MATEMATICĂ DISCRETĂ

Octavian Stănăşilă

Capitolul 1

Relaţii binare

1. Fie M o mulţime nevidă şi $R \subset M \times M$ o relaţie binară pe M. [Reamintim că se scrie xRy dacă $x, y \in M$ şi $(x, y) \in R$; se citeşte "x este în relaţia R cu y"]. Se pot defini:

   - relaţia de egalitate în M, anume $\Delta = \{(x, y) \in M \times M | x = y\} = \{(x, x) | x \in M\}$;

   - relaţia inversă $R^{-1} = \{(x, y) \in M \times M | yRx\}$;

   - relaţia compusă $R \circ R = \{(x, z) \in M \times M | \text{există } \ y \in M \text{ astfel încât } \ xRy \text{ şi } yRz\}$.

   Să se arate că :

   a) R este reflexivă $\rightleftarrows \Delta \subset R$;

   b) R este simetrică $\rightleftarrows R^{-1} = R$;

   c) R este tranzitivă $\rightleftarrows R \circ R \subset R$;

   d) R este antisimetrică $\rightleftarrows R \cap R^{-1} \subset \Delta$.

   Soluţie. a) Reamintim că R se numeşte reflexivă dacă $\forall x \in M, xRx$. Această condiţie este echivalentă cu $(x, x) \in R$, adică $\Delta \subset R$.

   b) R este simetrică dacă $xRy \rightleftarrows yRx$. Aşadar, $(x, y) \in R \rightleftarrows (y, x) \in R \rightleftarrows (x, y) \in R^{-1}$. Deci $R = R^{-1}$.

   c) R tranzitivă înseamnă că xRy, yRz implică xRz. In acest caz, dacă $(x, z) \in R \circ R$, atunci există $y \in M$ astfel ca xRy şi yRz, deci xRz, adică $(x, z) \in R$ şi ca atare, $R \circ R \subset R$.

   Invers, să presupunem că $R \circ R \subset R$; dacă xRy şi yRz, atunci $(x, z) \in R \circ R$, deci $(x, z) \in R$, adică xRz deci R este tranzitivă .

d) Reamintim că R se numeşte antisimetrică daci la ă din faptul că xRy şi yRx, rezultă $x = y$. Aceasta revine tocmai la $R \cap R^{-1} \subset \Delta$. $\square$

2. Fie M o mulţime nevidă şi $R \subset M \times M$ o relaţie binară pe M, presupusă reflexivă şi tranzitivă . Reamintim că R se numeşte relaţie de :

   - ordine parţială dacă este antisimetrică ;

   - ordine totală dacă este de ordine parţială şi în plus, pentru orice $x, y \in M$ avem fie xRy, fie yRx;

   - echivalenţă dacă este simetrică .

   Să se arate că :

   a) $R \circ R = R$;

   b) R este relaţie de ordine parţială $\rightleftarrows R \cap R^{-1} = \Delta$;

   c) R este relaţie de ordine totală $\rightleftarrows R \cap R^{-1} = \Delta$ şi $R \cup R^{-1} = M \times M$;

   d) R este relaţie de echivalenţă $\rightleftarrows R = R^{-1}$.

   Soluţie. Vom folosi exerciţiul precedent.

   a) Avem de arătat că $R \subset R \circ R$. Fie $\forall (x, y) \in R$ deci xRy. Dar yRy, deci $(x, y) \in R \circ R$.

   b) Conform exerciţiului anterior, R este relaţie de ordine parţială $\rightleftarrows$ $\Delta \subset R, R \cap R^{-1} \subset \Delta$ şi $R \circ R \subset\subset R$. De aici rezultă că $\Delta \subset R \cap R^{-1}$ etc. $\square$

3. Fie $\rho = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2y\right\}$ şi $\rho' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\right\}$. Să se determine $\rho \circ \rho'$ şi $\rho' \circ \rho$, ca relaţii binare pe $\mathbb{R}$.

   Soluţie. Avem

   $\rho \circ \rho' = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | \text{există} \;\; y \in \mathbb{R} \text{ a. î. } x\rho y \text{ şi } y\rho' z\right\} = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | \text{există} \;\; y \in \mathbb{R} \text{ a. î. } x = 2y \text{ şi } z = y^2\right\} = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | z = \frac{x^2}{4}\right\}$; apoi $\rho' \circ \rho = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | \text{există} \;\; y \in \mathbb{R} \text{ a. î. } x\rho' y \text{ şi } y\rho z\right\} = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | \text{există} \;\; y \in \mathbb{R} \text{ a. î. } y = x^2 \text{ şi } y = 2z\right\} = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = 4z^2\right\}$. Se observă că $\rho \circ \rho' \neq \rho' \circ \rho$. $\square$

4. Fie M, N, P trei mulţimi nevide şi $R \subset M \times N, S \subset N \times P$ (cu N comun!). Se defineşte relaţia inversă $R^{-1} \subset N \times M$, prin $R^{-1} = \big\{(y, x) \in N \times M | (x, y) \in R\big\}$ şi relaţia compusă $S \circ R \subset M \times P$, prin $S \circ R = \big\{(x, z) \in M \times P | \text{există} \ \ y \in N \ \text{ a. î. } (x, y) \in R \text{ şi } (y, z|) \in S\big\}$.

   a) Să se arate că $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

   b) Dacă R şi S sunt relaţii funcţionale, să se expliciteze $S \circ R$.

   Soluţie. a) Folosim dubla incluziune. Fie $(u, v) \in (S \circ R)^{-1}$, deci $(v, u) \in S \circ R$ şi există $n \in N$ astfel încât $(v, n) \in R$ şi $(n, u) \in S$. Atunci $(n, v) \in R^{-1}$ şi $(u, n) \in S^{-1}$, deci $(u, v) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ etc.

   b) $R \subset M \times N$ se numeşte relaţie funcţională dacă pentru orice $x \in M$ există şi este unic $y \in N$ astfel încât $(x, y) \in R$. In acest caz, este definită o aplicaţie $f\colon M \to N$, $x \longmapsto y$, pentru care R este chiar graficul lui f. Dacă $g\colon N \to P$ este funcţia având ca grafic S, atunci relaţia $S \circ R$ este tocmai graficul funcţiei compuse $g \circ f$. $\square$

5. Un triplet de mulţimi (A, B, R), unde $R \subset A \times B$ se numeşte sistem intrare-ieşire i/o $R\colon A \to B$, A este mulţimea intrărilor, B mulţimea ieşirilor. Dacă $(x, y) \in R$, se mai scrie xRy şi se spune că intrarea x este asociată cu ieşirea y. Dacă (B, C, S) cu $S \subset B \times C$ este un sistem i/o, se poate defini un nou sistem i/o $(A, C, S \circ R)$, numit legarea în serie a sistemelor anterioare.

   Presupunem $A = B = \big\{a, b, c\big\}$ şi $C = \big\{u, v\big\}$;

   $R = \big\{(a, a), (a, b), (a, c), (c, b)\big\} \subset A \times B$ şi $S = \big\{(a, u), (b, v), (a, v)\big\} \subset B \times C$. Să se determine $S \circ R$.

   Soluţie. $S \circ R = \big\{(x, z) | \text{există} \ \ y \in B \ \text{ astfel încât } \ xRy \ \text{ şi } \ yRz\big\} = \big\{(a, u), (a, v), (c, v)\big\}$ $\square$

   NOTĂ. Orice funcţie (aplicaţie) $f\colon A \to B$ determină un sistem i/o, iar compunerea funcţiilor este un caz particular de legare în serie de sisteme. De exemplu, pentru $f = \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g = \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f asociază oricărei intrări $x \in \mathbb{R}$, ieşirea $\sin x$ etc. $g \circ f$ este funcţia $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin x}$, iar $f \circ g$ este funcţia $x \longmapsto \sin(\mathrm{e}^x)$.

   Legarea în serie nu este comutativă , dar este asociativă .

6. Fie M_1, M_2 două mulţimi nevide şi R_1, respectiv R_2 relaţii de ordine totală pe M_1 şi respectiv M_2. Fie $M = M_1 \times M_2$. Pentru $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$ din M, definim:

$$a \leq b \rightleftarrows a_1 R_1 b_1 \text{ şi } \; a_2 R_2 b_2$$

$$a\lambda b \rightleftarrows \text{sau } \; a_1 R_1 b_1 \; \text{ sau } \; a_1 = a_2 \; \text{ şi } \; a_2 R_2 b_2$$

Să se arate că : 1^0. " $\leq$ " este o relaţie de ordine parţială pe M (numită <u>ordinea produs</u>).

2^0. "λ" este o relaţie de ordine totală pe M (numită <u>ordinea lexicografică</u>).

3^0. Să se expliciteze aceste relaţii pe $M = \mathbb{R}^2$ (considerăm relaţia " $\leq$ " pe $\mathbb{R}$).

4^0. Generalizare.

Soluţie. 1^0. Este evident că " $\leq$ " este reflexivă şi tranzitivă . Apoi dacă $a \leq b$ şi $b \leq a$, atunci rezultă $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $b_1 \leq a_1$ şi $b_2 \leq a_2$, deci $a = b$, aşadar relaţia " $\leq$ " este antisimetrică .

2^0. Evident, "λ" este reflexivă şi arătăm că λ este tranzitivă . Dacă $a\lambda b$ şi $b\lambda c$, atunci se analizează cele 4 cazuri; de exemplu, dacă $a_1 R_1 b$ şi $b_1 R_1 a$, atunci $a_2 R_1 c$, etc. Rămân de arătat că λ este antisimetrică ($a\lambda b, b\lambda a \Longrightarrow a = b$) şi că ordinea este totală (deci pentru orice $a, b \in M$ avem $a\lambda b$ sau $b\lambda a$). Se analizează cazurile posibile.

3^0. Dacă $M = \mathbb{R}^2$ şi $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ avem $a \leq b \rightleftarrows a_1 \leq b_1$ şi $a_2 \leq b_2$; $a\lambda b \rightleftarrows$ fie $a_1 < b_1$, fie $a_1 = b_1$ şi $a_2 \leq b_2$.

De exemplu, $(3, 4) \leq (3, 7)$, dar perechile $(3, 4)$ şi $(7, 3)$ nu sunt comparabile în ordinea produs; în schimb, $(3, 4)$ şi $(7, 3)$ şi orice două perechi de numere reale sunt comparabile relativ la relaţia "λ".

4^0. Se pot considera mulţimi $M_1, \ldots, M_n$ cu relaţii de ordine totală pe ele. Atunci se extind ordinea produs şi ordinea lexicografică . $\square$

<u>NOTĂ</u>. 1) Pe mulţimea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ a numerelor complexe s-ar putea introduce ordinea produs " $\leq$ "; de exemplu, $2 + 3\mathrm{i} \leq 3 + 4\mathrm{i}$. Dar aceasta nu este compatibilă cu operaţiile algebrice. Se mai spune că $\mathbb{C}$ nu este un corp ordonat. Intr-un corp ordonat, dacă $0 \leq u, 0 \leq v$,

trebuie să rezulte $0 \leq uv$. De exemplu, luând $u = \mathrm{i} = (0, 1)$, ar rezulta $0 \leq \mathrm{i}$, deci $0 \leq \mathrm{i}^2$, adică $(0, 0) \leq (-1, 0)$, absurd.

Prin convenţie, se spune că nu trebuie considerat inegalităţi între numere complexe, deoarece nu au proprietăţi bune de calcul.

2) Ordinea lexicografică este inspirată din modul de ordonare a cuvintelor din dicţionar (de exemplu, cuvântul "abac" este aşezat înaintea cuvântului "acar", iar "număr" este aşezat înaintea lui "nume"). Luând $M_1 = M_2 = \mathbb{B} = \{0, 1\}$ (codul binar) şi presupunând că $0 < 1$, se introduce ordinea lexicografică pe $\mathbb{B}^2$, punând în ordine $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$. Similar pe $\mathbb{B}^3$.

Capitolul 2

Configuraţii discrete, numerice sau geometrice

Există diverse concepte şi construcţii care sunt legate de entităţi discrete: sisteme de numeraţie, configuraţii geometrice finite, proprietăţi structurale ale numerelor naturale etc., care sunt obiecte de studiu atât pentru Matematica discretă cât şi pentru Combinatorică .

1. Să se scrie în baza 2 şi în baza 8 numerele 100 şi 300.

   Soluţie. In general, fixând o bază de numeraţie $q \geq 2$, se consideră cifrele în baza q, anume simbolurile $C = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ şi orice număr natural N se scrie unic sub forma $N = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} q^1 + a_n q^0$, cu toţi $a_i \in C$. Pe scurt, $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}_q$.

   In cazul $q = 2$ avem $C = \mathbb{B} = \{0, 1\}$ şi N se prezintă ca sumă de puteri ale lui 2. Astfel, $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 1100100_2$ şi $300 = 2^8 + 2^5 + 2^2 = 100100100_2$. In cazul $q = 8$, avem $C = \mathbb{B} = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, numerele se scriu ca nişte combinaţii liniare de puteri descrescătoare ale lui 8: $100 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot \cdot 8^0 = 144_8$ şi $300 = 4 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 444_8$. Există o trecere directă de la scrierea în baza 2 la scrierea în baza 8, separând numărul în grupe de câte trei cifre binare ($2^3 = 8$); de exemplu, $100 = 1100100_2 = 144_8$ (înlocuind grupele de trei cifre binare cu valoarea lor în baza 10); similar, $300 = 100100100_2 = 444_8$. □

2. Să se scrie π şi e în baza 2, indicând primii 6 biţi după virgulă .

   Soluţie. $\pi = 3,141592\ldots_{10} = 2^1 + 2^0 + 2^{-3} + 2^{-6} + \ldots = 11,001001\ldots_2$

$$e = 2,7182818\ldots_{10} = 2^1+2^{-1}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-6}+\ldots = 10,101101\ldots_2$$

$\square$

3. Să se indice reprezentarea binară a lui $m = 1C5F_{16}$ şi a lui $n = A3D_{16}$.

Soluţie. Reamintim că $9 = 1001, A = 1010, B = 1011, C = 1100, D = 1101, E = 1110, F = 1111$ (în baza 2). Atunci $m = 1110001011111_2$ şi $n = 101000111101_2$. $\square$

4. Un număr natural N are 20 de cifre zecimale. Câte cifre binare va avea?

Soluţie. Aşadar, $10^{19} \leq N < 10^{20}$, deci $19\log_2 10 \leq \log_2 N \leq 20\log_2 10$, adică $63,1 \leq \log_2 N < 66,4$. Rezultă că , în baza 2, numărul N va avea 64,65,66 sau 67 de cifre 0,1. $\square$

5. Să se arate că $O(\log n) < O(n) < O(n\log n) < O(n^2) < O(2^n)$.

Soluţie. Reamintim că se scrie $f(n) = O(g(n))$ sau echivalent, $O(f(n)) < O(g(n))$ dacă există o constantă reală $C > 0$ astfel încât $|f(n)| \leq C\cdot|g(n)|$, de la un rang încolo. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$, atunci se scrie $f(n) = o(g(n))$; în acest caz, rezultă $f(n) = O(g(n))$. In toate inegalităţile din enunţ se aplică acest fapt, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n\log n} = 0$ etc. [Nu contează în ce baze sunt consideraţi logaritmii.] $\square$

6. Să se arate că există o infinitate de numere întregi $N = \overline{a_1a_2\ldots a_{n_q}}$ (în baza 10), pentru care suma cifrelor este egală cu produsul cifrelor.

