Introducción a la Lógica.

Carlos Muñoz Gutiérrez

1. Pensar y Razonar

Pensar es un complejo proceso que se inicia con la creación de imágenes mentales en nuestro cerebro. Estas imágenes las integramos, emparejamos, proyectamos o asociamos con nuestros conceptos o esquemas que tenemos memorizados, representándonos las situaciones del mundo y de nosotros mismos en un proceso simbólico que necesitamos estructurar en secuencias sintácticamente, esto es, lógicamente, organizadas. Tras ello podemos prever lo que sucederá, evaluar las consecuencias de nuestros actos, anticipar para evitar episodios desfavorables y promocionar los que más nos beneficien. Naturalmente este curso de pensamiento puede verse influido por nuestras emociones y por factores físicos o sociales que modulan, habitúan, prejuzgan nuestras maneras de representarnos las cosas del mundo.

Constantemente pensamos. Eso significa que construimos secuencias temporalizadas de imágenes o conceptos que representan simbólicamente cosas o eventos y que podemos poner en movimiento para producir -simbólicamente- lo que aún no ha acontecido. Ese poner en movimiento, que necesita naturalmente no sólo una memoria en funcionamiento, sino también una conciencia de lo que estamos pensando, es a lo que podemos denominar **razonamiento**. De esta manera, razonar consiste en producir juicios. Un juicio tiene la forma de una proposición, es decir, de una oración. Por ejemplo 'esta mesa es verde' es un juicio. En él están contenidos los conceptos: 'mesa', 'lo verde'; también hay imágenes que singularizan nuestros objetos o que emparejamos con los conceptos y hay una estructura lógica, sintáctica, que nos permite en una secuencia expresar un estado de cosas del mundo. Para incorporar esa estructura lógica nos servimos de elementos de enlace como el verbo 'ser' o de conjunciones o cuantificadores que nos indican el dominio del que hablamos, etc. Estos elementos tienen un origen en nuestros esquemas de imágenes que contienen una lógica implícita, pero los hemos exteriorizado en ciertos elementos del lenguaje para facilitar nuestro pensamiento. Esos elementos, que nos permiten razonar, también nos permite ir de lo dado a que todavía no sabemos o no ha ocurrido. Pues una vez creado un juicio podemos conectarlo con otro y producir una secuencia causal o deductiva[√] entre ellos. Por ejemplo:

Supongamos que hemos obtenido un juicio tal como:

(1) Todos los hombres son mortales

[√] **Deducción**: Fundamentalmente este tema trata de la deducción, por ahora, podemos decir que deducir es obtener consecuencias no conocidas a partir de algo general conocido. Lo inverso es la **Inducción,** que naturalmente consiste en obtener algo no conocido de tipo general a partir de la consideración de muchos casos singulares conocidos**.**

Y que posteriormente conocemos a Juan y construimos el siguiente juicio
(2) Juan es un hombre

¿Necesitamos esperar a la muerte de Juan para deducir
(3) Juan es mortal?

Razonando, es decir, encadenando juicios conocidos podemos llegar a obtener nuevos conocimientos, prever situaciones, tomar decisiones, etc. Pues bien, esa es la idea de Razón. Visto así, la Razón no es una facultad o una parte que podamos encontrar en el cerebro, no es nada sustantivo, como tampoco lo es la memoria o, en general, cualquier proceso cognitivo humano, mejor, es una característica que adopta el pensamiento cuando compone, relaciona y asocia juicios respetando las estructuras lógicas contenidas en los juicios mismos.

Pero con la idea de Razón va asociado además un componente adicional de suma importancia. Analicemos el siguiente texto:

> *La razón no es una facultad especial: es un proyecto de la inteligencia, decidida a saber si hay evidencias más fuertes que las privadas, a evaluarlas y a aceptarlas si llegara el caso. Por eso es más correcto usar el adjetivo «racional». Hay una* inteligencia racional, *que es un paso más en la larga historia que comenzó con una inteligencia computacional capaz de autodeterminarse.*
>
> *Pero ya he dicho que el conocimiento de la realidad es sólo una de las funciones de la inteligencia. También es tarea suya inventar nuevas posibilidades y también en esta tarea se deja seducir desde la lejanía por la idea de racionalidad. Recordará el lector que la inteligencia se definía por sus proyectos y que su proyecto de mayor envergadura era el de un sujeto inteligente o de una vida inteligente. Pues bien, ese proyecto se concreta en un sujeto universalizado por la razón dispuesto a plegarse ante el argumento más poderoso o ante el valor más alto que no sería sino la mejor posibilidad pensable.*
>
> José Antonio Marina. *Teoría de la Inteligencia Creadora.* Anagrama. Barcelona, 1993.

¿Qué quiere decir aquí J.A. Marina? J. A. Marina considera dos dimensiones en la inteligencia humana. Una sería semejante a la capacidad de computo de un ordenador. Efectivamente el ser humano puede procesar información, lo hace, por ejemplo, cuando percibe. El hombre transforma una señal luminosa en una percepción, después de un largo proceso (aunque muy breve en el tiempo) que realiza el cerebro y del que no somos conscientes. Pero además hay que admitir otro nivel de inteligencia que se le abre al ser humano con la conciencia. Y es la capacidad para crear planes y proyectos, la capacidad de prever el futuro y evaluar las consecuencias de sus actos; esto le va permitir autodeterminarse. Es decir, establecer lo que desea hacer y elaborar estrategias para llevarlo a cabo. Ahora bien esta capacidad creadora de inventar posibilidades mediante el razonamiento nos lleva directamente a desear la mejor de las alternativas posibles. La razón tiene que ver con esa idea de lo mejor: con el mejor argumento y con el máximo valor. Es efectivamente un proyecto, pero un proyecto de la humanidad, pues hace falta unanimidad para determinar qué es lo mejor de lo posible y esa unanimidad sólo se puede conseguir si la propia estructura lógica de la secuencia de razonamiento es evidente en sí misma, esto es, si nadie que analice el argumento puede negar su validez. Este proyecto, que ha seducido a la humanidad desde siempre, sólo se ha concretado con rotundidad en las ciencias formales, matemáticas y lógica; y aunque sería muy deseable concretarlo en otros campos, por ejemplo en la ética, la dificultad es mayor y todavía no se ha logrado por completo. *Posiblemente sea imposible*, pero sin duda a la humanidad le gustaría construir la mejor vida de las posibles y convencerse de ello. A eso, tanto en la práctica como en la teoría, Kant lo llamó *el Ideal de la Razón.*

