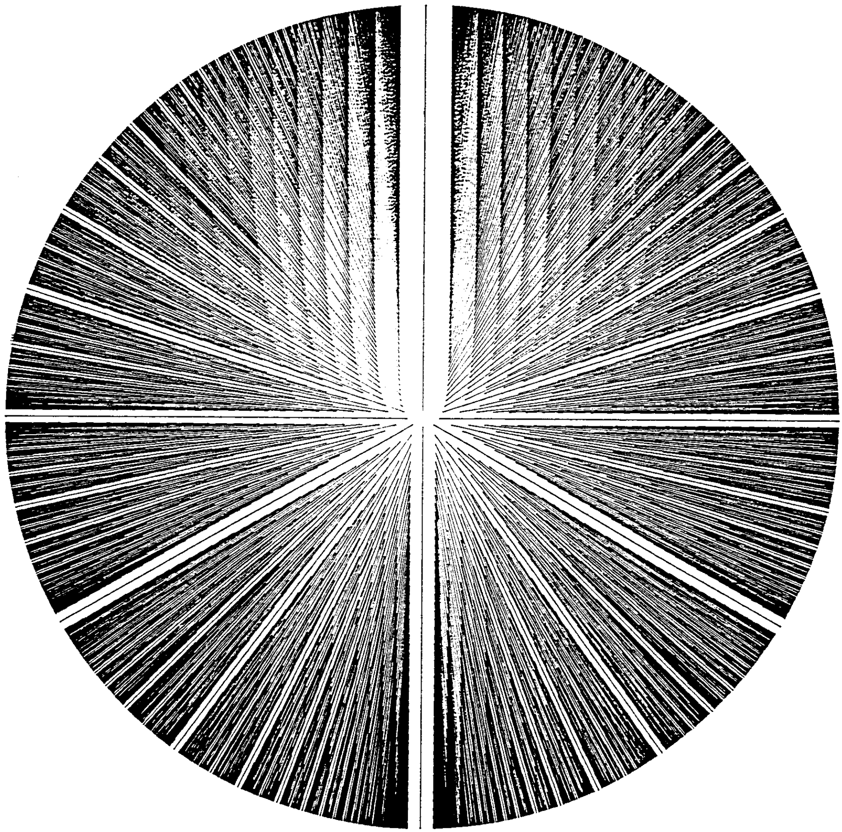
Bilder zur Harmonik



Katalog zur Ausstellung

Peter Neubäcker

Zur Ausstellung “Bilder zur Harmonik”

Bei meiner Beschäftigung mit der Harmonik ist immer wieder das Bedürfnis entstanden, etwas von der Faszination, die dieses Gebiet auf mich ausübt, auch an andere zu vermitteln, die vielleicht für diese Faszination empfänglich sind, aber aus den verschiedensten Gründen noch keinen näheren Zugang dazu gefunden haben.

Es liegt im Wesen der Sache, daß der Weg zur Harmonik in erster Linie über das Hören führt, da es sich dabei um die Erforschung der Strukturen in Natur und Geist handelt, die musikalische Bezüge aufweisen - es entstehen aber bei der Darstellung dieser Bezüge oft auch Bilder, die etwas von der Faszination ihres Inhaltes ahnen lassen, ohne daß es dabei notwendig wäre, das Dargestellte in all seinen Zusammenhängen umfassend zu verstehen.

So will die Ausstellung eine kleine Auswahl aus verschiedenen Arbeitsbereichen der Harmonik zeigen, soweit sich diese für das Auge darstellen lassen. Aus dem Gesagten geht hervor, daß dabei weder das Wesentlichste der Harmonik vermittelt werden kann - das geht eben nur über das Hören und die intensive eigene Arbeit daran - noch daß die Harmonik als Ganzes damit repräsentiert wird - die Auswahl der Bilder erfolgte oft einfach auch nach ästhetischen Gesichtspunkten.

Die Ausstellung laßt sich grob in zwei Bereiche aufteilen: Einerseits handelt es sich um Reproduktionen aus Büchern zur Harmonik zu den verschiedensten Gebieten, andererseits sind es bisher unveröffentlichte Bilder und Objekte, die aus meiner eigenen Arbeit entstanden sind. In diesem Heft sind alle gezeigten Bilder wiedergegeben und mit Erklärungen zu ihrem Inhalt versehen - teilweise auch zu dem Umfeld ihres Entstehens innerhalb des jeweiligen Gebietes der Harmonik.

Bei der Auswahl der Bilder und ihrer Formate hat sich noch ein weiteres harmonikales Element ergeben, das vorher nicht geplant war: jedes Format, also sein Verhältnis von Breite zu Höhe, entspricht auch einem musikalischen Intervall - und bei der Auswahl der Formate hat es sich gezeigt, daß dabei alle zwölf Intervalle innerhalb einer Oktave vertreten sind. Die jeweiligen Formate sind bei den Bildern mit den zugehörigen musikalischen Intervallen angegeben - wo nichts angegeben ist, ist das Bild entweder offensichtlich rund oder quadratisch - musikalisch der Prime entsprechend - oder sie stehen im DIN-Format - dem Verhältnis $1 : \sqrt{2}$, das musikalisch einen temperierten Tritonus repräsentiert. Da auch dieses Heft das DIN-Format hat, kann man auch einen Eindruck davon gewinnen, wie sich das jeweilige Intervall des Bildformates mit dem Tritonus “arrangiert”.

Dem Freien Musikzentrum München danke ich herzlich für die Unterstützung bei der Verwirklichung dieser Ausstellung.

Peter Neubäcker — München, November 1988

Bild 1

Das Monochord als Weltmodell

Robert Fludd (1574-1637)

Format 4:5 (Große Terz)

Dieses Bild symbolisiert einen Grundgedanken der Harmonik: Daß der ganze Aufbau der Welt musikalisch strukturiert sei, und daß man diese Verhältnisse auf dem Monochord darstellen kann. Dieser Gedanke geht für unseren Kulturkreis auf Pythagoras zurück, der um 500 v.Chr. gelebt hat, und der das Monochord als musikalisches Meßinstrument eingeführt hat.

Man sieht auf dem Bild die Zuordnung von Tönen auf dem Monochord zunächst zu den vier antiken Elementen, darüber zu den sieben Planetensphären und über diesen zu den himmlischen Bereichen. Bedeutsam ist hier die Andeutung, daß der Weltenschöpfer- im Sinne des griechischen Demiurgos - der oben das Monochord stimmt, die Verhältnisse auf dem Monochord als vor aller Schöpfung gegeben vorfindet, und diese durch das Anziehen der Saite in den Hörbereich transponiert - also in der materiellen Schöpfung erlebbar macht.

Das Bild symbolisiert aber auch gleichzeitig das Ende einer Epoche harmonikalen Denkens: Seit Pythagoras waren die Vorstellungen von der harmonikalen Weltordnung und der Sphärenharmonie allen Denkern bis zur Renaissance gegenwärtig - aber es hat sich kaum jemand gefragt, wie diese Vorstellungen in der empirischen Natur verwirklicht seien. Robert Fludd war ein hermetischer Philosoph dieser alten Schule - er bezieht seine Gedanken vor allem aus der Überlieferung, und wenn man heute versucht, die auf diesem Bilde dargestellten Zuordnungen nachzuvollziehen, so erscheinen sie relativ willkürlich und austauschbar.

Robert Fludds Zeitgenosse, der große Harmoniker und Astronom Johannes Kepler, ist als erster den Weg gegangen, der dem heutigen harmonikalen Denken entspricht: Ausgehend von der alten Vorstellung der Sphärenharmonie wollte er in der empirischen Natur ergründen, wo sich diese Harmonie in den Planetenbewegungen verwirklicht. In seinem Werk “Harmonices Mundi” stellt er die Ergebnisse seiner Forschungen dar und setzt sich zum Schluß auch mit der Betrachtungsweise Robert Fludds auseinander, von dem er sagt:

“...Man kann auch sehen, daß er seine Hauptfreude an unverständlichen Rätselbildern von der Wirklichkeit hat, während ich darauf ausgehe, gerade die in Dunkel gehüllten Tatsachen der Natur ins helle Licht der Erkenntnis zu rücken...”

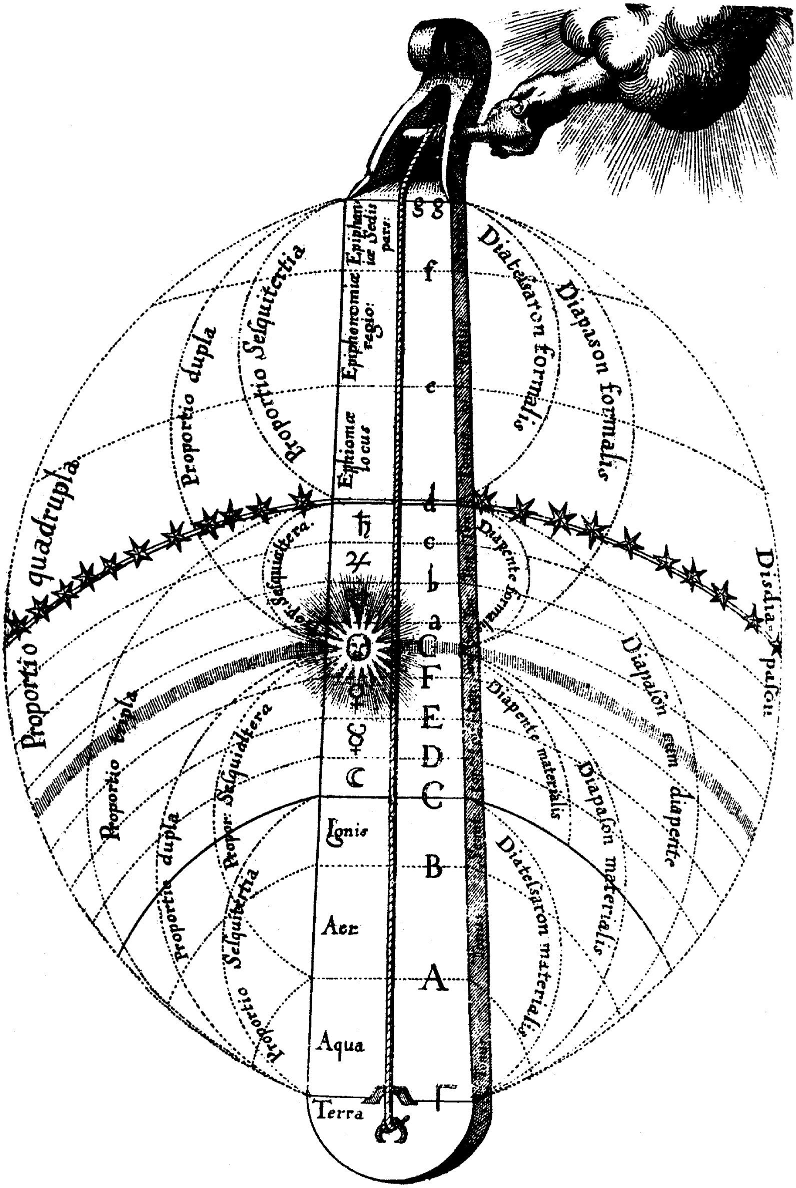

Proportio quadrupla
Proportio dupla
Proportio Sesquitertia
Proportio tripla
Propor: Sesquialtera
Proportio dupla
Proportio Sesquitertia
Diatessaron formalis
Diapason formalis
Disdiapason
Diapente materialis
Diapason cum diapente
Diapason materialis
Diatessaron materialis
Ignis
Aer
Aqua
Terra
g
f
e
d
c
b
a
G
F
E
D
C
B
A
Γ

Bild 2

Die Platonischen Körper als Modell für das Planetensystem

aus: Mysterium Cosmographicum von Johannes Kepler (1571-1630)

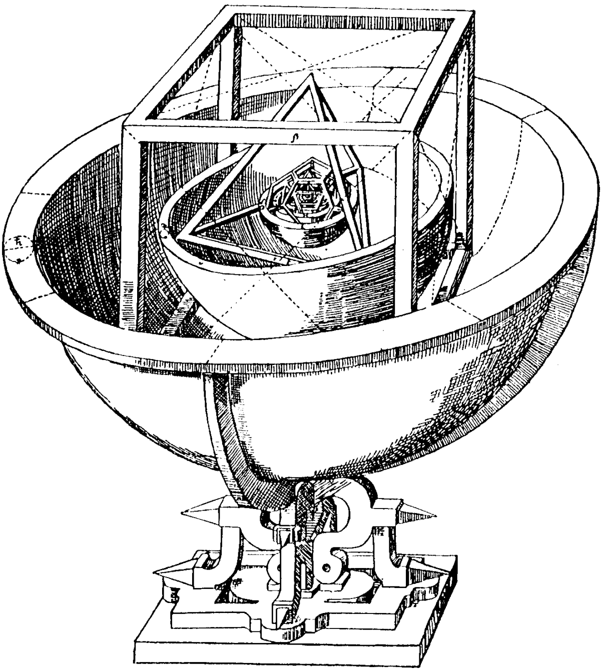
Format 5:9 (Kleine Septime)

Johannes Kepler war von Jugend auf davon überzeugt, daß die harmonikale Ordnung der Welt sich auch empirisch nachweisen lassen müsse. Seine Fragestellung dazu war eine für heutige Ansätze der Naturforschung ungewöhnliche: Nach den heute bekannten Gesetzen der Himmelsmechanik kann man zwar errechnen, welchen Abstand von der Sonne ein Planet bei einer bestimmten beobachteten Umlaufzeit hat - warum er aber genau diesen Abstand und diese Umlaufzeit hat, dafür gibt es keinen Anhaltspunkt. Genau diese Frage aber interessierte Kepler, und diese Art der Betrachtung ist für die harmonikale Denkweise typisch: Es geht dabei also um das Erkennen von gestalthaften Zusammenhängen, die für den Betrachter eine "physiognomische" Aussage enthalten. Seine erste Idee dazu war ein geometrischer Ansatz:

Wenn man versucht, aus gleichseitigen Vielecken regelmäßige räumliche Körper zusammenzusetzen, so zeigt es sich, daß nur fünf solcher Körper möglich sind: Aus gleichseitigen Dreiecken lassen sich drei Körper bilden: der Tetraeder aus vier, der Oktaeder aus acht und der Ikosaeder aus zwanzig Dreiecken; aus Quadraten lässt sich nur der Würfel bilden und als letzter der Pentagon-Dodekaeder aus zwölf Fünfecken. Diese fünf Körper sind bei Plato erstmals beschrieben und werden deshalb auch die "platonischen Körper" genannt - sie sind auf Bild 3 auch noch einmal zu sehen. Die Körper haben nun die Eigenschaft, daß sich eine Kugel so um sie herumlegen lässt, daß sie von innen von allen Ecken des Körpers berührt wird, und eine weitere Kugel sich so in den Körper hineinlegen läßt, daß sie von innen alle Flächen des Körpers in der Mitte berührt.

Kepler hatte nun entdeckt, daß, wenn man diese Körper so ineinander legt, daß die Umkugel des einen jeweils gleichzeitig die Inkugel des nächsten bildet, sich aus den Radien der Kugeln recht gut die Abstände der Planeten untereinander ergeben. Das ist als Modell in dem nebenstehenden Bild dargestellt - unten ist der innere Bereich des oberen zu sehen.

Freilich haben die äußeren Planeten, von denen der erste, Uranus, erst zweihundert Jahre nach Kepler entdeckt wurde, in diesem Modell keinen Platz, da eben nur fünf solcher Körper geometrisch möglich sind, und die Genauigkeit der Übereinstimmung befriedigte Kepler selbst nicht ganz. Diese Entdeckung gab ihm aber den begeisternden Impuls weiterzusuchen, wo immer er Anhaltspunkte für den harmonikalen Aubau der Welt finden konnte.