Soluţie. Pentru fiecare $k \geq 1$ întreg, notăm $m(k) = 2^k - k$ şi luăm $N = \overbrace{22\ldots2}^{k \text{ ori}}\overbrace{11\ldots1}^{m(k) \text{ ori}}$. Această problema este mai degrabă o ”cimilitură matematică ”. $\square$

7. Să se determine $n \geq 1$ întreg astfel încât $n^{n-1} - (n-1)^n = 1$.

Soluţie. Aşdar, $(n-1)^n = n^{n-1} - 1 < n^{n-1}$, deci $n - 1 < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \mathrm{e}$. Rezultă că $n < \mathrm{e} + 1$. Se găsesc atunci trei soluţii: $n \in \{1, 2, 3\}$. $\square$

8. Căte operaţii algebrice sunt necesare pentru a calcula produsul a două matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ şi $B \in M_{np}(\mathbb{R})$?

Soluţie. Fie $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{jk})$. Atunci $AB = (c_{ik})$, unde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jn}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p$. Pentru fiecare pereche (i, k) sunt necesare n înmulţiri şi $n - 1$ adunări. Iar perechile sunt în număr de mp deci în total, $mp(2n - 1)$ operaţii, dintre care mnp înmulţiri. $\square$

9. Să se estimeze numărul de operaţii aritmetice pentru calculul unui determinant de ordin n, pornind de la definiţie.

Soluţie. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ şi $D = \det A$. Atunci $D = \sum (-1)^I a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$, suma având $n!$ termeni (făcându-se după numărul de permutări $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ale numerelor $1, 2, \ldots, n$, iar I fiind numărul de inversiuni); fiecare termen este un produs de n factori. Numărul ν_n de operaţii (adunări şi înmulţiri) este $\nu_n = (n!-1)(n-1) \sim n \cdot n!$ [se scrie $f(n) \sim g(n)$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$]. Aplicând formula lui Stirling, anume $n! \sim n^n \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$, rezultă că $\nu_n \sim n^{n+1} \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$. $\square$

NOTĂ. Acest număr este imens pentru $n \geq 5$. De exemplu, chiar pentru calculatoarele moderne (cu 10^{10} operaţii/ secundă), calculul unui determinant de ordin 20 necesită zeci de ani. De aceea, există algoritmi mult mai rapizi pentru calculul determinanţilor (de exemplu, algoritmul lui Gauss).

10. Fie $N \geq 2$ un număr natural şi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ divizorii primi distincţi ai lui N.

a) Să se arate că $n \leq \log_2 N$;

b) Care este numărul tuturor divizorilor lui N?

Soluţie. a) Avem $N = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$ cu $r_i \geq 1$. Dar orice număr prim este mai mare sau egal cu 2, deci $N \geq 2^{r_1+r_2+\dots+r_n} \geq 2^n$, deci $\log_2 N \geq n$.

b) Divizorii lui N care conţin p_k sunt în număr de r_k+1, cu $1 \leq k \leq n$. Numărul total de divizori ai lui N va fi $(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_n+1)$. $\square$

11. Fie $N \geq 2$ un număr natural şi $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ divizorii lui N, cu $d_1 = 1$ şi $d_n = N$. Fie s (respectiv p) suma şi respectiv produsul acestor divizori. Să se arate că $p^2 = N^n$ şi că $n\sqrt{N} \leq s \leq \frac{2|+Nn}{2}$.

Soluţie. Avem $d_1 d_n = d_2 d_{n-1} = \dots = d_i d_{n-i+1} = N$ $(1 \leq i \leq n)$, deci $N^2 = d_1^2 d_2^2 \dots d_n^2 = p^2$. Apoi $d_1 + d_n = N+1$ şi pentru $2 \leq k \leq n-1$, avem $d_k \leq \frac{N}{2}$. Atunci $s \leq N+1+\frac{N}{2}(n-2) = \frac{2+Nn}{2}$. Pe de altă parte, $\frac{d_1+d_n}{2} \geq \sqrt{d_1 d_n} = \sqrt{N}$, $\frac{d_2+d_{n-1}}{2} \geq \sqrt{d_2 d_{n-1}} = \sqrt{N}, \dots, \frac{d_n+d_1}{2} \geq \sqrt{N}$ şi adunând aceste inegalităţi rezultă $s \geq n\sqrt{N}$. $\square$

12. Fie K un corp finit (comutativ). Să se arate că orice funcţie $f\colon K \to K$ este polinomială şi că această afirmaţie nu are loc în cazul $K = \mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $K = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ şi $b_i = f(a_i), 1 \leq i \leq n$. Considerăm polinomul Lagrange $P(X)$ corespunzător, adică P are grad cel mult $n-1$ şi $P(a_i) = b_i$, pentru $1 \leq i \leq n$. Aşadar, $\forall x \in K$ avem $x = a_i$ şi $P(x) = f(x)$, adică $f = P$.

In cazul $K = \mathbb{R}$, considerăm funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

Această funcţie nu poate fi polinomială , deoarece are o infinitate de rădăcini. $\square$

13. Fie $A = \{1, 2, \dots, 20\}$. Să se arate că alegând arbitrar o submulţime $B \subset A$ având 11 numere, există $x, y \in B$ astfel încât x să fie divizibil cu y.

Soluţie. Pentru orice număr impar $c \in A$, se poate considera mulţimea $A_c = \{c, 2c, 4c, 8c \dots, \}$. Se obţin astfel 10 mulţimi $A_1, A_3, A_5, \dots, A_{19}$.

Dintre cele 11 numere ale lui B, cel puţin două se vor afla într-una din cele 10 mulţimi A_c (conform "principiului cutiei", atribuit lui Dirichlet). $\square$

14. Să se arate că oricum am alege 7 numere naturale distincte vor exista două care au suma sau diferenţa divizibilă cu 10.

    b) Să se arate că oricum am alege 52 de numere naturale există două pentru care suma sau diferenţa va fi divizibilă cu 100. Dar pentru 51, afirmaţia nu mai are loc.

    Soluţie. a) Fie A mulţimea formată din cele 7 numere alese. Considerăm următoarele 6 submulţimi disjuncte ale lui $A:$ $A_1 =$ mulţimea numerelor având cifra unităţilor 0; $A_2 =$ mulţimea numerelor având cifra unităţilor 1 sau 9; $A_3 =$ mulţimea numerelor având cifra unităţilor 2 sau 8; $A_4 =$ mulţimea numerelor având cifra unităţilor 3 sau 7; $A_5 =$ mulţimea numerelor având cifra unităţilor 4 sau 6 şi $A_6 =$ mulţimea numerelor având cifra unităţilor 5. Conform principiului cutiei, cel puţin două din cele 7 numere alese arbitrar vor aparţine uneia din mulţimile A_k.

    b) Vom forma 51 de submulţimi disjuncte ale mulţimii iniţiale; anume, A_1 conţine numerele care se termină cu 00, A_2 conţine numerele care se termină cu 01 sau 99, A_3 conţine numerele care se termină cu 02, cu 98; ... A_{50} conţine numerele care se termină cu 49 sau 51 şi A_{51} conţine numerele care se termină cu 50. Atunci din cele 52 de numere alese , cel puţin două vor aparţine uneia dintre mulţimile anterioare.

    Pentru a arăta că pentru 51 de numere afirmaţia b) nu are loc, este suficient un contraexemplu: $A = \{1, 2, \ldots, 49, 50, 60\}$. $\square$

15. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup multiplicativ având n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Să se arate că există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 \leq p < q \leq n$ şi $a_p a_{p+1} \ldots a_q = e$.

    Soluţie. Considerăm setul de $n + 1$ elemente $e, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots,$ $a_1a_2 \ldots a_n$ din G. Deoarece G are n elemente, două din elementele setului anterior sunt egale. Atunci fie $e = a_1a_2 \ldots a_k$, fie există p, q $(p < q)$ astfel încât $a_1a_2 \ldots a_p = a_1a_2 \ldots a_q$ şi simplificăm cu $a_1a_2 \ldots a_p$. $\square$

16. Se consideră un set de $n+1$ numere naturale nenule, egale cel mult cu $2n$. Să se arate că cel puţin unul din ele se divide cu altul din acelaşi set.

Soluţie. Fie $a_1, \ldots, a_{n+1}$ numerele respective. Orice număr natural $m \geq 1$ se scrie unic sub forma $m = 2^r p$ cu $r \geq 0$ şi p impar. Atunci $a_k = 2^{r_k} p_k$, pentru $1 \leq k \leq n+1$. Printre numerele $1, 2, \ldots, 2n$, există n impare şi cum $1 \leq p_k \leq a_k \leq 2n$, cel puţin două dintre numerele impare p_k coincid; de exemplu, $p_s = p_t = c$ (cu $1 \leq s, t \leq n+1$). Atunci $a_s = 2^{r_s} c$ şi $a_t = 2^{r_t} c$ şi evident unul din ele îl divide pe celălalt. [Problema 16 este o generalizare a problemei 13]. $\square$

17. Fie un cerc de rază 1 şi $A_k, 1 \leq k \leq 2012$, puncte situate pe acel cerc. Să se arate că există un punct M pe cerc, distinct de toate A_k, astfel încât $\sum\limits_k MA_k \geq 2012$.

Soluţie. Dacă prin absurd, pentru orice $M \neq A_k$, am avea $\sum\limits_k MA_k < 2012$, să considerăm punctul M', diametral opus lui M. Avem $MA_k + M'A_k \geq 2$ pentru orice k (cu egalitate dacă M'' ar coincide cu A_k). Dar atunci $\sum\limits_k MA_k + \sum\limits_k M'A_k \geq 4024$. Contradicţie. $\square$

18. Fie un pătrat cu lungimea laturii $\sqrt{2}$. Să se arate că dacă se consideră 5 puncte distincte din interior sau de pe frontiera pătratului, atunci cel puţin două se vor afla la distanţă cel mult 1.

Soluţie. Ducând mediatoarele celor patru laturi, se formează 4 pătrăţele având latura $\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi diagonala 1. Conform principiului cutiei, din cele 5 puncte, cel puţin două din ele vor fi situate în acelaşi pătrăţel deci distanţa dintre ele va fi cel mult egală cu lungimea diagonalei pătrăţelului. $\square$

19. Pentru ce $n \geq 4$ există poliedre având n muchii?

Soluţie. Dacă $n = 2m$ este par şi $n \geq 6$, considerăm o piramidă cu baza poligon convex cu m laturi şi aceasta este un poliedru convexcu n muchii.

Dacă $n = 2m + 1$ este impar, cu $n \geq 9$ (deci $m \geq 4$), considerăm un poligon convex $\mathbf{P}$ cu $2m-2$ laturi, un punct V exterior şi piramida cu vârful V şi baza $\mathbf{P}$. Alegem trei muchii duse din V şi prin mijloacele M, N, P ale lor, se consideră un plan. Eliminând piramida $VMNP$, se obţine un poliedru cu trei muchii în plus, care va avea $2m-2+3 = 2m+1 = n$ muchii.

Aşadar, pentru $n \in \{6, 8, 9, 10, 11, \dots\}$ există poliedre cu n muchii. Rămân de analizat cazurile $n = 5$ şi $n = 7$. Fie f_k numărul feţelor având k laturi (muchii). Atunci numărul total de muchii va fi $N = 3f_3+4f_4+5f_5+\dots$. Dar numărul total al feţelor este $f_3+f_4+f_5+\dots \geq 4$.

In cazul $n = 5$, rezultă $3f_3+4f_4+5f_5+\dots = 10$ şi $3f_3+3f_4+3f_5+\dots \geq 12$, contradicţie. In cazul$n = 7$, rezultă $3f_3 + 4f_4 = 14$ şi $f_3 + f_4 \geq 4$, de unde $f_3 = 2$ şi $f_4 = 2$. Fie $ABCD$ una din feţele patrulatere şi D un alt vârf al poliedrului. Atunci triunghiurile ABP şi BCP vor fi feţe şi s-ar obţine muchiile $AB, BC, CD, DA, PA, PB, PC, PD$, în număr de 8. Absurd.

In concluzie, $n = 6$ sau $n \geq 8$.

Raţionamentul anterior este unul de Geometrie discretă . $\square$

Capitolul 3

Grafuri şi geometrie discretă

1. Fie Γ un graf orientat, cu legături simple. Se numeşte automorfism al lui Γ orice izomorfism $f\colon \Gamma \to \Gamma$. Să se arate că mulţimea automorfismelor lui Γ formează un grup relativ la compunere.

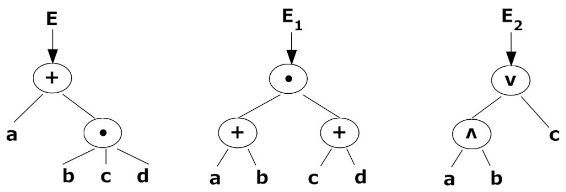
   Soluţie. Aşadar, $\Gamma = (V, A)$ este o pereche de mulţimi finite (V a vârfurilor şi A a arcelor), împreună cu două aplicaţii $i\colon A \to V$, $t\colon A \to V$ care asociază oricărui arc $a \in A$, iniţialul $i(a)$ şi respectiv terminalul $t(a)$. Dacă $\Gamma' = (V', A')$ este un alt graf orientat, atunci un morfism $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma'$ este o pereche de de aplicaţii $\varphi = (h_V, h_A)$ cu $h_V\colon V \to V', h_A\colon A \to A'$, astfel încât $h_V \circ i = i' \circ h_A$ şi $h_V \circ t = t' \circ h_A$. Aşadar, dacă $v \xrightarrow{a} v_1$ este un arc în G, atunci $h_V(v) \xrightarrow{a'} h_V(v_1)$, unde $a' = h_A(a)$.