Pues bien, en lo que sigue nos vamos a ocupar del razonamiento lógico, de cómo relacionar juicios de tal manera que si fueran verdaderos los juicios de los que partimos, no nos podríamos equivocar nunca en los nuevos juicios que obtuviéramos. Pues la propia estructura de los juicios y de la relación que establecemos entre ellos asegura la validez y la evidencia.

2.- El Razonamiento Lógico

El razonamiento lógico es entonces un conjunto de juicios que mantienen entre sí relaciones lógicas de tal forma que partiendo de algunos juicios dados a los que denominados *premisas* podemos llegar deductivamente a un juicio que no teníamos y que denominamos *conclusión*. La obtención de la conclusión, si procedemos lógicamente, asegura la validez de la misma por la propia estructura lógica de los juicios que componen las premisas. Por ejemplo, si partimos como premisas de los siguientes juicios:

Si llueve *entonces* me mojo
y llueve

¿Qué podemos concluir?

Evidentemente, que me mojo.

Esto es una **inferencia** o razonamiento deductivo, en el cual si las premisas fueran verdaderas, la conclusión también lo sería. La ciencia que estudia qué tipos de esquemas de inferencia aseguran la validez de las conclusiones es la **Lógica**

3.- La Lógica Formal

La lógica podemos definirla como *la ciencia de los principios de la validez formal de la inferencia*. Analicemos esta definición. Ya sabemos lo que es una inferencia o razonamiento deductivo, no debemos confundir ahora el proceso psicológico con el resultado de este proceso. Ahora sólo nos interesa el resultado, independientemente de quién lo piense o de cómo se haya producido. La lógica solamente se ocupa de razonamientos como productos o resultados.

¿Qué significa eso de la validez formal? En parte ya ha sido explicado anteriormente, usemos ahora algunos ejemplos:

(1)
Si llueve entonces se me seca la ropa y llueve.
Luego, se me seca la ropa
(2)
Si llueve entonces me mojo
y me mojo.
Luego, llueve.

El razonamiento (1) parece falso, pues no ocurre en la experiencia que cuando llueva se seque la ropa, por el contrario (2) parece verdadero, pues efectivamente si me mojo puede ser porque llueva. Sin embargo este análisis responde a lo que denominamos *Verdad material***.** La verdad material es un asunto de experiencia, podría ser que efectivamente cuando llueva se nos seque la ropa, pero en este mundo ocurre lo contrario. La verdad material es un asunto que investiga las ciencias empíricas o experimentales que necesitan acudir a la experiencia para determinar la verdad de sus teorías. La Lógica no se ocupa de este tipo de verdad, sino de *la validez o verdad formal*. En ese sentido prescinde de los contenidos de los juicios para ocuparse de la mera forma lógica. Eliminemos mediante un *proceso de formalización* el contenido de (1) y de (2). Este proceso de formalización va a consistir en asignar a cada proposición u oración una letra minúscula a partir de la letra p, por convención. De esta manera, vamos a tratar con *variables proposicionales***.** Una variable proposicional, como la *'x'* o la *'y'* de las ecuaciones matemáticas, es algo que puede estar por cualquier oración, con cualquier contenido. La noción de variable es precisamente algo que admite *instancias de sustitución* dentro de un dominio especificado. En este caso, si vamos a tratar con variables proposicionales, será porque el dominio de sustitución será el conjunto de las oraciones. Procedamos entonces a formalizar nuestras inferencias:

(1)
sea p: *llueve*
sea q: *se me seca la ropa*
y simbolicemos la relación condicional *si...entonces* mediante el signo $\rightarrow$, que usaremos de forma infija

Entonces:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

(2)
sea p: *llueve*
sea q: *me mojo*
Entonces la formalización quedaría

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Visto así la lógica nos dirá que (1) es un esquema de inferencia válido, mientras (2) no lo es. Es decir, que todo razonamiento que tenga la estructura lógica de (1) asegura la validez de las conclusiones obtenidas, o como lo expresábamos anteriormente, si las premisas fueran verdaderas, la conclusión también sería verdadera. A esto es a lo denominamos validez formal de las inferencias.