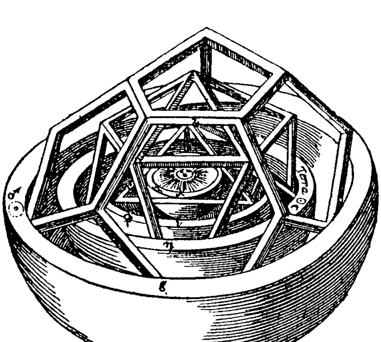


Bild 3

Die Platonischen Körper und ihre Verwandtschaften

aus: “Weltharmonik” von Johannes Kepler (1571-1630)

Format 8:9 (Ganzton)

Johannes Kepler veröffentlichte 1619 das Werk “Harmonices Mundi - die fünf Bücher der Weltharmonik”, das er selbst als sein wichtigstes Werk ansieht, weil er darin die musikalische Harmonie des Planetensystems beschreibt, die er sein Leben lang gesucht und schließlich gefunden hat.

In den ersten beiden Büchern dieses Werkes leitet er die Qualitäten der Zahlen aus geometrischen Untersuchungen über die Darstellbarkeit der regelmäßigen Figuren ab - die nebenstehende Abbildung stammt aus dem zweiten Buch, in dem er die regelmäßigen Figuren zu räumlichen Körpern zusammensetzt: Hier erscheinen wieder die platonischen Körper, hier zu den Elementen Feuer, Wasser, Luft, Erde und dem Kosmos in Beziehung gesetzt, und einige von ihnen abgeleitete Figuren, wie die von Kepler erstmals beschriebenen Sternkörper.

Die in den ersten beiden Büchern gefundenen Qualitäten der Zahlen überträgt er im dritten Buch auf dem Monochord in den hörbaren Bereich und entwickelt eine umfassende Musiktheorie; im vierten Buch wendet er die in Geometrie und Musik gewonnenen Erkenntnisse auf astrologische Betrachtungen an.

Im fünften Buch, dem astronomischen Teil, stellt er dann seine wesentliche harmonikale Entdeckung dar: die Verwirklichung der musikalischen Harmonien durch die Planetenbewegungen. Nachdem er erst die Abstände und Umlaufzeiten der Planeten unter verschiedenen Gesichtspunkten musikalisch untersucht und dabei zu keinen befriedigenden Ergebnissen gelangt, betrachtet er schließlich die Winkelgeschwindigkeiten der Planeten, wie sie ein Betrachter auf der Sonne wahrnehmen würde, und stellt dabei fest, daß diese Geschwindigkeiten in Sonnennähe und Sonnenferne jedes Planeten auf dem Monochord eingestellt die schönsten musikalischen Harmonien ergeben - sowohl für jeden Planeten einzeln, als auch die verschiedenen Planeten untereinander verglichen. Dieses Ergebnis nun trifft auch auf die später entdeckten äußeren Planeten zu, wie in neuerer Zeit berechnet wurde, und scheint so ein allgemein gültiges Bauprinzip unseres Sonnensystems zu sein.

In der Begeisterung über seine Entdeckung schreibt Kepler: “...Ob die heutigen oder spätere Menschen das Buch lesen, das verschlägt nichts. Mag es hundert Jahre auf den Leser warten, wenn Gott selber sechstausend Jahre dessen geharrt hat, der sein Werk erblickt..”

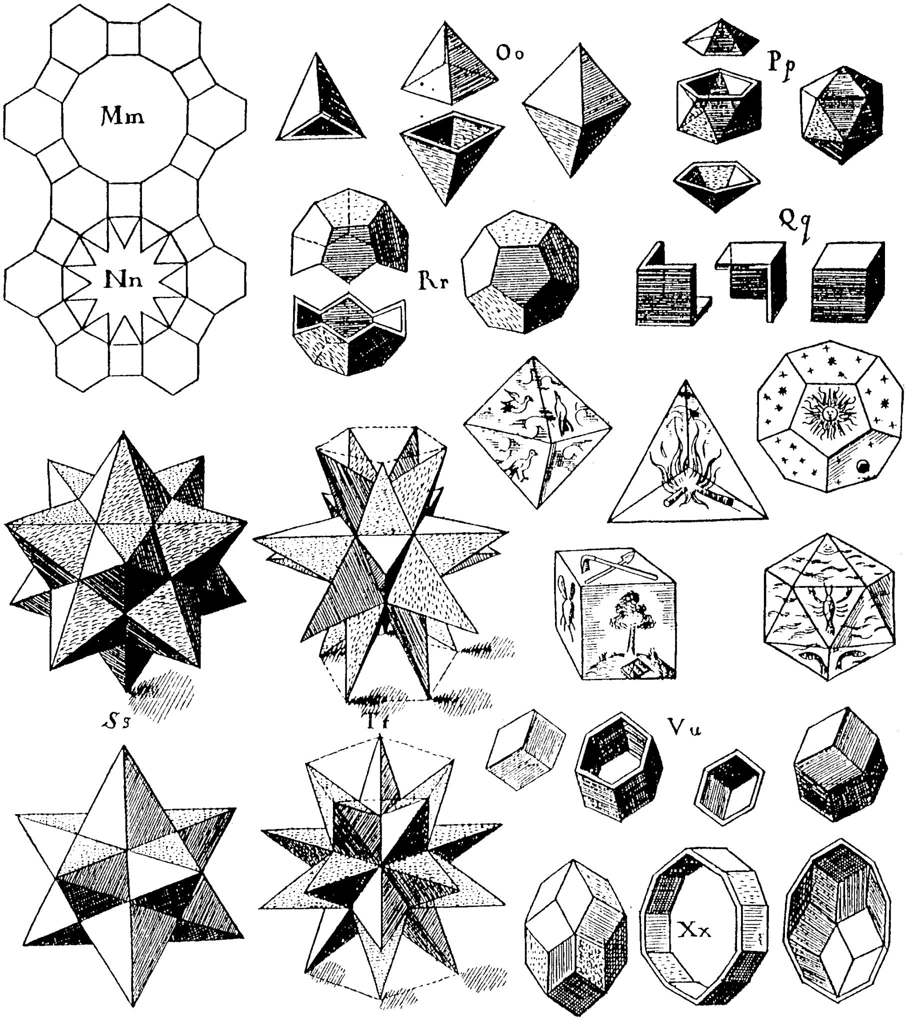

Mm
Nn
Oo
Pp
Qq
Rr
Ss
Tt
Vu
Xx

Bild 4

Variationen in der Gestalt der Schneekristalle
aus: “Atlas der Kristallformen” von Victor Goldschmidt (1853-1933)

Bei seinen Untersuchungen über die geometrischen Strukturen in der Natur beschäftigt sich Johannes Kepler auch mit dem Schnee und seiner sechseckigen Form und stellt seine Gedanken dazu dar in der kleinen Schrift “Neujahrsgabe oder vom sechseckigen Schnee”. Auch hier stellt er neben kausalen “naturwissenschaftlichen” Überlegungen mehr gestalthafte Betrachtungen an, indem er etwa die sechseckige Form der Schneekristalle mit der Sechszahl der Blütenblätter von Liliengewächsen vergleicht und diese der Fünfzahl der Blütenblätter von Obstgewächsen gegenüberstellt - und daraus Schlüsse auf das sich dadurch äußernde Wesen dieser Pflanzen zu ziehen versucht.

Die nebenstehende Abbildung stammt aber nicht von Kepler, sondern ist sehr viel jünger: Sie ist dem “Atlas der Kristallformen” von Victor Goldschmidt entnommen. Wie Kepler allgemein als Astronom bekannt ist, aber kaum jemand weiß, daß seine Forschungsergebnisse bei der Suche nach der musikalischen Harmonie der Welt zustande gekommen sind, so ist auch der “Atlas der Kristallformen” den Kristallographen als Standardwerk bekannt, aber auch von Victor Goldschmidt ist es kaum bekannt, daß er sich mit den Zusammenhängen von Kristallographie und Harmonik beschäftigt hat: So in seinem Buch “Über Harmonie und Complikation”, in dem er auf der Grundlage eines von ihm aus der Kristallographie entwickelten Grundgesetzes den analogen Erscheinungen in der Musik, den Farben und verschiedenen Gebieten der Natur nachgeht.

Die Werke Victor Goldschmidts waren es vor allem auch, neben denen von Kepler und Thimus, die die Arbeit Hans Kaysers wesentlich inspiriert haben - Kayser hat die Harmonik, wie wir sie heute kennen, für unsere Zeit neu begründet und dargestellt.

Näheres zu Goldschmidts Verfahren der “Complication” findet sich bei den Erläuterungen zu den Bildern 17 und 18.

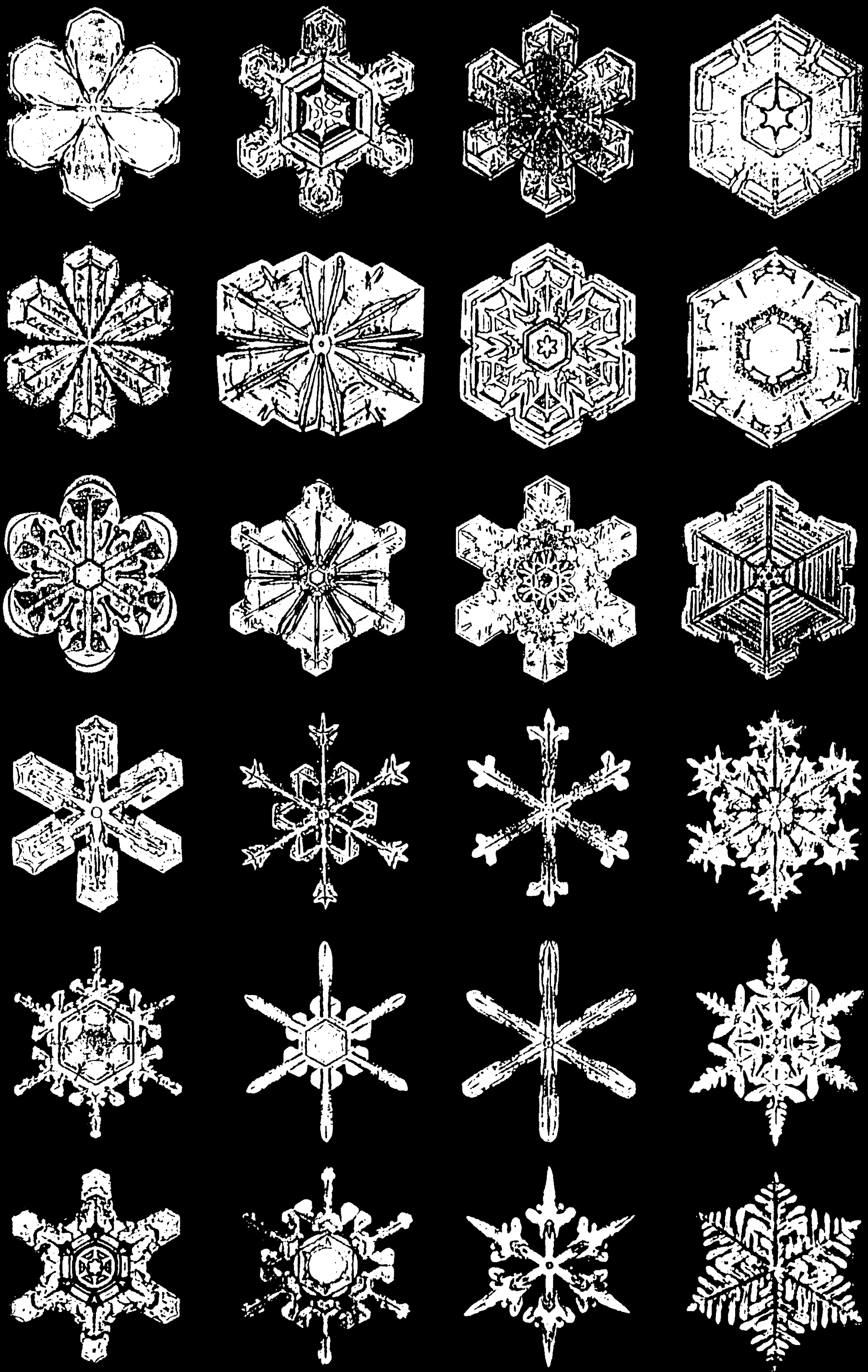


Bild 5

Die Zahl Fünf im Pflanzenreich
aus: “Urzahl und Gebärde” von Hugo Kükelhaus

Die Zahl Fünf im Lauf der Venus
aus: “Rhythmen der Sterne” von Joachim Schultz

Format 2:3 (Quinte)

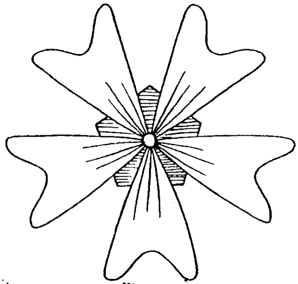
Wenn man aus der Beschäftigung mit den Intervallqualitäten der Zahlen in der Harmonik zu den Zahlen ein qualitatives sinnliches Verhältnis gewonnen hat, so kann man weiter in der Natur schauen, welche Dinge sich über welche Zahlen gestalthaft äußern - so werden einerseits die Strukturzahlen der Naturdinge zum Ausdruck des Wesens, das sich durch diese Zahl darstellt, andererseits vertieft sich das qualitative Bild der Zahl selbst, wenn man schaut, welche Wesen sich welcher Zahl zum Ausdruck bedienen.

Das vorhergehende Bild war ein Beispiel für die Zahl Sechs - die Sechs entspricht harmonikal der Quinte als Oktave der Drei. Weitere Beispiele für die Sechs wären im Planzenreich die Struktur der Liliengewächse, im Tierreich die Bienenwaben und im Planetensystem der Lauf des Planeten Merkur (im Verhältnis zur Erde).

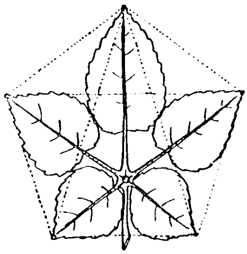
Das nebenstehende Bild und das folgende zeigen Beispiele für die Zahl Fünf. Die Fünf entspricht harmonikal den Terzen - sie erzeugt, zwischen der Vier und der Sechs stehend, die kleine und die große Terz. Es ist charakteristisch für die Fünf, daß sie im Mineralreich als Strukturzahl nicht vorkommt - sie tritt erst ab dem Pflanzenreich auf. So zeigen die Rosengewächse die Zahl Fünf, somit alle wesentlichen fruchttragenden Pflanzen.

Im Planetensystem äußert sich die Venus über die Fünf, indem sie durch ihre Konjunktionen mit der Sonne im Tierkreis ein fast vollkommenes Fünfeck bildet - die Abbildung zeigt den Lauf der Venus in ihrer laufenden Annäherung und Entfernung zur Erde in der Mitte in acht Jahren. Durch das Verhältnis von 5 Konjunktionen in 8 Jahren ergibt sich das Verhältnis der kleinen Sexte, die wiederum eine Umkehrung der großen Terz darstellt. Das Verhältnis 5:8 stellt auch eine Annäherung an den goldenen Schnitt dar, der seinerseits vollkommen im Fünfstern durch die fortlaufende Teilung der Streckenabschnitte des Fünfsterns verwirklicht ist.

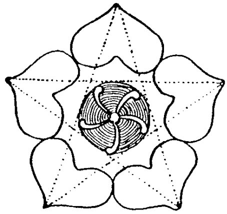
Näheres zum Goldenen Schnitt und seinem Verhältnis zur Harmonik in den Erläuterungen zu den Bildern 8 und 17.