   Pentru orice graf G se defineşte morfismul identic şi dacă $\psi\colon \Gamma' \to \Gamma''$ este un morfism de grafuri, se poate defini morfismul compus $\psi \circ \varphi$. Două grafuri se zic izomorfe prin φ dacă aplicaţiile h_V, h_A sunt bijective. Cu aceste definiţii reamintite, demonstraţia este imediată $\square$

2. Reamintim că un arbore orientat $G = (V, A)$ este un graf orientat având un vârf $v_0 \in V$ (numit rădăcină) astfel încât pentru orice vârf $v \in V$ există şi este unic un drum care uneşte v_0 şi v. Oricărei expresii algebrice sau formule logice i se poate asocia arborele operatoriu , în care în rădăcină se aşază expresia respectivă , în celelalte vârfuri-etichete (simboluri) de operaţii, iar pe frunze (adică vârfurile termi-

nale) se pun valori ale variabilelor. Să se indice arborii pentru expresiile $E = a + b \cdot c \cdot d$, $E_1 = (a + b) \cdot (c + d)$ şi $F = (a \wedge b) \vee c$.

Soluţie.



□

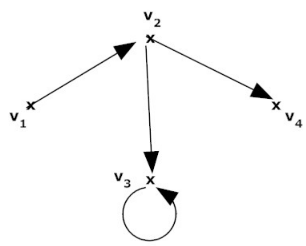
3. Fie G un graf cu legături simple, cu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ şi $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_3)\}$. Să se indice matricea asociată A_G.

Soluţie. Se presupune ca numerotarea vârfurilor este fixată . Pentru orice vârfuri v_i, v_j se defineşte

$$a_{ij} \begin{cases} 1, & \text{dacă } v_i \text{ este unit cu } v_j \\ 0, & \text{altminteri} \end{cases}$$

<u>Matricea asociată</u> este $A_G = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{B})$. Graful este prezentat în Fig. 3.1. Atunci $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

Fig. 3.1:



4. Fie Γ un graf neorientat cu legături simple, având $n \geq 2$ noduri (vârfuri). Fie n= numărul vârfurilor, m= numărul muchiilor (arcelor) şi p= numărul componentelor conexe ale lui Γ. Se defineşte <u>numărul ciclomatic</u> al lui Γ, $c(\Gamma) = m - n + p$. Să se arate că $c(\Gamma) \geq 0$. Ce se poate spune dacă Γ este conex şi $c(\Gamma) = 0$?

Soluţie. Fie Γ' graful parţial al lui Γ obţinut eliminând o muchie (păstrând vârfurile). Atunci Γ' are $m-1$ muchii, n vârfuri, iar $p'=p$ sau $p+1$ deci $c(\Gamma') = m' - n' - 1 + p'$, adică $c(\Gamma') \leq c(\Gamma)$. Repetând procedeul cu eliminarea câte unei muchii, numărul ciclomatic scade şi după eliminarea tuturor muchiilor, se obţine un graf fără muchii (cu n vârfuri şi $p=n$) deci cu numărul ciclomatic 0.

Dacă Γ este conex şi $c(\Gamma)=0$, atunci $p=1$ şi $m=n-1$ deci Γ este un arbore. □

5. Fie $G=(V,A)$, cu $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un graf orientat cu legături simple şi $A_G=(a_{ij})$ matricea asociată . Fie $(A_G)^r = (a_{ij}^{(r)})$ puterea a r-a $(r \geq 1)$. Să se arate că numărul natural $a_{ij}^{(r)}$ este egal cu numărul drumurilor de lungime r care unesc vârfurile v_i şi v_j. Deduceţi că dacă A_G este nilpotentă , atunci graful G nu are circuite (adică drumuri închise).

Soluţie. Aplicăm inducţia după r. Cazul $r=1$ este clar. Apoi $A^{r+1} = A^r \cdot A$ deci $a_{ij}^{(r+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(r)} a_{kj}$. Aşadar, $a_{ij}^{(r+1)}$ este suma elementelor $a_{ik}^{(r)}$ pentru care $a_{kj}=1$ (adică vârful v_k este unit cu v_j). Conform ipotezei de inducţie, rezultă că $a_{ij}^{(r+1)}$ este tocmai numărul drumurilor de lungime $r+1$ care unesc v_i şi v_j.

Dacă A_G este nilpotentă , există $r \geq 1$ astfel încât $(A_G)^r = 0$. Dacă G ar avea circuite, atunci G ar avea drumuri de orice lungime, adică $(A_G)^k \neq 0$ pentru orice $k \geq 1$, contradicţie. □

6. Fie Γ un graf neorientat cu legături simple, având n vârfuri şi m muchii. Să se arate că dacă $m > \frac{(n-1)(n-2))}{2}$, atunci Γ este conex.

Soluţie. Avem de arătat că Γ nu are vârfuri izolate. In caz contrar, dacă Γ ar avea un vârf izolat, atunci numărul maxim de muchii ale lui G ar fi cât numărul de muchii ale unui graf cu $n-1$ vârfuri, în care orice două vârfuri sunt unite, adică $m \leq C_{n-1}^2$. Dar aceasta contravine ipotezei. □

7. Intr-un arbore binar cu $n = 2^k$ vârfuri, să se determine cea mai mare distanţă posibilă între două noduri (considerând că fiecare muchie are lungimea 1).

   Soluţie. Distanţa de la rădăcina arborelui la un vârf terminal este cel mult egală cu $\log_2 n = k$. Deci distanţa maximă căutată este $2k$. $\square$

8. Fie 9 puncte $A_1, A_2, \ldots, A_9$ din $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (reţea spaţială). Să se arate că există un segment A_iA_j cu $i \neq j$, al cărui mijloc este un nod din $\mathbb{Z}^3$.

   Soluţie. Definim în $\mathbb{Z}^3$ următoarea relaţie binară ρ: pentru $a = (a_1, a_2, a_3)$ şi $b = (b_1, b_2, b_3)$, definim $a\rho b \longleftrightarrow a_i$ şi b_i au aceeaşi paritate pentru $i = 1, 2, 3$. Este evident că ρ este o relaţie de echivalenţă şi că există 8 clase distincte de echivalenţă asociate cu tripletele $(0, 0, 0), (0, 0, 1), \ldots, (1, 1, 1)$ din $\mathbb{B}^3$. Dintre cele 9 puncte A_i, cel puţin două vor aparţine aceleiaşi clase (din nou, principiul cutiei). Dacă nodurile A_i şi A_j se află în aceeaşi clasă , rezultă că au coordonatele de aceeaşi paritate şi atunci mijlocul segmentului care uneşte A_i şi A_j va avea coordonate în $\mathbb{Z}$ deci acel mijloc este un nod al reţelei. $\square$

9. Fie n, $n \geq 2$, drepte distincte din acelaşi plan, fiecare intersectându-le pe celelalte şi oricare trei fiind neconcurente. In câte regiuni este împărţit planul?

   Soluţie. Fie r_n numărul respectiv. Evident, $r_1 = 2, r_2 = 4$ şi prin inducţie, $r_{n+1} = r_n + n + 1$, pentru orice $r \geq 1$. Dând valori $1, 2, \ldots, n-1$ pentru n şi aunând relaţiile respective, rezultă $r_n = r_1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2+n+2}{2}$. $\square$

10. Fie n $(n \geq 1)$ drepte distincte într-un plan. Să se arate că se pot colora regiunile formate doar cu două culori (A-alb şi N-negru) astfel încât regiunile care au un segment-frontieră comun să fie colorate cu culori distincte.

    Soluţie. Folosim inducţia după n. Cazul $n = 1$ este clar. Notăm cu Δ_n diviziunea planului realizată de cele n drepte, cu colorarea presupusă în enunţ . Considerăm încă o dreaptă D şi notăm cu Δ_{n+1} noua diviziune a planului. Dreapta D divide planul în două semiplane. Intr-unul din ele păstrăm colorarea din Δ_n, iar în celălalt inversăm culorile pentru regiunile din Δ_n. In acest mod, pentru Δ_{n+1} se obţine de asemenea o colorare cu proprietatea din enunţ . $\square$

NOTĂ. O problemă clasică o constituie "problema culorilor", care cere să se demonstreze că orice hartă plană poate fi colorată cu 4 culori, astfel încât orice două ţări vecine să aibă culori diferite. Cu 3 culori nu se poate, iar cu 5 se ştia de mult că se poate. Doi geometri germani, Appel şi Haken, au arătat, folosind calculatoarele, soluţia cu 4 culori.

Există multe aplicaţii ale colorării vârfurilor sau nodurilor unor grafuri - în sortare, căutare, navigaţie etc.

11. Se consideră un poliedru convex mărginit din $\mathbb{R}^3$. Pe fiecare faţă F a poliedrului, se consideră versorul normalei exterioare $\overrightarrow{n_F}$. Să se arate că $\sum_F \overrightarrow{n_F} \cdot \text{aria}(F) = 0$. [Acesta este analogul discret al formulei Gauss].

Soluţie. Se consideră un reper ortonormal $Oxyz$ cu versorii $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ şi fie $\overrightarrow{n_F} = n_1 \overrightarrow{i} + n_2 \overrightarrow{j} + n_3 \overrightarrow{k}$. Aplicând formula lui Gauss pentru $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i}$ (apoi pentru $\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{k}$), rezultă $\int_S (\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{n_F}) d\sigma = 0$, adică $\int_S n_1 d\sigma = 0$. In mod similar, $\int_S n_2 d\sigma = 0$ şi $\int_S n_3 d\sigma = 0$, deci $\int_S \overrightarrow{n_F} d\sigma = 0$. Aici S este suprafaţa (poliedrală), ca reuniune a feţelor. $\square$

12. Printr-un punct V din spaţiu trec n drepte şi presupunem că oricare două formează un unghi cu măsura strict mai mare ca 30^0. Să se arate că în mod necesar $n \leq 29$.

Soluţie. Presupunem că oricare pereche a celor n drepte formează un unghi cu măsura $> \alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Pentru orice dreaptă d trecând prin V, considerăm porţiunea din interiorul conului circular drept cu vârful V, axa d şi generatoarele formând unghiul de măsură $\frac{\alpha}{2}$ cu axa, aflată în interiorul sferei cu centrul în V şi rază 1. Această porţiune este un sector sferic V_d, având volumul $\frac{2\pi R^2 I}{3} = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos\frac{\alpha}{2})$. Orice altă dreaptă d' din cele n considerate nu aparţine porţiunii menţionate.

Deoarece volumul emisferei este $\frac{2\pi}{3}$, rezultă $n \cdot \frac{2\pi}{3}(1-\cos\frac{\alpha}{2}) \leq \frac{2\pi}{3}$, deci $n(1-\cos\frac{\alpha}{2}) \leq 1$. Pentru $\alpha = 30^0$, rezultă $n \leq \frac{1}{1-\cos 15^0} \simeq 29,3$, deci $n \leq 29$. $\square$

13. Se consideră o reţea bidimensională $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale cărei puncte se numesc noduri. Să se arate că nu există triunghiuri echilaterale având vârfurile în noduri ale reţelei.

Soluţie. Coordonatele oricărui nod sunt de forma (m,n) cu $m,n \in \mathbb{Z}$. Folosind formula ariei unui triunghi $A = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, rezultă că A este un număr raţional. Pe de altă parte, $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, unde l este lungimea laturii triunghiului. Dar l^2 este în mod necesar un număr întreg. Dacă ar exista un triunghi ca în enunţ ar rezulta că $\sqrt{3}$ este un număr raţional. $\square$

NOTĂ. Dacă F este un poligon cu vârfurile în nodurile reţelei şi laturile poligonului paralele cu axele, există o formulă celebră pentru calculul ariei lui F. Notând cu $b(F)$ = numărul odurilor reţelei situate pe conturul poligonului, cu $c(F)$ = numărul nodurilor interioare, are loc formula lui Pick : $\text{aria}(F) = c(F) + \frac{1}{2}b(F) - 1$.

Capitolul 4

Automate finite

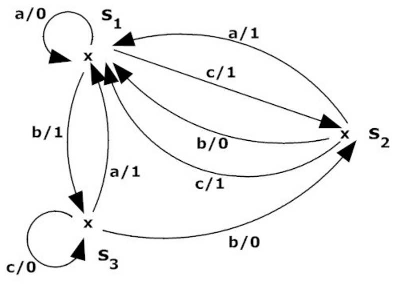
1. Se consideră automatul $\mathcal{A} = (X, Y, S, \delta, \lambda)$, cu mulţimile finite $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$, $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ (respectiv de intrări, ieşiri şi stări) şi funcţiile de tranziţie $\delta \colon X \times S \to S$ şi de ieşire $\lambda \colon X \times S \to Y$ date prin tabelele următoare :

δ	s_1	s_2	s_3
a	s_1	s_1	s_1
b	s_3	s_1	s_2
c	s_2	s_1	s_3

λ	s_1	s_2	s_3
a	0	1	1
b	1	0	0
c	1	1	0

Să se indice graful asociat şi să se determine cuvântul de ieşire care corespunde intrării $w =$ "$abac$", pornind din starea s_1.

Soluţie. Vârfurile grafului sunt tocmai stările s_1, s_2, s_3. Un arc de forma $s \xrightarrow{a/u} s'$ arată că dacă automatul $\mathcal{A}$ se află în starea s şi primeşte la intrare simbolul a, atunci el trece în starea s' şi emite la ieşire simbolul u. Graful asociat este următorul :



Din starea s_1, la prima literă "a" din cuvântul w, automatul rămâne în s_1 şi emite 0; apoi primeşte "b" şi trece în starea s_3, emiţând 1 etc., cuvântul de ieşire va fi 0111. $\square$

2. Fie $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2\}$, $S = \{s, s'\}$ şi tabelele

δ	s	s'
a	s	s'
b	s'	s'
c	s	s

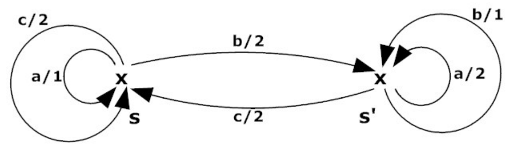
λ	s	s'
a	1	2
b	2	1
c	2	2

a) Să se indice graful asociat şi să se determine ieşirile care corespund intrărilor "*baba*" (pornind din starea s) şi "*cab*" (pornind din starea s').

b) Indicaţi din ce stare trebuie să pornescă automatul dacă la intrarea "*abc*" i-ar corespunde ieşi rea "212".

Soluţie. a) Graful asociat este în Fig. 4.1.