3.1. División de la Lógica

La lógica se estructura en cálculos. Un cálculo -luego lo veremos con más detalle- es una mera estructura sintáctica. Un primer criterio de clasificación de la lógica viene determinado en función de cómo sean estos cálculos. La lógica formal moderna puede caracterizarse como una especie de cebolla, en donde sobre un cálculo base se monta otro que contiene más recursos expresivos y que necesita de nuevos elementos, sobre esta segunda capa se puede montar otras nuevas según sigamos ampliando recursos o quitando restricciones del uso de estos recursos. Teniendo esto presente la Lógica se estructura de la siguiente manera:

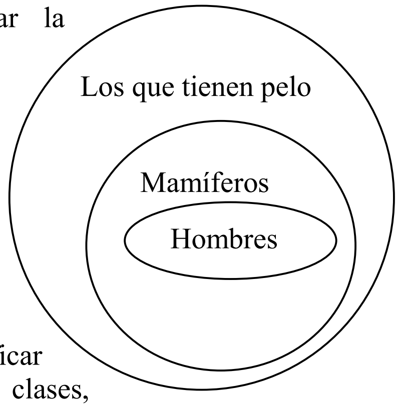
(1) **Lógica de Proposiciones o de Enunciados**: el cálculo básico de la lógica formal es el cálculo de enunciados o proposicional, cuyas fórmulas son proposiciones, oraciones o enunciados sin analizar internamente. La relación lógica a estudiar es la que se establece entre oraciones que constituyen la unidad mínima de significación lógica. Este cálculo es un cálculo hipotético, porque la deducción se establece en una relación condicional entre las premisas y la conclusión (si *ocurren las premisas*, entonces *ocurre la conclusión*)

(2) **Lógica de Predicados o Cuantificacional**: Sobre este cálculo básico se desarrolla el siguiente nivel que serán los cálculos de predicados o cuantificacionales, que se caracterizan por analizar las oraciones en sus componentes, sujeto y predicado, y porque se puede cuantificar sobre individuos, es decir podemos tratar con todos o con algunos de los elementos que pueden ser sujetos de una oración. Es fundamentalmente una lógica de clases donde la relación lógica que se estudia es la pertenencia a un conjunto o la posesión de propiedades por los distintos individuos de los que se habla. De esta manera, a diferencia de la lógica de proposiciones, la lógica de predicados es una lógica categorial, porque

la deducción se efectúa según se puedan establecer o no relaciones de pertenencia o de posesión de propiedades de los individuos con las categorías en lo que se agrupan. Pongamos un ejemplo, si

Todos los hombres son mamíferos, y
Los mamíferos tienen pelo,
entonces ¿Tendrán los hombres pelo?

Con un simple dibujo podemos dar la solución:



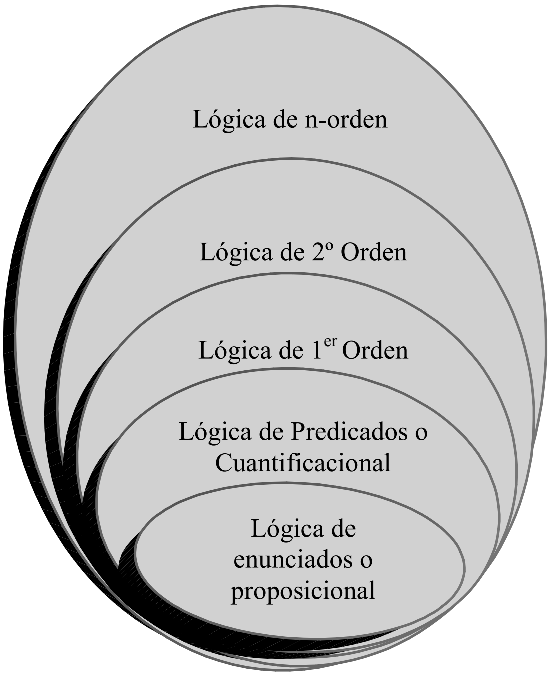
Cuando comprendemos que la clase de los hombres está incluida en la de los mamíferos y ésta en las cosas con pelo es fácil aceptar que los hombres tienen pelo. Si aceptamos que las propiedades de una clase general se heredan en las subclases que forman parte de ella.

Cuando decíamos que se puede cuantificar sobre los individuos que forman parte de las clases, nos referimos a que esta lógica tiene recursos para hablar de *Todos* o de *Algunos* de los individuos que están dentro de un conjunto. 'Todos' y 'Algunos' son *cuantificadores* y por este motivo hablamos también de Lógica Cuantificacional

(3) **Lógica de Primer Orden**: A la unión del cálculo proposicional y del cálculo de predicados es a lo que llamamos lógica de 1^er^ orden. Este cálculo tienen la restricción de que sólo podemos utilizar los cuantificadores con elementos individuales. Es decir, no podemos hablar de todas o de algunas de las clases de algún tipo

(4) **Lógica de 2º (3º,4º...n) Orden**: Sobre la lógica de primer orden, según admitamos cuantificar sobre propiedades o predicados, o predicados de predicados, iremos subiendo de orden. Por ejemplo, si permitimos utilizar oraciones como *"Hay un rasgo que todos los problemas filosóficos tienen en común"*, entonces, porque estamos cuantificando sobre una propiedad, estaríamos en una lógica de 2º orden y así sucesivamente.

Resumamos gráficamente esta estructura de cálculos anidados con la que se organiza la lógica. Esto debe interpretarse de una forma *monótona ascendente*, es decir, que todo lo que vale en un nivel inferior vale para el nivel superior aunque no al revés:



Todo sistema lógico tendrá esta estructura de cebolla que hemos visto, pero, desde el punto de vista semántico, podemos establecer otro criterio de clasificación dentro de los sistemas lógicos.