Malve



Himbeerblatt



Glockenblume

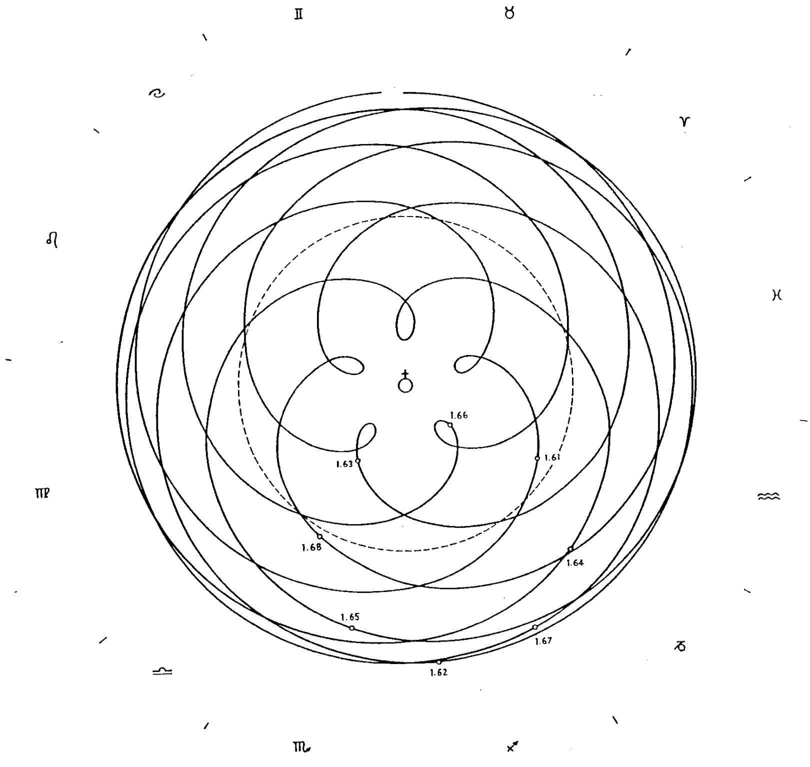


Bild 6

Die Zahl Fünf im Tierreich

aus: “Urzahl und Gebärde” von Hugo Kükelhaus

Diese Abbildung ist wie der obere Teil des vorhergehenden Bildes dem Buch “Urzahl und Gebärde” von Hugo Kükelhaus entnommen. Das Buch ist zwar nicht zur Harmonik im engeren Sinne zu rechnen, da Kükelhaus die Tonbezüge der Zahlen kaum berücksichtigt, aber in seiner Weise der Zahlenbetrachtung steht er ganz in dem Geiste von Pythagoras und Kepler, und es findet sich viel Material darin, das zu einer qualitativen Zahlenbetrachtung beiträgt.

Das Bild zeigt Meerestiere: lgelsterne und einen Kammerling - im Meer als der “Wiege des Lebens” äußert sich die Fünf hier gestalthaft noch am ausgeprägtesten, gewissermaßen als Vorankündigung der Fünfzahl der Finger der menschlichen Hand, mit der das Geschöpf die Welt ergreift. Die Paläontologie hat auch nachgewiesen, daß die Vorfahren aller heutigen Säugetiere die Fünfzahl der Zehen ausgeprägter zeigten, und daß erst durch spätere Spezialisierung etwa bei dem Pferd nur noch eine übrig geblieben ist.

Kükelhaus schreibt zu dem Bild:

“...So möge sich als freundliche Übereinstimmung darbieten, daß die Welt der Kristalle die Fünfheit nicht kennt und in den Formen der den Großraum durchklingenden Dreiecke, Quadrate und Sechsecke verharrt. Da sie sich nicht fortpflanzen, bleibt ihnen der Durchbruch des Großraumes in das Wunder der Frucht, ins Reich der Mütter verschlossen. Das formale Gleichgewicht, die statische Symmetrie der Kristalle wird bei Pflanze und Tier ein innerlich sich verarbeitendes wandelbares Gleichgewicht, eine “dynamische Symmetrie”, deren Urbild das Fünfeck mit seiner ungleich stetigen Teilung ist. Die Stille der Meerestiefe, die ewige Nacht und der lastende Druck spinnen in Rückerinnerung urferner Sternweisheit den Gedanken der Freiheit durch das Opfer und entsenden ihre Boten als schwebende und fliegende Sternfünfecke in die oberen Schichten der Lichtwelt...”

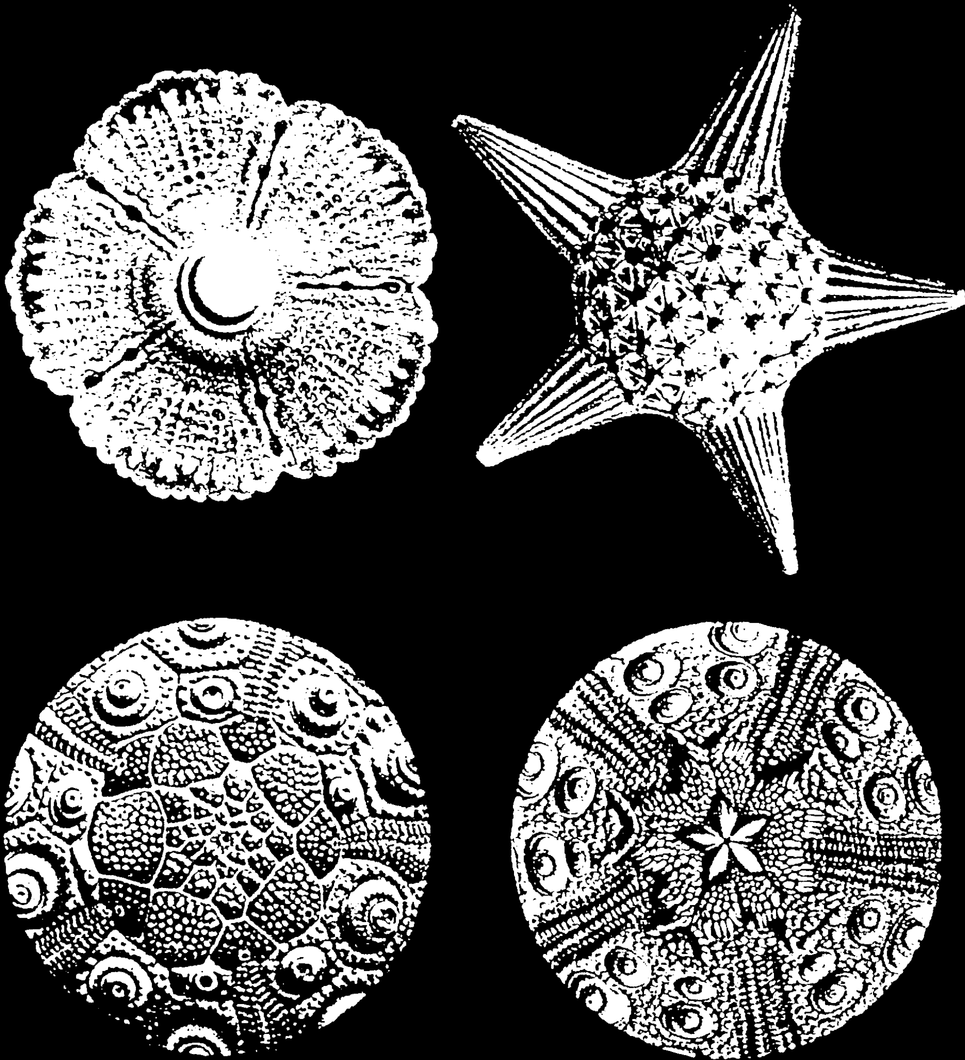


Bild 7

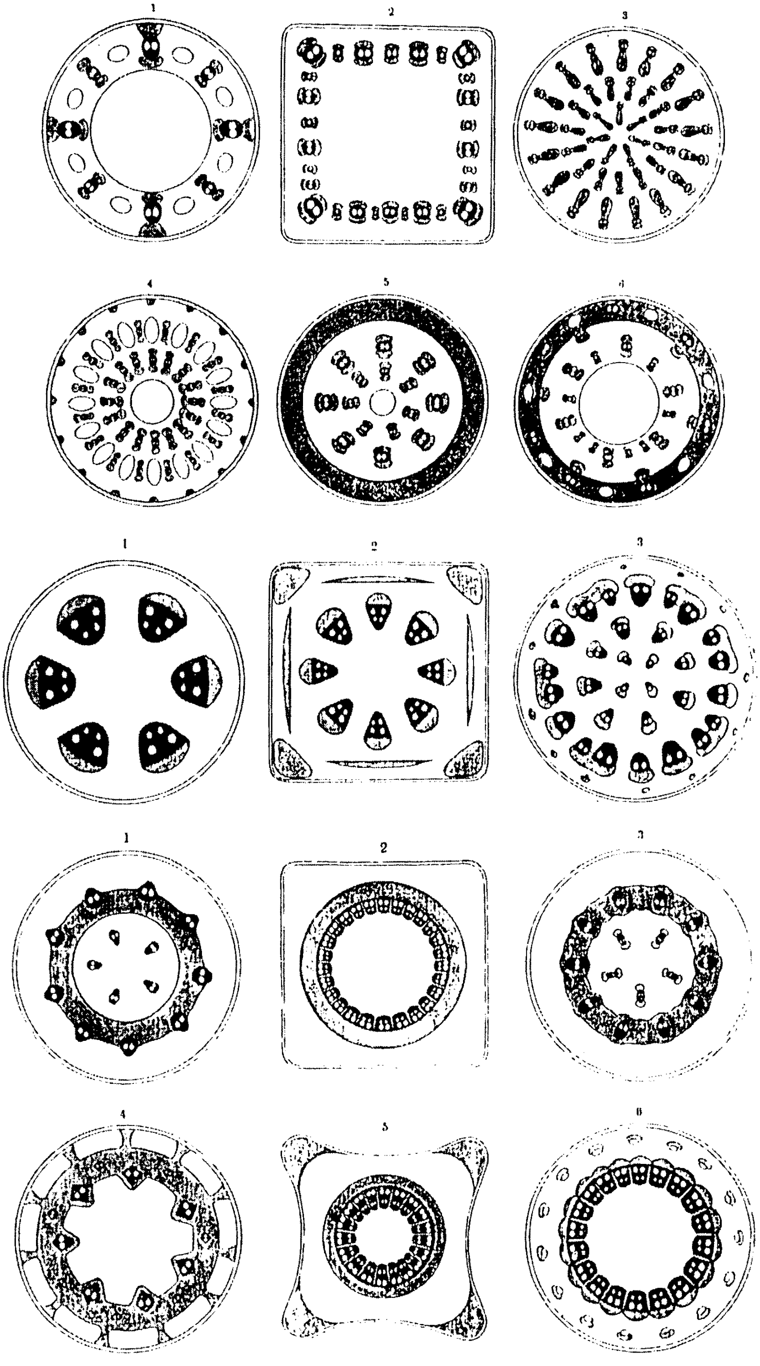
Zahlenstrukturen in Pflanzengrundrissen
aus: “Harmonia Plantarum” von Hans Kayser (1891-1964)

Format 5:8 (Kleine Sexte)

Betrachtet man einen Baum oder eine Blume, so tritt einem zunächst die äußere Form entgegen, die von einer Strukturierung durch Zahlen erst einmal nichts ahnen läßt - in der äußeren Erscheinung ist eher der Gegenpol dieser Struktur betont: das lebendige organische Wachsen in Auseinandersetzung und Austausch mit der übrigen umgebenden Natur.

Schaut man aber tiefer in die verborgeneren Strukturen, so erkennt man auch hier immer wieder eine Ordnung nach Zahlen und Symmetrie - in ihrer Ausformung so vielfältig wie es der Verschiedenheit der Pflanzenwesen entspricht. Auf dem nebenstehenden Bild sind es Stengel- und Stammquerschnitte von verschiedenen Pflanzen. Man erkennt einerseits reine Vierer- und Achterstrukturen, harmonikal dem Prinzip der Oktave entsprechend; Sechser- und Fünferstrukturen, dem Quint- bzw. Terzprinzip entsprechend; dann aber auch höhere Zahlen: hier muß man vorsichtig unterscheiden, ob sich dieselbe Pflanze immer durch dieselbe Zahl äußert - nur in diesem Falle wäre die Zahl wirklich eine charakteristische Strukturzahl. Gerade bei den höheren Zahlen ist es aber oft so, das sie von einem zum anderen Individuum derselben Gattung variieren. Hier zeigt sich eine “Rangordnung” der Zahlen: Je kleiner die Zahl, desto mehr “Wesenskraft” enthält sie; je größer, desto mehr vermischt sich ihr Charakter mit dem ihrer Nachbarn.

Dieses Bild ist wie die drei folgenden einem Werk von Hans Kayser entnommen. Die Harmonik, wie wir sie heute kennen, ist im wesentlichen von Hans Kayser für unsere Zeit neu begründet worden. Inspiriert durch die Werke Johannes Keplers, Albert v. Thimus’ und Victor Goldschmidts hat Kayser auf vielen Gebieten eigene harmonikale Forschungen betrieben und seine Ergebnisse in vielen Büchern veröffentlicht - genannt seien nur “Orpheus - vom Klang der Welt”, “Der hörende Mensch, “Grundriß eines Systems der harmonikalen Wertformen”, “Harmonia Plantarum” und als wichtigstes das “Lehrbuch der Harmonik” - leider sind diese Werke heute alle vergriffen. Noch im Buchhandel erhältlich ist das Büchlein “Akroasis - die Lehre von der Harmonik der Welt”, in dem Kayser einen Überblick über die verschiedenen Gebiete und Ergebnisse der Harmonik bietet.



1
2
3
4
5
6
1
2
3
1
2
3
4
5
6

Bild 8

Zahlenstrukturen der Blattstellungen

aus: “Harmonia Plantarum“ von Hans Kayser (1891-1964)

Format 3:4 (Quarte)

Untersucht man die Blattstellungen verschiedener Pflanzen, so stellt man fest, daß bei den wechselständigen Pflanzen ein bestimmtes Gesetz der Wiederholung der Blattstellung nach einer Anzahl von Stengelumrundungen auftritt. Im einfachsten Fall steht das jeweils nächste Blatt gegenüber dem vorhergehenden; hier wäre das Verhältnis von Umlauf zur Anzahl der Blätter 1:2. In anderen Fällen zeigen sich etwa Verhältnisse von einem Umlauf bei drei Blättern oder zwei Umläufen bei fünf Blättern, also die Verhältnisse 1:3 oder 2:5, harmonikal entsprechend der Duodezime bzw. der Oktave plus Terz. Stellt man die auftretenden Verhältnisse zusammen, so ergibt sich die “Hauptreihe der Blattstellungszahlen:

1:2 1:3 2:5 3:8 5:13 8:21 13:34 21:55 ...

Betrachtet man diese Zahlen näher, so stellt man fest, daß sie sich bilden lassen, indem man jeweils die beiden vorhergehenden Zahlen zusammenzählt; so kommt man zu der Reihe:

1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 ...

Diese Reihe ist als “Fibonacci-Reihe” bekannt; die Verhältnisse von jeweils zwei benachbarten Zahlen sind am Anfang musikalische Intervalle; später nähern sie sich dem “Goldenen Schnitt” an, einem Verhältnis, das die Bedingung erfüllt, daß der kleinere Teil sich zum größeren genauso verhalten soll, wie der größere zur Summe beider Teile. Dieses Verhältnis ist irrational und keine harmonikale Proportion - für das Ohr aber ist die Annäherung an den Goldenen Schnitt bei dem Verhältnis 8:13 schon so weit erreicht, daß man bei den höheren Annäherungen praktisch keine Veränderung des Intervalls mehr wahrnimmt. Da außerdem die Zahl Acht eine Oktave des Grundtons ist, kann man die Zahl 13 unter den kleinen Zahlen als “Repräsentant” der Idee des Goldenen Schnitts im Rationalen ansehen.

Es taucht hier eine merkwürdige Polarität zwischen der Idee des Goldenen Schnitts einerseits und den kleinen ganzen Zahlen andererseits auf: Kayser betont: “Es gibt in der Natur gar keine Blattstellungsreihen, sondern nur Blattstellungen!” - das heißt, die Verwirklichung geschieht immer durch die harmonikalen Zahlen; die Idee des Goldenen Schnitts erscheint aber doch irgendwie dahinter. Ein weiteres Beispiel zu dieser Polarität ist bei der Erläuterung zu Bild 17 gegeben.

