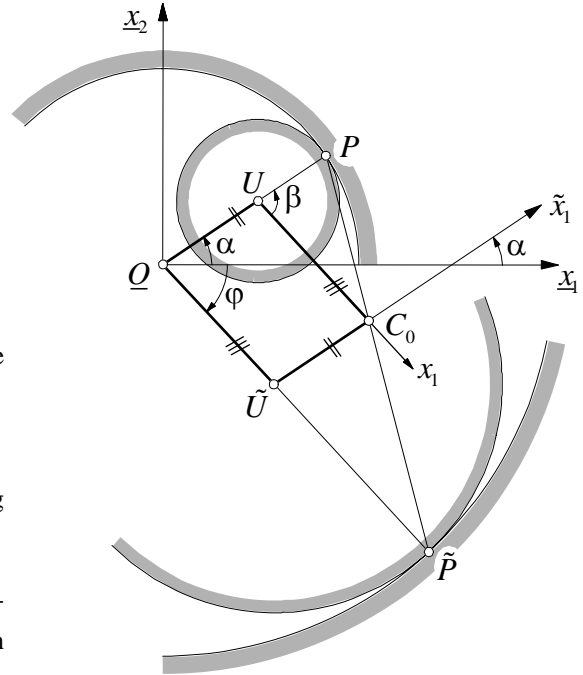
d. h., es gilt $\underline{X}_3(\bar{\alpha}) = \underline{X}_1(\alpha)$ für $\alpha = \bar{\alpha} + \Delta$.

Also ist $\underline{c}_3 = \underline{c}_1 \cong \underline{c}_0$, denn \underline{c}_3 entsteht aus \underline{c}_0 durch Drehung um \underline{O} durch den Winkel Δ .

b) Sei \underline{c}_2 die Radlinie von $C_2 = \lambda e^{i\gamma_2}$. Dann gilt $\overline{C_2U} = \overline{C_1U}$ für einen beliebigen Winkel γ_2 .

Analog (zu a)) gilt $\underline{c}_2 \cong \underline{c}_0$ (Drehung um \underline{O} durch $\Delta = \frac{\gamma_2}{\mu}$). Insgesamt hat man $\underline{c}_1 \cong \underline{c}_0 \cong \underline{c}_2$. □

Satz 9: Eine Radlinie mit der Charakteristik $\frac{\alpha}{\varphi}$ kann auch als Radlinie mit der Charakteristik $\frac{\varphi}{\alpha}$ erzeugt werden.



Beweis: Es genügt, die von $C_0 = \lambda$ erzeugte Radlinie \underline{c}_0 zu betrachten.

Der Zweischlag \underline{OUC}_0 wird zum Gelenkparallelogramm $\underline{OUC}_0\tilde{U}$ ergänzt. Der Zweischlag $\underline{O}\tilde{U}C_0$ wird zwangläufig mitbewegt.

Mit $(\tilde{U}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ als Gangsystem $\tilde{\Sigma}$ und dem alten Rastsystem $\underline{\Sigma}$ haben wir jetzt die Bewegungsgleichung von $\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\Sigma} / \underline{\Sigma}$ mit φ als Zwanglaufparameter

$$\underline{X}(\varphi) = \tilde{U}(\varphi) + X e^{i\alpha}, \quad \text{mit } \tilde{U} = \lambda e^{i\varphi} \quad \text{und } \alpha = \frac{\varphi}{1-\mu}.$$

Die Polkurven für $\tilde{\mathfrak{R}}$ lauten (formal nach Definition berechnen):

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{i}{\alpha} \dot{\tilde{U}} e^{-i\alpha} = i(1-\mu)\lambda e^{i\varphi} i e^{-i\alpha} = \lambda(\mu-1)e^{i(\varphi-\alpha)} =: \tilde{b} e^{i(\varphi-\alpha)} \\ \tilde{P} &= \tilde{U} + \frac{i}{\alpha} \dot{\tilde{U}} = \dots = \mu\lambda e^{i\varphi} =: \tilde{a} e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Die Polkurven sind Kreise mit den Radien $\tilde{b} = \lambda(\mu-1)$ bzw. $\tilde{a} = \mu\lambda$.

Die Charakteristik von $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{b} - \tilde{a}} = \frac{\lambda(\mu-1)}{\lambda(\mu-1) - \mu\lambda} = 1 - \mu.$$

$$|\underline{O} - \tilde{P}| = \tilde{a}; \quad \frac{\tilde{a}}{\lambda} = \frac{a}{b}$$

□

Aufgaben:

- 2.1 Stellen Sie eine Parameterdarstellung für Zykloiden auf.
- 2.2 Warum ist die Klassifikation einer Radlinie unabhängig von den beiden möglichen Erzeugungsweisen?

3 Hüllkurven

3.1 Definition und Eigenschaften

Eine Kurve $k: X = X(s)$ in Σ durchläuft bei der Bewegung $\Sigma / \underline{\Sigma}: \underline{X} = \underline{U}(t) + X e^{i\varphi(t)}$ eine Kurvenschar in $\underline{\Sigma}$ mit der Darstellung $\underline{k}(t, s): \underline{X}(t, s) = \underline{U}(t) + X(s) e^{i\varphi(t)}$ (t : Scharparameter; s : Kurvenparameter). Es ist $\underline{k}(t_0, s)$ mit $t_0 = \text{const.}$ eine *Scharkurve* in dem Zeitpunkt t_0 .

Eine Kurve \underline{h} , die in jedem ihrer Punkte von einer Kurve aus $\underline{k}(t, s)$ berührt wird, heißt *Hüllkurve* (*Hüllbahn*) der Schar bzw. Hüllkurve \underline{h} von k bei $\Sigma / \underline{\Sigma}$.

Der jeweilige Berührungspunkt von \underline{h} und $\underline{k}(t)$, der *Hüllpunkt* $\underline{X}(t)$, bewegt sich relativ zu $\underline{\Sigma}$ mit der Absolutgeschwindigkeit \underline{V}_a auf \underline{h} und relativ zu Σ mit der Relativgeschwindigkeit V_r auf k (\underline{V}_a und V_r hängen von t ab). Wenn sich \underline{h} und $\underline{k}(t, s)$ in $\underline{X}(t)$ berühren, dann haben \underline{V}_a und V_r die Richtung der Berührungstangente; also muß gelten

$$\lambda \underline{V}_a = V_r \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda(t) \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

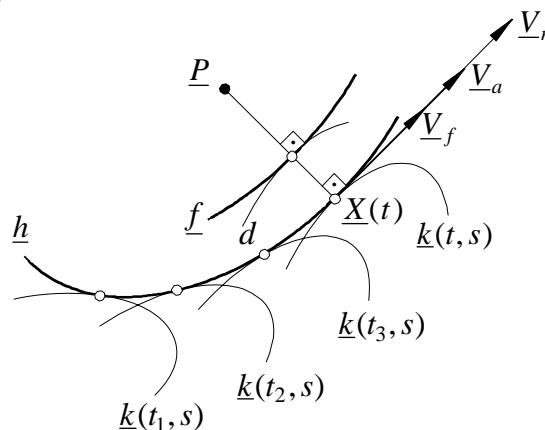
Wegen (2.4) gilt

$$\underline{V}_a = \underline{V}_f + V_r \quad \text{und}$$

$$\lambda \underline{V}_a = \lambda \underline{V}_f + \lambda V_r, \quad \text{d. h. wegen (3.1),} \quad \lambda \underline{V}_f = (1 - \lambda) V_r.$$

Wegen $\underline{V}_f = i\dot{\varphi}(X - P)$ und $V_r = \alpha \frac{dX}{ds}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) folgt für $\underline{X}(t)$ die sogenannte *Hüllbedingung*

$$\left(X - P, \frac{dX}{ds} \right) = 0. \tag{3.2}$$



Satz 1: Die gemeinsame Kurvennormale von \underline{h} und $\underline{k}(t, s)$ in einem Hüllpunkt $\underline{X}(t)$ verläuft durch den Momentanpol P .

Satz 2: Eine Parallelkurve d von k besitzt eine Parallelkurve f von \underline{h} als Hüllkurve.

Gleichung (3.2) hat die Form $H(t, s) = 0$. Eine Lösung $t = t(s)$ heißt *Hüll-* oder *Berührparameter* von $X(s)$. Mit ihr ist

$$\underline{X}(t(s)) = \underline{U}(t(s)) + X(s)e^{i\varphi(t(s))} \quad (3.3)$$

als der zugehörige Hüllpunkt auf \underline{h} bestimmt. Wenn (3.2) in die Gestalt $t = t(s)$ aufgelöst werden kann, dann ist (3.3) eine Parameterdarstellung von \underline{h} .

Ein Hüllpunkt ist Momentanpol, wenn für ihn $V_a = 0$ gilt ($\Leftrightarrow V_r = V_f = 0$).

Die *Gleitgeschwindigkeit* von k auf \underline{h} im Hüllpunkt ist $V_g = V_a - V_r$. Man sieht sofort, daß $V_g = V_f$.

Folgerung: Eine Kurve k gleitet i.a. auf ihrer Hüllkurve \underline{h} mit der Geschwindigkeit V_g im jeweiligen Berührungspunkt; nur wenn der Hüllpunkt mit dem Momentanpol übereinstimmt, ist dort $V_g = 0$.