Fig. 4.1:



Cuvântului "*baba*" îi corespunde "2212", iar pentru "*cab*" se obţine "212".

b) Se încearcă s şi s' şi răspunsul este că se acceptă s'. $\square$

3. Dacă $\mathcal{A} = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ este un automat finit, să se determine cuvântul de ieşire care corespunde intrării "xyz" dacă automatul porneşte din starea s. In ce caz automatul se numeşte redus?

Soluţie. Simbolului x îi corespunde ieşi rea $u = \lambda(x, s)$ şi automatul trece în starea $s_1 = \delta(x, s)$; apoi literei y îi corespunde ieşirea $v = \lambda(y, s_1)$ şi automatul trece în starea $s_2 = \delta(y, s_1)$. In fine, literei z îi corepunde ieşirea $w = \lambda(z, s_2)$. Cuvântul cerut va fi "uvw".

Pentru orice stare $s \in S$ se poate defini funcţia $f_s \colon X^* \to Y$, care asociază oricărui cuvânt de intrare $w \in X^*$ (succesiune de simboluri de intrare), ultima literă a cuvântului corespunzător de ieşi re. Funcţia f_s se numeşte funcţia de comportare a automatului, pornind din starea

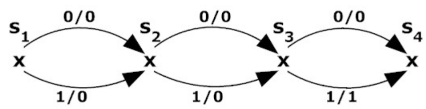
s. Automatul se numeşte <u>redus</u> dacă pentru $s \neq s'$, rezultă $f_s \neq f_{s'}$ (adică la stări distincte corespund comportări distincte).

[Există procedee de înlocuire a unui automat printr-unul redus, care îndeplineşte acelaşi oficiu.] $\square$

4. Să se "construiască un automat binar ($X = Y = \mathbb{B}$) care, pornind dintr-o stare iniţială s_1, pentru orice intrare "xyz" să se obţină la ieşire "$00z$".

Soluţie. Luăm $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ este suficient să indicăm graful asociat (Fig. 4.2). Există şi alte soluţii. $\square$

Fig. 4.2:



5. Maşina Turing

Prezentăm pe scurt un exemplu clasic de automat, care se apropie de computerul modern.

Fie Σ şi V două mulţimi finite şi disjuncte şi Δ un simbol de blanc ($\Delta \notin \Sigma \cup V$). A defini o maşina Turing $\mathcal{M}$ revine la a fixa trei elemente : o bandă semi-infinită , un cap de citire şi un program. Banda este divizată în celule, are o celulă cea mai la stânga şi este infinită spre dreapta şi fiecare celulă conţine exact un simbol din $\Sigma \cup V \cup \{\Delta\}$. Capul de citire baleiază câte o celulă la fiecare tact; el se poate deplasa la celula din dreapta sau stânga celulei în dreptul căreia se află şi la fiecare mişcare, tipăreşte un simbol pe celula tocmai părăsită , înlocuind ceea ce fusese scris anterior în acea celulă : $\Sigma = \{a, b\}$;

b	$\overset{\downarrow}{a}$	a	b	b	s	s	s	...

Programul este un graf orientat ale cărui vârfuri sunt numite stări $s, s', \ldots$; există o singură stare iniţială s_0 şi o mulţime T de stări terminale (eventual $T = \emptyset$). Fiecare arc al grafului este de forma : $s \overset{(\alpha,\beta,\gamma)'}{s}$, unde $\alpha, \beta \in \Sigma \cup V \cup \{\Delta\}$ şi $\gamma \in \{S, D\}$. Dacă maşina $\mathcal{M}$ este în starea s şi capul de citire baleiază simbolul α, atunci $\mathcal{M}$ trece în starea s', capul de citire tipăreşte β şi se deplasează cu o celulă la stânga (dacă $\gamma = S$) sau la dreapta (dacă $\gamma = D$), aşa cum indică γ. Arcele care pornesc din acelaşi vârf trebuie să difere prin prima componentă α. Aici se încheie definiţia unei maşini Turing.

Descriem acum modul cum operează $\mathcal{M}$. Iniţial, este scris un cuvânt $w \in \Sigma^*$ pe bandă , începând de la celula cea mai din stânga; w are lungime finită şi pe bandă apare apoi Δ în celulele rămase. La început, capul de citire se află în dreptul celulei celei mai din stânga. Execuţia programului porneşte din starea s_0. Dacă maşina ajunge într-o stare terminală (din T), procedura este oprită şi se spune că w este acceptat.

Fie $\Sigma = \mathbb{B}$ şi stările s_0-iniţială , s_1-terminală , cu programul din Fig. 4.3.

Fie $w = 010$. Atunci are loc Fig. 4.4 şi w este acceptată deoarece starea s_1 este terminală .

Fie $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{A, B\}$ şi $w = aba\Delta\Delta\ldots$. Maşina Turing are 4

Fig. 4.3:

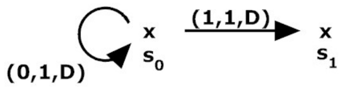
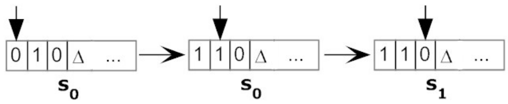
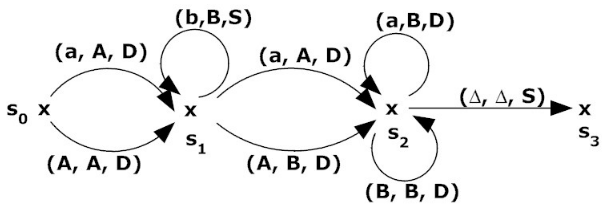


Fig. 4.4:



stări s_0, s_1, s_2, s_3 cu s_3 terminală , cu programul următor :



Să se indice transformările cuvântului w pornind din starea s_0.

Soluţie. $w = \overset{\downarrow}{a}ba\Delta\Delta\ldots \xrightarrow{s_1} A\overset{\downarrow}{b}a\Delta\Delta\ldots \xrightarrow{s_1} \overset{\downarrow}{A}Ba\Delta\Delta\ldots \xrightarrow{s_2} B\overset{\downarrow}{B}a\Delta\Delta\ldots \xrightarrow{s_2}$ $BB\overset{\downarrow}{a}\Delta\Delta\ldots \xrightarrow{s_2} BBB\overset{\downarrow}{\Delta}\Delta\ldots \xrightarrow{s_3} BB\overset{\downarrow}{B}\Delta\Delta\ldots$ STOP $\square$

6. Automate liniare

Fixăm matricele $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R}), C \in M_{p,n}(\mathbb{R}), D \in M_{p,m}(\mathbb{R})$ şi $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^{'}, S = \mathbb{R}^n$. Se consideră aplicaţiile liniare $\delta_1 \colon S \to S$, $\delta_2 \colon X \to S$, $\lambda_1 \colon S \to Y$, $\lambda_2 \colon X \to Y$, asociate matricelor A, B, C, D. Presupunem apoi că există aplicaţii liniare $\delta \colon X \times S \to S$, $\lambda \colon X \times S \to Y$ astfel încât :

$\forall s \in S, \delta_1(s) = \delta(0, s); \lambda_1(s) = \lambda(0, s)$ şi $\forall x \in X, \delta_2(x) = \delta(x, 0); \lambda_2(x) = \lambda(x, 0)$. Aşadar, $\delta(x, s) = \delta(x, 0) + \delta(0, s) = \delta_2(x) + \delta_1(s) = Bx + As \in S$ şi $\lambda(x, s) = Dx + Cs \in Y$.

In această situaţie, se spune că este definit un automat liniar, având spaţiul de intrări X, spaţiul de ieşiri Y şi spaţiul de stări S (asociate matricelor A, B, C, D).

Dacă automatul se află în starea s şi primeşte la intrare un cuvânt $w = w(0)w(1)\ldots w(k-1)$, de... lungime k, atunci să se arate că el trece în starea $\delta^*(w, s) = A^k s + \sum_{j=0}^{k} A^{k-j-1} Bw(j)$ şi emite la ieşire cuvântul în care cea de a k-a literă este

$$\lambda^*(w, s) = CA^{k-1}s + \sum_{j=0}^{k-2} CA^{k-j-2}Bw(j) + Dw(k-1) \text{ din } Y = \mathbb{R}^p.$$

Soluţie. Se consideră mai întâi cazul unei litere, deci $k = 1$ şi $w = w(0)$. Atunci automatul va trece în starea $s_1 = \delta(w(0), s) = \delta(w(0, 0)) + \delta(0, s) = \delta_2(w(0)) + \delta_1(s) = Bw(0) + As$ şi va emite ieşirea $\lambda(w(0), s) = \lambda_1(s) + \lambda_2(w(0)) = Cs + Dw(0)$; apoi pentru $k = 2$ şi $w = w(0)w(1)$, automatul trece în starea $s_2 = \delta(w(1), s_1) = \delta_2(w(1)) + \delta_1(s_1) = Bw(1) + A(Bw(0) + As) + Bw(1) = A^2 s + ABw(0) + Bw(1)$ şi emite ieşirea $\lambda(w(1), s) = \lambda_1(s_1) + \lambda_2(w(1)) = C(Bw(0) + As) + Dw(1)$. Apoi se foloseşte inducţia după k. $\square$

Capitolul 5

Calcul boolean şi circuite logice

1. Câte funcţii booleene de n variabile există ?

   Soluţie. O funcţie booleană f de n variabile este de forma $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. In general, dacă mulţimea A are m elemente şi B are n elemente, atunci numărul funcţiilor $f\colon A \to B$ este egal cu n^m. Aşadar, numărul cerut de funcţii booleene este 2^{2^n}. De exemplu, avem 2^{32} funcţii booleene de 5 variabile. □

2. Să se dea exemplu de latice care nu este booleană .

   Soluţie. Se numeşte latice orice mulţime $(L, \leq)$ parţial ordonată , în care pentru orice două elemente a, b există $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ şi $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Laticea se numeşte distributivă dacă "$\wedge$" este distributivă în raport cu " $\vee$ " şi invers. O latice distributivă se numeşte booleană (sau echivalent, algebră Booleană) dacă există un cel mai mic element $0 = \inf L$, un cel mai mare element $1 \in L$ şi în plus, orice $x \in L$ are un complement (sau opus) $\overline{x} \in L$ astfel încât $x \vee \overline{x} = 1$ şi $x \wedge \overline{x} = 0$.

   Pentru orice mulţime nevidă A, mulţimea $\mathcal{P}(A)$ a submulţimilor lui A este o latice booleană (relativ la incluziune, intersecţie, reuniune şi complementară). Are loc următoarea teoremă a lui M. Stone: "Pentru orice latice booleană L, există o mulţime A şi un morfism injectiv de latici $L \longrightarrow \mathcal{P}(A)$." Această teoremă arată că $\mathcal{P}(A)$ este prototipul laticilor booleene.

Fixând A, se numeşte mulţimea nuanţată (sau "fuzzy") orice funcţie $f\colon A \to [0,1]$; dacă $x \in A$, valoarea $f(x)$ se numeşte gradul de apartenenţă a lui f în x. [De exemplu, dacă A este mulţimea oamenilor şi $f =$ "inteligenţa", atunci oricărui om $x \in A$ i se poate asocia gradul său de inteligenţă $f(x) \in [0,1]$; similar, "frumuseţea", "eleganţa" etc. definesc mulţimi nuanţate]. Dacă f, g sunt mulţimi nuanţate, se definesc în mod natural $f \leq g$, $f \vee g = \max(f,g)$, $f \wedge g = \min(f,g)$ funcţiile constante 0 şi 1, iar pentru orice f, complementul său este $\overline{f} = 1 - f$. Se obţine o latice distributivă , care nu este booleană (deoarece pentru $f = \frac{1}{2}$, avem $\overline{f} = \frac{1}{2}$ şi $f \wedge \overline{f} \neq 0$). $\square$

3. Să se arate că dacă L este o latice completă (adică orice submulţime nevidă $A \subset L$ are marginea superioară), atunci orice aplicaţie monoton crescătoare $f\colon L \to L$ are un punct fix ("teorema lui Tarski").

Soluţie. Fie $A = \{x \in L | x \leq f(x)\}$. A este nevidă , deoarece $0 \in A$. Deoarece L este completă , există $a = \sup A$ şi vom arăta că $f(a) = a$. Fie $\forall x \in A$ deci $x \leq a$ şi $f(x) \leq f(a)$. Dar $x \in A$ deci $x \leq f(x) \leq f(a)$. Atunci $\sup A \leq f(a)$, adică $a \leq f(a)$. Aşadar, conform definiţiei lui A, rezultă că $a \in A$. Atunci $f(a) \leq f(f(a))$ deci $f(a) \in A$. Dar atunci $f(a) \leq \sup A$. In concluzie, $f(a) = a$. $\square$

NOTĂ. Ca o aplicaţie a teoremei lui Tarski, se poate obţine o demonstraţie elegantă a unei teoreme celebre nebanale a lui Cantor şi Bernstein : "Dacă există aplicaţii injective $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$, atunci există şi o bijecţie $h\colon A \to B$." Anume, să considerăm laticea completă $L = \mathcal{P}(A)$ şi să definim aplicaţia $\varphi\colon L \to L$ care asociază oricărui element $X \in L$ (adică $X \subset A$), mulţimea $\varphi(X) = C_A g(C_B f(X))$. Evident, φ este monoton crescătoare ($X \subset Y \Longrightarrow \varphi(X) \subset \varphi(Y)$). Conform teoremei lui Parski, există $S \subset A$ astfel încât $\varphi(S) = S$, adică $S = C_A g(C_B f(S))$, adică $C_A S = g(C_B f(S))$. Considerând bijecţiile $g\colon C_B f(S) \to C_A S$ şi $f\colon S \to f(S)$, se poate defini bijecţia $h\colon A \to B$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in S \\ g^{-1}(x), & \text{altfel} \end{cases}$$

4. Notăm cu FL mulţimea formulelor logice corect formate din propoziţii elementare (care au valoarea de adevăr 0 sau 1).

a) Să se arate că FL este o latice booleană (relativ la "$\leq$"= implicaţie, $a + b = a \vee b$, $ab = a \wedge b$ şi $\overline{a} = a'$).

b) Folosind tabelele de adevăr, să se arate că $\forall a, b \in FL$, avem :

- $a \vee \overline{a} = 1$ ('principiul terţului exclus");
- $\overline{\overline{a}} = a$ ("principiul dublei negaţii");
- $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ ("relaţiile lui de Morgan");
- $(a \Longrightarrow b) \equiv (b' \Longrightarrow a')$ ("principiul reducerii la absurd");
- $(a \Longrightarrow b) \wedge a = 1 \Longrightarrow b = 1$ ("modus ponens").