Un segundo criterio de clasificación será el número de valores de verdad que se acepten en los cálculos:

Hablamos de **Lógica clásica** cuando los cálculos lógicos son *bivalentes*, es decir, que sus fórmulas pueden ser verdaderas o falsas y no puede ocurrir que lo sean a la vez. Si en los cálculos lógicos se contemplan más valores de verdad que lo verdadero y lo falso u otros recursos expresivos entonces hablamos de **Lógica no-clásica.**

Respecto a las lógicas no clásicas podemos decir, introductoriamente, que surgen por la limitación expresiva de la lógica de 1er orden. Esto es, el cálculo de 1er orden es un cálculo construido con muchas restricciones para poder satisfacer ciertas propiedades metalógicas, que veremos más tarde, y en consecuencia su capacidad expresiva también resulta muy limitada. Se han desarrollados estos otros cálculos lógicos como herramientas de análisis de ámbitos temporales, modales, probabilísticos o inciertos. Por ejemplo:

- **La Lógica trivalente** contempla tres valores de verdad, lo verdadero, lo falso y lo que no es verdadero ni falso, por desconocido o incierto.
- **Las lógicas polivalentes** son fundamentalmente lógicas probabilísticas en las que los valores de verdad se corresponden con el intervalo [0,1].

- **La lógica modal** incorpora como operadores los modificadores lo necesario y lo posible.
- **La Lógica temporal** incorpora parámetros temporales. Para muchas oraciones su verdad depende del momento en que se produce.
- **La lógica epistémica** es una lógica intensional que pretende formalizar enunciados de creencia, opinión, etc.
- **La lógica nomonotónica** pretende formalizar situaciones reales en las que decidimos sin una total información y que posteriormente admite, conforme se prueben o refuten creencias, revisar el sistema total de creencia.

Existen muchas otras lógicas que pretenden estudiar los razonamientos en todos los ámbitos de la vida humana, pero en este curso fundamentalmente vamos a ocuparnos de la lógica de proposiciones.

Lógica
- **Lógica Clásica**
  - Verdad
  - Falsedad
- **Lógica no-Clásica**
  - No Bivalentes
    - Lógica Trivalente
    - Lógicas Polivalentes
    - Lógicas Probabilísticas
    - Lógicas Difusas
  - Más Recursos Expresivos
    - Lógica Modal
    - Lógica Temporal
    - Lógica Epistémica
    - Lógica Deóntica
    - Lógica Nomonotónica

3.2. La Noción de Cálculo

Si, como hemos definido, la Lógica intenta establecer un catálogo de estructuras o esquemas de razonamiento que no nos lleven a error a la hora de obtener una conclusión a partir de una premisas, cabe preguntarse cómo se puede hacer esto. Una forma podría ser hacer una lista de razonamientos y ver si son formalmente válidos. Esta estrategia sería mala, ya que no sería ni completa, ni económica. Ante cualquier nuevo razonamiento no contemplado tendríamos que comprobar su validez, pero sobre todo siempre quedará el desconocimiento de otros muchos razonamientos que pueden ser válidos y que todavía no están en la lista, resultando así una tarea así infinita. La estrategia de la lógica como ciencia es la inversa. Lo que la lógica diseña es un método general de prueba de razonamientos, un mecanismo efectivo que responde sí o no ante la pregunta ¿es este razonamiento válido? Esta manera de proceder recibe el nombre de *Cálculo*. Observemos que en este sentido es semejante a la noción matemática de cálculo. Para saber el valor de la suma de dos números, podemos sumar todos los número entre sí, pero esta tarea es imposible porque el sistema numérico es infinito. De la misma manera, lo que hacen los matemáticos es proporcionarnos un cálculo que podemos usar cuando queremos sumar dos números. Si se quiere, una calculadora es un artefacto que realiza cálculos. ¿Qué debe entonces contener un artefacto para realizar cálculos? Analicemos ahora la noción de cálculo.

Un cálculo es una mera estructura sintáctica, un sistema de relaciones. No constituye un lenguaje hasta que no aportamos una interpretación semántica de sus elementos. Un cálculo es como la estructura de un juego y la interpretación de esa estructura es lo que hace que sea el ajedrez o el parchís, o una calculadora. Visto así preguntémonos de qué se compone todo juego, todo cálculo.

(1) Lo primero que encontramos en el juego son sus piezas, sus elementos básicos. A esto lo denominaremos **vocabulario básico** o **elementos primitivos**. En un cálculo lógico necesitamos una *definición exhaustiva* que determine todos y cuáles son los elementos primitivos. Del mismo modo que en el ajedrez sabemos cuáles piezas son del ajedrez y cuáles no.

(2) Una vez que sabemos que elementos componen el juego, necesitamos unas reglas que nos permitan ordenarlas y disponerlas para empezar a jugar. Así, en el ajedrez la reina va en su color o las torres en las esquinas del tablero. A este elemento del cálculo lo denominamos **Reglas de Formación.** Estas reglas establecen cuáles son las combinaciones correctas posibles de los elementos primitivos. El conjunto de reglas de formación ha de proporcionar una definición de **fórmula bien formada** (fbf), de manera que ante cualquier combinación de elementos se pueda determinar si la expresión resultante es o no un fbf.

(3) Finalmente necesitamos unas reglas que definan cómo transformar una posición inicial para desarrollar el juego. En el ajedrez, por ejemplo, disponemos de unas reglas de movimiento de las piezas que nos permite transformar la disposición inicial en otra, es decir, jugar. A estas reglas las denominaremos **Reglas de Transformación** y tienen que definir cómo podemos pasar de fbfs a otras que estén igualmente bien formadas. Estas reglas deben tener un carácter efectivo o algoritmico[√], de manera que sea posible decidir si una transformación de unas fórmulas en otras se ha realizado correctamente.