Satz 3: Die Polkurven p und \underline{p} sind das einzige Kurvenpaar bei $\Sigma / \underline{\Sigma}$, welches gleitungsfrei aufeinander rollt.

H. R. MÜLLER [2] nennt $\lambda(t)$ in Formel (3.1) die *Rollgleitzahl* zu k und \underline{h}

- a) $\lambda(t) \equiv 1$: k und \underline{h} sind Gang- und Rastpolkurven.
- b) $\lambda \equiv 0$ bzw. $\lambda \equiv \infty$, d. h. $V_r \equiv 0$ bzw. $V_a \equiv 0$: Der Hüllpunkt ist auf k bzw. \underline{h} momentan feststehend.
- c) $\lambda(t) \neq 1$: Alle "rollgleitenden" Kurvenpaare k und \underline{h} zu $\lambda(t)$ können durch Integration gefunden werden.

4 Kinematische Ketten

4.1 Dreipolsatz

Drei Systeme $\Sigma_i(O_i; x_{i1}, x_{i2})$ ($i = 1, 2, 3$) führen zwangläufig gekoppelt die *Relativbewegungen*

$$\begin{aligned} B_{21} = \Sigma_2 / \Sigma_1 \quad \dots \quad X_1 &= U_{21} + X_2 e^{i\varphi_{21}} \\ B_{32} = \Sigma_3 / \Sigma_2 \quad \dots \quad X_2 &= U_{32} + X_3 e^{i\varphi_{32}} \\ B_{31} = \Sigma_3 / \Sigma_1 \quad \dots \quad X_1 &= U_{31} + X_3 e^{i\varphi_{31}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

aus mit dem Zwanglaufparameter t , d. h.

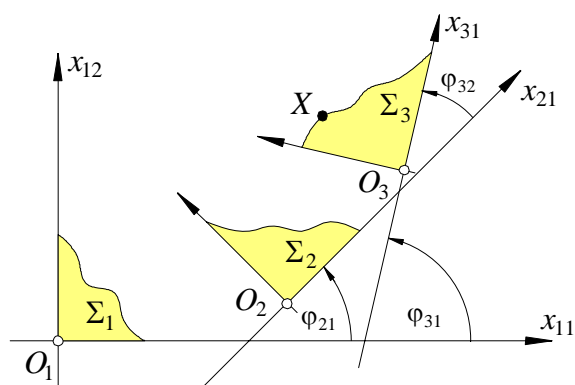
$$\begin{aligned} U_{ik} &= U_{ik}(t) \leftrightarrow \overrightarrow{O_i O_k} \text{ bezüglich } \Sigma_k \\ \varphi_{ik} &= \varphi_{ik}(t) = \sphericalangle x_{k1}, x_{i1}. \end{aligned}$$

Aus der Polarwinkel-Beziehung

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21} \quad (4.2)$$

folgt nach Differentiation

$$\dot{\varphi}_{31} = \dot{\varphi}_{32} + \dot{\varphi}_{21}. \quad (4.3)$$



Die Bewegung von $X \in \Sigma_3$ bei B_{32} kann als *Relativbewegung* von X bei der Bewegung B_{21} aufgefaßt werden, d. h. es gilt

$$\underline{V}_a = \underline{V}_r + \underline{V}_f = \boxed{V_1^{31} = V_1^{32} + V_1^{21}} \quad (4.4)$$

darstellende komplexe Zahl
bezieht sich auf Σ_1

Zu der Bewegung B_{ik} gehört (vgl. Abschn. 2) die *Winkelgeschwindigkeit*

$$\omega_{ik} = \dot{\varphi}_{ik} \quad (4.5)$$

und bei $\omega_{ik} \neq 0$ der Momentanpol P^{ik} , der bei Betrachtung mehrerer bewegter Ebenen nun *Relativpol* von B_{ik} genannt wird. Die *Relativgeschwindigkeiten* V^{ik} können nach (2.9) mit den Momentanpolen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} V_1^{21} &= i\omega_{21}(X_1 - P_1^{21}) \\ V_2^{32} &= i\omega_{32}(X_2 - P_2^{32}) \\ V_1^{31} &= i\omega_{31}(X_1 - P_1^{31}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wegen $V_1^{32} = V_2^{32} e^{i\varphi_{21}}$ und (4.1) gilt:

$$X_2 = (X_1 - U_{21}) e^{-i\varphi_{21}} \text{ und } P_2^{32} = (P_1^{32} - U_{21}) e^{-i\varphi_{21}}.$$

Aus (4.6) folgt damit

$$V_1^{32} = V_2^{32} e^{i\varphi_{21}} = i\omega_{32}((X_1 - U_{21})e^{-i\varphi_{21}} - (P_1^{32} - U_{21})e^{-i\varphi_{21}})e^{i\varphi_{21}} = i\omega_{32}(X_1 - P_1^{32}). \quad (4.7)$$

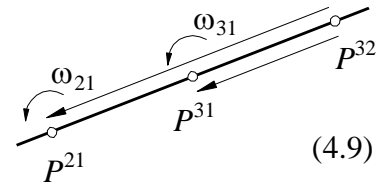
(4.6) (4.7) in (4.4) \Rightarrow

$$\begin{aligned} i\omega_{31}(X_1 - P_1^{31}) &= i\omega_{32}(X_1 - P_1^{32}) + i\omega_{21}(X_1 - P_1^{21}) \\ \underbrace{(\omega_{31} - \omega_{32} - \omega_{21})}_{=0 \text{ nach (4.3)}} X_1 - \omega_{31} P_1^{31} + \omega_{32} P_1^{32} + \omega_{21} P_1^{21} &= 0 \\ \omega_{21}(P_1^{21} - P_1^{32}) &= \omega_{31}(P_1^{32} - P_1^{31}). \quad \omega_{21}(P_1^{21} - P_1^{32}) = \omega_{31}(P_1^{31} - P_1^{32}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Auswertung von (4.8) bei $\omega_{ik} \neq 0$:

- a) $P_1^{32} = P_1^{21} \Leftrightarrow P_1^{31} = P_1^{32}$
- b) $P_1^{32} \neq P_1^{21} \Leftrightarrow P^{21}, P^{31}, P^{32}$ kollinear und

$$\left| \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} \right| = \frac{P^{32} P^{21}}{P^{32} P^{31}}.$$



Bemerkung: $\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}$ ist das Teilverhältnis von (P^{21}, P^{31}, P^{32}) , denn $P_1^{21} - P_1^{32} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}(P_1^{31} - P_1^{32})$.

Wenn dabei $\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{\dot{\varphi}_{31}}{\dot{\varphi}_{21}} \begin{cases} > \\ < \end{cases} 0$, dann liegt P^{32} $\begin{cases} \text{außerhalb} \\ \text{innerhalb} \end{cases}$ der Strecke $P^{21}P^{31}$.

- c) Bisher wurde vorausgesetzt, daß $\omega_{21}, \omega_{31}, \omega_{32} \neq 0$.

Wenn $\omega_{ik} = 0$, dann ist B_{ik} eine *Schiebung* (vgl. Abschnitt 2) und P^{ik} der Fernpunkt der zur Schiebung senkrechten Richtung.

Verallgemeinerung der Auswertung von (4.8) auf ein Getriebe, an dem 3 zwangläufig bewegte Glieder $\Sigma_i, \Sigma_j, \Sigma_k$ betrachtet werden ($\Sigma_i = \Sigma_1, \Sigma_j = \Sigma_2, \Sigma_k = \Sigma_3$ setzen) \Rightarrow

Dreipolsatz von ARONHOLD-KENNEDY: Die Relativpole dreier zwangläufig bewegter Glieder liegen auf derselben Geraden. Fallen zwei der Pole zusammen, so alle drei. Sind P^{ki} und P^{kj} verschieden (und keine Fernpunkte), dann ist

$$\omega_{ji}(P^{ji} - P^{kj}) = \omega_{ki}(P^{ki} - P^{kj}).$$

Als *n-gliedrige kinematische Kette* bezeichnet man *n* zwangläufig gekoppelte Ebenen.

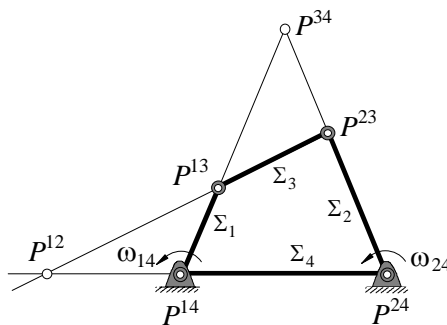
Eine *n*-gliedrige kinematische Kette besitzt $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Relativpole.