Soluţie. a) Se aplică direct definiţiile.

b) Ser consideră fie două cazuri $a = 0, a = 1$, fie patru cazuri când ne referim la a, b. Implicaţia $a \Longrightarrow b$ înseamnă $a \leq b$, iar echivalenţa a două formule logice înseamnă dubla implicaţie. $\square$

5. Să se indice forma normal disjunctă pentru funcţiile booleene $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2)$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$.

Soluţie. Dacă $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie booleană neidentic nulă , se consideră punctele $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ unde $f(P) = 1$. Pentru un astfel de punct, se consideră conjuncţia $\varphi = x_1^{\varepsilon_1} \wedge x_2^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\varepsilon_n}$, unde $\varepsilon_i = 1$ sau -1, după cum $a_i = 1$ sau 0, cu convenţia $x^{+1} = x$ şi $x^{-1} = \overline{x}$. Atunci f este disjuncţia conjuncţiilor de tip φ (numiţi mintermeni conjunctivi). Ceva dual există pentru forma normal conjunctivă .

In cazul funcţiilor date în enunţ , se formează mai întâi tabelele de adevăr :

x_1	x_2	z
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	x_3	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Atunci $f(x_1,x_2) = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2)$ şi $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$. Desigur, $f(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2$. $\square$

6. Să se reprezinte ca disjuncţie de mintermeni conjunctivi funcţia booleană $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ care ia valoarea 1 în punctele $P_1(1,0,0), P_2(1,0,1)$ şi nulă în rest.

   Soluţie. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\overline{x_2}\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3$. De fapt, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1\overline{x_2}(\overline{x_3} + x_3) = x_1\overline{x_2} = x_1 \wedge \overline{x_2}$ (dar aceasta nu este forma normală , deşi este mai simplă). $\square$

7. Să se simplifice următoarele formule logice : $f = xyz + x\overline{y}z + xy\overline{z}$ şi $g = 2xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}yz$.

   Soluţie. Notăm $u = xy$ deci $f = uy + u\overline{y} + xy\overline{z}$. Cum $uy + u\overline{y} = u(y+\overline{y}) = u\cdot 1 = u$, rezultă $f = u + xy\overline{z} = z \vee \vee (y \wedge \overline{z}) = (z \vee y) \wedge (z \vee \overline{z}) = x(z + y\overline{z})$. Dar $z + y\overline{z} = z \vee (y \wedge \overline{z}) = (z \vee y) \wedge (z \vee \overline{z}) = z + y$ şi ca atare, $f = x(y+z)$.

   Pe de altă parte, $x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}yz = 1$, $2v = v + v = v$ şi $g = xy\overline{z} + 1$. $\square$

8. Se cunosc funcţiile booleene

   $NAND$ ("not and") : $(x,y) \longmapsto (xy)' = \overline{x} + \overline{y}$

   NOR ("not or") : $(x,y) \longmapsto (x+y)' = \overline{x}\overline{y}$

   ITE ("if then else") : $(x,y,z) \longmapsto xy + \overline{x}z$.

   Să se exprime doar cu $NAND-$uri, funcţia $\varphi(x,y) = x + \overline{y}$.

   b) Să se arate că orice funcţie booleană se poate exprima numai cu $NAND-$uri sau NOR-uri sau ITE-uri.

Soluţie. a) Notăm $f = NAND$. Avem $f(x,x) = \overline{x}$, $x+y = f(f(x,x), f(y,y))$ şi $xy = f(x,y)' = f(f(x,y), f(x,y))$, deci $\varphi(x,y) = f(f(x,x), f(f(y,y), f(y,y)))$.

b) Conform formei normal disjuncte, orice funcţie booleană se exprimă doar prin " $\vee$ "," $\wedge$ "," $-$ "; este suficient să arătăm că $x+y, xy, \overline{x}$ se exprimă cu $NAND, NOR, ITE$.

Am văzut în a) acest lucru pentru $NAND$ şi ceva similar are loc pentru NOR. Pe de ală parte pentru $h = ITE$, este suficient să observăm că $\forall x, y \in FL$, $x+y = h(x,1,y)$, $xy = h(x,y,0)$ şi $\overline{x} = h(x,0,1)$. □

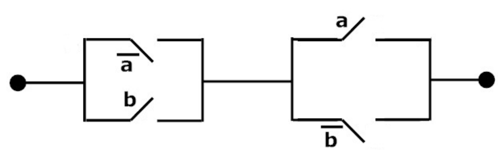
9. Să se arate că mulţimea circuitelor logice este o latice booleană .

Soluţie. Un circuit logic este un graf având în vârfuri circuite logice elementare (disjunctori, conjunctori sau inversori), arcele fiind conductori electrici. Dacă C_1 şi C_2 sunt circuite logice, se definesc $C_1 \wedge C_2$ ca fiind legarea lor în serie, $C_1 \vee C_2$- legarea în paralel şi $\overline{C}$-inversatul lui C; definim $C_1 \leq C_2 \rightleftarrows C_1 \wedge \overline{C_2} = 0$ şi se verifică uşor toate axiomele unei latici booleene. □

NOTĂ. Circuitele logice se mai numesc scheme cu contacte bipoziţionale; ele sunt descrise prin funcţii booleene numite formule de structură .

10. Să se indice circuite logice având formulele de structură : $f(a,b) = (a \Longrightarrow b) \wedge (b \Longrightarrow a)$, $g(a,b,c) = a \vee (b \wedge \overline{c})$.

Soluţie. Avem $(\Longrightarrow b) = (\overline{a} \vee b)$ deci $f(a,b) = (\overline{a} \vee b) \wedge (\overline{b} \vee a)$. f are



valoarea $1 \rightleftarrows a = b$.

In cazul funcţiei g, circuitul este în Fig. 5.1. □

11. Să se simplifice circuitele logice din figurile Fig. 5.2 a) şi Fig. 5.3 b) :

Fig. 5.1:

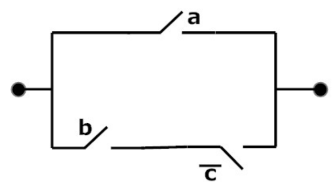
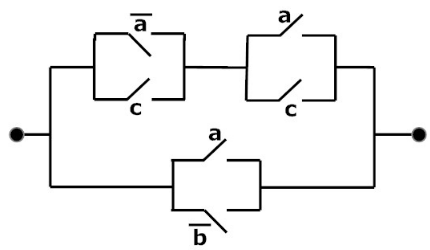


Fig. 5.2: a)



Soluţie. a) Trebuie simplificată formula de structură $f(a,b,c) = ((\overline{a} \vee c) \wedge (a \vee c)) \vee (a \vee \overline{b}) = (c \vee (a \wedge \overline{a})) \vee (a \vee \overline{b}) = c \vee (a \vee \overline{b})$ deci circuitul este echivalent cu unul mai simplu (vezi Fig. 5.4).

b) In cazul secund, se obţine $f \equiv 1$ deci circuitul conduce indiferent de poziţia contactelor. $\square$

12. Să se rezolve în $\mathbb{B}^3$ ecuaţia $3x + y + xz = 4$ şi inecuaţia $5x + y + 7z \leq 8$ (se consideră că $0 < 1$ în $\mathbb{B}$).

Soluţie. Se construieşte tabela cu 8 linii având capul : x, y, z şi $u =$

Fig. 5.3: b)

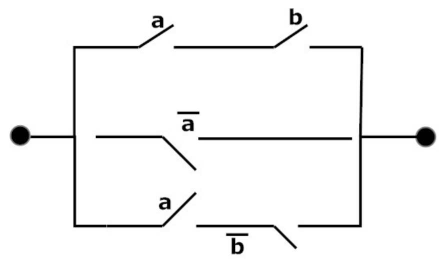
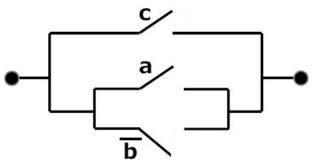


Fig. 5.4:



$3x + y + xz$. Se reţin doar valorile tripletelor (x, y, z) pentru care se verifică relaţiile respective. $\square$

Capitolul 6

Funcţii aritmetice recursive, mulţimi listabile

1. Se consideră funcţia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + n$ şi $f(1) = 5$. Poate ea să fie de forma $f(n) = an^2 + bn + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}$ constante.

   Soluţie. Aşadar, $an^2 + bn + c = a\frac{n^2}{4} + b\frac{n}{2} + c$, pentru orice n. Rezultă $3an^2 + (2b - 4)n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $a = 0$ şi $b = 2$. Aşadar, $f(n) = 2n + c$. Cum $f(1) = 5$, rezultă $c = 3$ şi în final, $f(n) = 2n + 3$. $\square$

2. Să se arate că mulţimea funcţiilor aritmetice $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nu este numărabilă .

   Soluţie. Presupunem că ar fi numărabilă deci toate funcţiile aritmetice ar fi dispuse într-un şir $f_0, f_1, f_2, \ldots$. Dar să considerăm funcţia aritmetică $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(k) = f_k(k) + 1$. Ea se află printre funcţiile din şirul anterior, deci există $n \geq 0$ astfel încât $\varphi = f_n$. Aşadar, $\varphi(n) = f_n(n)$ adică $f_n(n) + 1 = f_n(n)$, absurd. $\square$

3. Ce este o funcţie aritmetică primitiv recursivă ?

   Soluţie. Se numesc funcţii <u>atitmetice</u> cele de forma $f\colon A \to \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}^k$ cu $k \geq 1$; ele se numesc <u>totale</u> dacă $A = \mathbb{N}^k$; există trei tipuri numite funcţiile aritmetice <u>de bază</u> :

- constantele din $\mathbb{N}$;

- funcţia succesor $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(n) = n+1$;

- proiecţiile canonice $p_n^1, p_n^2, \ldots, p_n^n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $p_n^r(x_1, \ldots, x_n) = x_r$.

Există două operaţii elementare standard cu funcţii aritmetice : compunerea şi recursia primitivă . Dacă $f\colon A \to \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}^r$, $\underline{x} \longmapsto f(x)$ şi $g\colon C \to \mathbb{N}$, $C \subset \mathbb{N}^{r+2}$, $(\underline{x}, y, z) \longmapsto g(\underline{x}, y, z)$ sunt două funcţii aritmetice, <u>recursia lor primitivă</u> este funcţia $h\colon B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{N}^{r+1}$, $(\underline{x}, y) \longmapsto h(\underline{x}, y)$ definită prin $h(\underline{x}, 0) = f(\underline{x})$ şi $h(\underline{x}, y+1) = g(\underline{x}, y, h(\underline{x}, y))$, pentru orice $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ şi y admisibilă . Se scrie $h = \mathcal{R}(f, g)$. Dacă funcţiile sunt totale, atunci prin compunere şi recursie primitivă se obţin tot funcţii totale.

O funcţie aritmetică se numeşte <u>primitiv recursivă</u> dacă se obţine din funcţii aritmetice elementare printr-un număr finit de compuneri sau recursii primitive, în orice ordine.

Funcţiile aritmetice sunt "intuitiv calculabile", în sensul că valorile lor pot fi calculate printr-un program; acelaşi lucru este valabil şi pentru funcţiile primitiv recursive. In plus, funcţiile primitiv recursive sunt totale (adică peste tot definite). $\square$

4. Fie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x+1$ şi $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $g(x, y, z) = xy + z$. Să se determine $f \circ g$ şi $h = \mathcal{R}(f, g)$.

Soluţie. Pentru orice $x \in \mathbb{N}$, avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(xy + z) = 2(xy + z) + 1$. Apoi $h(x, y)$, $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ are proprietăţile următoare :

$h(x, 0) = f(x) = 2x + 1$ şi $h(x, y+1) = g(x, y, h(x, y)) = xy + h(x, y)$, pentru orice x, y. Este evident că înlocuind $y = 0$, se obţin valorile $h(x, 1)$; apoi, $h(x, 2)$ etc. $\square$

5. Să se arate că funcţia-sumă $\sigma\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\sigma(x, y) = x + y$ şi funcţia-produs $\pi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\pi(x, y) = xy$ sunt primitiv recursive.

Soluţie. Considerăm proiecţiile $p_1^1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \longmapsto x$ şi $p_3^3\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $(x, y, z) \longmapsto z$, precum şi funcţia succesor s. Fie $f = p_1^1$ şi $g = s \circ p_3^3$, deci $g(x, y, z) = z+1$. Explicităm $h(x, y), h = \mathcal{R}(f, g)$. Avem $h(x, 0) =$

$f(x) = 0$ şi $h(x, y+1) = g(x, y, h(x, y)) = h(x, y) + 1$. Se observă că $\sigma = h$. De asemenea, π este recursia primitivă a funcţiilor $f(x) = 0$ şi $g(x, y, z) = x + z$. □

6. Să se determine minimizatele funcţiilor aritmetice $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = x + y$ şi $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $g(x, y, z) = xyz$.

   Soluţie. Pentru o funcţie aritmetică $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ se asociază ecuaţia în y : $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n$ şi se consideră cea mai mică soluţie y_0 a acestei ecuaţii. Funcţia $\mu_f(x_1, \ldots, x_n) = y_0$ se numeşte minimizata lui f.

   In primul cz, avem $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ şi ecuaţia asociată este $f(x_1, y) = x_2$, adică $x_1 + y = x_2$, deci $\mu_f = x_2 - x_1$ (care nu mai este funcţie tatală !). In cazul secund, $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ şi ecuaţia asociată este $g(x_1, x_2, y) = x_3$, adică $x_1x_2y = x_3$, deci $\mu_f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{x_1x_2}$. □

   NOTĂ: Minimizata funcţiei-sumă este funcţia-diferenţă şi minimizata funcţiei-produs este funcţia-cât.

7. Dacă $f = c$ este o constantă şi $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, să se expliciteze $h = \mathcal{R}(f, g)$. Luând $f = 1$ şi $g(y, z) = (y+1)z$, deduceţi că funcţia factorial este primitiv recursivă .

   Soluţie. Aşadar, $f(x) = c$ şi $h(y+1) = g(y, h(y))$. In cazul particular, avem $h(y+1) = (y+1)h(y)$, deci $h(0) = 1, h(1) = 1 \cdot h(0), h(2) = 2 \cdot h(1)$ etc. şi $h(n) = n!$. □

8. Ce afirmă "teza lui Church"?

   Soluţie. Se numesc funcţii parţial recursive, funcţiile aritmetice care se obţin din funcţiile aritmetice de bază prin operaţii de compunere, recursie primitivă sau minimizare, aplicate de un număr finit de ori şi în orice ordine. Toate funcţiile parţial recursive sunt intuitiv calculabile. Teza lui Church afirmă că " orice computer poate calcula (programa) funcţii parţial primitive şi numai pe acestea".