En consecuencia, tal y como se diseñan los cálculos no es posible equivocarse, es decir, su estructura inferencial asegura siempre la validez formal. A la hora de construir un cálculo debemos de cuidar que, en todo momento, todo paso

[√] **Algoritmo**: Un algoritmo en un procedimiento mecánico y efectivo que asegura en una secuencia de pasos finitos llegar a un estado final del proceso. Las operaciones matemáticas son algoritmos. Sumar dos número es un proceso que, aplicadas las reglas de la suma adecuadamente, finaliza inevitablemente con un resultado. También el programa de una lavadora es un algoritmo.

que se dé, mantenga la validez del cálculo. Esto se consigue, aceptando sólo como elementos del cálculo, fórmulas bien construidas y reglas de inferencia que sean lógicamente válidas, así cada nuevo paso deductivo tendrá que ser inevitablemente también válido, bien porque sea una premisa, o un supuesto hipotético o el resultado de la aplicación de una regla. Afrontemos ahora entonces el juego de la lógica. Un juego que consiste en ver si podemos llegar a una fórmula a partir de un conjunto de fórmulas dadas aplicando reglas de transformación.

4. La Lógica Proposicional o de Enunciados

Como hemos visto ya, el cálculo de proposiciones o de enunciados toma como elementos primitivos o vocabulario básico, por un lado *variables proposicionales* que usaremos para referirnos a oraciones sin analizar tomadas como oraciones completas y los símbolos lógicos que formalizaran a los elementos que indican la estructura y relaciones lógicas que se establece entre las proposiciones, en el lenguaje natural esto lo suele cumplir las conjunciones.

4.1. Variables y valores de verdad

El contenido de una proposición lo representamos mediante una variable. Para lo cual emplearemos letras consonantes minúsculas a partir de p,q,r,s,... Si fuera necesario pondremos subíndices p_1, p_2, p_3....p_n.

Las proposiciones que interesan a la lógica son siempre proposiciones enunciativas o aseverativas, y como es una lógica bivalente, sus proposiciones serán siempre y sólo verdaderas o falsas. Por tanto, una proposición formalizada por la variable p podrá tener el valor verdadero o falso. Simbolizaremos estos valores con (1,0). 1 para lo verdadero y 0 para lo falso. Si lo expresamos en forma de tabla, obtendremos lo siguiente:

p
1
0

Para dos variables las posibles combinaciones de sus valores de verdad que se pueden dar entre ellas serían:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

En general dado un número n de proposiciones, el número de combinaciones posibles de sus valores de verdad sería $\mathbf{2^n}$. Así para n=3, sus combinaciones serán 8, para n=4, 16. Por ejemplo:

p	**q**	**r**
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Ejercicio 1

Desarrolla la tabla para *4 proposiciones* de las posibles combinaciones de valores de verdad.√

4.2. Conectivas y sus interpretaciones semánticas

El resto de nuestros elementos primitivos del cálculo o vocabulario básico son *las conectivas u operadores*, que son las encargadas de establecer las conexiones lógicas entre las oraciones, de igual manera que en el lenguaje natural hacen las conjunciones.

√ Una estrategia para no perderse a la hora de desplegar la tabla de las posibles combinaciones de valores de verdad, sería asignar a la primera variable la mitad de todos los valores como verdaderos y la otra mitad como falsos, para la segunda la mitad de la mitad de todos los valores como verdaderos y la otra mitad como falsos y del mismo modo para la otra mitad. Y así sucesivamente, de suerte que la última variable recibiría alternativamente valores verdaderos y falsos.

Las conectivas se comportan como funciones u operadores. ¿Qué es una función? Pensemos, por ejemplo, en la suma. La suma es una función que toma dos argumentos y arroja un valor, habitualmente expresamos esto de la siguiente manera 2 + 2 = 4 o 3 + 2 = 5. Si lo expresáramos como en las matemáticas se expresan las funciones quedarían estas operaciones de la siguiente manera:

+(2,2) = 4; o +(3,2) = 5.

La función 'más' toma dos argumentos (2,2) y arroja un valor (4).

La idea de función la podemos comprender también si miramos una máquina expendedora de bebidas, por ejemplo. Una máquina de este tipo se puede describir como una función que toma como argumentos una determinada cantidad de dinero y la selección de un producto y arroja como valor la lata o la botella de la bebida solicitada

Las conectivas lógicas se comportan de igual manera sólo que sus argumentos van a ser proposiciones y su valor un valor de verdad. Más concretamente veremos que podemos considerar a las conectivas lógicas como *funciones veritativas*. Una función veritativa es una función cuyos argumentos son valores de verdad y su resultado es igualmente un valor de verdad. ¿Cómo podemos entender esto?

Una proposición expresa un hecho y decimos de ella que es verdadera, si el hecho ocurre; si no ocurre decimos que es falsa. Como la lógica formal es extensional[√], no entra a analizar el significado de las proposiciones, sino que solamente atiende a los estados del mundo a los que se refieren las oraciones. Visto de este modo cualquier oración se refiere a lo verdadero o a lo falso. Pues toda oración aseverativa, que nos hable del mundo, expresa si un hecho ocurre o si no ocurre en el mundo. La referencia de una oración es uno de los dos posibles valores de verdad que admite la lógica clásica.

Así pues, dado que la verdad de una oración compuesta depende del valor de verdad de las oraciones simples que se conectan para formarla (*principio de composicionalidad*), los elementos que permiten componer oraciones atómicas[√] en oraciones moleculares son funciones veritativas.

Veamos un ejemplo: Una oración como 'llueve y me mojo' expresa la ocurrencia de dos acontecimientos a la vez, si es verdadera, en otro caso decimos de esa oración que es falsa. Así, la conjunción 'y' es una función que produce el resultado de lo verdadero, si los argumentos, es decir, las oraciones que une, son

---

[√] **Extensión e Intensión** son dos términos técnicos que sustituyen las ideas de referencia y significado. En el tema sigiente se explica con más detalle. La extensión o referencia del nombre 'mesa' es el conjunto de objetos del mundo que son mesas. Mientras que la intensión o significado es, por ejemplo, la de un mueble consistente en un tablero con patas que puede soportar peso en su superficie. En lógica sólo atendemos a la relación entre los signos y sus extensiones.