4.2 Anwendungen

Beispiel 1:

Gegeben: **Viergelenk**

Gesucht: alle Relativpole



Lösung: $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Relativpole P^{ik} vorhanden

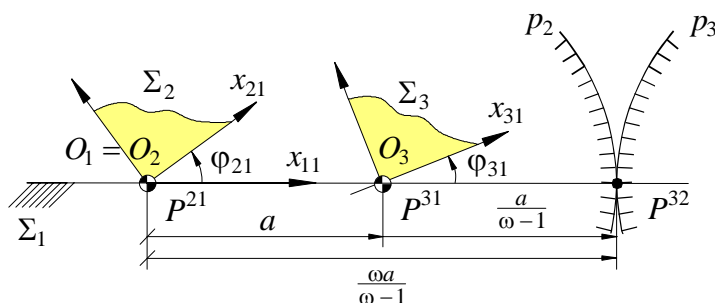
$$\omega = \frac{\omega_{14}}{\omega_{24}} = \frac{\text{Antriebs - Winkelgeschwindigkeit}}{\text{Abtriebs - Winkelgeschwindigkeit}}$$

Aus der Lage von P^{14} , P^{24} , P^{12} folgt:

$$|\omega| = \left| \frac{\omega_{14}}{\omega_{24}} \right| = \frac{\overline{P^{24}P^{12}}}{\overline{P^{14}P^{12}}} \quad (k=1, i=4, j=2) \quad (4.10)$$

P^{12} $\left\{ \begin{array}{l} \text{außerhalb} \\ \text{innerhalb} \end{array} \right\}$ Strecke $P^{14}P^{24} \Rightarrow \omega \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$.

Beispiel 2: Stirnradverzahnung



$$B_{21}: \quad X_1 = X_2 e^{i\varphi_{21}} \quad \text{mit} \quad \varphi_{21} = \omega_{21} \cdot t \quad (4.11)$$

Drehung um $O_1 = O_2 = P^{21}$ (nicht notwendig gleichförmig, d.h. $\omega_{21} = \omega_{21}(t)$)

$$B_{31}: \quad X_1 = P_1^{31} + X_3 e^{i\varphi_{31}} \quad \text{mit} \quad \varphi_{31} = \omega_{31} \cdot t \quad (4.12)$$

Drehung um $O_3 = P^{31}$

$\overline{P_1^{21}P_1^{31}} = \overline{O_1O_3} = a \dots$ Achsabstand der sich drehenden Systeme Σ_2, Σ_3

B_{32} : Relativbewegung Σ_3 / Σ_2

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 e^{-i\varphi_{21}} = (a + X_3 e^{i\varphi_{31}}) e^{-i\varphi_{21}} \\ &= a e^{-i\varphi_{21}} + X_3 e^{i(\varphi_{31} - \varphi_{21})} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$= \varphi_{32}$ nach (4.2)

Wegen (4.3) gilt $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$, also

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{21}.$$

Bemerkung: Soll sich nach n_2 Drehungen von Σ_2 das System Σ_3 n_3 -mal gedreht haben und damit beide Systeme wieder in der Ausgangslage befinden,

$$\text{dann muß } \varphi_{21} = n_2 \cdot 2\pi = \omega_{21} \cdot t$$

$$\text{gleich } \varphi_{31} = n_3 \cdot 2\pi = \omega_{31} \cdot t$$

für gewisses $t = t_0$ sein, also

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\omega_{31}(t_0)}{\omega_{21}(t_0)} = \omega(t_0)$$

rational sein.

Wir wiederholen (4.8)

$$P_1^{21} - P_1^{32} = \frac{\dot{\varphi}_{31}}{\dot{\varphi}_{21}} (P_1^{31} - P_1^{32}).$$

Es gilt:

$$P^{32} \text{ innerhalb der Strecke } P^{21}P^{31} = O_1O_3 \Leftrightarrow \omega := \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} < 0$$

$\Leftrightarrow B_{21}$ und B_{31} sind gegensinnige Drehungen.

Wegen $O_1 = P^{21}$ ist $P_1^{21} = 0$;

wegen $O_3 = P^{31}$ ist $P_1^{31} = a$,

und damit gilt:

$$P_1^{21} - P_1^{32} = \frac{\dot{\varphi}_{31}}{\dot{\varphi}_{21}} (P_1^{31} - P_1^{32}) \Rightarrow \omega a - \omega P_1^{32} + P_1^{32} = 0 \quad (4.14)$$

$$P_1^{32}(1 - \omega) = -\omega a$$

$$P_1^{32} = \frac{\omega a}{\omega - 1}.$$

Problem:

Gegeben: Drehungen B_{21} und B_{31} mit Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{21}(t)$ und $\omega_{31}(t)$

Gesucht: Polkurven p_i in Σ_i ($i = 2, 3$), so daß die Drehung B_{21} auf die Drehung B_{31} übertragen wird (p_i als Profilkurven von Reibrädern, die aufeinander rollend dann das

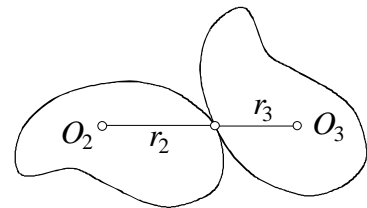
Übersetzungsverhältnis $\omega = \omega(t) = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}$ realisieren).

Lösung: Die Polkurven bei B_{32} ergeben sich mit (4.11) und (4.14):

$$p_2 \text{ in } \Sigma_2 \dots P_2^{32}(t) = P_1^{32} e^{-i\varphi_{21}} = \underbrace{\frac{\omega a}{\omega - 1}}_{=: r_2(t)} e^{-i\omega_{21} t} \quad (*)$$

$$p_3 \text{ in } \Sigma_3 \dots P_2^{32} = a e^{-i\varphi_{21}} + P_1^{32} e^{i\varphi_{32}}$$

$$\begin{aligned} P_1^{32}(t) &= e^{-i\varphi_{32}} (P_2^{32} - a e^{-i\varphi_{21}}) \\ &= e^{-i\varphi_{32}} \left(\frac{\omega a}{\omega - 1} e^{-i\varphi_{21}} - a e^{-i\varphi_{21}} \right) \quad (\text{wegen } (*)) \\ &= \left(\frac{\omega a}{\omega - 1} - a \right) \underbrace{e^{-i\varphi_{21}} e^{-i\varphi_{32}}}_{= e^{-i\varphi_{31}}} \\ &= a \left(\frac{\omega}{\omega - 1} - 1 \right) e^{-i\varphi_{31}} \\ &= \underbrace{\frac{a}{\omega - 1}}_{=: r_3(t)} e^{-i\omega_{31} t} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{r_2(t)}{r_3(t)} = \omega(t) = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}.$$

Bemerkung: Für Reibräder-Profilkurven eignen sich nur geschlossene, doppelpunktfreie Polkurven.

Wenn $\omega(t) = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \text{const.}$ (d.h. *gleichförmige Drehungen* B_{12} , B_{13} gegeben) dann ist die Polkurve p_2 bzw. p_3 ein *Kreis* mit dem Radius r_2 bzw. r_3 und dem Mittelpunkt O_2 bzw. O_3 . \Rightarrow

Satz: Die Relativbewegung zweier gleichförmiger Drehungen um zwei feste Punkte ist eine Trochoidenbewegung, deren Polkreisradien sich umgekehrt proportional zu den Winkelgeschwindigkeiten verhalten.

Bemerkung: Zur Übertragung von größeren Drehmomenten werden die durch p_2 und p_3 berandeten Scheiben "verzahnt" \Rightarrow Stirnräder, -verzahnung (parallele Achsen).

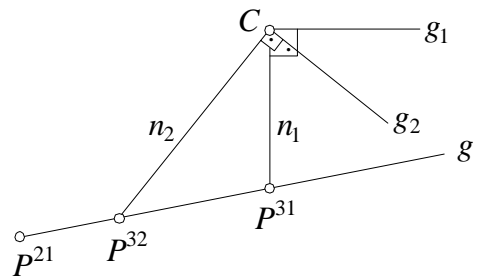
Problem: Ausbildung der Zahnprofile:

Verwendet man N_i Zähne (und auch Lücken) an der Kurve p_i , dann gilt

$$\frac{2\pi|r_2|}{N_2} = \frac{2\pi|r_3|}{N_3} \Rightarrow \left| \frac{r_2}{r_3} \right| = \frac{N_2}{N_3} = \left| \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} \right|.$$

Beispiel 3:

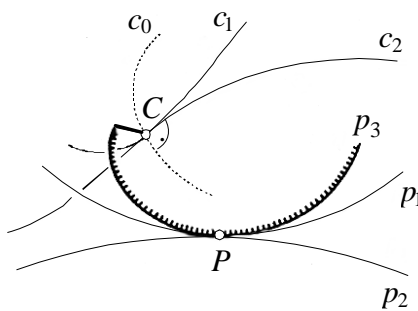
Wir betrachten eine dreigliedrige kinematische Kette Σ_1, Σ_2 und Σ_3 , bei der die Relativpole P^{21}, P^{32}, P^{31} nach dem o. g. Satz auf einer Geraden, der *Polgeraden* g , liegen. Ein Punkt $C \in \Sigma_3$ wird bei Σ_3 / Σ_1 (bzw. Σ_3 / Σ_2) die Bahnkurve c_1 (bzw. c_2) mit der momentanen Bahnnormale $n_1 = CP^{31}$ (bzw. $n_2 = CP^{32}$) bzw. der dazu orthogonalen Bahntangente g_1 (bzw. g_2) durchlaufen.



Sei $P^{32} \neq P^{31}$. Dann berühren sich c_1 und c_2 in $C \Leftrightarrow n_1 = n_2 \Leftrightarrow C \in g = n_1 = n_2$.

