Abkühlung

Mathematisch ähnlich wie das beschränkte Wachstum kann die Abkühlung eines Körpers beschrieben werden, dessen Temperatur höher ist als die der Umgebung. $f(x)$ sei die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt x, a sei die Temperatur zur Zeit $x = 0$ und U die konstante Umgebungstemperatur.
Die Temperaturabnahme Δy ist proportional zur Differenz von Temperatur $f(x)$ und Umgebungstemperatur U und proportional zur Zeit.

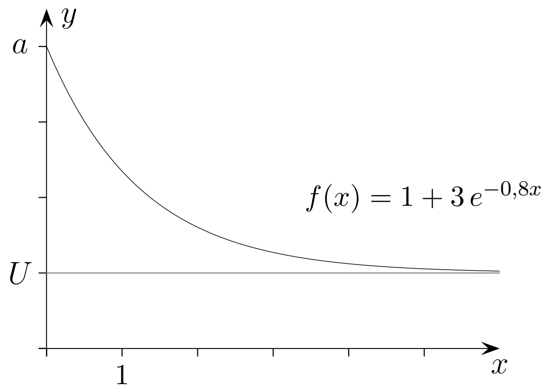
$$\Delta y = -k \cdot (f(x) - U) \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -k \cdot (f(x) - U)$$

$$** \quad f'(x) = -k \cdot (f(x) - U)$$

Die allgemeine Lösung der DGL $**$ lautet:

$$f(x) = U + (a - U)\, e^{-kx} \; .$$



In einem Labor wird ein Körper mit der Temperatur $50°C$ zum Zeitpunkt $x = 0$ zum Abkühlen in einen Raum gebracht. Die Raumtemperatur beträgt $0°C$ und wird linear um $10°C$ pro Stunde erhöht.

a) Geben Sie die Differentialgleichung an (mit Erläuterung), die diesen Abkühlungsvorgang beschreibt, die Abkühlungskonstante sei $k = 1$.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie die Temperatur, die der Körper nach zwei Stunden hat. Skizzieren und erläutern Sie den Graphen des zeitlichen Verlaufs der Körpertemperatur.

c) Ermitteln Sie die diskrete Näherungslösung der Differentialgleichung für die nächsten sechs Werte für $\Delta x = 0{,}5$.

Lösungshinweise:

Differentialgleichungen dieser Art können mit einem Ansatz $f(x) = a(x) \cdot b(x)$ gelöst werden, wobei ein Faktor so gewählt wird, dass die Rechnung erheblich vereinfacht wird, indem ein Term null wird.
Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird $f'(x)$ durch $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$ ersetzt und nach y_{n+1} aufgelöst. y_{n+1} kann dann iterativ errechnet werden.

Abkühlungsaufgabe Lösungskizze

a) *Die Differentialgleichung lautet:* $f'(x) = -\left(f(x) - 10x\right)$, *wobei* $f(0) = 50$ *ist.*

b) *Produktansatz:* $f(x) = a(x) \cdot b(x)$, *kurz:* $f = a \cdot b$

$$\begin{aligned} a' \cdot b + a \cdot b' + a \cdot b &= 10 \cdot x \\ a \cdot (b' + b) + a' \cdot b &= 10 \cdot x \qquad \textit{wähle } b \textit{ so, dass } b' + b = 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad b = e^{-x}$, *DGL:* $a' \cdot e^{-x} = 10 \cdot x$, $a' = e^{x} \cdot 10 \cdot x$

partielle Integration führt zu: $a = (10x - 10) \cdot e^{x} + C$, $f = a \cdot b = 10 \cdot x - 10 + C \cdot e^{-x}$