[√] **Proposición atómica**: Al igual que en el lenguaje el significado de una oración depende del significado de las palabras que la componen. Cuando componemos fórmulas moleculares o compuestas en lógica el valor de verdad depende de las proposiciones atómicas o simples que la componen.

las dos verdaderas. Sobre esta idea para el caso más simple: las conectivas monádicas[√] , las funciones que toman un único argumento de entre los dos que maneja la lógica, {1,0} tendríamos cuatro posibles conectivas monádicas:

p	c1	c2	c3	c4
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Reflexionemos sobre esta tabla. Si, como hemos dicho, una oración, p, puede ser verdadera o falsa, tendríamos cuatro operaciones monádicas que tomándola como argumento ofrecieran distintos valores. *c1* arroja como valor el mismo valor del argumento, c2 cambia el valor del argumento, c3 opera dejando el caso verdadero como está y cambiando el valor de lo falso y c4 a la inversa que c3. A la lógica, y al lenguaje en general, le interesa especialmente la función *c2* ¿Qué conectiva podría ser *c2*?

Efectivamente si operamos sobre una oración de tal manera que alteramos su posible valor inicial lo que estamos haciendo es negarla.

Si, por ejemplo, '*llueve*' es verdad, '*no llueve*' *será falso* y si es falso que '*llueve*', será verdadero que '*no llueve*'. Podemos, entonces, considerar a la Negación como una función veritativa que arroja como valor lo contrario del valor de su argumento.

Ejercicio 2

¿Cuantas conectivas de dos argumentos (diádicas) pueden darse si los argumentos de entrada pueden ser lo verdadero y lo falso? Desarrollar la tabla de todas las posibles funciones veritativas de dos argumentos (diádicas).

[√] Por **monádico** entendemos que sólo tiene un argumento, por ejemplo, un operador monádico en matemáticas es el factorial de un número. Decimos que un operador es **diádico** si requiere de dos argumentos, la suma o la resta son operadores diádicos. En general hablamos de operadores poliádicos si requieren de más de dos argumentos.

De entre todas las conectivas lógicamente posibles, en nuestro cálculo vamos a usar cinco. Una monádica, esto es, que toma un único argumento y el resto diádicas, es decir, que toman dos argumentos.

La negación: ¬

La negación es una conectiva monádica, toma como argumento una proposición y arroja como valor lo contrario de la proposición. La expresaremos mediante el signo **¬,** y la usaremos prefija a la variable proposicional a la que se aplica, **¬p**. Evidentemente simboliza al 'no' o a cualquier forma de negación del lenguaje natural. Opera invirtiendo el valor del argumento. Si p es verdadera, entonces ¬p es falsa y al revés. En forma de tabla:

p	¬p
1	0
0	1

La Conjunción: ∧

Sean p y q dos proposiciones cualesquiera podemos unirlas conjuntivamente mediante 'y' o cualquier otra forma de unión conjuntiva del lenguaje natural, en la notación lógica usaremos el siguiente signo ∧ y la colocaremos de forma infija entre las dos variables proposicionales que conecta, **p ∧q.**

La conjunción de dos proposiciones atómicas es verdadera cuando lo son a su vez las dos proposiciones componentes. Por ejemplo decíamos que: 'llueve y me mojo' es verdadera cuando ocurre que 'llueve' y ocurre que 'me mojo'. La interpretación semántica de la conjunción es entonces:

p	q	p ∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La Disyunción: ∨

Sean dos proposiciones cualesquiera, p, q. Podemos unirlas mediante la disyunción 'o' y la simbolizaremos mediante el símbolo ∨, que colocaremos de manera infija entre las dos variables proposicionales que conecta, **p∨q.**

La disyunción puede interpretarse de dos maneras distintas:

- Disyunción exclusiva: si se da una de las alternativas no se da la otra.
- Disyunción inclusiva: se puede dar una u otra de las alternativas o las dos a la vez.

Desde el punto de vista lógico es mayor la importancia de la disyunción inclusiva, es decir, *o p o q o ambas a la vez*. Será ésta, la interpretación que usemos. En forma de tabla:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El Condicional: $\rightarrow$

El condicional *'si...entonces'* es también una partícula para formar fórmulas de suma importancia en lógica pues formaliza la estructura deductiva entre dos premisas. Podemos entonces relacionar p y q condicionalmente, *si p entonces q*, y lo simbolizaremos mediante el símbolo $\rightarrow$, que expresaremos en lógica de la siguiente manera: $\mathbf{p \rightarrow q}$. Aquí hay que tener en cuenta el orden de colocación de las variables. En castellano, no tenemos problemas si alteramos el orden de aparición en la secuencia del antecedente y del consecuente de un condicional. Podremos decir, y es igualmente correcto, 'si llueve, me mojo' y 'me mojo, si llueve'. En la formalización lógica ambas oraciones deben simbolizarse como $p \rightarrow q$, pues lo inverso, $q \rightarrow p$, produce otra proposición completamente distinta.