Wenn das für alle Bewegungsmomente gilt \Rightarrow

Satz: Zwei Hüllkurven c_1 und c_2 einer Zwanglaufbewegung Σ_2 / Σ_1 können durch Hinzunahme einer dritten bewegten Ebene Σ_3 als Bahnkurven eines Punktes C dieser Ebene bei den Bewegungen Σ_3 / Σ_1 und Σ_3 / Σ_2 erzeugt werden. Dieser Punkt C muß stets auf der Polgeraden liegen.

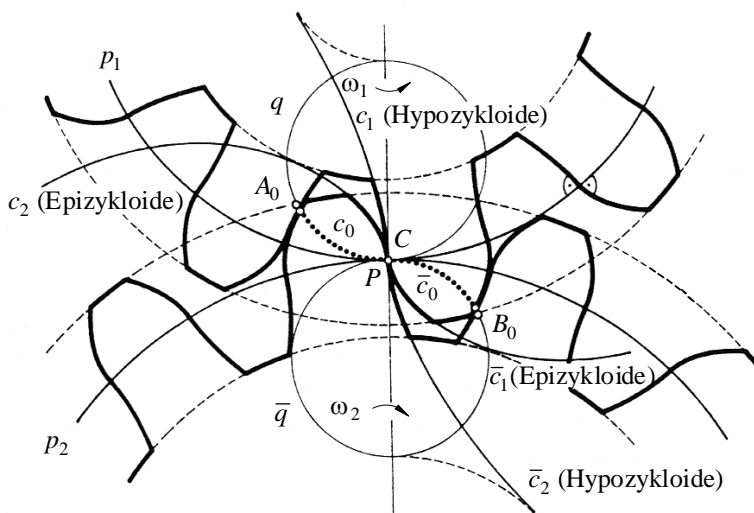


Im Spezialfall (Satz von CAMUS) kann Σ_3 so gewählt werden, daß stets $P^{21} = P^{32} = P^{31} =: P$ gilt, so daß sich die drei Polkurven p_1, p_2 und p_3 stets in $P = P^{21}$ berühren. Dann kann C in Σ_3 frei gewählt werden.

*Die Polkurve $p_3 \subset \Sigma_3$ heißt **Hilfspolkurve von CAMUS**.*

Anwendung: Konstruktion einer Zykloidenverzahnung

Mit dem Satz von CAMUS läßt sich die klassische, auf PH. DE LA HIRE (1694) zurückgehende *Zykloidenverzahnung* leicht erklären:



Man wählt als Hilfspolkurve q einen Kreis und den erzeugenden Punkt C auf dem Umfang von q . Bei der in der Abbildung vorliegenden Anordnung ergibt sich dabei für das Profil c_1 eine *Hypozykloide*, für das Gegenprofil c_2 eine *Epizykloide* und für die Eingriffslinie c_0 ein Bogen des Kreises q . Da man hierbei jedoch nur die Fußflanke der Zähne des ersten Rades und die Kopf­flanke der Zähne des zwei-

ten Rades erhält, so wird man die gleiche Konstruktion mit einem zweiten, auf der anderen Seite der Wälztangente angeordneten Hilfspolkreis \bar{q} wiederholen.

Für einen Beobachter im (ruhenden) Lagersystem Σ_0 beschreibt C die *Eingriffslinie* c_0 .

5 Krümmung von Bahn- oder Hüllkurven

5.1 Konstruktion von EULER-SAVARY

Es sei an Satz 2.1 erinnert:

Der Rastpol der Begleitbewegung einer Kurve ist der Krümmungsmittelpunkt der Kurve im betrachteten Punkt.

Durch mehrfache Anwendung dieses Satzes können wir folgendes Problem lösen.

Gesucht sei der Krümmungsmittelpunkt X^* der Bahnkurve c_1 des Punktes X von Σ_2 bei Σ_2/Σ_1 .

Lösung:

- 1) Sei Σ_2/Σ_1 durch Abrollen der Polkurve p_2 auf p_1 realisiert, die sich in $P := P^{21}$ berühren. Der Krümmungsmittelpunkt von p_2 (bzw. p_1) sei K_2 (bzw. K_1).

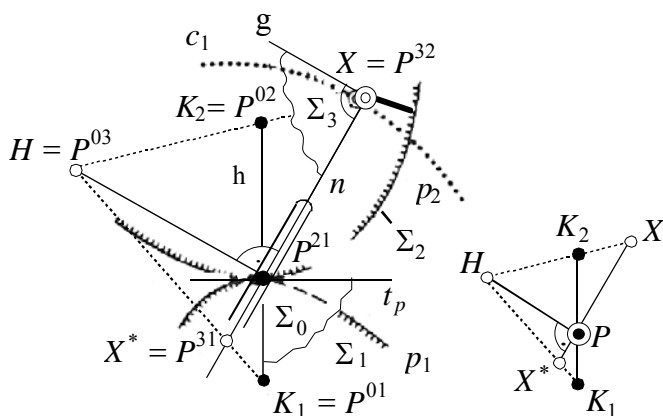
Wegen o. g. Satz ist bei der Begleitbewegung des Zweibeins (t_p, h) längs p_2 (bzw. p_1)

$$K_2 = P^{02} \text{ (bzw. } K_1 = P^{01} \text{)}$$

- 2) Sei $\Sigma_3 := gn$. Dann ist wegen o. g. Satz

$$P^{31} = X^* \in n$$

der gesuchte Krümmungsmittelpunkt, den wir durch Konstruktion aller Relativpole und Nutzung des Dreipol-satzes finden werden:



- 3) Der Punkt $X \in \Sigma_1$ ist ein Drehgelenk von Σ_3 bei der Bewegung B_{32} , also

$$X = P^{32}. \tag{*}$$

- 4) Zu den vier Systemen $\Sigma_0, \dots, \Sigma_3$ gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Relativpole;

bekannt sind jetzt $P^{01}, P^{02}, P^{21}, P^{32}$.

Nach dem Dreipolsatz von ARONHOLD-KENNEDY (vgl. Abschn. 4.1) muß P^{31} auf $P^{21}P^{32}$ und auf $P^{01}P^{03}$ liegen. Deshalb gilt:

$$X^* = P^{31} = P^{21}P^{32} \cap P^{01}P^{03}. \tag{**}$$

Also ist nur noch $H := P^{03}$ zu suchen.

- 5) P^{03} liegt auf $P^{02}P^{32}$ und ist Pol von $B_{03} = \Sigma_0 / \Sigma_3$.
 Σ_3 ruht, p_1 rollt auf p_2 ab, so daß sich beide Kurven bewegen und sich in P^{21} berühren;
 X durchläuft c_1 , dabei geht $n \subset \Sigma_3$ ständig durch den bezüglich Σ_0 festen Punkt P^{21} .
 Deshalb bewegt sich P^{21} auf n , hat also n als Bahntangente. P^{03} muß auf der Normalen l zu n liegen. Somit ist $P^{03} = l \cap P^{02}P^{32}$.
- 6) $P^{31} = X^*$ nach (**).

Bemerkung: Diese Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes fanden unabhängig voneinander DE L'HOSPITAL (1696), L. EULER (1765) und F. SAVARY (1841).

5.2 Krümmungsmittelpunkt einer Hüllkurve

Sei $c_1 \in \Sigma_1$ die Hüllkurve von $c_2 \in \Sigma_2$ bei B_{21} .

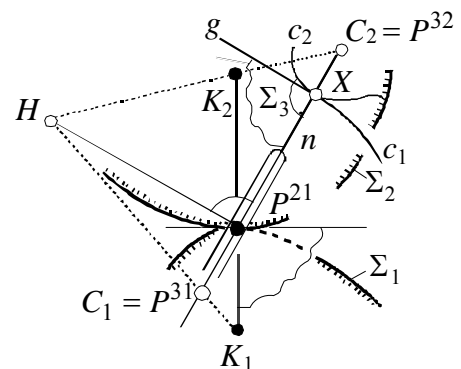
Dann geht die gemeinsame Normale n im Berührungspunkt X von c_2 und c_1 durch P^{21} .

Sei g, n das begleitende Zweibein in X .

Die Relativbewegungen laufen wie in Abschn. 5.1 ab, aber P^{32} ist bei (*) jetzt durch den Krümmungsmittelpunkt C_2 von c_2 zu ersetzen.

Dann ist $P^{31} = C_1$ der Krümmungsmittelpunkt der Hüllkurve c_1 . \Rightarrow

Satz: Der Krümmungsmittelpunkt C_1 einer Hüllkurve c_1 im Hüllpunkt X ist der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve, die der Krümmungsmittelpunkt C_2 der einhüllenden Kurve c_2 durchläuft.