   Aceasta nu este o teoremă , deoarece nu s-a precizat în termeni riguroşi calculabilitatea. S-a demonstrat de exemplu că funcţii parţial recursive sunt Turing-calculabile şi invers. Astfel de consideraţii sunt acum desuete, dar delimitează capacitatea calculatoarelor actuale. $\square$

<u>NOTĂ</u>: Funcţiile parţial recursive formează o mulţime numărabilă , în timp ce funcţiile aritmetice formează o mulţime nenumărabilă . Aşadar, <u>există funcţii aritmetice necalculabile</u>.

Merită amintit că primul exemplu de funcţie parţial recursivă totală , care nu este primitiv recursivă , a fost dat de profesorul român G. Suvan, care l-a precedat pe Ackermann.

9. Să se dea exemplu de mulţimi $A \subset \mathbb{N}$, listabile.

Soluţie. Mulţimea A se numeşte <u>listabilă</u> dacă există o funcţie primitiv recursivă $p\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ astfel încât A este egală cu imaginea lui p.

Orice mulţime finită mulţimea numerelor pare (impare), mulţimea $\{n!/n \in \mathbb{N}\}$ sunt listabile.

Teza lui Church afirmă că submulţimile lui $\mathbb{N}$ care pot fi evidenţiate prin algoritmi de alcătuire de "liste" sunt tocmai cele care sunt imagini ale unor funcţii parţial recursive.

Teoria funcţiilor aritmetice, parţial recursive şi a mulţimilor listabile se extinde înlocuind $\mathbb{N}$ cu un dicţionar A^* al unui alfabet finit A. (Desigur, luând $A = \{1\}$, se obţine $A^* = \mathbb{N}$). $\square$

Capitolul 7

Gramatici, limbaje, codificări

1. Se consideră gramatica $G = (N, T, S, \pi)$, unde $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ şi $\pi = \{S \longrightarrow Sb, S \longrightarrow a\}$.

   a) Să se determine limbajul $L(G)$. [Orice limbaj este o colecţie de cuvinte.]

   b) Aceeaşi problemă dacă N, T, S rămân nemodificate, dar $\pi = \{S \longrightarrow SS, S \longrightarrow baa, S \longrightarrow abb, S \longrightarrow \wedge\}$.

   c) Să se arate că ambele gramatici anterioare sunt independente de context ("context-free").

Soluţie. Mulţimile N (a simbolurilor neterminale) şi T (a terminalelor) sunt presupuse nevide şi disjuncte. Mulţimea $V = N \cup T$ se numeşte vocabularul gramaticii, iar producţiile (din π) sunt de forma $\alpha \longrightarrow \beta$ cu $\alpha \in V^*NV^*$ şi $\beta \in V^*$. Dacă în părţile din stânga ale priducţiilor avem neterminale, atunci gramatica se numeşte independentă de context. S este un simbol presupus neterminal, numit simbolul de start. Limbajul $L(G)$ al unei gramatici este mulţimea tuturor cuvintelor din T^* (formate numai cu terminale), care derivă direct sau indirect din S. Faptul că $\alpha \in V^*NV^*$ înseamnă că $\alpha = wnw'$ cu $w, w' \in V^*$ şi $n \in N$; nu se exclude cazul când w sau w' este cuvântul vid $\wedge$. Desigur, $V^*NV^* \subset V^*$. Se spune că $w_2 \in V^*$ derivă direct din $w_1 \in V^*$ şi se scrie $w_1 \Longrightarrow w_2$ dacă $w_1 = \alpha A \beta$, $w_2 = \alpha p \beta$ şi $A \longrightarrow p$ este o producţie din clasa π. Se spune că w_2 derivă indirect din w_1 (şi se scrie $w_1 \stackrel{*}{\Longrightarrow} w_2$) dacă există cuvinte $c_1, c_2, \ldots, c_k \in V^*$ astfel încât

$w_1 = c_1, c_1 \Longrightarrow c_2, \ldots, c_{k-1} \Longrightarrow c_k$ şi $c_k = w_2$. Limbajul gramaticii G este $L(G) = \{w \in T^* |\ S \overset{*}{\Longrightarrow} w\}$.

a) Avem $S \longrightarrow a$ şi $a \in T$; apoi $S \longrightarrow Sb \longrightarrow ab, S \longrightarrow Sb \longrightarrow Sbb \longrightarrow abb$ etc. Deci $L(G) = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$.

b) Aici $L(G) = \{\wedge, baa, abb, baabaa, abbbaa, \ldots\}$

c) Evident, ambele gramatici sunt independente de context. $\square$

2. Fie gramatica $G = (N, T, S, \pi)$, unde $N = \{S, X, Y\}$, $T = \{x, y\}$ şi $\pi = \{S \longrightarrow_x Y, S \longrightarrow_y Y, X \longrightarrow x, Y \longrightarrow y\}$.

Să se arate că :

a) xy şi $yy \in L(G)$;

b) limbajul $L(G)$ este regulat.

Soluţie. Avem $S \longrightarrow_x Y \longrightarrow xy$ şi $S \longrightarrow_y Y \longrightarrow yy$. Producţiile fiind de forma $P \longrightarrow t$ sau $P \longrightarrow_t P$ cu $P \in N$ şi $t \in T$, limbajul este regulat. $\square$

3. Fie $N = \{S\}$, $T = \{|\}$ şi $\pi = \{S \longrightarrow |, S \longrightarrow ||S\}$. In acest caz, $L(G) = \{|, |||, |||||, \ldots\}$ se identifică prin mulţimea numerelor impare. Luând $\pi = \{S \longrightarrow \wedge, S \longrightarrow ||S\}$ se obţine mulţimea numerelor pare. Să se determine $L(G)$ dacă $N = \{A\}$, $T = \{a, b\}$, $S = A$, $\pi = \{A \overset{1}{\longrightarrow} aAb, A \overset{2}{\longrightarrow} \wedge\}$.

Soluţie. Avem $A \overset{1}{\Longrightarrow} aAb \overset{1}{\Longrightarrow} a(aAb)b \overset{2}{\Longrightarrow} a^2b^2 \in T^*, A \overset{1}{\Longrightarrow} aAb \overset{2}{\Longrightarrow} ab \in T^*$ etc. Deci $L(G) = \{a^n b^n |\ n \geq 0\}$. $\square$

4. Fie FL mulţimea formulelor logice relativ la variabilele booleene a, b, c. Luăm $N = \{S\}$, $T = \{a, b, c, \vee, \wedge, \urcorner,), (\}$ şi producţiile $\pi = \{S \longrightarrow (S \vee S), S \longrightarrow (S \wedge S), S \longrightarrow \urcorner S, S \longrightarrow a, S \longrightarrow b, S \longrightarrow c\}$. Să se arate că $L(G) = FL$.

Soluţie. Se aplică definiţiile. Aşadar, este esenţialmente un calcul de derivări în această gramatică . $\square$

NOTĂ: Limbajele avansate de programare sunt asociate unei gramatici, unde N descrie tipurile, iar mulţimea T include simbolurile literale şi numerice, etichetele operaţiilor algebrice sau logice, ca şi cuvintele cheie. In cazul limbajelor naturale care depind de context, simbolurile terminale sunt cuvintele uzuale.

5. Fie $\sum$ un alfabet nevid şi $W = \sum^*$ mulţimea cuvintelor relativ la alfabetul $\sum$. Dacă $A, B \subset W$ sunt două limbaje, se pot considera limbajele $A \cup B$,$A \cap B$, $A \setminus B$, concatenarea $AB = \{w_1 w_2 |\ w_1 \in A, w_2 \in B\}$, $A^* = \bigcup_{k \geq 0} A^k = \{w_1 \dots w_n |\ n \geq 0, w_i \in A\}$ (operaţia "star" a lui Kleene). Fie $\sum = \{a, b\}, A = \{a\}^*$ şi $B = \{b\}^*$. Să se expliciteze $A \cup B$ şi AB.

Soluţie. Avem $A = \{\wedge, a, aa, \dots\} = \{a^n |\ n \geq 0\}$ şi $B = \{b^m |\ m \geq 0\}$. Atunci $AB = \{a^k b^l |\ k \geq 0, l \geq 0\}$. □

6. Să se enunţe teorema lui Kleene-Schützenberger.

Soluţie. Fie $\sum$ un alfabet nevid. Un limbaj $L \subset \sum^*$ se numeşte recunoscut dacă există o gramatică $G = (N, T, S, \pi)$ cu $N = \{A, B, S\}$, $a \in T$ şi $\pi = \{A \longrightarrow aB, A \longrightarrow a, A \longrightarrow \wedge\}$ şi $L = L(G)$. Teorema K-S afirmă că "un limbaj L este recunoscut dacă şi numai dacă se obţine din limbaje finite printr-un număr finit de operaţii de reuniune, concatenare şi star". □

7. Fie două simboluri distincte a, b.

a) Să se arate că $(ab)^* a = a(ba)^*$;

b) Fie $L_1 = (a + b)^* a$ şi $L_2 = b(a + b)^*$. Să se arate că $L_1 \cap L_2 = b(a + b)^* a$.

Soluţie. a) Avem $(ab)^* a = \{a, aba, ababa, abababa, \dots\}$ şi $a(ba)^* = \{a, aba, ababa, \dots\}$.

b) L_1 este mulţimea cuvintelor care se termină cu a, iar L_2 mulţimea cuvintelor care încep cu b. □

8. Să se determine limbajul generat de gramatica $S \longrightarrow SS, S \longrightarrow baa, S \longrightarrow abb, S \longrightarrow \wedge$.

   Răspuns. $L = (baa + abb)^*$

9. Fie gramatica G dată prin $S \longrightarrow AB, S \longrightarrow AS, A \longrightarrow a, A \longrightarrow aA, B \longrightarrow b$. Care din expresiile aa^*b, $(ab)^*$ aparţin la $L(G)$?

   Răspuns. Prima.

10. Fie gramatica $G = (N, T, S, \pi)$, unde $N = \{S\}$, $T = \{0, 1\}$ şi $\pi = \{S \longrightarrow SS, S \longrightarrow 0S1, S \longrightarrow 1S0, S \longrightarrow 1\}$. Să se determine $L(G)$.

    Răspuns. $L(G) = \{w \in T^* |\ w$ are acelaşi număr de 0 şi $1\}$.

11. Să se arate că limbajele $L_1 = \{0^n 1^n |\ n \geq 0\}$, $L_2 = \{0^n 1^n 2^k 3^k |\ n \geq 0, k \geq 1\}$ sunt independente de context, dar $L_3 = \{0^n 1^n 2^n |\ n \geq 1\}$, nu.

    Soluţie. Fie $G_1 : \{S \longrightarrow \wedge, S \longrightarrow 0S1\}$. Atunci $L_1 = L(G_1)$ şi G_1 este evident independentă de context. Apoi L_2 este generat de gramatica $G_2 : \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow 0A1, B \longrightarrow 2B3, A \longrightarrow 01, B \longrightarrow 23\}$. □

12. Care din cuvintele $w_1 = bccdd$, $w_2 = aabccd$, $w_3 = abbd$ aparţin limbajului gramaticii $G : \{S \longrightarrow aS, S \longrightarrow bA, A \longrightarrow d, A \longrightarrow ccA\}$?

    Soluţie. Avem $w_2 \in L(G)$. Dacă w_1 ar aparţine la $L(G)$, atunci ar rezulta că se pot genera cuvinte având două litere "d" succesive; similar, nu se pot genera două litere "b" succesive, deci nici w_3 nu aparţine limbajului $L(G)$. □

13. Câţi biţi sunt necesari pentru a codifica <u>binar</u> cele 28 e litere (mari şi mici) ale alfabetului nostru, 10 cifre zecimale şi încă 100 de simboluri ştiinţifice (etichete de operaţii, logaritmi, funcţii $\sin, \cos, \ldots$, semnul de integrale, sume, produse etc.)?

    Soluţie. Trebuie aflat n natural minim astfel încât $2^n \geq 28 + 28 + 10 + 100 = 166$ deci $n = 8$. Atunci cele 166 de simboluri se ppt codifica prin octeţi (cuvinte binare din $\mathbb{B}^8$). Reamintim că o <u>codificare binară</u> a unei mulţimi M de simboluri este o aplicaţie injectivă $c\colon M \to \mathbb{B}^n$, unde n este ales minim astfel încât 2^n să fie mai mare decât numărul de elemente ale mulţimii M. Rămân şi cuvinte binare de lungime n care nu au semnificaţie. $\square$

14. Alfabetul unei limbi are n litere. Presupunem că orice cuvânt are cel mult m litere (unel putând fi repetate); presupunem că nici un cuvânt nu este prefixul (începutul) altuia. Notând cu a_k numărul cuvintelor din limba respectivă având k litere, să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{a_k}{n^k} \leq 1$.

    Soluţie. Fiecărui cuvânt c de lungime k $(1 \leq k \leq m)$ îi asociem toate extensiile de lungime m, unde primele k litere coincid cu cuvântul de plecare (deci c este un prefix). Conform ipotezei, extensiile unor cuvinte diferite vor fi diferite. Dicţionarul considerat are n^m cuvinte de lungime m deci numărul total de extensii de cuvinte este $\leq n^m$. Din fiecare cuvânt de lungime k are n^{m-k} extensii şi ca atare, $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k n^{m-k} \leq n^m$. Rămâne să împărţim cu n^m. $\square$

15. Fie $1 \leq m \leq n$ întregi fixaţi şi $A \in M_{n,m}(\mathbb{B})$ o matrice de rang maxim ($\mathbb{B} = \mathbb{Z}_2$ corp comutativ; $1 + 1 = 0$). Să se arate că aplicaţia $f \colon \mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n$, $f(x) = A \cdot x^T$ este o codificare (adică este injectivă), numită codificare cu cheia A.