Un condicional tal como *'si llueve entonces me mojo'* es verdadero cuando:

- Su antecedente y su consecuente son verdaderos: Ocurre que llueve y ocurre que me mojo.
- Su antecedente es falso, pero su consecuente es verdadero: No ocurre que llueve, pero me mojo. En este caso es verdadero porque lo que afirma un condicional, su consecuente, ocurre. Dicho de otra manera, si yo sé que existe una relación entre el hecho de llover y el hecho de mojarme, el mojarme aunque no llueva no niega la relación anterior. Todavía sería verdad que *'si lloviera, me mojaría'*
- Su antecedente y consecuente son falsos: La relación condicional 'si llueve, me mojo' no deja de ser verdadera cuando no llueve y, en consecuencia, no me mojo. Naturalmente cabe seguir aceptando que *'si lloviera me mojaría'*. El planteamiento es semejante al caso anterior.
- Solamente el condicional es falso cuando su consecuente es falso y su antecedente es verdadero. Pues si llueve debería mojarme tal y como se enuncia.

En forma de tabla quedaría de la siguiente manera:

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El Bicondicional: ↔

El Condicional expresa la condición suficiente, pero no la necesaria. De ahí la tabla de verdad del condicional. Por ejemplo, es suficiente para mojarme que llueva, pero me puedo mojar por otros motivos. Para expresar la condición suficiente y necesaria utilizamos el bicondicional, *si y sólo si*, que simbolizaremos mediante ↔, y que simbolizaremos como **p ↔ q**. En realidad un bicondicional es la conjunción del condicional con su inverso:

p	q	p → q	q → p	(p→q) ∧ (q→p)	p ↔q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

En realidad, como podemos apreciar en la tabla, esta conectiva se puede definir en función del condicional y no tendríamos que incluirla en nuestro vocabulario básico. Sin embargo, dado que el bicondicional expresa la relación de equivalencia y dado que este relación se usa mucho en lógica, para abreviar los cálculos y para establecer definiciones fácilmente es tradicional incluirla dentro de las conectivas básicas

Analizando su tabla de verdad, diremos que un bicondicional es verdadero cuando sus proposiciones atómicas coinciden en su valor de verdad. Ahora no sólo me tengo que mojar sino que tengo que hacerlo porque llueva o bien si no ocurre que me mojo será porque no llueve. Dicho de otra manera, sólo me mojo si llueve y sólo es el caso que esté lloviendo si me mojo.

4.2.1. Reducción de Conectivas

Podemos probar para nuestro cálculo que nos basta exclusivamente con dos conectivas, pudiendo definir las restantes en función de las dos elegidas. Es decir, que toda la expresividad de nuestro cálculo se puede lograr usando sólo dos conectivas, definiendo el resto en función de las dos elegidas. De las cuatro conectivas que acabamos de definir -si tenemos en cuenta que el bicondicional es la conjunción del condicional en una dirección con el mismo condicional en la otra- podremos elegir entre los siguientes conjuntos de conectivas $\{\neg, \wedge\}$; $\{\neg,\vee\}$; $\{\neg,\rightarrow\}$. Es decir: la negación con la conjunción o con la disyunción o con el condicional. Según el conjunto de conectivas elegidas las definiciones del resto quedarían de la siguiente manera:

	Negación y Conjunción	**Negación y Disyunción**	**Negación y Condicional**
Conjunción	-	$\neg(\neg X \vee \neg Y)$	$\neg(X \rightarrow \neg Y)$
Disyunción	$\neg(\neg X \wedge \neg Y)$	-	$\neg X \rightarrow Y$
Condicional	$\neg(X \wedge \neg Y)$	$\neg X \vee Y$	-

4.3. Las Reglas de Formación

Una vez que conocemos nuestro vocabulario básico: variables proposicionales y conectivas; el siguiente elemento que tenemos que definir son las reglas de formación que nos permitirán determinar si una fórmula cualquiera pertenece o no a nuestro cálculo, es decir, si es una fórmula bien formada (fbf).

Definimos la noción de *fórmula bien formada* recursivamente[√]:

RF1. Una variable proposicional sola es una fbf del cálculo.
RF2. Si X es una fbf, entonces $\neg X$ también lo es.
RF3. Si X e Y son fbfs, entonces $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$ son también fbfs.
RF4. Estas son todas las reglas de formación del cálculo.

[√] **Recursivo:** Un proceso o una definición recursiva es algo que se resuelve en función de interpretaciones o procesos más simples del mismo proceso. Pongamos un ejemplo: supongamos una telefonista en una centralita que atiende una llamada A, en ese momento recibe una nueva llamada B, deja en espera a A y atiende B, en ese momento entra una nueva llamada C, deja en espera B y atiende a C. Al terminar con C, retoma la llamada B, si no hay otra llamada D, podrá terminar con B y regresar a A, si no ha colgado aburrido de esperar, termina con A y la telefonista se podrá tomar un descanso. Si analizamos, atender una centralita consiste en responder llamadas telefónicas. Lo que hace la telefonista es responder llamadas, pero lo agiliza bajando niveles que después vuelve a subir. Eso es un proceso recursivo. En este caso una definición es recursiva cuando para ir definiendo elementos se apoya en elementos ya definidos.

Pensemos en otro ejemplo procedente de las matemáticas. ¿Cómo podríamos definir un proceso recursivo general que resolviera el factorial de un número? El factorial de un número es el número multiplicado por su números precedentes.

Así el para el número 5, 5! = 5*4*3*2*1.

La definición de un proceso general recursivo podría ser:

Factorial X
1 = Factorial 1
F! = X * Factorial X -1

Observemos:

1. Que nuestra definición está formulada en un metalenguaje[√].
2. La recursividad de la definición. RF2 y RF3 se apoyan para su definición en RF1 que también forma parte de la definición, pero en un orden de complejidad menor, esta es la razón por la que una definición o proceso recursivo no entre en un bucle sin salida.
3. RF4 da exhaustividad a la definición. De tal forma que ahora ante una fórmula podremos determinar siempre si está bien formada o no.
4. Como vemos el operador monádico de la negación lo colocaremos de manera prefija, mientras que los operadores diádicos los pondremos de forma infija entre las proposiciones que conectan.