5.3 Analytische Lösung und die Krümmungsverwandtschaft

Nach der Konstruktion von EULER-SAVARY ist jedem $X \in \Sigma_2$ genau ein Krümmungsmittelpunkt $X^* \in \Sigma_1$ der Bahnkurve von X bei Σ_2/Σ_1 zugeordnet. Diese Abbildung heißt *Krümmungsverwandtschaft* $X \mapsto X^*$ und soll analytisch formuliert werden: In die Konstruktion von X^* führen wir die vorzeichenfähigen Abstände

$$a = \overline{PX}, \quad a^* = \overline{PX^*}$$

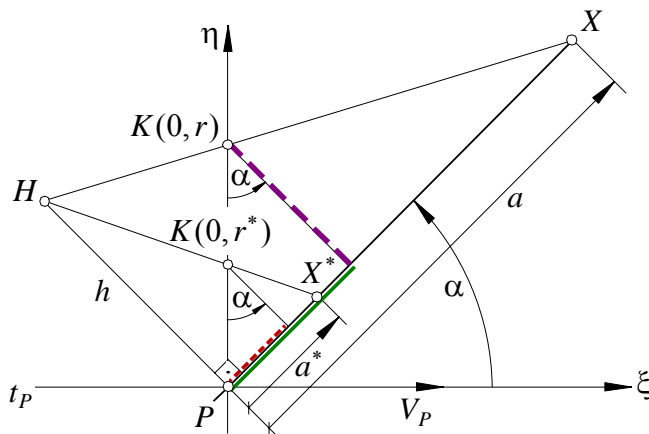
$$r = \overline{PK}, \quad r^* = \overline{PK^*}$$

und den Polarwinkel α von \overline{PX} gegenüber der Polkurventangente ein.

Nach Ähnlichkeitssatz gilt

$$\frac{a}{h} = \frac{a - r \sin \alpha}{r \cos \alpha} \quad \text{und}$$

$$\frac{a^*}{h} = \frac{a^* - r^* \sin \alpha}{r^* \cos \alpha}.$$



Elimination von h liefert die **Formel von EULER-SAVARY**

$$\boxed{\left(\frac{1}{a^*} - \frac{1}{a}\right) \sin \alpha = \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r}}. \quad (5.1)$$

Die rechte Seite kann mit der *Polwechselgeschwindigkeit*

$$V_P = \omega_{01} r^* = \omega_{01} r^*, \quad (5.2)$$

das ist die Absolutgeschwindigkeit von P beim Durchlaufen der Rastpolkurve p_1 , ausgedrückt werden (vgl. (2.10)).

Bezüglich des eingeführten ξ, η -Koordinatensystems gilt dabei:

$$P = P^{21} = 0,$$

$$P^{01} = ir^*, \quad P^{02} = ir,$$

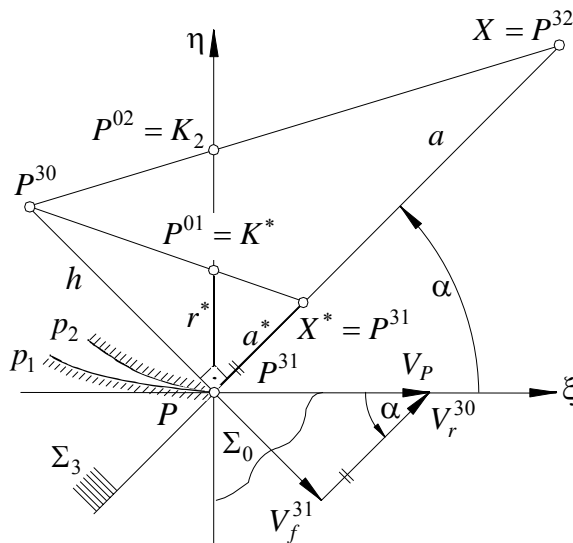
$$P^{31} = a^* e^{i\alpha}, \quad P^{32} = a e^{i\alpha}. \quad (5.3)$$

Nach dem Dreipolssatz von ARONHOLD-KENNEDY gilt mit $(i, j, k) = (1, 2, 0)$:

$$\omega_{21}(P^{21} - P^{02}) = \omega_{01}(P^{01} - P^{02}).$$

Mit (5.2) und (5.3) folgt

$$\frac{\omega_{21}}{V_P} = \frac{r - r^*}{r^* r}. \quad (5.4)$$



Ergänzend zur Formel von EULER-SAVARY gilt also :

$$\left(\frac{1}{a^*} - \frac{1}{a}\right) \sin \alpha = \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{V_P} \tag{5.5}$$

mit $\omega := \omega_{21}$ als Winkelgeschwindigkeit von Σ_2 / Σ_1 .

Wenn P als Punkt von Σ_3 aufgefaßt wird, so gilt mit (2,4)

$$V_P = V_f^{31} + V_r^{30} \tag{5.6}$$

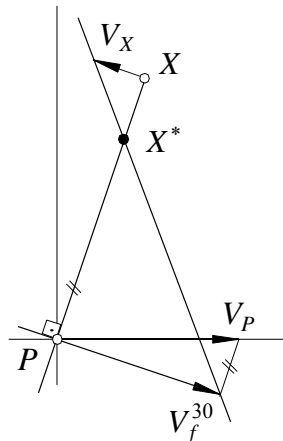
Dies erlaubt die

Folgerung: Krümmungsmitten-Konstruktion von HARTMANN

Gegeben: P, V_P, X, V_X

Gesucht: X^* (Krümmungsmitte der Bahn von X)

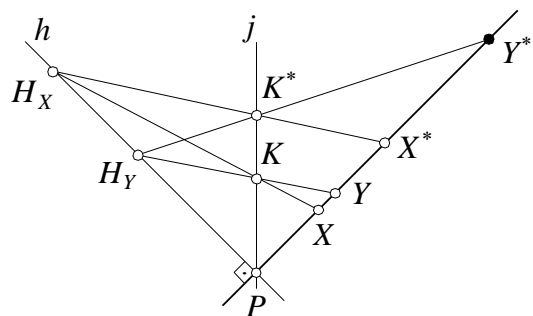
Lösung:



Die Formel (5.5) besagt mit $\alpha = \text{const.} \neq 0$, daß auf jedem Polstrahl

$$\left(\frac{1}{a^*} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\omega}{V_P \sin \alpha} = \text{const.}$$

gilt. Deshalb ist auf einem (festen) Polstrahl die Abbildung $X \mapsto X^*$ – die *Krümmungsverwandtschaft* – durch den Pol P und ein Paar (X, X^*) festgelegt. Für einen weiteren Punkt Y auf dem Polstrahl kann sofort Y^* konstruiert werden. Siehe nebenstehende Figur.



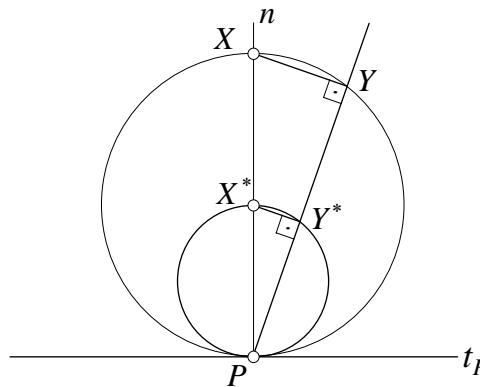
Man erkennt dies auch sofort analytisch:

Wenn $\alpha = \text{const.}$, dann ist $\frac{1}{a^*} - \frac{1}{a} = c_0$. Mit einem Paar (X, X^*) ist a^* und a gegeben.

Daraus wird c_0 berechnet. Wenn jetzt $b = \overline{PY}$ für einen Punkt $Y \in PX$ bekannt ist, so wird

b^* aus $\frac{1}{b^*} - \frac{1}{b} = c_0$ berechnet.

Projektionssatz: Ein Paar (X, X^*) der Krümmungsverwandtschaft, das auf der Polbahnnormalen n liegt, wird bei Normalprojektion auf einen beliebigen Polstrahl wieder auf ein Paar (Y, Y^*) der Krümmungsverwandtschaft projiziert.



Analytische Darstellung der Krümmungsverwandtschaft

(ξ, η) -Koordinaten für X bzw. X^* sind

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \alpha & \xi^* &= a^* \cos \alpha \\ \eta &= a \sin \alpha & \eta^* &= a^* \sin \alpha . \end{aligned}$$

Nach längerer Rechnung folgt durch Einsetzen in die EULER-SAVARY- Formel (5.1)

$$\xi^* = \frac{\xi \eta}{\eta + \rho(\xi^2 + \eta^2)}, \quad \eta^* = \frac{\eta^2}{\eta + \rho(\xi^2 + \eta^2)},$$

wobei $\rho := \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r}$ gesetzt wurde.

Umgekehrt gilt

$$\xi = \frac{\xi^* \eta^*}{\eta^* - \rho(\xi^{*2} + \eta^{*2})}, \quad \eta = \frac{\eta^{*2}}{\eta^* - \rho(\xi^{*2} + \eta^{*2})}.$$

Bemerkung: Die Abbildung "Krümmungsverwandtschaft" $X \mapsto X^*$ ist eine birationale quadratische Punkttransformation (spezielle CREMONA-Transformation), bei der jede Gerade auf einen Kegelschnitt (und umgekehrt) abgebildet wird.

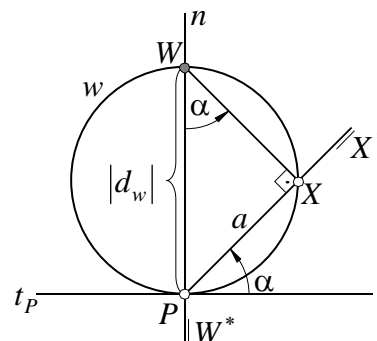
5.4 Wendekreis und Wendepol

Ein Punkt $X \in \Sigma_2$ beschreibt bei B_{21} eine Bahnkurve c_1 .