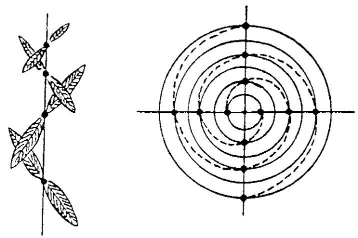


Abb. 65

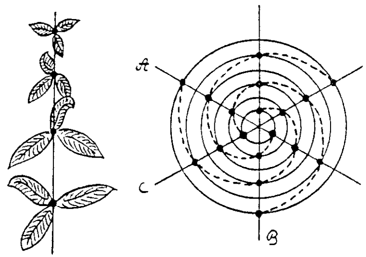


Abb. 66

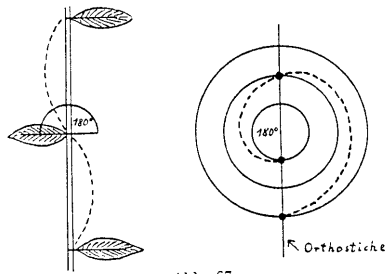


Abb. 67

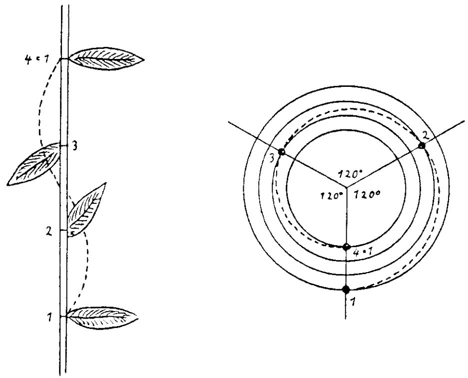


Abb. 68

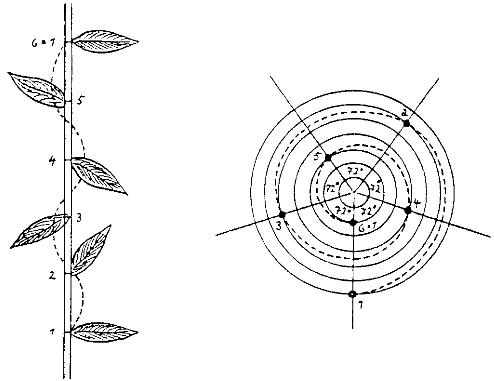


Abb. 69

Bild 9

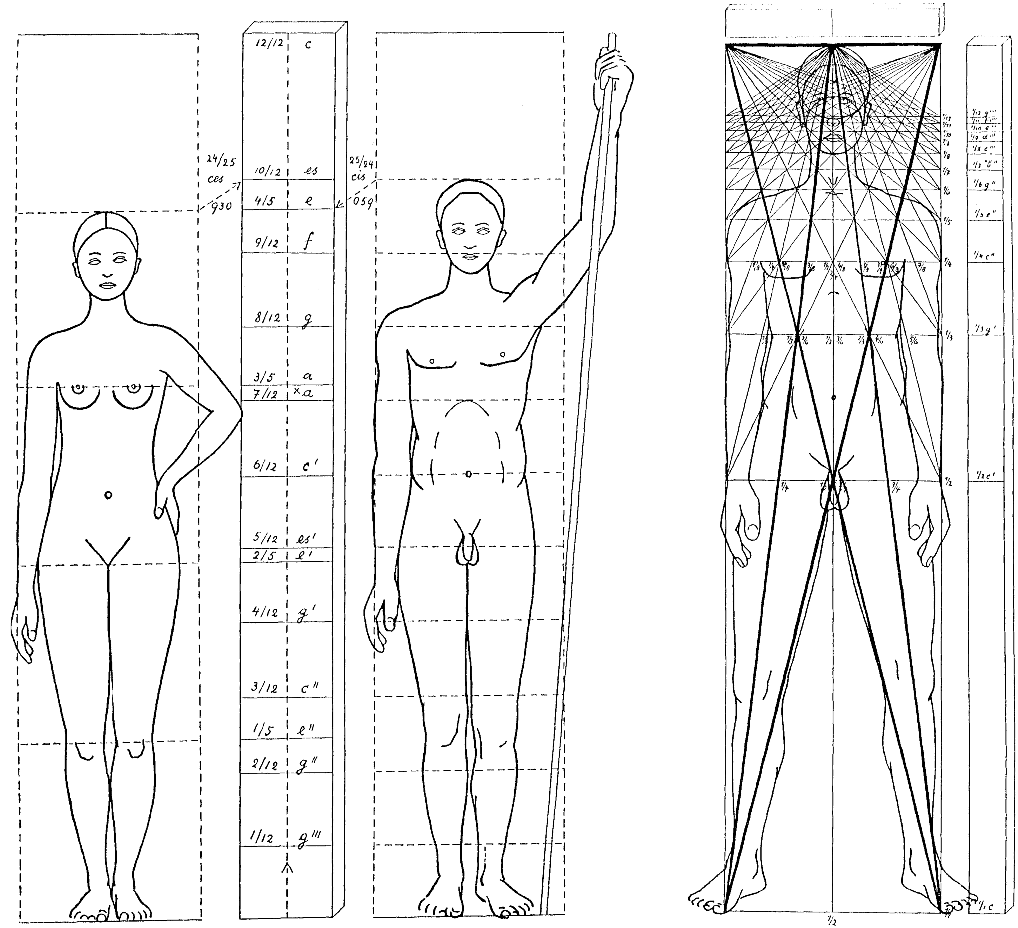
Die musikalischen Maße des Menschen

aus: “Lehrbuch der Harmonik” von Hans Kayser (1891-1964)

Format 5:6 (Kleine Terz)

Kayser schreibt zu den Abbildungen: “Die Suche nach einem sinnvollen Verstehen des Aufbaus der Menschengestalt ist uralt. Die archaischen Bildwerke sind von einer so strengen gesetzmäßigen Geschlossenheit, daß wir, auch wenn wir nichts von einem “Kanon” wüßten, einen solchen resp. verschiedene solcher für diese frühen Kunstepochen mit hoher Wahrscheinlichkeit annehmen dürfen... Daß sich die alten Bildhauer aber auch schon sehr frühe über die faktischen Verhältnisse dieser von ihnen ja in tausendfachen Abwandlungen immer wieder neu geschaffenen Typen klar zu werden suchten, beweisen schon die in Gräbern Agyptens gefundenen Proportionsnetze von Reliefzeichnungen, vor allem aber die Überlieferung vom berühmten “Kanon des Polyklet”, von dem wir freilich nichts Näheres wissen, der aber für die griechischen Bildhauer im höchsten Maße verpflichtend gewesen sein mußte. Wie dann in der italienischen und deutschen Renaissance fast alle bedeutenden Künstler sich aufs ernsthafteste mit Proportionsstudien, besonders solchen der Menschengestalt abgaben, ist bekannt.”

Zum linken Teil des Bildes: “Ich gebe nun in unserer Abbildung die zwei Figuren (Frau und Mann) nach der Tafel 5 von Wyneken, füge jedoch zur Verdeutlichung der tonalen Verhältnisse das Monochord hinzu. Wie man sieht, stellt Wyneken Mann und Frau in dieselbe Maßeinheit, teilt jedoch den Raum des Mannes (Saitenlängen) in Dreierrationen, denjenigen der Frau in Fünferrationen. Eben hierdurch bekommt die Scheitelhöhe des Mannes (von unten gemessen) 5/6 der Einheit, diejenige der Frau 4/5 der Einheit. (...) Höchst interessant scheint mir gerade unter dem Aspekt der Tonbewertung das Mann-Frau-Verhältnis 5/6 : 4/5 zu sein. Wir haben hier nämlich (bei Saitenlängen) das Verhältnis der kleinen Terz 5/6 es zur großen Terz 4/5 e! Daß die Terz, ob groß oder klein, an sich nicht nur im musikalischen Sinne der “Geschlechtston” ist, da sie den Dur- und Molldreiklang bestimmt, sondern als “pentadische” (Fünfer-) Ration in morphologisch-metaphysischem Sinne das Problem der Sexualität auf eine völlig neue Weise zu deuten vermag, habe ich in meiner “Harmonia Plantarum” zu zeigen versucht. Mann und Frau stehen also auch in ihren reinen Größenbeziehungen durchschnittlich im Verhältnis zweier Terzen, d.h. schon ihre rein äußerlichen Maße weisen auf das innere Sexualverhältnis beider Geschlechter hin!”



12/12 c
10/12 es
4/5 e
9/12 f
8/12 g
3/5 a
7/12 ×a
6/12 c'
5/12 es'
2/5 e'
4/12 g'
3/12 c''
1/5 e''
2/12 g''
1/12 g'''
24/25 ces 930
25/24 cis 059
1/2 c'
1/3 g'
1/4 c''
1/5 e''
1/6 g''
1/1 c

Bild 10

Entstehung dreier Stilarten

aus: “Lehrbuch der Harmonik” von Hans Kayser (1891-1964)

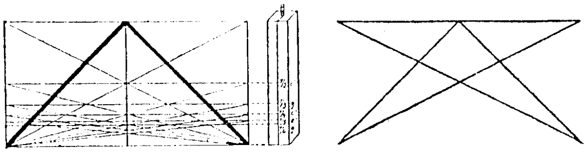
Format 1:2 (Oktave)

Dieses Bild, wie auch der rechte Teil des vorhergehenden, entsteht aus einem “harmonikalen Teilungskanon”: Nimmt man ein beliebiges Rechteck und zeichnet die Diagonalen ein, teilt das Rechteck dann beim Kreuzungspunkt der Diagonalen und zeichnet in das neu entstandene wieder Diagonalen ein und so beliebig weiter, so ergeben sich aus allen Kreuzungspunkten immer harmonikale Intervalle. Diesen Teilungskanon hat Hans Kayser schon in einem mittelalterlichen Bauhüttenbuch entdeckt.

Zu dem nebenstehenden Bild schreibt er: “Diese harmonikale Analyse vermittelt uns aber nicht nur eine Vorstellung davon, wie die alten Baumeister, die ohne Zweifel mit der “rationalen Streckenteilung” vertraut waren, in ihren Entwürfen vorgegangen sein können. Sie sagt uns noch etwas viel Wichtigeres: sie gibt nämlich eine innere Charakteristik dieser drei Stile untereinander. Die Verlängerung des Monochordes = Vergrößerung des Oktavraumes kann man psychisch als eine Ausweitung des seelischen Konfigurationsraumes betrachten. Während die Tonlinien beim ägyptischen Aspekt noch durchaus am “Irdischen” haften und als prototypische Form nur die Pyramide zulassen, wird beim romanischen Aspekt der “Turm” geboren und hierdurch die basilikale Symmetrie ermöglicht. Beim gotischen Aspekt gewinnt dieser Turm beherrschendes Gewicht und reißt alle anderen Formen in die Höhe mit sich: die maximale Ausweitung, der größtmögliche Aufschwung architektonischer Maße als Symbol für die Beziehung des Irdischen, Menschlichen zur Gottheit ist erreicht.

Natürlich darf man bei diesen 3 Bautypen der Abbildung nicht “nachmessen”, ob der Pyramidenwinkel genau stimmt, das Verhältnis von Kirche und Dach beim gotischen Aspekt “richtig” ist und dergleichen. Wie bei allen “Hörbildern” kommt es hier zunächst nicht darauf an, spezielle einzelne Maßanalysen zu geben, sondern die Evolution des Typus - hier dreier Baustile - aus einer einheitlichen Vorstellung zu geben.”

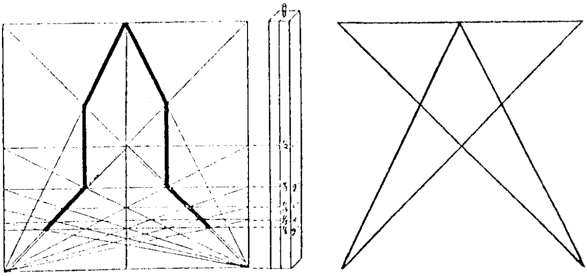
1. Oktave



Ägyptisch

(1 : $^1/_2$)

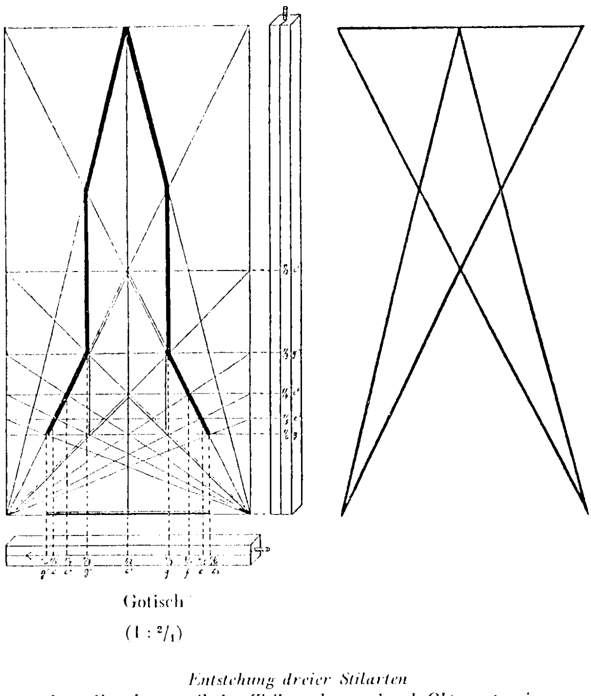
2. Oktave



Romanisch

(1 : 1)

3. Oktave



Gotisch

(1 : $^2/_1$)

Entstehung dreier Stilarten
aus demselben harmonikalen Teilungskanon durch Oktavpotenzierung,
also durch Erweiterung des seelischen Raumes

Bild 11

Die Proportionen des Athena-Tempels im Paestum

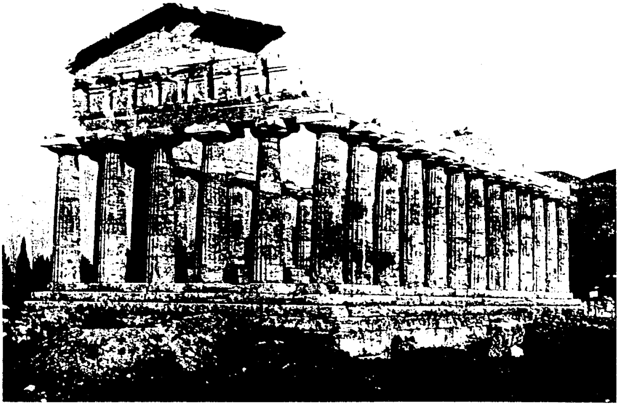
aus: “Architektur und Harmonie” von Paul v. Naredi-Rainer

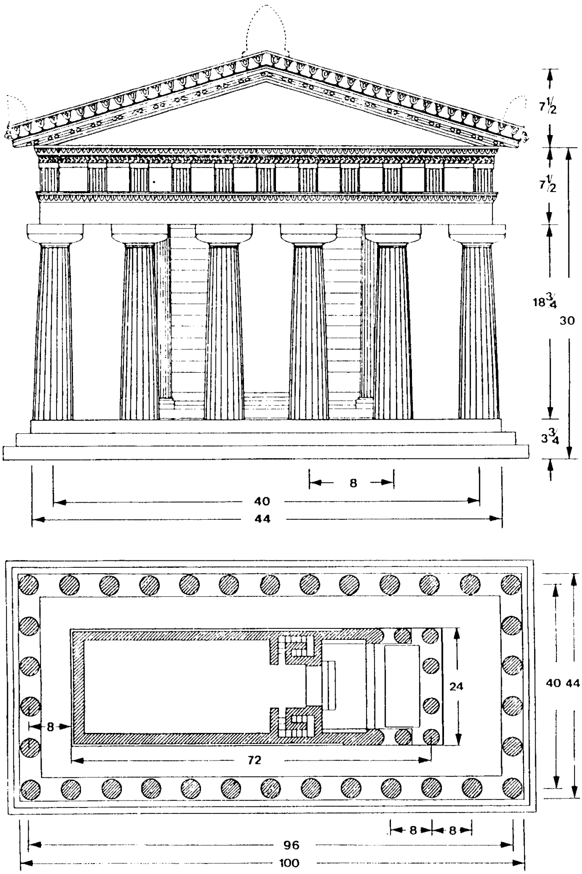
Format 8:15 (Große Septime)

Während es im vorhergehenden Bild um ideelle Untersuchungen im Sinne von Urbildern architektonischer Grundprinzipien ging, werden in diesem und im nächsten Bild vorhandene Bauwerke konkret auf die ihnen zugrundeliegenden harmonikalen Maße untersucht. Das Buch “Architektur und Harmonie” von Paul v. Naredi-Rainer enthält eine Fülle solcher Untersuchungen. Zu diesem Bild schreibt er:

“Das mit der Errichtung des Athenatempels etwa gleichzeitige Aufblühen der pythagoräischen Schule läßt es immerhin möglich erscheinen, daß hier pythagoräische Zahlenspekulationen ihren architektonischen Niederschlag gefunden haben. Die Zahlen der Achsmaße des Tempels, 40 x 96, könnten aus der für die Pythagoräer heiligen Zahlen der Tetraktys (1 2 3 4) abgeleitet sein: geteilt durch 4, die Maßzahl der halben Jochweite, ergeben sich 10 als Summe und 24 als Produkt der Tetraktyszahlen (40:4 = 10 , 10 = 1+2+3+4 ; 96:4 = 24 , 24 = 1x2x3x4).