    Soluţie. Fie $x, y \in \mathbb{B}^n$; $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ astfel încât $f(x) = f(y)$, adică $A \cdot x^T = A \cdot y^T$. Notând $z = x - y$, rezultă $A \cdot z^T = 0$. Acest sistem liniar omogen cu coeficienţi în corpul comutativ $\mathbb{B} = \mathbb{Z}_2$ are numai soluţia nulă (deoarece rangul $\rho(A)$ al lui A este egal cu m şi ca atare, din $\ker f = m - \rho(A) = 0$. Aşadar, $\ker f = 0$, deci $z = 0$). Aşadar, $x = y$. $\square$

16. Să se codifice binar textele $T =$"am cap" şi $T' =$"muncim, nu gândim".

    Soluţie. Considerăm mai întâi literele mesajului T, la care adăugăm blancul Δ : a, m, Δ, c, p. Pentru a codifica binar aceste 5 simboluri, alegem k minim astfel încât $2^k \geq 5$ deci $k = 3$. De exemplu, identificăm cele 5 simboluri cu 5 cuvinte binare distincte din $\mathbb{B}^3$, anume:

$a = 000, m = 001, \Delta = 010, c = 011, p = 100$. Considerăm apoi o matrice $A \in M_{4,3}(\mathbb{B})$ de rang 3, de exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi definim aplicaţia de codificare asociată $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^3$, $f(x) = Ax^T = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Atunci $f(a) = f(000) = 0000$; $f(m) = f(001) = 0011$; $f(\Delta) = f(010) = 0101$, $f(c) = f(011) = 0110$ şi $f(p) = f(100) = 1001$. Aşadar, codificatul mesajului T va fi 00000011010101101001, cuvânt binar de lungime 20. Cine cunoaşte cheia A poate codifica acest text. In cazul lui T' avem 10 simboluri deci $k = 4$ şi alegem o matrice $A \in M_{4,5}(\mathbb{B})$ de rang 4 etc.

Se observă că prin codificare creşte lungimea mesajelor (din cauza condiţiei de injectivitate). $\square$

Capitolul 8

Calcul paralel

1. Să se indice o procedură de calcul paralel pentru expresia $E = (a_1 + a_2)(a_3 + a_4) + a_1a_2 + a_3a_4$ ($a_k \in \mathbb{R}$), estimând înălţimea şi numărul de procesoare necesare.

   Soluţie. La nivelul (etajul) zero se aşază datele a_1, a_2, a_3, a_4. La primul nivel (primul etaj) se calculează $a_1 + a_2$ şi $a_3 + a_4$ pe două procesoare paralele; la al doilea nivel se calculează a_1a_2, a_3a_4, apoi $(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)$, apoi $a_1a_2 + a_3a_4$ şi în fine, se calculează E. Aşadar, numărul de nivele, numit <u>înălţimea</u> procedurii este $h = 5$, iar numărul de procesoare necesare este $p = 2$. $\square$

2. Să se calculeze $P = \prod_{i=1}^{8} a_i$ şi $S = \sum_{i=1}^{8} a_i$, aplicând "principiul înjumătăţirii" şi p schemă de calcul paralel. Generalizare.

   Soluţie. La primul nivel se calculează produsele $a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, a_7a_8$ (pe 4 procesoare); apoi se calculează $(a_1a_2)(a_3a_4)$ şi $(a_5a_6)(a_7a_8)$ pe două procesoare şi în fine, la etajul 3, se calculează P. Inălţimea schemei este $h = 3$, iar numărul de procesoare este $p = 4$. In cazul $P = \prod_{i=1}^{n} a_i$, avem $h = \lceil \log_2 n \rceil$ şi $p = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, unde se notează $\lceil \alpha \rceil$= cel mai mic număr întreg $\geq \alpha$, adică $\lceil \alpha \rceil = -[\alpha]$. Similar, pentru S. $\square$

3. Să se arate că pentru calculul unei expresii $E(x_1, \ldots, x_n)$ depinzând de n variabile prin operaţii unare sau binare, înălţimea h a oricărei proceduri paralele satisface condiţia $h \geq \lceil \log_2 n \rceil$.

Soluţie. Pentru orice nivel k, să notăm cu ω_k numărul de date aflate la nivelul k; atunci $\omega_{k+1} \geq \frac{1}{2}\omega_k$ deci $\omega_0 \leq 2\omega_1 \leq 2^2\omega_2 \leq \ldots \leq 2^k\omega_k$. Dar $\omega_0 = n$, $\omega_h = 1$ deci $n \leq 2^h$ şi ca atare, $\log_2 n \leq h$. $\square$

NOTĂ Cu aceeaşi demonstraţie, dacă asupra celor n variabile se fac operaţii cu ordin de aritate cel mult r, atunci $h \geq \lceil \log_r n \rceil$. Reţinem că dacă o problemă are n date de intrare, atunci înălţimea este de cel puţin $O(\log n)$.

4. Să se indice algoritmi paraleli pentru:

   a) produsul unei matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ cu un vector $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$;

   b) produsul a două matrice;

   c) inversa unei matrice.

Soluţie. a) Explicit, cu notaţii transparente, avem $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, 1 \leq i \leq m$. Pentru fiecare i, avem de calculat n produse $a_{ij}x_j, 1 \leq j \leq n$. Deci pentru calcul paralel sunt necesare mn procesoare. Apoi, cu procedeul înjumătăţirii, se calculează cele m sume după $h = \lceil \log_2 n \rceil$ paşi.

b) Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B = (b_1|b_2|\ldots|b_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, atunci $AB = (Ab_1|Ab_2|\ldots|Ab_p)$. Produsul AB necesită mnp procesoare şi înălţimea $h = \lceil \log_2 n \rceil$.

c) Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este inversabilă , fie $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$. Avem $f(0) = c_n \neq 0$, deoarece A este inversabilă . Apoi, conform teoremei Hamilton-Cayley, $f(A) = 0$, adică $A^{-1} = -\frac{1}{c_n}(A^{n-1} + c_1A^{n-2} + \ldots + c_{n-1}I_n)$. Pentru a calcula coeficienţii c_k, se calculează $s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \mathrm{tr}(A^k)$, folosind relaţiile de recurenţă $c_1 = -s_1, c_1s_1 + 2c_2 = -s_2, c_1s_2 + c_2s_1 + 3c_3 = -s_3, \ldots, c_1s_{n-1} + c_2s_{n-2} + \ldots + ns_1 = -s_n$. Toate operaţiile se pot realiza paralel. $\square$

5. Notăm cu T_p numărul de tacţi pentru un algoritm paralel cu $p \geq 1$ procesoare şi cu T_1 timpul necesar pentru algoritmul secvenţial. Raportul $v = T_1/T_p$ se numeşte <u>factorul de viteză</u> , $c = p \cdot T_p$ se numeşte costul

algoritmului paralel, iar $e_p = v/c$ se numeşte efectivitatea algoritmului. Să se determine aceste entităţi pentru calculul sumei $S = \sum_{k=1}^{16} a_k$, în cazul $p = 2$ şi în cazul $p = 4$.

Soluţie. Secvenţial se fac 15 adunări deci $T_1 = 15$. In cazul $p = 2$, fie $b_1 = a_1 + \ldots + a_8$, $b_2 = a_9 + a_{10} + \ldots + a_{16}$. Se folosesc astfel 7 unităţi de timp (simultan pentru b_1, b_2) şi însă una pentru $S = b_1 + b_2$ deci $T_2 = 8$. In cazul $p = 4$, fie $b_1 = a_1 + \ldots + a_4$, $b_2 = a_5 + \ldots + a_8$, $b_3 = a_9 + \ldots + a_{12}$, $b_4 = a_{13} + \ldots + a_{16}$ şi rezultă $T_4 = 3 + 1 + 1 = 5$.

Aşadar, pentru $p = 2$, avem $v = 15/8$, $c = 16$, $e = 15/128$, iar pentru $p = 4$, avem $v = 3$, $c = 20$ şi $e = 3/20$. $\square$

Capitolul 9

Semnale şi sisteme discrete

1. Să se precizeze noţiunea matematică de semnal discret.

   Soluţie. Notăm cu $\mathcal{T}$ una din mulţimile finite sau numărabile : $\mathcal{T} = \mathbb{N}, \mathcal{T} = \mathbb{Z}, \mathcal{T} = \{a + nT|\ \ a \in \mathbb{R}, T > 0$ fixate şi $\ n \in \mathbb{N}\}$ sau $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ (pentru $N \geq 2$ întreg fixat). In fiecare din cazuri, $\mathcal{T}$ se numeşte mulţimea de timp discret, iar elementele lui $\mathcal{T}$ se numesc <u>momente</u>. Se numeşte <u>semnal discret</u> orice funcţie $x\colon \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, cu valori reale sau complexe; pentru orice $t \in \mathcal{T}$, valoarea $x(t)$ se numeşte <u>eşantionul</u> semnalului x la momentul t şi se mai notează $x[t]$. Se mai scrie $x = x[t], t \in \mathcal{T}$. Un semnal discret este de fapt un şir de numere. $\square$

2. Notăm cu S_d mulţimea semnalelor discrete $x = x[n], n \in \mathbb{Z}$ şi cu S_+ semnalele discrete cu suport pozitiv, adică $x[n] = 0$ pentru $n < 0$. Dacă $x, y \in S_d$, se definesc :

   $x = y \rightleftarrows \forall n, x[n] = y[n]; x + y$ şi λx (pe componente; $\lambda \in \mathbb{C}$) şi <u>convoluţia</u> $z = x \star y$ dacă pentru orice n au sens sumele de serii $z[n] = \sum\limits_p x[p] \cdot y[n-p]$. Să se arate că

   a) S_d este un spaţiu vectorial complex;

   b) Dacă $x, y \in S_+$, atunci are sens $x \star y$ şi $x \star y \in S_+$.

   Soluţie. a) Se verifică direct axiomele de spaţiu vectorial. Dacă $N \geq 2$ este fixat şi considerăm mulţimea S_N a semnalelor finite de lungime

N, anume $x = (s[0], x[1], \ldots, x[N-1])$, se obţine un spaţiu vectorial izomorf cu $\mathbb{C}^N$.

b) Dacă $x, y \in S_+$, atunci $x[n] = 0$ şi $y[n] = 0$ pentru orice $n < 0$ deci $z[n] = \sum\limits_p x[p] \cdot y[n-p] = \sum\limits_{p=0}^{n} x[p] \cdot y[n-p]$ deoarece $x[p] = 0$ pentru $p < 0$ şi $y[n-p] = 0$ pentru $p > n$. In plus $z[n] = 0$ pentru $n < 0$ deci $x \star y \in S_+$. $\square$

3. Convoluţia extinde modul uzual de înmulţire a fracţiilor zecimale infinite. Demonstraţi acest fapt.

Soluţie. Fără restrângerea generalităţii, considerăm numere din intervalul (0,1). Orice număr real $x \in (0,1)$ este de forma $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots = x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + x_n \cdot 10^{-n} + \ldots$ şi se identifică cu semnalul discret $X = x[n], n \geq 1$. Dacă $y = 0, y_1 y_2 \ldots y_n \ldots = y_1 \cdot 10^{-1} + y_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + y_n \cdot 10^{-n} + \ldots$ deci $Y = y[n], n \geq 0$, atunci produsul uzual $xy = \left(\sum\limits_p x_p \cdot 10^{-p}\right)\left(\sum\limits_q y_q \cdot 10^{-q}\right) = \sum\limits_p \sum\limits_q x_p y_q 10^{-p-q}$ şi notând $p + q = n$, rezultă că $xy = \sum\limits_n \left(\sum\limits_p x_p y_{n-p}\right) 10^{-n}$ deci produsul xy se identifică tocmai cu semnalul discret $X \star Y$.

Aşadar, orice algoritm mai rapid de calcul al convoluţiei a două semnale discrete conduce la un algoritm mai rapid pentru operaţia de înmulţire a numerelor reale. Reţinem totodată că studiul complexităţii operaţiilor de semnale discrete este practic acelaşi cu cel din cazul numerelor. $\square$

4. Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ se defineşte semnalul discret δ_k, având componentele

$$\delta_k[n] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = k \\ 0, & \text{dacă } n \neq k \end{cases}$$

a) Să se determine $x \star \delta_k$ pentru orice $x \in S_d$.

b) Să se calculeze eşantionul la momentul n al semnalului

$$y = 3x \star \delta_2 + 5x \star \delta_{-1}.$$

c) Notând $\delta = \delta_0$, să se calculeze $x \star \delta$ şi $\delta \star x$.

Soluţie. a) Notând $z = x \star \delta_k$, $z = z[n], n \in \mathbb{Z}$, avem

$$z[n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x[p]\delta_k[n-p] = x[n-k].$$

Eşantionul la momentul n al semnalului $x \star \delta_k$ este tocmai eşantionul lui x la momentul $n-k$. Se spune că semnalul $x \star \delta_k$ reprezintă <u>întârziatul</u> lui x cu k unităţi de timp.

b) $y[n] = 3x[n-2] + 5x[n+1]$

c) Avem $x \star \delta = x$ şi $\delta \star x = x$. Se mai spune că δ este elementul neutru relativ la convoluţie. $\square$

5. a) Ce legătură este între semnalele $x, y \in S_d$ dacă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem $x[n] + 2x[n-2] = y[n-1] + 5y[n-3]$?

   b) Aceeaşi problemă dacă $x[n+1] + 3x[n] = y[n-1] - 4y[n]$?

   Soluţie. a) $x + 2x \star \delta_2 = y \star \delta_1 + 5y \star \delta_3$

   b) $x \star \delta_{-1} + 3x = y \star \delta_1 - 4y$ $\square$

6. Fie S mulţimea semnalelor discrete având toate eşantioanele nule cu excepţia unui număr finit. Să se arate că S este un spaţiu vectorial complex şi că $\{\delta_k\}, k \in \mathbb{Z}$ formează o bază pentru S.

   Soluţie. Evident, S este spaţiu vectorial. Sistemul $\{\delta_k\}$ este liniar independent, căci dacă o sumă finită $\sum_k a_k b_k = 0$ (cu $a_k \in \mathbb{C}$), atunci toţi $a_k = 0$; apoi orice $x \in S$ cu eşantioanele $x[n], n \in \mathbb{Z}$ se scrie $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]\delta_n$ (suma fiind finită). $\square$

7. Fie S_N mulţimea semnalelor finite de lungime N, $S_N = \{x = x[n] |\ 0 \leq n \leq N-1\}$. Să se arate că S_N este un spaţiu Hilbert complex relativ la produsul scalar $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\overline{y[n]}$; norma $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ se numeşte <u>energia</u> semnalului x.

   a) Se consideră $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ şi $y = (0, 1, 0, 1)$ în S_4. Să se calculeze $\langle x, y \rangle$ şi $\|x\|$.

   b) Ce devine inegalitatea lui Schwartz?