Ein Punkt X heißt *Wendepunkt* von c_1 genau dann, wenn sein zugehöriger Krümmungsmittelpunkt X^* Fernpunkt der Bahnnormalen ist, d. h. genau dann, wenn in EULER-SAVARY- Formel (5.1)

$$a^* = \infty, \text{ also } \frac{1}{a^*} = 0 \text{ gilt, d. h.}$$

$$-\frac{1}{a} \sin \alpha = \frac{\omega_{21}}{V_P}, \text{ d. h. } \sin \alpha = \frac{a}{d_w} \text{ mit } d_w := -\frac{V_P}{\omega_{21}}.$$



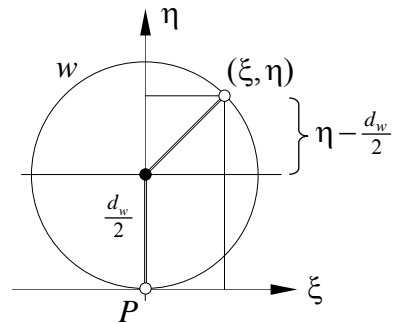
Satz: Alle Wendepunkte X liegen auf dem Wendekreis w , der die Polbahntangente im Pol P berührt und den Durchmesser $|d_w| = \left| \frac{V_P}{\omega_{21}} \right|$ hat.

$W := n \cap w$ heißt Wendepol. (W^* ist Fernpunkt von n .)

Gleichung des Wendekreises:

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{d_w}{2} \right)^2 = \left(\frac{d_w}{2} \right)^2, \text{ wobei } \frac{d_w}{2} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = -\frac{V_P}{2\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi^2 + \eta^2 + \frac{V_P}{\omega} \eta = 0}.$$

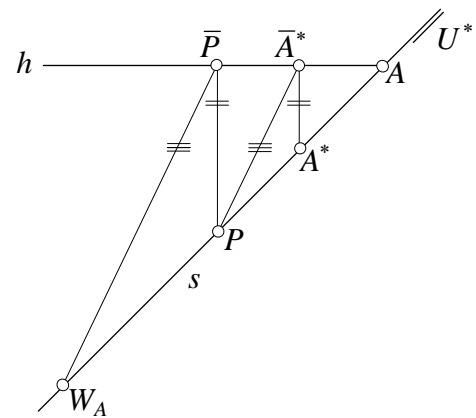


Sägezahnkonstruktion

Gegeben: Polstrahl mit Punkt A und Krümmungsmitte A^*

Gesucht: Wendepunkt W_A auf Polstrahl PA

- Lösung:
- 1) h beliebig durch A
 - 2) P und A^* mit Parallelprojektion auf $\bar{P}, \bar{A}^* \in h$ abbilden



Beweis: Für (A, A^*) gilt $\left(\frac{1}{a^*} - \frac{1}{a} \right) \sin \alpha = \frac{\omega_{21}}{V_P}$. Für (U, U^*) gilt $\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{s} \right) \sin \alpha = \frac{\omega_{21}}{V_P} = \frac{1}{s} \sin \alpha$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a^*} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{a^*} = \frac{1}{s} \tag{o}$$

ist zu zeigen: Zweimalige Anwendung des Strahlensatzes auf die Konstruktion ergibt

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{PA} : \overline{A^*A} = \overline{\bar{P}A} : \overline{\bar{A}^*A} = \overline{W : A} : \overline{PA} & & & & & & \\ \parallel & \parallel & \neq & \neq & \parallel & \parallel & \\ a : (a - a^*) & & & & (a - s) : a & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a}{a - a^*} &= \frac{a - s}{a} \Rightarrow a^2 = (a - s)(a - a^*) = a^2 - aa^* - sa + sa^* \\ &\Rightarrow aa^* = s(a^* - a) \\ &\Rightarrow \frac{aa^*}{a^* - a} = s \Leftrightarrow (o). \end{aligned}$$

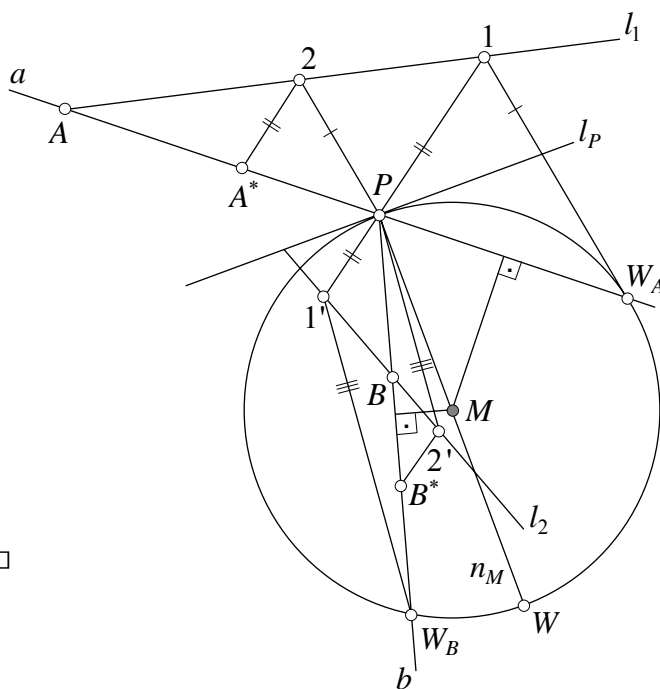
□

Beispiel: Bei Σ_2/Σ_1 kennt man von 2 Punkten A und B die Krümmungsmitten A^* und B^* .
 Man bestimme den Pol P , den Wendepol W und die Polbahntangente.

Lösung:

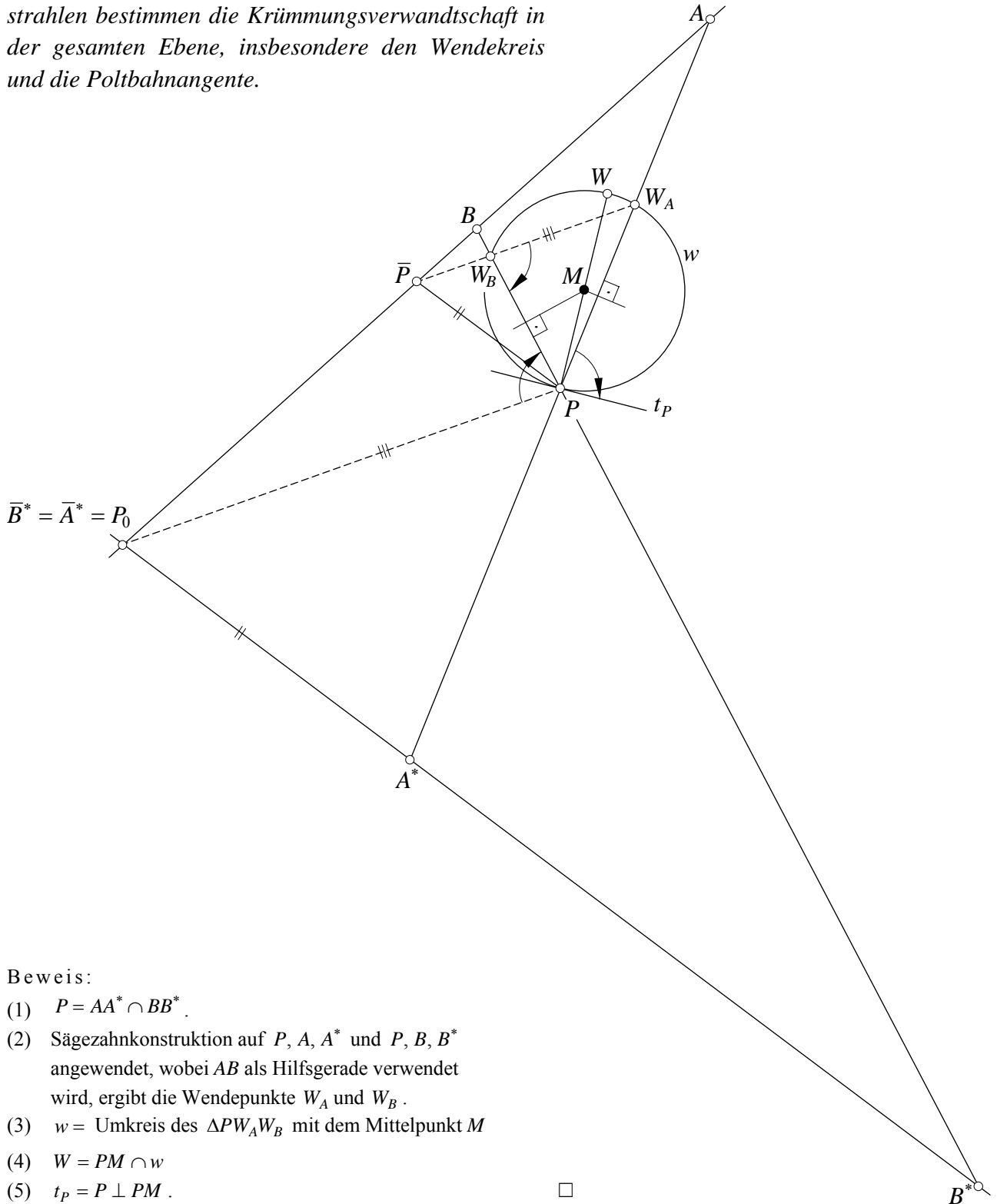
- 1) $P = AA^* \cap BB^*$
- 2) Sägezahnkonstruktion auf P, A, A^*
 anwenden
 \Rightarrow Wendepunkt W_A auf PA
- 3) Sägezahnkonstruktion auf P, B, B^*
 anwenden \Rightarrow Wendepunkt W_B auf PB
- 4) Umkreis $\triangle PUV$ ist Wendekreis w
 mit Mittelpunkt $M, PM \cap w = W$
- 5) Polbahntangente $T = P \perp PM$

□



5.5 Satz von BOBILLIER

Hilfssatz: Zwei Paare (A, A^*) und (B, B^*) der Krümmungsverwandtschaft auf verschiedenen Polstrahlen bestimmen die Krümmungsverwandtschaft in der gesamten Ebene, insbesondere den Wendekreis und die Polbahnangente.