Es wurde schon auf die zentrale Bedeutung hingewiesen, die im pythagoräischen Denken der wechselseitigen Entsprechung von Zahlen und Tönen beigemessen wurde. Hans Kayser, der in unserem Jahrhundert die pythagoräische Harmonik neu belebt hat, unterzog die Tempel vom Paestum einer harmonikalen Analyse, d.h. er übersetzte die rationalen Zahlenverhältnisse in musikalische Intervalle. Geleitet von der romantischen Vorstellung, Architektur als “gefrorene Musik” aufzufassen, begreift Kayser Zahlen und Proportionen nicht als “rein intellektuelle Größen”, sondern als “Töne, Intervalle und melodische Typen, ‘Nomoi’, die mit den Formen unserer Seele identisch sind und diese in viel unmittelbarerer Weise aussprechen als nur Zahlen und Größen allein.” Bei aller Faszination, die von diesem harmonikalen Denkansatz ausgeht, muß doch in Frage gestellt werden, ob dem Baumeister der Antike die philosophisch-mathematischen Theorien seiner Zeit ähnlich vertraut waren wie etwa dem humanistisch gebildeten Architekten der Renaissance - Kayser ist allerdings davon überzeugt, daß “selbst dort, wo der Baumeister nichts von harmonikalen Proportionen wußte, er diese dennoch anwandte, einfach weil ihn Instinkt und Gefühl dazu veranlaßten, seine Planidee nach diesen Proportionen auszurichten.”





Athenatempel in Paestum (um 510 v. Chr.)

Bild 12

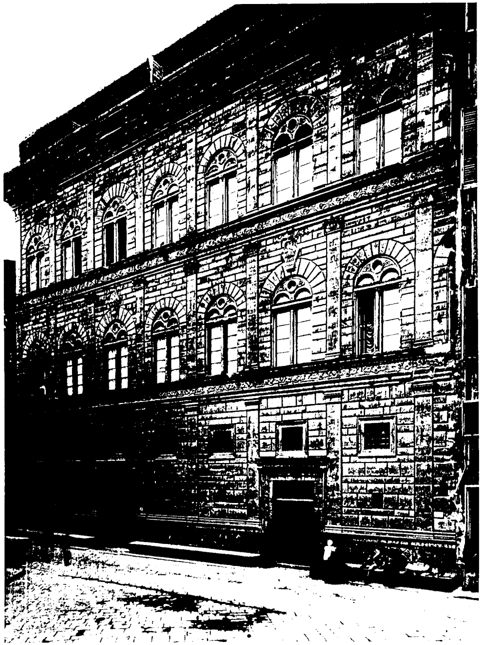
Musikalische Intervalle in der Fassade des Palazzo Rucellai

aus: Architektur und Harmonie von Paul v. Naredi-Rainer

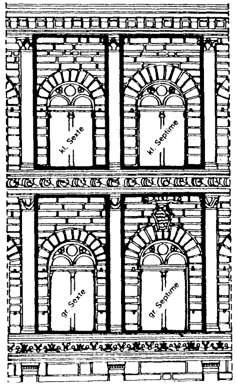
Format 9:10 (Ganzton)

Zu diesem Bild schreibt Naredi-Rainer: “Vom pythagoräisch-platonischen Gedanken, daß die Harmonie des Kosmos nach musikalischen Zahlenverhältnissen aufgebaut sei, ist die Architekturästhetik der Renaissance geprägt, die ihre erste und zugleich bedeutendste Formulierung in Albertis Architekturtraktat ‘De re aedificatoria libri decem’ gefunden hat, das um die Mitte des 15. Jahrhunderts verfaßt, aber 1485 in Florenz erstmals gedruckt wurde. Das ästhetische Grundprinzip, die ‘concinnitas’, manifestiert sich nach Alberti in bestimmten Zahlen und Proportionen, die am klarsten in der Musik auftreten. Deshalb solle man von den Musikern, welche diese Zahlen am besten kennen, das ganze Gesetz der Beziehung ableiten.

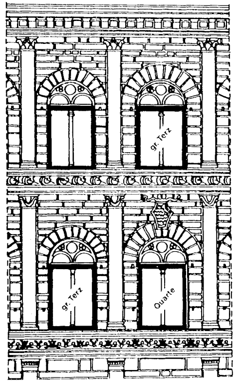
(...) Die dreigeschossige, durch Pilaster und Gesimse gegliederte Fassade des Palazzo Rucellal ist heute 7 Achsen breit, war aber ursprünglich wohl auf 5 Achsen konzipiert. Die Maßeinheit, der florentinische braccio à 58.3 cm, wird sichtbar in der Breite der fein gezeichneten Pilaster, die zusammen mit den Gesimsbändern die Wandfläche in eine rasterhafte Ordnung gliedern und die dadurch entstehenden Schauflächen rahmen. Dieser Raster ist hier aber keineswegs ein gleichförmiges Maschennetz, sondern wird durch die Variierung der Geschoßhöhen und der Achsenbreiten subtil differenziert: Die durch das Portal akzentuierte mittlere Achse ist gegenüber den übrigen Achsen im Verhältnis eines Ganztons verbreitert ($5\,^2/_5 : 4\,^4/_5 = 9 : 8$). Zieht man dieses Maß der Verbreiterung, $^3/_5$ br., von der Gesamtbreite (30 $^3/_5$ br.) ab, so erhält man das runde Maß von 30 br., das zur Gesamthöhe im Verhältnis einer kleinen Terz steht (36 : 30 = 6 : 5). Das Komplementärintervall zur kleinen Terz, der Proportion der Fassadenfläche insgesamt, ist die große Sexte. Sie bestimmt die Proportion der zentralen, mit einem Wappenschild ausgezeichneten Schaufläche im 1. Obergeschoß, dem Piano Nobile ($9 : 5\,^2/_5 = 5 : 3$). Die Schauflächen der übrigen Achsen sind im 1. Obergeschoß nach dem Verhältnis der großen Septime, im 2. Obergeschoß nach dem der kleinen Septime proportioniert, während die Schaufläche der mittleren Achse im 2. Obergeschoß das Verhältnis einer kleinen Sexte darstellt, das in einer quasi spiegelbildlichen Entsprechung auch aus dem Verhältnis von Portalhöhe zu Portalbreite (einschließlich Gewände) gebildet wird. Die Hochrechtecke der Fensteröffnungen wiederholen die Form der Schauflächen; sie ergeben die Verhältnisse von Quarte und großer Terz.”



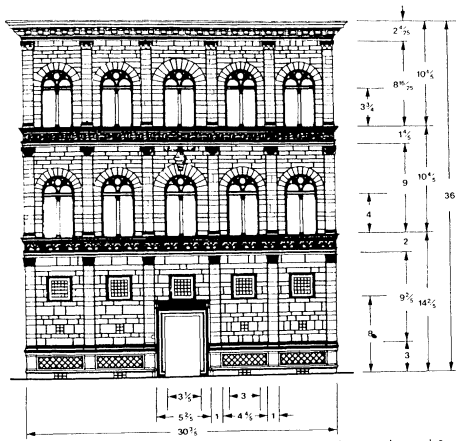
70 Fassade des Palazzo Rucellai in Florenz (Leon Battista Alberti, begonnen 1455)



72 Palazzo Rucellai in Florenz, Fassadenausschnitt, Proportionsschema der von Pilastern und Gesimsen gerahmten 'Schauflächen'



73 Palazzo Rucellai in Florenz, Fassadenausschnitt, Proportionsschema der Fensteröffnungen



71 Palazzo Rucellai in Florenz (vgl. Abb. 63), Rekonstruktion der Fassade mit 5 Achsen, nach Sanpaolesi, Maßangaben in florentinischen bracci à 58.3 cm

Bild 13

Musikalische Zahlenverhältnisse in der Geometrie

aus: “Wege zur Harmonik” von Rudolf Stössel

Format 3:5 (Große Sexte)

Wie für Johannes Kepler in der Geometrie die Grundlagen der Harmonik liegen, da sie die Urgesetze des Raumes beschreibt, so geht auch Rudolf Stössel in seinen Werken zunächst von der Geometrie aus und findet darin eine Fülle von Beziehungen kleiner ganzer Zahlen, die ja die Grundbausteine der musikalischen Intervalle bilden. Zu den Abbildungen schreibt er:

“Cicero hat, wie er erzählt, unter Gestrüpp ein längst zerfallenes Grab gefunden mit dem Stein, den er nach der Gravur als den Grabstein des Archimedes bestimmte.

Die Figur 4 gibt die Zeichnung wieder und zeigt die zwei geometrischen Urformen, das Quadrat und den Kreis in engstem Zusammenhang und dazu noch die symmetrische Form des gleichschenkligen Dreiecks. Läßt man dieses Bild um die Symmetrieachse rotieren, entstehen drei Körper, ein Kegel, eine Kugel und ein Zylinder. Deren Volumina verhalten sich genau wie 1:2:3. Diese Urformen entsprechen einer Proportion der drei kleinsten ganzen Zahlen, dem Anfang der Zahlenreihe und der Mathematik überhaupt. Sie entsprechen aber auch den Tönen c c’ g, also den Intervallen Oktave und Quinte, den stärksten Konsonanzen, gewissermaßen auch Urkonsonanzen, und der Duodezime.”

Die beiden mittleren Reihen der Abbildung sprechen im Wesentlichen für sich selbst - sie zeigen, in wie vielfältiger Form sich Verhältnisse kleiner ganzer Zahlen bei der Kombination der Urformen Quadrat und Kreis ergeben. Zur unteren Figur schreibt Stössel:

“Ich möchte noch einmal elementare Gestalten kombinieren, ein gleichseitiges Dreieck mit seinem Inkreis (Fig. 11). Wir setzen den Zirkel in der oberen Ecke ein und schlagen einen Bogen durch die unteren Ecken. Damit erhalten wir einen großen Sektor. Nun konstruieren wir noch den lnkreis des Sektors, der dessen Radien und den Bogen berührt. Ich überlasse es dem Leser, seinen Mittelpunkt zu konstruieren und mein Resultat nachzurechnen. Jedenfalls verhalten sich die Flächen vom kleinen Kreis zum großen und dann zum Sektor wie 3:4:6.

Wir sehen darin bereits die Quinte 6/4 = 3/2, die Quarte 4/3 und die Oktave 2/1. Nun erweitern wir die Zahlen mit 2 zu 6:8:12 und nehmen noch den kleinen Sektor mit dem gestrichelt gezeichneten Bogen dazu, so haben wir vier Flächen mit den Verhältniszahlen 6 8 9 12 - der Harmonia Perfecta Maxima.”

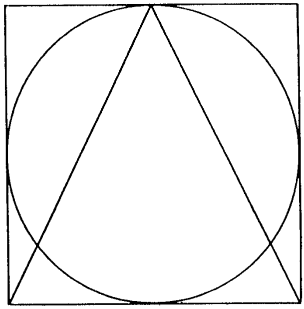


Fig. 4 Grabstein des Archimedes

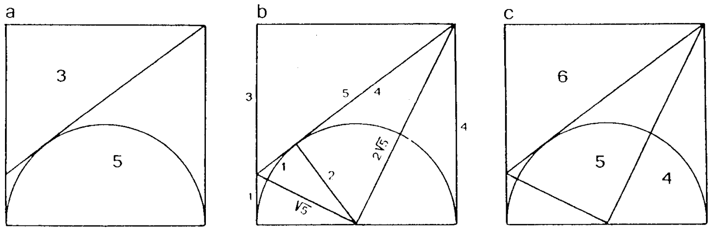


Fig. 6 a und c: Flächenverhältnisse, b: Streckenverhältnisse[2]

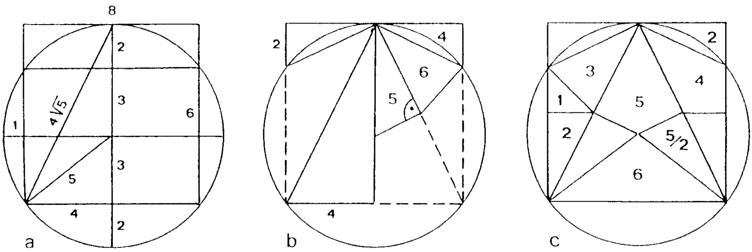


Fig. 10 a: Streckenverhältnisse, b und c: Flächenverhältnisse

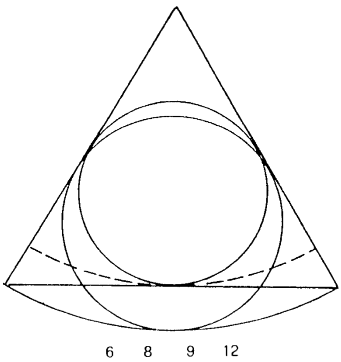


Fig. 11 Flächenverhältnis:
Harmonia Perfecta Maxima

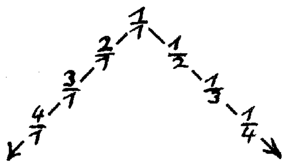
Bild 14

Das Lambdoma als Spielmodell

Das Schema wurde entwickelt von Albert v. Thimus (1806-1878)

Das Modell wurde entworfen und gebaut von Peter Neubäcker

Freiherr Albert v. Thimus veröffentlichte 1868 sein zweibändiges Werk “Die harmonikale Symbolik des Alterthums”, in dem er unter anderem auch das Lambdoma entwickelt - er selbst hält es für die Wiederentdeckung eines pythagoräischen Schemas; es war aber wohl eher eine Neukonstruktion im pythagoräischen Geiste. Aus dem Alterum ist nur die Grundform des Lambdoma bekannt, von der es auch seinen Namen erhalten hat: Wenn man alle Stammbrüche und ihre Kehrwerte in Form des griechischen Buchstaben Lambda Λ in zwei Schenkelreihen aufzeichnet, so kommt man zu diesem Bild:



Diese Schenkelreihen repräsentieren gleichzeitig die Obertonreihe und ihre Spiegelung, die Untertonreihe. Füllt man den Raum dazwischen aus im Sinne von Obertonreihen zu jedem Unterton oder umgekehrt, so erhält man das vollständige Schema, das in beide Richtungen unbegrenzt fortgesetzt vorgestellt werden kann. Das nebenstehende Bild ist dem “Lehrbuch der Harmonik” von Kayser entnommen und geht bis zum Index 16; das ausgestellte Spielmodell geht bis zum Index 32.

Dieses Schema zeigt verschiedene Eigenschaften, die sowohl musikalisch als auch symbolisch sehr interessant sind. Eine dieser Eigenschaften ist beispielsweise, daß alle Brüche, die den gleichen Tonwert besitzen, auf einer Geraden liegen, und daß alle diese Geraden sich in einem Punkt treffen, der eigentlich außerhalb des ursprünglichen Schemas liegt: im Punkt 0/0. Diese Geraden werden Gleichtonlinien genannt; die Zeigersaite des Modells repräsentiert in jeder Stellung eine solche Gleichtonlinie. Stellt man die Zeigersaite zum Beispiel auf den Wert 2/3 ein, so sieht man, daß sie auch durch die Werte 4/6, 6/9, 8/12 usw. geht, die alle eine Quinte ergeben. Gleichzeitig teilt der Steg auf der Monochordsaite daneben genau diese Proportion ab, so daß das Verhältnis 2/3 als Quinte hörbar wird (der obere Teil der Saite repäsentiert jeweils das Intervall). Die zweite Saite stellt den immer gleich bleibenden Grundton dar. Auf diese Weise können an dem Modell alle Zahlenproportionen hörbar gemacht werden.