Bedingung $f(0) = 50$, $-10 + C = 50 \Longrightarrow C = 60$

Also insgesamt: $f(x) = 10x - 10 + 60e^{-x}$

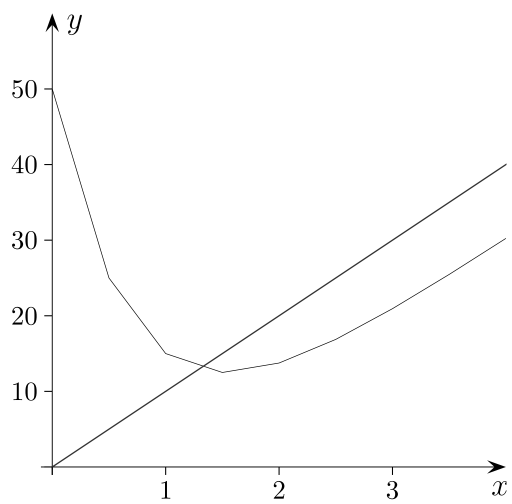
$f(2) = 18{,}12$

c) *Diskrete Näherungslösung:*

$y_{n+1} = y_n + (10\,x_n - y_n) \cdot 0{,}5 \iff y_{n+1} = 0{,}5\,y_n + 5\,x_n$

Anfangswert: $y_0 = 50$

x	*0*	*0,5*	*1*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*
Näherung	*50*	*25*	*15*	*12,5*	*13,8*	*16,9*	*20,9*



Bestimmung des Todeszeitpunkts

Ein Leichnam mit einer Körpertemperatur von 28,5 $°C$ wird um Mitternacht bei einer konstanten Umgebungstemperatur von 17,4 $°C$ entdeckt. Nach Ablauf von 2 Stunden beträgt die Temperatur des Leichnams 23,2 $°C$. Um die Todesursache (Unfalltod oder Mord) herauszufinden, ist der Todeszeitpunkt zu bestimmen.

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass sich die Oberflächentemperatur $f(x)$ einer Leiche proportional zur Differenz zwischen der Leichen- und der Umgebungstemperatur U ändert (Newtonsches Abkühlungsgesetz). Die DGL lautet daher:

$$f'(x) = -k \cdot (f(x) - U) \qquad \text{mit} \;\; k > 0.$$

Die allgemeine Lösung ist $\qquad f(x) = U + (y_0 - U)\, e^{-kx} \quad \text{mit} \;\; f(0) = y_0\,.$

Nachweis:

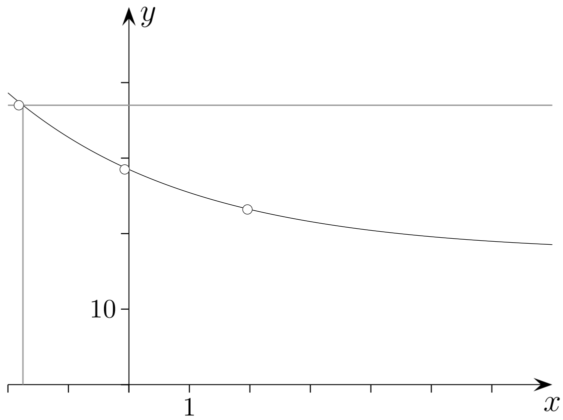
$$\begin{aligned}
f'(x) &= -k \cdot (f(x) - U) \\
\frac{f'(x)}{f(x) - U} &= -k \\
\ln(f(x) - U) &= -kx + C \qquad\qquad \textit{beachte:} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(f(x)) + C \\
f(x) - U &= e^{-kx+C} \\
f(x) &= U + e^{-kx+C} \\
f(x) &= U + e^{-kx} \cdot e^{C}
\end{aligned}$$

$$f(0) = y_0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = U + e^C \quad \Longrightarrow \quad e^C = y_0 - U$$

$$f(x) = U + (y_0 - U)\, e^{-kx}$$

Zum Zeitpunkt $x_0 = 0$ wird der Leichnam entdeckt, seine Temperatur beträgt y_0 ($°C$).
Die Konstante k kann aus einer weiteren Temperaturmessung ermittelt werden. Sei zum Zeitpunkt x_1 die Temperatur y_1, d. h.

$$\begin{aligned}
U + (y_0 - U)\, e^{-kx_1} &= y_1 \\
e^{-kx_1} &= \frac{y_1 - U}{y_0 - U} \\
k &= -\frac{1}{x_1} \ln\Big(\frac{y_1 - U}{y_0 - U}\Big)
\end{aligned}$$



Der Todeszeitpunkt wird aus $f(x_T) = 37$ ermittelt.

Lösung:
$k = 0{,}3245\,, \quad x_T = -1{,}752$
(1 Stunde 45 Minuten vor Mitternacht)