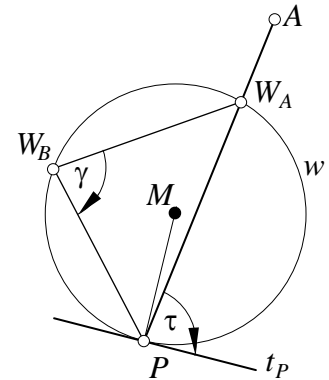
Beweis:

- (1) $P = AA^* \cap BB^*$.
- (2) Sägezahnkonstruktion auf P, A, A^* und P, B, B^* angewendet, wobei AB als Hilfsgerade verwendet wird, ergibt die Wendepunkte W_A und W_B .
- (3) $w =$ Umkreis des $\Delta PW_A W_B$ mit dem Mittelpunkt M
- (4) $W = PM \cap w$
- (5) $t_P = P \perp PM$. □

Folgerungen:

- (1) $\sphericalangle W_A W_B P = \sphericalangle P_0 P B$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden)
 \parallel
 $\sphericalangle A P t_P$ (Sehnen-Tangentenwinkel-Satz)

Der Sehnen-Tangentenwinkel τ ist gleich dem zugehörigen Peripheriewinkel γ .

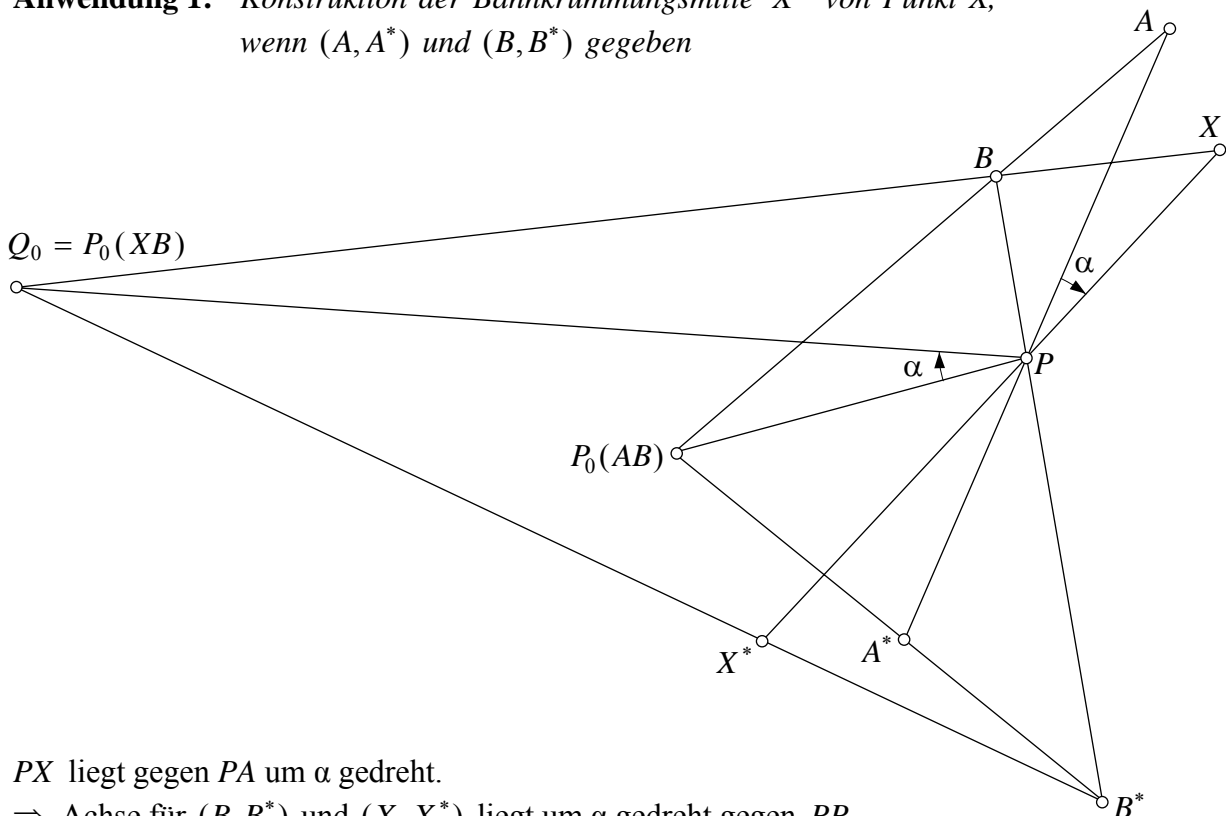


- (2) Mit PA und PB ist durch Folgerung (1) die Achse PP_0 festgelegt.

Satz von BOBILLIER (1870): Zwei Paare (A, A^*) und (B, B^*) der Krümmungsverwandschaft bestimmen die „Achse“ PP_0 mit $P = AA^* \cap BB^*$ und $P_0 = AB \cap A^*B^*$, die nur von den Polstrahlen PA und PB abhängt. Dreht sich ein Polstrahl um P , dann dreht sich die Achse durch den gleichen Winkel im gleichen Sinn.

Beweis: Wird etwa PA abgeändert, dann ändert sich $\sphericalangle A P t_P$ und wegen Folgerung 1) im gleichen Maß und Sinn auch $\sphericalangle P_0 P B$ (da t_P fest ist für die betreffende Krümmungsverwandschaft). □

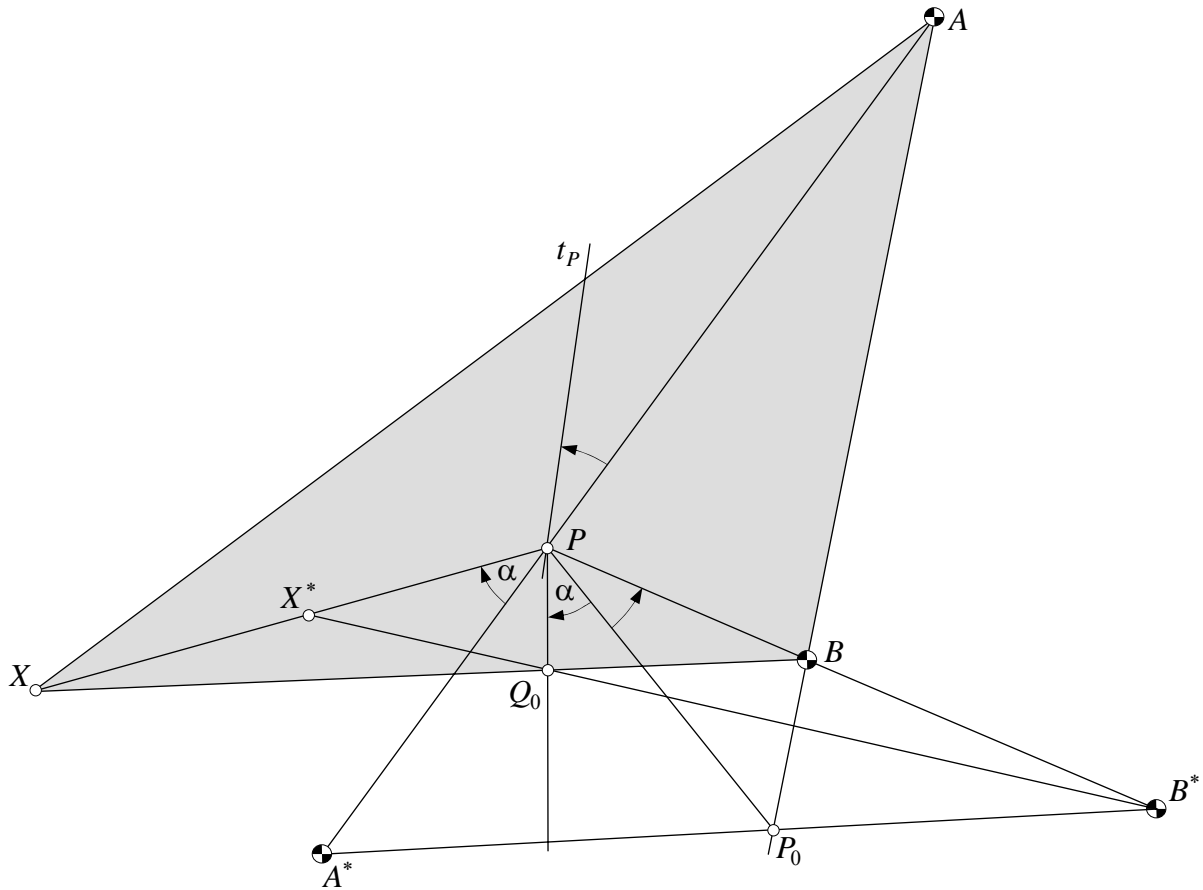
Anwendung 1: Konstruktion der Bahnkrümmungsmitte X^* von Punkt X , wenn (A, A^*) und (B, B^*) gegeben



- PX liegt gegen PA um α gedreht.
 \Rightarrow Achse für (B, B^*) und (X, X^*) liegt um α gedreht gegen PP_0
 $\Rightarrow \alpha$ im Scheitel P antragen $\Rightarrow P_0(XB) = Q_0$
 $\Rightarrow X^* = (Q_0 B^*) \cap PX$. □

Beispiel: Anwendung 1 am Vierecken AA^*BB^*

X^* ist Krümmungsmitte der Koppelkurve des Koppelpunktes X zur Koppel AB .