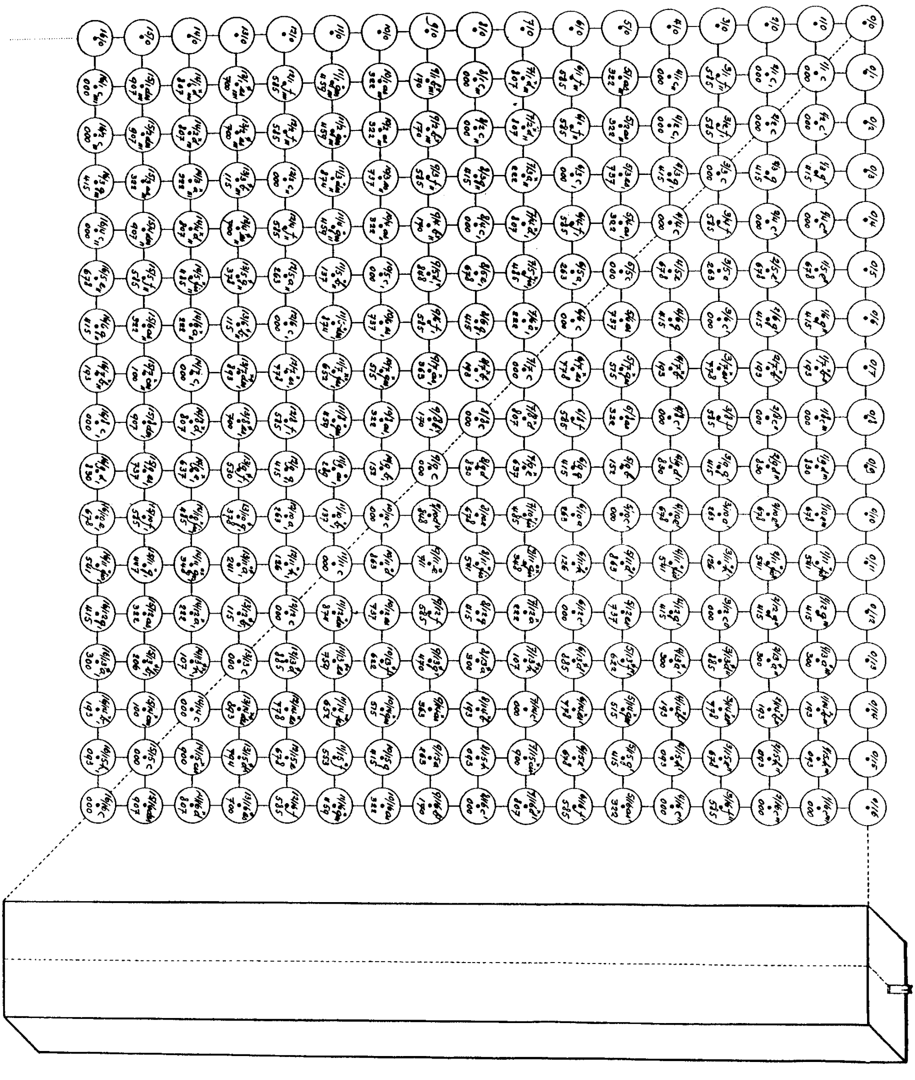


Bild 15

Räumliche logarithmische Darstellung des Lambdoma
von Rudolf Stössel
gezeigt auf der Ausstellung “Phänomena” 1984 in Zürich
Foto von Dieter Trüstedt

Die Strukturen des Lambdoma lassen sich weiter verdeutlichen, wenn man die Werte, die in jedem Feld stehen, in die dritte Dimension abbildet. So stehen etwa die Werte 1/1, 2/1, 3/1, 4/1 für die einfache, doppelte, dreifache und vierfache Saitenlänge des Monochords, die man dann in einem Modell als Säulenhöhen nach oben aufbauen könnte.

Das so entstehende Modell entspricht aber nicht dem Hörerlebnis, da für das Ohr die Tonabstände zu den höheren Zahlen hin immer kleiner werden, das heißt, das Hören der Intervalle geschieht logarithmisch. Das hier gezeigte Modell berücksichtigt diese Gegebenheiten.

Der Grundriß des Modells ist quadratisch wie das Lambdoma selbst, und genau in der Mitte des Bildes verläuft auf gleichbleibender Höhe die Diagonale des Lambdoma, auf der die Werte 1/1, 2/2, 3/3 usw. liegen, also alle Werte, die mit dem Grundton identisch sind. Diese Linie wird auch “Zeugertonlinie” genannt. Von ihr aus gehen alle Tonwerte als logarithmische Kurven nach oben und nach unten.

Der schweizer Harmoniker Rudolf Stössel hat sich mit der räumlichen Darstellung des Lambdoma unter verschiedenen Gesichts- und Gehörspunkten beschäftigt und viele Modelle gebaut und die Ergebnisse in seiner Schrift “Harmonikale Modelle zur Veranschaulichung der Ober- und Untertonreihe” veröffentlicht. Auf der Ausstellung “Phänomena” 1984 in Zürich wurde ein besonders großes dieser Modelle gezeigt, das extra für diese Ausstellung gebaut wurde - dieses ist hier im Bild zu sehen.

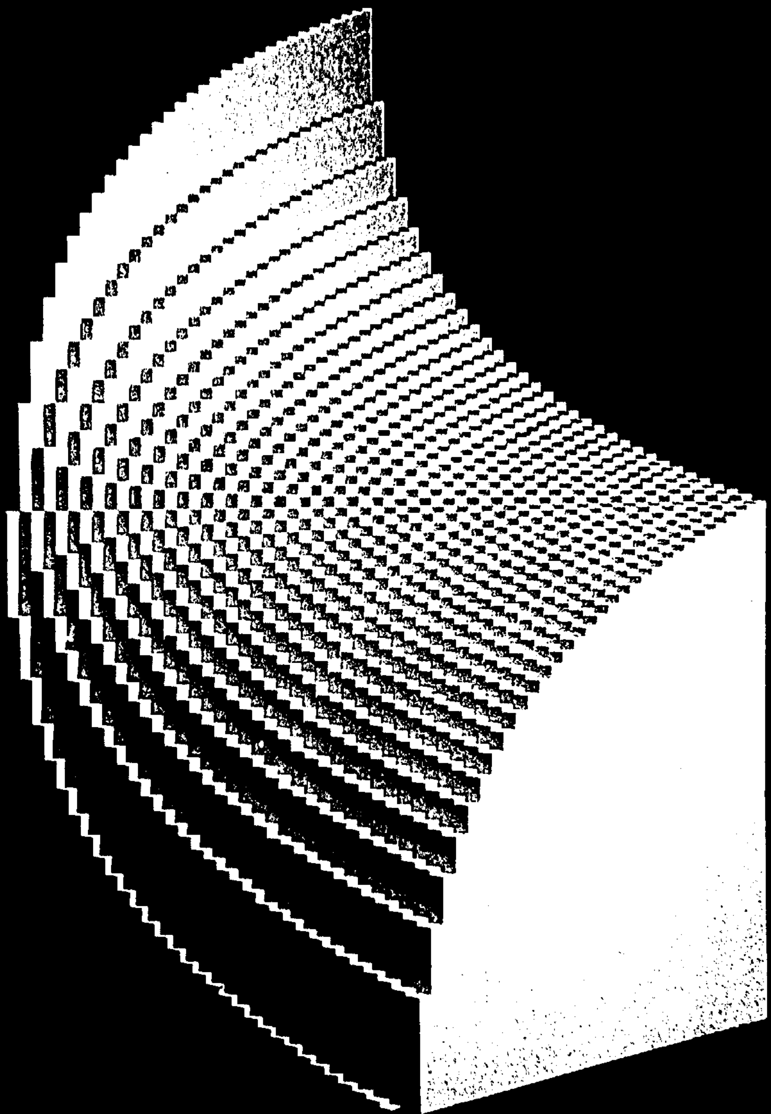


Bild 16

Die Töne des Lambdoma als Röhrenglocken dargestellt
von Dieter und Ulrike Trüstedt
gezeigt auf der Ausstellung Phänomena” 1984 in Zürich
Foto von Dieter Trüstedt

Der münchner Musiker und Physiker Dieter Trüstedt hat sich mit verschiedenen Möglichkeiten beschäftigt, die Strukturen des Lambdoma als Musikinstrument zu nutzen. Dabei ist unter anderem ein Spielfeld in Form des Lambdoma mit dem Index 12 x 12 entstanden, auf dem durch Berühren elektronisch die Intervalle erzeugt werden, die den Proportionen des Lambdoma entsprechen.

Ein weiteres Instrument ist an das chinesische Saiteninstrument Ch’in angelehnt: Hier sind 13 Saiten in der Folge der Untertonreihe gestimmt; die Obertöne zu jedem dieser Untertöne werden durch Berühren der Saiten erzeugt, so daß dabei die Flageolett-Töne erklingen, die dann elektronisch verstärkt werden - auf diese Weise können die Töne des Lambdoma bis zum Index 13 hörbar gemacht werden.

Ein drittes Spielobjekt hat Dieter Trüstedt für die Ausstellung “Phänomena” gebaut - dieses ist nebenstehend abgebildet. Hier sind die Töne des Lambdoma als 12 x 12 Röhrenglocken aus Messing dargestellt; die längste Röhre ist über 2 Meter lang. Die Längen der Röhrenglocken entsprechen dabei nicht den Lambdoma-Zahlen, da die Schwingungen von Stäben und Rohren anderen Gesetzen gehorchen als die von Saiten.

Eine weitere Form des Lambdoma als Musikinstrument ist von Peter Neubäcker als Computerprogramm realisiert worden: Hier wird das Lambdoma bis zu einem beliebigen Index am Bildschirm dargestellt - der Lambdoma-Ton, auf den der Spieler am Bildschirm zeigt, wird dann an einen Synthesizer gesendet. Auf diese Weise stehen alle Töne des Lambdoma über den gesamten Hörbereich zur Verfügung.

Das Reizvolle beim Spiel mit dem Lambdoma ist vor allem, daß hier musikalisch verwandte Töne immer benachbart liegen, im Gegensatz zu einer Klaviertastatur, auf der der Tonvorrat einfach aufgereiht ist. Außerdem stehen im Lambdoma alle Töne in reiner Stimmung zur Verfügung, dabei auch die Intervalle, die aus den höheren Primzahlen gebildet werden, wie 7, 11, 13 usw., die in unserer traditionellen Musik noch gar nicht verwendet wurden.

Bild 17

Flächenentwicklung von Kristallen im Lambdoma dargestellt

oben: bis zur 7. Complicationsstufe
unten: bis zur 12. Complicationsstufe
Konzeption und Zeichnung von Peter Neubäcker

Bei der Flächenbildung von Kristallen lassen sich Gesetze feststellen, die sich im Sinne der Harmonik auch in Form von musikalischen Intervallen ausdrücken lassen. Legt man beispielsweise durch die einfachste Kristallform, den Würfel, ein Achsenkreuz, so liegt eine Fläche parallel zu einer Achse, die benachbarte senkrecht dazu. Das läßt sich durch die Verhältnisse 0/1 = 0 bei der senkrechten bzw. 1/0 = ∞ bei der parallelen Fläche ausdrücken. Diese beiden Flächen werden auch als Primärflächen bezeichnet. Die weiteren entstehenden Flächen liegen nun so, daß sie zwischen den beiden Primärtlächen einen Winkel bilden - dabei sind nur ganz bestimmte Winkel möglich, nämlich solche, die von den beiden Achsen immer ganzzahlige Teile abschneiden. So wäre die nächste mögliche Fläche die, die zu den beiden Primärflächen einen Winkel von 45 Grad bildet; da sie von den beiden Achsen gleiche Teile abschneidet, wird sie als 1/1 bezeichnet - weitere mögliche Flächen wären etwa 1/2, 2/3 usw. Stellt man sich die Achsen des Kristallsystems nun als zwei zueinander rechtwinklig stehende Monochordsaiten vor, so teilen die Kristallflächen immer konsonante Intervalle darauf ab, und zwar ist die Fläche um so wahrscheinlicher, je konsonanter das jeweilige Intervall ist.

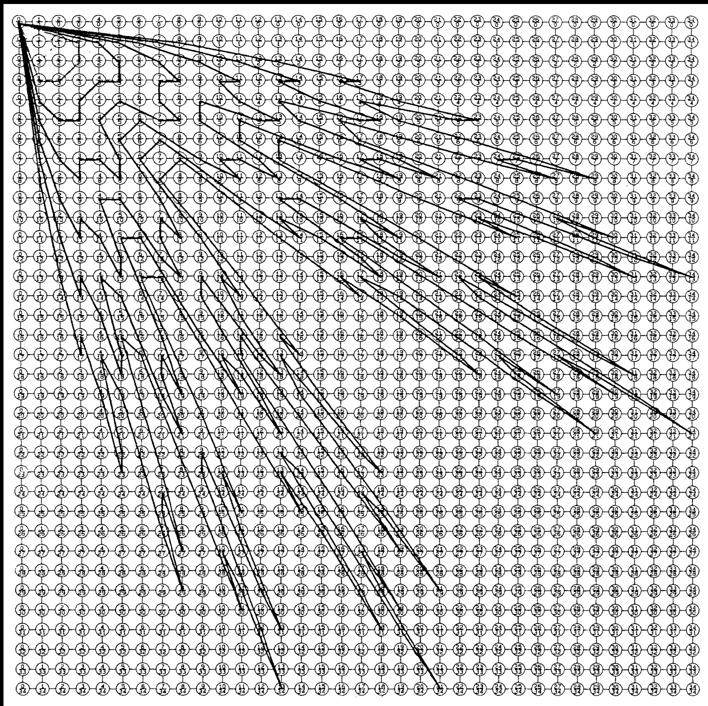
Der Kristallograph Victor Goldschmidt hat ein weiteres Gesetz entwickelt, das die Wahrscheinlichkeit von Kristallflächen angibt - er nennt es das Complicationsgesetz. Dabei entstehen die folgenden "Normalreihen":

Primärflächen:	A	·	·	·	·	·	·	·	B	
$N_0 =$	0	·	·	·	·	·	·	·	∞	= Normalreihe 0.
1. Complication:	A	·	·	·	C	·	·	·	B	
$N_1 =$	0	·	·	·	1	·	·	·	∞	= Normalreihe 1.
2. Complication:	A	·	D	·	C	·	E	·	B	
$N_2 =$	0	·	$\frac{1}{2}$	·	1	·	2	·	∞	= Normalreihe 2.
3. Complication:	A	F	D	G	C	H	E	I	B	
$N_3 =$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞	= Normalreihe 3.

u. s. w.

Die Zwischenglieder der jeweils folgenden Reihe kommen dadurch zustande, daß Nenner und Zähler der benachbarten Brüche zusammengezählt werden. In der Natur gehen die entstehenden Flächen nur in seltenen Fällen über die 3. Normalreihe hinaus. Man kann aber die Idee dieses Flächenbildungsgesetzes fortsetzen und kommt dann zu den hier gezeigten Bildern.

Man kann das Lambdoma direkt als Achsenkreuz im kubischen Kristallsystem verstehen (auch für andere Kristallsysteme, wenn man die Achsenwinkel ändert) -



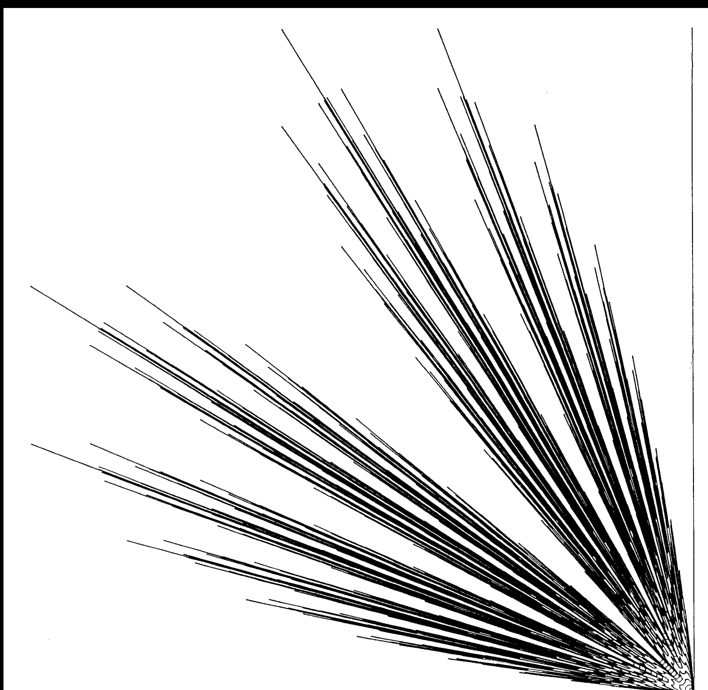


Bild 18

Flächenentwicklung von Kristallen im Lambdoma dargestellt

Die vier Quadranten im kubischen System

Konzeption und Zeichnung von Peter Neubäcker

(Fortsetzung des Textes vom vorhergehenden Bild:)

- eine Gleichtonlinie vom Punkt 0/0 aus zu einem bestimmten Tonwert ist dann identisch mit der “Flächennormalen, also der Senkrechten auf die jeweilige Kristallfläche - nach Goldschmidt die “Richtung der flächenbauenden Partikelkräfte”.