Soluţie. a) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $\square$

8. Fixăm $N \geq 2$. Pentru orice două semnale finite x, y de lungime N se defineşte convoluţia lor ciclică $z = x \underset{c}{\star} y$, având eşantioanele $z[n] = \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \cdot y[n \ominus p], 0 \leq n \leq N-1$, unde $n \ominus p = n - p$ modulo N. Se poate arăta că operaţia $\underset{c}{\star}$ este comutativă , asociativă şi distributivă în raport cu adunarea. Să se calculeze convoluţiile următoare :

a) $x \underset{c}{\star} x$ pentru $x = (0, 1, 3)$

b) $x \underset{c}{\star} y$ pentru $x = (0, 1, 1, 0)$ şi $y = (1, 0, 0, 2)$.

Soluţie. a) Avem $N = 3, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$ şi $x \underset{c}{\star} x = z$; $z = (z_0, z_1, z_2)$ cu $z_n = \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \cdot x[n \ominus p], 0 \leq n \leq 2$, deci $z_0 = x_0x_0 + x_1x_2 + x_2x_1 = 0{\cdot}0 + 1{\cdot}3 + 3{\cdot}1 = 6$, $z_1 = x_0x_1 + x_1x_0 + x_2x_2 = 9$ şi $z_2 = x_0x_2 + x_1x_1 + x_2x_0 = 1$.

b) Fie $z = x \star y$; $N = 4$ şi $z_n = \sum_{p=0}^{3} x_p y_{n \ominus p}$ etc. $\square$

9. Daţi exemple concrete de sisteme discrete $T \colon S_d \to S_d$ (numite şi filtre digitale). Precizaţi proprietăţile de liniaritate şi invarianţă în timp.

Soluţie. Pentru orice $x = x[n], n \in \mathbb{Z}$ definim de exemplu $(Tx)[n] = x[n-1]$; sistemul $T = x \star \delta_1$ se numeşte şiftare cu un pas. De asemenea se poate considera Ux, unde $(Ux)[n] = x[n] - x[n-1]$ deci $Ux = x - x \star \delta_1$ etc.

Sistemul discret T se numeşte liniar dacă T este operator liniar; T se zice invariant în timp dacă pentru orice $k \in \mathbb{Z}, T(x \star \delta_k) = (Tx) \star \delta_k$. $\square$

10. Pentru orice semnal discret $x = x[n], n \in \mathbb{Z}$, se poate defini funcţia complexă $X(z) = \sum_n x[n] z^{-n}$ (numită Z-transformata lui x), în ipoteza de convergenţă a seriei Laurent.

a) Să se arate că domeniul de definiţie al lui $X(z)$ este fie mulţimea vidă , fie o coroană circulară centrată în origine.

b) Să se arate că Z-transformata lui $x \star \delta_k$ este $z^k X(z)$.

Soluţie. a) Avem $\sum\limits_n x[n]z^{-n} = \sum\limits_{n<0} x[-n]z^n + \sum\limits_{n\geq 0} x[n]z^{-n}$. Prima serie este o serie de puteri care este convergentă pentru $|z| < R_1$ şi cea de a doua este convergentă dacă $z \neq 0$ şi $\left|\frac{1}{z}\right| < R_2$, adică $|z| > \frac{1}{R_2}$. Dacă $\frac{1}{R_2} < R_1$, atunci $X(z)$ este bine definită în coroana circulară de raze $\frac{1}{R_2}$ şi R_1.

b) Z-transformata lui $x \star \delta_k$ este $\sum\limits_n x[n-k]z^{-n} = \sum\limits_n x[n]z^{-n+k} = z^k X(z)$. $\square$

11. Pentru orice sistem discret $T \colon S_d \to S_d$, $x \longmapsto y = Tx$, se numeşte funcţia sa de transfer câtul $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ dintre Z-transformatele ieşirii şi intrării, cu condiţia ca acest cât să nu depindă de intrare. Să se determine $H(z)$ pentru sistemele următoare:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}, x[n] + 2x[n-1] = y[n] - 3y[n-1]$

b) $\forall n \in \mathbb{Z}, 2x[n] + x[n-1] = 5y[n-1]$.

Soluţie. a) Asşadar, $x + 2x\star_1 = y - 3y \star \delta_1$, deci $X(z) + 2zX(z) = Y(z) - 3zY(z)$, de unde $H(z) = \frac{2z+1}{1-3z}$.

b) $2x + x \star \delta_1 = 5y \star \delta_1$; $2X(z) + zX(z) = 5zY(z)$ şi $H(z) = \frac{z+2}{5z}$. $\square$

Capitolul 10

Lanţuri Markov

1. Se numeşte vector de probabilitate orice vector $u = (u_1, \ldots, u_n)$ cu toate componentele $0 \leq u_i \leq 1$ şi $\sum\limits_i u_i = 1$. Se numeşte matrice stocastică orice matrice pătratică având fiecare linie ca vector de probabilitate.

   a) Să se dea exemple de matrice stocastice;

   b) Să se arate că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sunt matrice stocastice, atunci la fel este AB.

   Soluţie. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

   b) Verificări directe. □

2. Să presupunem că o bilă se află într-unul din punctele mulţimii $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de pe o axă şi că bila sare aleator doar câte un pas la dreapta cu probabilitatea p şi la stânga cu probabilitatea $q = 1 - p$. Ajungând în 0, bila sare obligatoriu doar la dreapta şi din punctul 4 sare doar la stânga. Se notează cu ξ_m starea (poziţia) bilei după m salturi şi fie $p_{ij} = P(\xi_{m+1} = j | \xi_m = i)$ pentru $i, j \in S$. Să se arate că matricea $P = (p_{ij}), 0 \leq i, j \leq 4$ este stocastică .

   Soluţie. De exemplu, p_{23}=probabilitatea ca bila să sară în punctul 3, după ce a fost în punctul 2, deci $p_{23} = p$; apoi $p_{43} = 1, p_{44} = 0$. Atunci

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ □

3. Există multe sisteme concrete care au un număr finit de stări $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi care îşi modifică starea la momente discrete de timp din $\mathbb{N}$, dar tranziţiile de stare nu se realizează cu certitudine, ci cu anumite probabilităţi şi dependenţe. Fixăm un vector $u = (u_1, \ldots, u_n)$ al probabilităţilor iniţiale şi o matrice stocastică $P = (p_{ij})$. Se numeşte lanţ Markov staţionar orice şir de variabile aleatoare $(\xi_m), m \geq 0$ cu valori în S astfel încât $\forall i \in S, P(\xi_0 = i) = u_i$ şi $\forall i, j \in S, p_{ij} = P(\xi_{m+1} = j|\xi_m = i)$ (indiferent de valorile $\xi_{m-1}, \ldots, \xi_0$, pentru orice $m \geq 0$. p_{ij}^r se numeşte probabilitatea de tranziţie directă din starea i în starea j în r paşi $(r \geq 1)$; adică $p_{ij}^r = P(\xi_{m+1} = j|\xi_m = i)$ independent de m. Să se arate că

   a) $p_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_{kj}$ adică $P^2 = (p_{ij}^2)$.

   b) $P^r = (p_{ij}^r); 1 \leq i, j \leq n$ şi $r \geq 1$.

   c) uP^n este vectorul linie în care componenta i este probabilitatea ca lanţul (ξ_m) să fie în starea i după r paşi.

   Soluţie. a) Se aplică formula probabilităţii totale.

   b), c) Se aplică inducţie după r şi formula probabilităţii totale. □

4. Să se calculeze $q = P(\xi_3 = j, \xi_1 = k)$.

   Soluţie. Avem $q = P(\xi_3 = j|\xi_1 = k)P(\xi_1 = k)$, aplicând formula $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Dar $P(\xi_3 = j|\xi_1 = k) = \sum_{s=1}^{n} P(\xi_3 = j|\xi_2 = s, \xi_1 = k)P(\xi_2 = s)$, unde am folosit formula probabilităţii totale. Folosind proprietatea de markovianitate, rezultă $P(\xi_3 = j, \xi_1 = k) = \sum_{s=1}^{n} P(\xi_3 = j|\xi_2 = s, \xi_1 = k)P(\xi_2 = s) = \sum_{s=1}^{n} p_{sj} P(\xi_2 = s)$. □

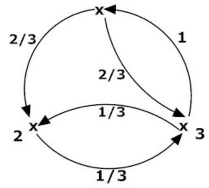
NOTĂ. Un lanţ Markov staţionar $(\xi_m), m \geq 0$ se numeşte ergodic dacă pentru orice vector u al probabilităţilor iniţiale şi pentru orice $i \in S$, există $p_i = \lim\limits_{m\to\infty} P(\xi_m = i)$ In acest caz, vectorul $f = (p_1, \ldots, p_n)$ se numeşte distribuţia staţionară de probabilitate a lanţului. Dacă există $k \geq 1$ astfel ca matricea P^k să aibă toate elementele nenule, se arată că lanţul este ergodic şi în plus $fP = f$.

5. Un comis voiajor serveşte 3 oraşe $1, 2, 3$. El nu vinde două zile la rând în acelaşi oraş . Dacă vinde în oraşul 1, atunci ziua următoare vinde în 2. Apoi, dacă vinde în 2 sau în 3, atunci ziua următoare el va vinde de două ori mai mult în 1 decât în celălalt oraş . După o lungă perioadă , ce procente de vânzări realizează în cele trei oraşe?

   Soluţie. Notăm ξ_m=starea la momentul m dintre oraşele (stările) $S = \{1, 2, 3\}$. Fie $p_{ij} = P(\xi_m = j|\xi_m = i)$, probabilitatea să vândă în oraşul j după ce în ziua anterioară a vândut în oraşul i; aceasta nu depinde de m. Atunci $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul uşor arată că matricea P^3 are toate elementele nenule deci lanţul Markov $(\xi_m), m \geq 0$ este ergodic. Rămâne să determinăm vectorul $f = (p_1, p_2, p_3)$ astfel încât $fP = f$ şi $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Rezultă $\frac{2}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_3 = p_1, p_1 + \frac{1}{3}p_3 = p_2, \frac{1}{3}p_2 = p_3, p_1 + p_2 + p_3 = 1$, de unde $p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{9}{20}, p_3 = \frac{3}{20}$. Aşadar, $\frac{2}{5} \cdot 100^0/_0 = 40^0/_0$ va vinde în oraşul 1, $\frac{9}{20} \cdot 100^0/_0 = 45^0/_0$ în oraşul 2 şi $15^0/_0$ în oraşul 3. $\square$

6. Fiecărui lanţ Markov i se poate asocia un graf orientat cu legături simple, unde vârfurile sunt stările şi arcele unesc stări, iar pe arce se dispun probabilităţile de tranziţie. Să se indice graful asociat lanţului Markov de la problema 5 anterioară . Regăsiţi faptul că lanţul este ergodic.

   Soluţie.



$p_{ij}^{(r)}$ este probabilitatea de a ajunge de la starea i la starea j după r paşi ($r \geq 1$). Se observă pe graf că $p_{ij}^{(3)} \neq 0$ pentru orice i, j, deci matricea P^3 are toate elementele nenule. □

7. Să se arate că orice matrice stocastică P are un vector propriu la stânga cu valoarea proprie 1, adică există un vector linie f nenul astfel încât $fP = P$.

Soluţie. Fie $P = (p_{ij}); 1 \leq i, j \leq n$. Dar fiecare linie este un vector de probabilitate, deci pentru orice $i, \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Considerăm vectorii coloană ai matricei $P - I_n$, adică $v_1 = \begin{pmatrix} p_{11} - 1 \\ p_{12} \\ \vdots \\ p_{1n} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} - 1 \\ \vdots \\ p_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} - 1 \end{pmatrix}$. Deoarece $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$, rezultă că vectorii $v_1, v_2, \ldots +, v_n$ sunt liniar independenţi, deci $\det(P - I_n) = 0$, deci $\lambda = 1$ este valoare proprie pentru P, deci sistemul liniar $f(P - I_n) = 0$, adică $fP = f$ admite soluţii nebanale $f \neq 0$, obţinând tocmai un vector propriu (la stânga) pentru matricea P. □

8. Pe un cerc se află n particule $1, 2, \ldots, n$ numerotate în sens trigonometric. Particulele sar în sens trigonometric câte un pas cu probabilitatea p şi în sensul invers cu probabilitatea $q = 1 - p$. Să se scrie matricea probabilităţilor de tranziţie. In cazul $n = 3$ şi apoi $n = 4$, să se determine vectorul probabilităţilor finale.

Soluţie. $P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ In cazul $n = 3$,

$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$ şi $f = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ etc. □

9. Doi băieţi B_1 şi B_2 şi două fete F_1, F_2 îşi aruncă o minge de la unul la altul. Fiecare din băieţi trimite mingea celuilalt băiat cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ şi oricăreia din fete, cu probabilitatea $\frac{1}{4}$. Fiecare fată trimite mingea oricăruia dintre băieţi cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ şi niciodată celeilalte fete. După foarte mult timp, cât de des vor primi mingea fiecare din cei 4 jucători?

Soluţie. Notăm $B_1 \equiv 1, B_2 \equiv 2, F_1 \equiv 3, F_2 \equiv 4$ şi atunci matricea probabilităţilor de tranziţie va fi $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Punând condiţia $fP = f$, rezultă $f_1 = f_2 = \frac{1}{3}, f_3 = f_4 = \frac{1}{6}$. Deci băieţii primesc mingea $\frac{1}{3}$ din timp, iar fetele doar $\frac{1}{6}$. $\square$

10. Considerăm un sistem digital de telecomunicaţii, care transmite biţii 0,1. Fiecare bit trece prin diverse blocuri de prelucrare $B_0, B_1, B_2, \ldots,$. Fie p probabilitatea de transmitere corectă a bitului şi $q = 1 - p$ probabilitatea de eroare $(0 < p < 1)$. Fie ξ_k=bitul care intră în blocul k. Se obţine un lanţ Markov $(\xi_k), k \geq 0$ care este staţionar, cu două stări $S = \{s_1, s_2\}$.

a) Să se scrie matricea P a probabilităţilor de tranziţie;

b) Să se determine P^n şi să se arate că lanţul este ergodic;

c) Să se determine $P(\xi_2 = 1|\xi_0 = 1)$ şi $P(\xi_7 = 0|\xi_3 = 1)$;

d) Se cere vectorul f al probabilităţilor finale (numit şi distribuţia staţionară).

Soluţie. a) $P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

b) $P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}, n \geq 1$, folosind diagonalizarea matricei P.

c) $P(\xi_2 = 1|\xi_0 = 1) = p_{22}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^2 = 2p^2 - 2p + 1$; apoi $P(\xi_7 = 0|\xi_3 = 1) = p_{10}^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^4$, folosind staţionaritate.

d) $f = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Se poate arăta că $\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}$, matricea care are pe fiecare linie tocmai f. $\square$