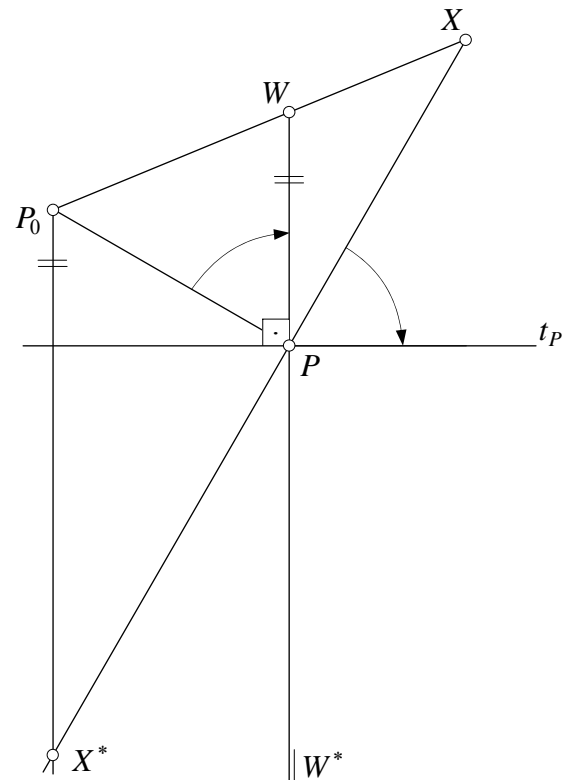


Zusatz: Konstruktion der Polbahntangente t_P .

Wegen $\sphericalangle P_0PB = \sphericalangle APt_P \Rightarrow t_P$.

□

Anwendung 2: Konstruktion von X^* der Punktbahn von X aus dem Pol P und dem Wendepol W



Beweis: In Folgerung 1 wird $A = X$ und $B = W$ gesetzt, dann ist $\sphericalangle XPt_P = \sphericalangle P_0PW$.

W^* ist Fernpunkt von $PW \Rightarrow P_0W^* \parallel PW$.

$X^* = (P_0W^*) \cap PX$ nach Folgerung 2.

□

5.6 Krümmung der Hüllkurve einer Geraden

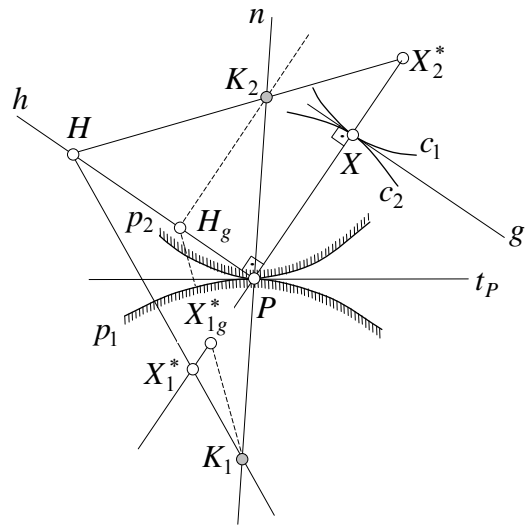
Satz 5.2: Der Krümmungsmittelpunkt X_1^* der Hüllkurve $c_1 \subset \Sigma_1$ einer Kurve $c_2 \subset \Sigma_2$ ist der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Krümmungsmittelpunktes X_2^* von c_2 im Hüllpunkt X .

Weiter gilt: (X_2^*, X_1^*) ist ein Paar der Kreisverwandtschaft.

Folgerung: Wenn c_2 speziell eine Gerade g ist, dann gilt $X_2^* = X_{2u}^*$ und $HK_2 \parallel PX$.

$$H_g := (K_2 \parallel PX) \cap h$$

$$X_{1g}^* = H_g K_1 \cap PX: \text{ Krümmungsmittelpunkt der Hüllkurve } c_1 \text{ von } g.$$



Analytische Charakterisierung von X_{1g}^*

Die Formel von EULER-SAVARY (5.1) mit $a = \infty$ für X_{2g}^* , $a^* = PX_1^*$ ergibt $\frac{1}{a^*} \sin \alpha = \frac{\omega_{21}}{v_P}$.

Mit $d_R = \frac{v_P}{\omega_{21}}$ folgt $\sin \alpha = \frac{a^*}{d_R}$.

Erinnert sei an Wendekreisdefinition. Es gilt $d_R = -d_w$.

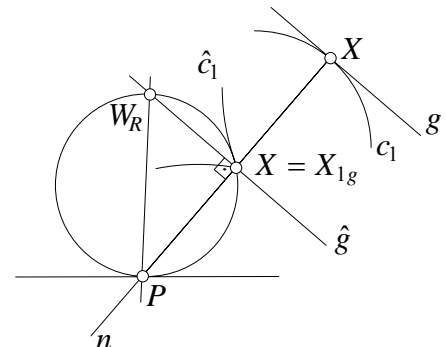
Deshalb wird definiert: Der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rückkehrkreis} \\ \text{Rückkehrpol} \end{array} \right.$ einer Bewegung Σ_2 / Σ_1 sei der an der Polbahntangente gespiegelte $\left\{ \begin{array}{l} \text{Wendekreis} \\ \text{Wendepol} \end{array} \right.$.

Satz: Der Krümmungsmittelpunkt X_{1g}^* der Hüllkurve einer Geraden g bei Σ_2 / Σ_1 ist der von P verschiedene Schnittpunkt der Bahnnormalen im Hüllpunkt mit dem Rückkehrkreis.

Bemerkung: Der Rückkehrkreis ist der Wendekreis der Umkehrbewegung (weil d_w und d_R bei der Umkehrbewegung ihre Vorzeichen vertauschen).

Folgerung 1: Die Hüllkurven aller zu g parallelen Geraden besitzen den gleichen Krümmungsmittelpunkt X_{1g}^* .

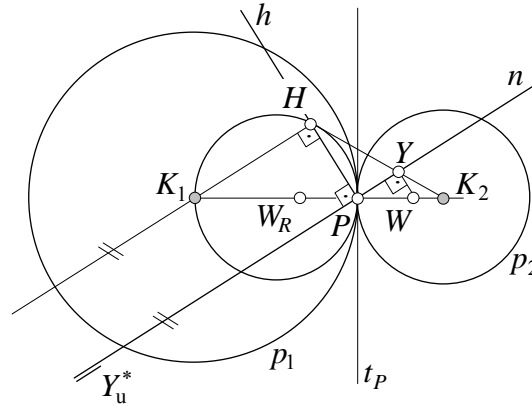
Folgerung 2: Die zu g parallele Gerade \hat{g} durch den Krümmungsmittelpunkt X_{1g}^* auf dem Rückkehrkreis besitzt eine Hüllkurve \hat{c}_1 , deren Krümmungsradius augenblicklich 0 ist ($\hat{X} = X_{1g}^* \in \hat{c}_1$, Krümmung ist unendlich groß) und der Rückkehrpol W_R liegt auf \hat{g} .



Folgerung 3: Für jede Gerade durch den Rückkehrpol W_R hat die Hüllkurve augenblicklich eine auf dem Rückkehrkreis gelegene Spitze.

Wendekreis und Rückkehrkreis-Konstruktion

a) am Beispiel einer epizyklischen Bewegung



- beliebiger Polstrahl n
- $Y \in W$, wenn $Y^* = Y_u^* \in n \Rightarrow Y_u^* K_1 \cap h = H \Rightarrow Y = HK_2 \cap n$
- $W = (Y \perp n) \cap K_1 K_2$
- Rückkehrpol W_R durch Spiegelung von W an P

b) am Beispiel einer hypozyklischen Bewegung

Zusatz: $g = AB \parallel n$ gegeben. Dann ist $X = g \cap PH$ Hüllpunkt der Hüllkurve c_1 von g .
 $X_{1g}^* = HP \cap W_R$ ist der Krümmungsmittelpunkt von c_1 .