Die dem Ursprung des Lambdoma am nächsten liegenden Tonwerte repräsentieren so die am häufigsten auftretenden Kristallflächen, die entfernter liegenden die weniger häufigen - aber eben nicht beliebig herausgegriffene Tonwerte, sondern die, die nach Goldschmidts Complicationsgesetz die der jeweils nächsten Normalreihe sind. Bei den hier gezeigten Abbildungen sind alle in einer Normalreihe jeweils neu auftretenden Tonwerte bzw. Flächenindices durch eine Linie verbunden - am deutlichsten beim ersten Bild nachzuvollziehen. Diese Bilder können also als direkte Abbildung des Goldschmidtschen Complikationsgeselzes verstanden werden, oder besser gesagt, als die Darstellung der Tendenz desselben, denn so hohe Grade der Complication kommen in der Natur nur selten vor.

Auffallend ist die gestalthafte Ähnlichkeit mit bestimmten strahlig wachsenden Mineralien wie etwa dem Spießglanz, besonders wenn man sich das untere Bild der vorhergehenden Seite ins Räumliche fortgesetzt vorstellt. Daß neben der gestalthaften Beziehung auch eine kausale im Sinne der Kristallographie besteht, ist theoretisch denkbar.

Interessant ist es, zu verfolgen, welche Veränderungen von einem Complicationsgrad zum nächsten sich bei dieser Darstellung im Lambdoma zeigen. So sieht man etwa deutlich einen Einstülpungsprozeß: genau dort, wo bei den niederen Graden die Flächenentwicklung am weitesten ins Lambdoma ausgreift, entstehen bei den höheren Graden die Lücken; so befindet sich bei 1/1 die größte Lücke im Bild - das ist die Richtung, in der die erste Fläche entsteht; für alle weiteren Grade ist das gleiche zu beobachten. Verfolgt man die jeweils neu entstehenden Zahlen bzw. ihre Richtungen im Lambdoma, so zeigt es sich, daß es genau die Zahlen der Fibonacci-Reihe sind: der am weitesten ausgreifende Strahl tendiert zur Richtung des Goldenen Schnittes, der nächste ist in seiner Richtung identisch mit der bei Bild 8 beschriebenen “Hauptreihe der Blattstellungszahlen”. Da aber in der Natur meist nur die unteren Grade der Complication auftreten, tritt hier wieder die Polarität von einer ideellen Tendenz auf den Goldenen Schnitt einerseits und die Realisierung durch die harmonikalen Intervalle andererseits zutage.

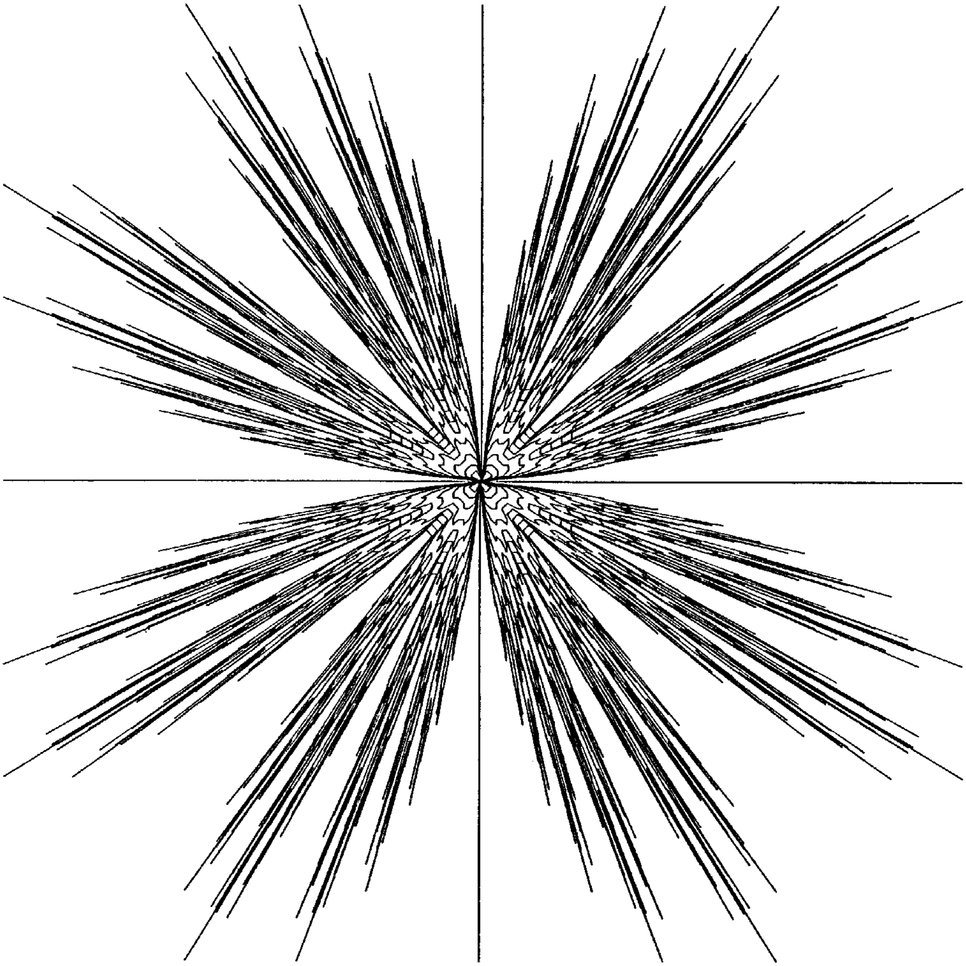


Bild 19

Spielmodell:
Die Verteilung aller rationalen Zahlen
oder musikalischer Intervalle auf dem Monochord
Konzeption und Bau des Modells von Peter Neubäcker

Will man untersuchen, wie sich alle Brüche bzw. alle rationalen Zahlen verteilen, so kann man eine Einheitsstrecke - hier die Monochordsaite - fortlaufend allen Brüchen gemäß teilen und den Ort der Teilung durch einen Strich markieren. So fängt man etwa bei der Zahl 2 an und markiert die Hälfte der Länge, dann 1/3 und 2/3, dann 1/4, 2/4, 3/4, dann 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 und so fort. Das Ergebnis stellt die dem Monochord unterlegte Zeichnung dar - hier sind alle Brüche bis zum Index 100 eingetragen. Zur Verdeutlichung sind außerdem die Striche noch verschieden lang: je kleiner die Zahl, desto länger der Strich, der das von ihr gebildete Verhältnis kennzeichnet.

Es zeigt sich dabei eine sehr interessante Struktur: Je kleiner die Zahl ist, aus der das jeweilige Intervall gebildet wird, desto mehr Platz wird ihr von den nachfolgenden Rationen gelassen - man kann also aus der Breite der entstehenden Lücken der Darstellung direkt den Konsonanzgrad des Intervalls ablesen.

Auch die Saite selbst richtet sich in ihrer Schwingung nach diesem Muster: Je breiter der Zwischenraum auf der Zeichnung ist, umso ausgeprägter ist der Schwingungsknoten an dieser Stelle, der für das Zustandekommen des jeweiligen Obertons verantwortlich ist. Man kann das ausprobieren, indem man die auf der Saite aufgezogene Gummischeibe hin und her bewegt und dabei möglichst nah an einem der beiden Stege die Saite anzupft: Die Gummischeibe hindert die Saite an der betreffenden Stelle zu schwingen und setzt so einen Schwingungsknoten, so daß der entsprechende Oberton erklingt. Man stellt dabei fest, daß es an fast allen Stellen irgendwelche Obertöne gibt, die mehr oder weniger stark klingen - wenn man aber in die Nähe einer großen Lücke auf der Zeichnung kommt, gerät man in den “Einzugsbereich” einer kleinen Zahl, und der entsprechende stärkere Ton überlagert die anderen, die durch höhere Zahlen zustande kommen. Man könnte sagen, daß die Zahlen eine “Attraktorwirkung” haben, die um so stärker ist, je kleiner die Zahl ist.

Außer den musikalischen Eigenschaften liegt in dieser Darstellung noch eine Fülle anderer Beziehungen verborgen - Rudolf Stössel hat diese Strukturen näher untersucht - es treten dabei Begriffe auf wie Symmetrie, Isolation, Reproduktion, Additionsregel, Produktgesetz und Beziehungen zur Fibonacci-Reihe und ihren Verwandten, also zum Goldenen Schnitt, zum Lambdoma und zu den Kristallen.

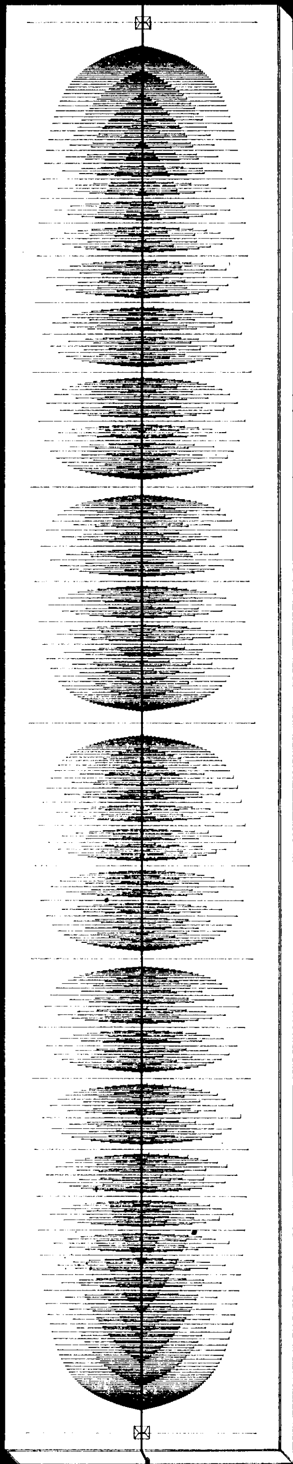
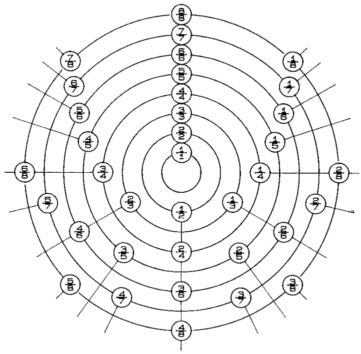


Bild 20

Die Verteilung aller rationalen Zahlen
oder musikalischer Intervalle in Kreisform
Konzeption und Zeichnung von Peter Neubäcker

Die Ordnung aller Brüche oder musikalischer Intervalle läßt sich nicht nur wie im Spielmodell des Lambdoma (Bild 14) in quadratischer Form darstellen - es ist auch eine runde Anordnung möglich. Dazu wird der ganze Kreis als Einheit definiert; die Brüche werden als Bruchteile des Vollwinkels abgetragen. Brüche mit gleichem Nenner liegen jeweils auf dem gleichen Kreis - jeder Kreis entspricht also einer senkrechten Linie im quadratischen Lambdoma. Bis zum Index 8 ergibt sich so diese Anordnung:



Töne mit gleichem Wert, also kürzbare Brüche, liegen immer auf einer Linie, die radial nach außen führt. Diese “Gleichtonlinien” sind hier auch eingetragen. Das Bild 20 enthält nur diese Gleichtonlinien, jeweils von ihrem Ursprung aus gezeichnet - hier für alle Brüche bis zum Index 100.

Während die Werte mit gleichem Nenner - den Untertonreihen entsprechend - immer auf konzentrischen Kreisen liegen, bilden die Werte mit gleichem Zähler Spiralen - den Obertonreihen entsprechend, die letzlich alle parallel zur Zeugertonlinie auslaufen.

Hier ist das gleiche Phänomen zu beobachten, das auch schon bei der Verteilung der Brüche auf dem Monochord (Bild 19) zu sehen war: Die Brüche verteilen sich ungleichmäßig zugunsten der kleineren Zahlen oder konsonanteren Intervalle - man kann hier von einer Rangordnung in der Zahlenwelt sprechen oder von einer “Aristie der kleinen Zahlen”.

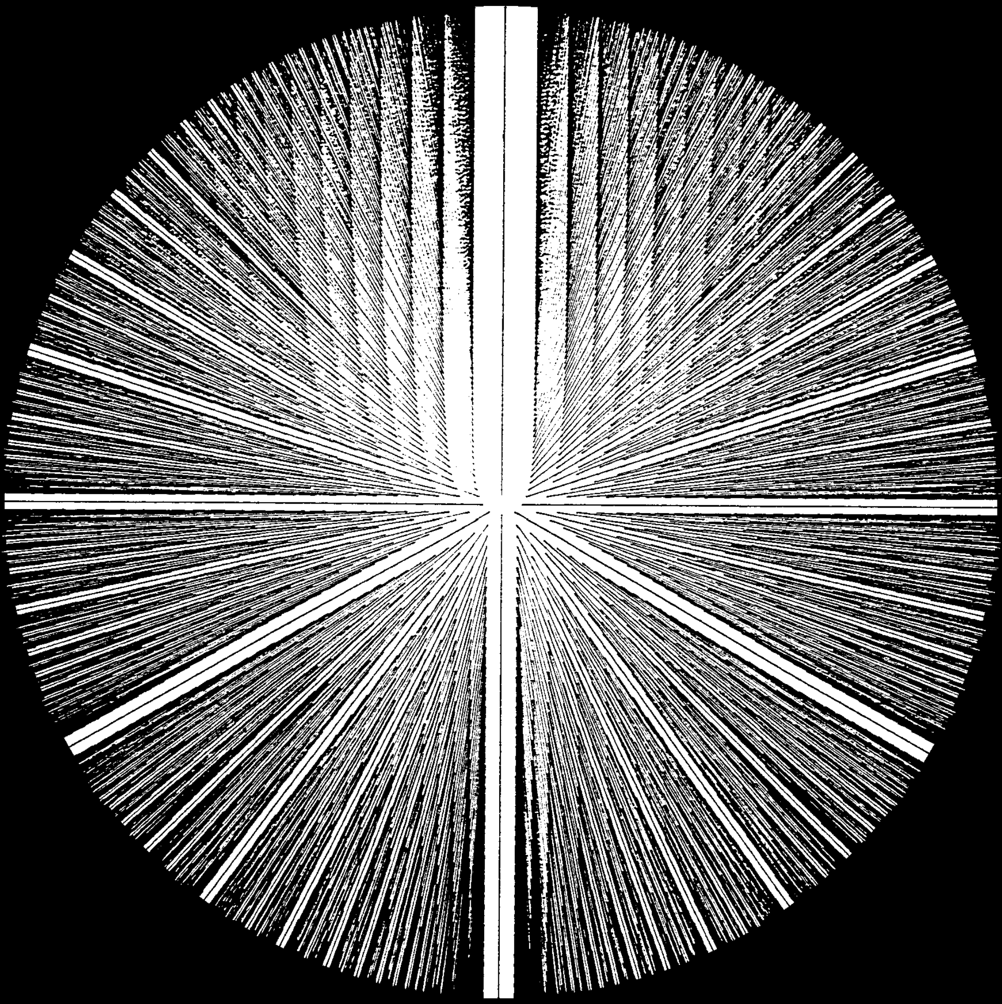


Bild 21

Die Verteilung aller rationalen Zahlen
oben: Bild 20 nach innen gespiegelt
unten: starke Vergrößerung des inneren Bereichs
Konzeption und Zeichnung von Peter Neubäcker

Die runde Lambdoma-Darstellung enthält eigentlich nur die Hälfte der Werte des quadratischen Lambdoma, nämlich alle echten Brüche im Bereich von Null bis Eins. Ihre Kehrwerte, die auf dem Spielmodell Bild 19 einer Verlängerung der Einheitssaite entsprechen würden, sind nur latent enthalten: Wenn man nämlich die Kreise in der runden Darstellung als "gebogene Saiten" verstehen würde, so ließen sich dadurch auch alle Werte über Eins darstellen. Die Kreislinie des zweiten Kreises ist gerade doppelt so lang wie die des Einheitskreises, die dritte dreimal so lang usw. Die Gleichtonlinie 1/3 teilt so etwa auf dem vierten Kreis die Länge 4/3 ab, auf dem fünften die Länge 5/3 usw. So sind in dieser Darstellung die echten Brüche durch die Winkel verwirklicht und ihre Kehrwerte durch die Kreisbögen.

Die nebenstehenden Bilder zeigen eine andere Möglichkeit, die Kehrwerte der Brüche in dem runden Lambdoma darzustellen: durch die Spiegelung am Einheitskreis. Man muß sich diese Bilder als winzige Kreise in der Mitte des Bildes 20 vorstellen: Alle Strahlen, die auf Bild 20 nach außen gehen, gehen hier nach innen; ihr Ursprungsort entspricht jeweils dem Kehrwert des Punktes außen.

Das untere Bild zeigt noch einmal eine starke Vergrößerung des oberen, außerdem sind die Brüche hier nicht als Strahlen (Gleichtonlinien) dargestellt, sondern nur als Punkte; alle kürzbaren Brüche sind dabei weggelassen. Nach innen hin liegen unendlich viele Werte - man könnte diese Bilder, als Symbol der potentiellen Unendlichkeit im Geistigen verstehen, die sich nach Überschreiten des Einheitskreises in Bild 20 als reale unendliche Vielfalt äußert.

22

(hier ohne Abbildung)

Räumliches Modell der Bruchverteilung
Entspricht dem Grundriß von Bild 20
Konzeption und Bau des Modells von Peter Neubäcker

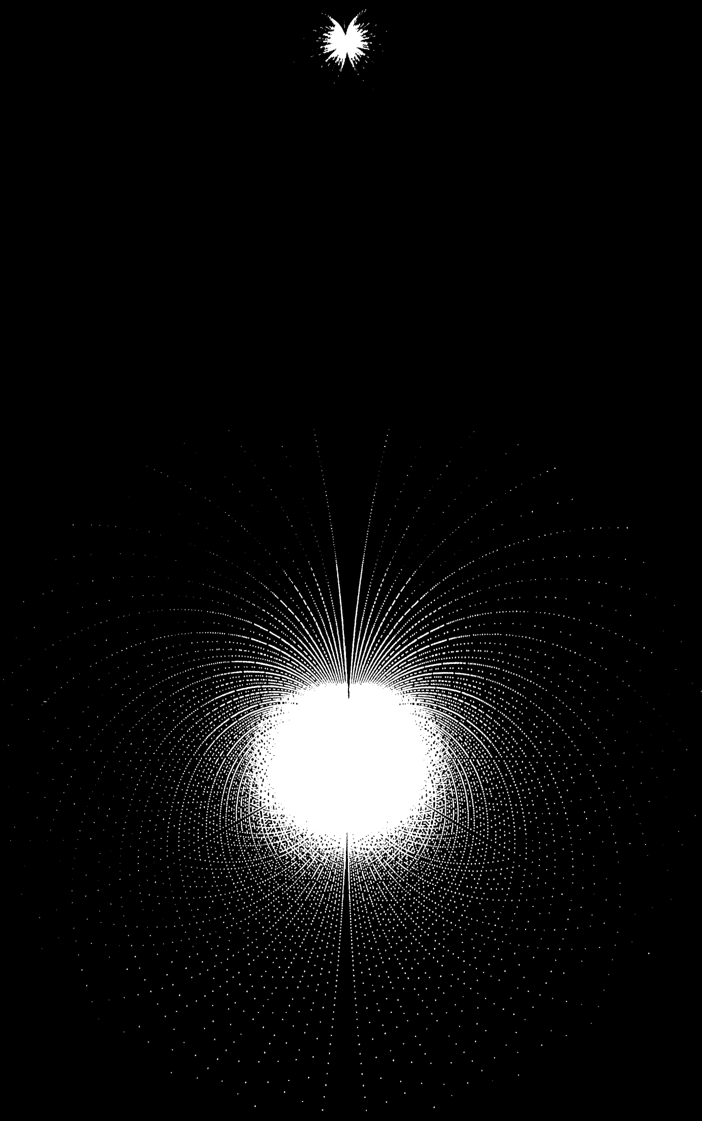


Bild 23

Die Verteilung der Primzahlen bis 30000

oben: aus der Sicht der Zahl 210 (2 x 3 x 5 x 7)
unten: aus der Sicht der Zahl 211 (Primzahl)
Konzeption und Zeichnung von Peter Neubäcker

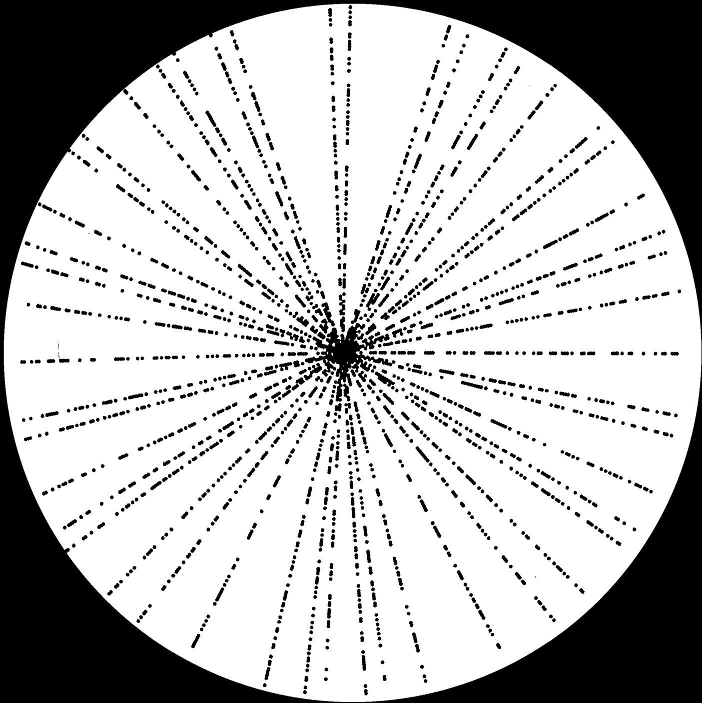
In diesem und den beiden folgenden Bildern geht es um die Verteilung der Primzahlen. Dabei wäre zunächst die Frage zu stellen, was ein zahlentheoretisches Problem wie die Primzahlverteilung mit der Harmonik im engeren Sinne zu tun hat.

Die musikalischen Intervalle werden aus Zahlen gebildet - dabei sind Intervalle miteinander eng verwandt, die von gleichen Primzahlen gebildet werden. Die erste intervallbildende Zahl ist die Zwei - sie führt immer nur zu Oktaven. Die nächste ist die Drei - aus ihr läßt sich die ganze Quintenreihe bilden, was schon zu einem eigentlich unendlichen Tonvorrat führt, der nur aus Quintverwandtschaften besteht. Bis zur Renaissance wurde im abendländischen Raum nur dieses Tongefüge musikalisch benutzt. Dann tauchte in der Musik die Primzahl Fünf als nächste Stufe auf, was zu einem komplexeren Tongefüge führte, indem durch die Terzbeziehungen Harmoniestrukturen im Sinne von Dreiklängen mit einbezogen wurden. In neuerer Zeit wird auch die nächste Primzahl Sieben verwendet, deren musikalische Möglichkeiten aber bisher noch kaum erforscht und integriert sind.

Durch die Beschäftigung mit der Harmonik wird die ganze Zahlenwelt zu einem symbolischen Bild für die Welt, in der jede Zahl ihre spezifische Rolle spielt - diese Rolle läßt sich durch die Faktorenzerlegung aller Zahlen erforschen, die immer zu den Primzahlen führt und so die Verwandtschaften der Zahlen aufdeckt. Durch die Anhörung dieser Zahlen kann man ihrem Wesen auch von dem Empfinden her näher kommen. Das ist zwar für die höheren Primzahlen schwieriger, da mit ihnen kulturbedingt noch kein spezifisches musikalisches Erleben verbunden ist. Da aber alle Primzahlen Wesen mit eigenem Charakter in der Zahlenwelt darstellen, ist ihre Verteilung prinzipiell von Interesse.

Die Verteilung der Primzahlen ist unregelmäßig - es ist bisher kein mathematisches Gesetz entdeckt worden, mit dem sich Primzahlen eindeutig vorhersagen lassen - wahrscheinlich läßt sich auch kein solches Gesetz finden - gewisse Strukturen ihrer Verteilung lassen sich aber trotzdem erkennen. Die gezeigten Bilder stellen solche Strukturen unter verschiedenen Gesichtspunkten dar.

Die Bilder 23 und 24 zeigen die Verteilung der Primzahlen aus der “Sicht” einzelner Zahlen - mathematisch ausgedrückt geschieht die Anordnung “modulo einer bestimmten Zahl”.



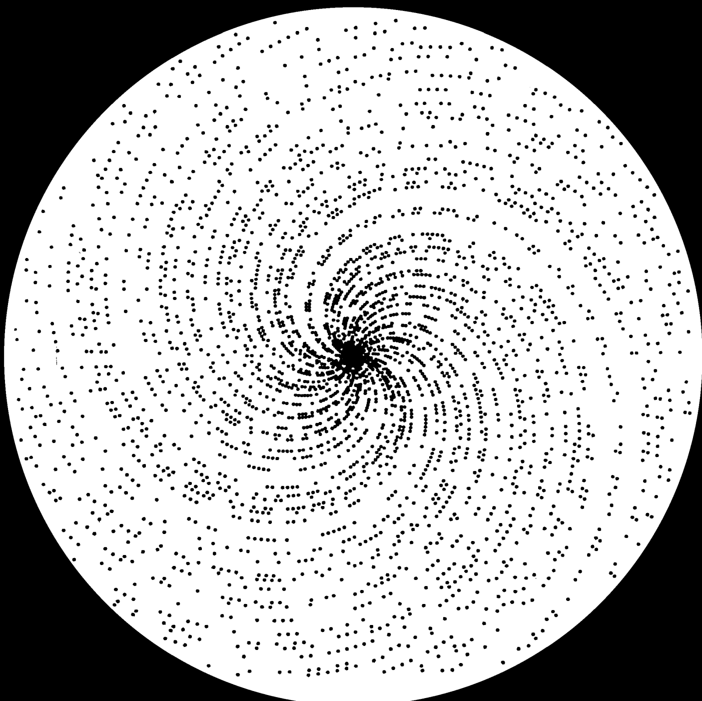


Bild 24

Die Verteilung der Primzahlen bis 10000

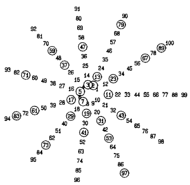
aus der Sicht der Zahlen 200 bis 228

(in Zwischenschritten von 0.2)

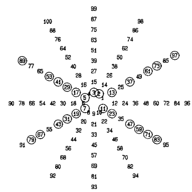
Konzeption und Zeichnung von Peter Neubäcker

Wenn man alle natürlichen Zahlen so anordnet, daß sie auf konzentrischen Kreisen liegen und auf einem Kreis immer die gleiche Anzahl von Zahlen liegt, ergeben sich dabei soviele Strahlen, wie es der zugrunde gelegten Zahl entspricht. Für die Zahlen 11 und 12 beispielsweise würden sich diese Bilder ergeben:

11

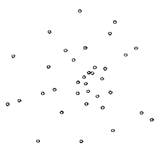


12

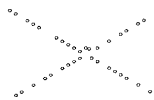


Die Primzahlen sind hier durch Kreise gekennzeichnet. Dabei zeigt es sich, daß bei der Zahl 12 nur auf vier von den 12 Strahlen Primzahlen liegen können, da auf dem zweiten Strahl alle Zahlen durch zwei teilbar sind, auf dem dritten alle durch drei, auf dem vierten durch vier teilbar usw., weil diese Zahlen Teiler von 12 sind. Bei dem Bild der Zahl 11 dagegen können auf allen Strahlen Primzahlen liegen, da 11 selbst eine Primzahl ist (außer auf dem 11. Strahl, auf dem alle Zahlen Vielfache von 11 sind). Läßt man die zusammengesetzten Zahlen weg und trägt nur die Primzahlen ein, so ergeben sich für 11 und 12 diese Bilder:

11



12



Aus der Sicht der Zahl 12 erscheinen die Primzahlen also sehr geordnet, aus der Sicht der Zahl 11 dagegen völlig ungeordnet. Auf diese Weise sind die Bilder 23 und 24 für höhere Zahlen entstanden: Die Zahl 210 als Produkt von 2x3x5x7 ordnet die Zahlen in sehr hohem Maße, die benachbarte Zahl 211 ist eine Primzahl, die selbst keine Ordnung erzeugt, dagegen bildet sich die Ordnung der Zahl 210 hier noch ab. Bild 24 zeigt, daß jede Zahl ihr eigenes "Gesicht" hat - zum Teil aus sich selbst erzeugt, zum anderen Teil von ihren Nachbarn geprägt.

Bild 25

Die Verteilung der Primzahlen nach der pythagoräischen Polarität

der Quadratzahlen und Rechteckzahlen
oben: Zahlen bis 2500
unten: Zahlen bis 100000
Konzeption und Zeichnung von Peter Neubäcker

Das Ordnungsprinzip dieses Bildes ist ein anderes als bei den beiden vorhergehenden Bildern: Bei den Pythagoräern war die Polarität ein zentraler Begriff, und sie hatten zehn solcher Polaritäten zusammengestellt, wobei Begriffe wie Begrenztes und Unbegrenztes, Ungerades und Gerades, Männliches und Weibliches usw. erscheinen. Die zehnte dieser Polaritäten ist der Gegensatz von Quadrat- und Rechteckzahlen.

Warum gerade diese beiden Begriffe Polaritäten sein sollen, war nie ganz einsichtig. Wenn man aber alle Zahlen gemäß dieser Polarität anordnet, zeigt es sich, daß diese die Primzahlen in hohem Maße ordnet. In den hier gezeigten Bildern sind alle natürlichen Zahlen spiralig so angeordnet, daß nach einem Umlauf immer wieder eine Quadratzahl erscheint - dadurch ergibt sich genau gegenüber die Reihe der Rechteckzahlen, also der Zahlen, die jeweils das Produkt von zwei benachbarten Zahlen sind, wie $6 = 2 \times 3$, $12 = 3 \times 4$, $20 = 4 \times 5$ usw. Im oberen Bild sind alle Zahlen bis 2500 eingetragen; die Primzahlen sind durch weiße Kreise gekennzeichnet. Im unteren Bild sind die Zahlen bis 100000 dargestellt; die zusammengesetzten Zahlen sind hier weggelassen und nur die Primzahlen als weiße Punkte eingezeichnet.

Dabei zeigt es sich, daß alle Primzahlen sich in Kurven anordnen, die Parallelen zu dem Strahl der Rechteckzahlen zustreben. Jeweils ein solcher Strahl stellt die Summe einer bestimmten Zahl mit allen Rechteckzahlen dar, lässt sich also darstellen durch den Ausdruck $(n \times (n+1)) + m$. Für bestimmte Werte von m ergeben sich besonders viele Primzahlen, so für $m = 17$ oder noch mehr für $m = 41$. Den Ausdruck $n \times (n+1) + 41$ hatte auch schon Leonhard Euler als besonders ergiebige Primzahlformel beschrieben. Die Zahlen 17 und 41 sind ihrerseits auch Primzahlen - man kann also sagen, daß es besonders “fruchtbare” Primzahlen sind, da sie wieder viele neue Primzahlen erzeugen.

Daß diese die Primzahlen ordnende Funktion dieser Polarität den Pythagoräern bekannt gewesen ist, ist nicht wahrscheinlich - sie dürfte eher aus der Feststellung entstanden sein, daß die Quadratzahlen immer Summen aller ungeraden Zahlen und die Rechteckzahlen immer Summen aller geraden Zahlen sind - aber es zeigt sich hier wieder, daß die Wahrheit von Aussagen immer auf mehreren Ebenen zugleich liegt.