Ejercicio 3

Formaliza en el lenguaje del cálculo de enunciados las siguientes oraciones del lenguaje natural:

1. Llueve.
2. Llueve detrás de las ventanas de mi casa.
3. Llueve torrencialmente en toda España.
4. No llovió ayer
5. Los meteorólogos no se equivocan nunca.
6. Si llueve o nieva, entonces no es cierto que los meteorólogos no se equivocan nunca y que la televisión da buenos pronósticos del tiempo.
7. Llueve y me mojo
8. Los meteorólogos no se equivocan nunca y hoy llueve en Andalucía.
9. No es cierto que llueva y me moje
10. Llueve o nieva y a nadie le importa.
11. Si llueve entonces habrá buena cosecha.
12. Veo la lluvia caer

[√] **Lenguaje y Metalenguaje:** Advierte que en la definición de las reglas de formación hemos usado letras mayúsculas a partir de X. ¿A qué se debe este cambio? En lógica no puede haber ambigüedades y a menudo para hablar de la notación que usamos en el cálculo necesitamos otra notación de nivel superior, para evitar equívocos. A esa notación superior que habla de la del cálculo que estamos usando lo denominamos Metalenguaje y lenguaje-objeto a la que es referida por el metalenguaje. En concreto aquí X e Y son metavariables, es decir variables que pueden sustituirse por cualquier fórmula del cálculo del que hablamos, en este caso del cálculo proposicional. Así por ejemplo, X puede ser p, ó $\neg q$ ó $p \wedge q$ ó $(p \vee \neg q) \rightarrow r$, etc.

Esta distinción es fundamental a la hora de analizar las propiedades de los cálculos lógicos. Tarea de la que se encarga la Metalógica

13. Llueve, nieva y graniza.
14. Habrá buena cosecha si nieva.
15. Si no es cierto que llueva y me moje, entonces los meteorólogos no se equivocan nunca.
16. Si aprendes bien la lógica seré feliz.
17. Si no es cierto que apruebe el curso y saque un sobresaliente en lógica, entonces esto no tiene sentido.
18. Si y solo si llueve, entonces iremos al cine o a bailar
19. Seré feliz si aprendes bien la lógica
20. Llueve, nieva o graniza
21. No llueve, pero nieva.
22. Si no llueve y no nieva entonces o hace sol o hay niebla.
23. No es cierto que si llueve y me mojo, entonces me resfriaré.
24. Normalmente las proposiciones unidas con comas son copulativas.
25. No llueve o me mojo.
26. Si nieva y hace sol, podremos esquiar magníficamente.
27. Juan y Pedro esquían cuando nieva.
28. Juan esquía si y sólo si hay nieve.
29. Si Pedro va al cine o Juan al teatro, entonces llamaremos a un taxi.
30. Esto es todo por ahora.

4.4. Reglas de transformación.

Hasta ahora hemos visto los elementos que constituyen el lenguaje de la lógica, pero todavía no sabemos qué podemos hacer con ellos. Si la lógica estudia los principios de la inferencia válida, entonces un cálculo lógico nos podrá decir qué esquemas de inferencia son válidos y cuáles no. Entremos ahora en la parte fundamental del cálculo, aquella que constituye un método para decidir que inferencias son válidas y cuales no los son.

En general hay dos maneras de constituir los cálculos. Bien como un sistema de leyes o bien como un sistema de reglas. Éste exige un razonamiento por objetivos, pues se nos propone un razonamiento y mediante la aplicación de reglas hay que determinar si ese razonamiento propuesto es válido o no lo es. Este tipo de sistemas parecen convenir mejor al modo en que razonamos normalmente, por eso se denominan **sistemas de deducción natural**. En ellos se parte normalmente de enunciados cuyo valor de verdad está indeterminado y el objetivo es determinar su validez o no. Aquél, al contrario consiste en encontrar todas las leyes lógicas que pueden derivarse de un conjunto reducido de leyes, a los que denominamos axiomas, y que aceptamos como verdaderos sin prueba por su autoevidencia. Estos tipos de sistemas se denominan **sistemas axiomáticos** y en ellos todo lo que se deriva es válido, porque el sistema asegura la validez de la deducción.

Profundizaremos en la lógica de enunciados como sistema de deducción natural y posteriormente introduciremos un sistema axiomático.

4.4.1. El cálculo de enunciados como sistema de deducción natural.

Como sistema de deducción natural, el juego de la lógica, o la puesta en funcionamiento del cálculo, consiste en ver si la conclusión de un razonamiento se deriva de las premisas mediante transformaciones de éstas según las reglas de transformación del cálculo. A este proceso le vamos a denominar *derivación*. Una derivación es una secuencia de transformaciones desde las premisas de las que partimos a la conclusión que queremos obtener. Las transformaciones posibles que se pueden realizar vienen delimitadas por el conjunto de reglas de transformación del cálculo. Diremos que un argumento es lógicamente válido si existe una derivación de la conclusión a partir de las premisas, empleando las reglas del cálculo, en otro caso diremos que el argumento es lógicamente incorrecto. ¿Cuáles son las reglas de transformación de nuestro cálculo proposicional?

Si lo que tenemos que hacer es transformar fórmulas, estas transformaciones, teniendo en cuenta el vocabulario del que disponemos, consistirán en producir fórmulas más complejas a partir de tras más simples introduciendo nuevas conectivas entre ellas, o simplificarlas eliminando las conectivas que estén presentes en las fórmulas dadas. Lógicamente entonces, para cada conectiva del cálculo existirán dos reglas una de introducción de la conectiva y otra de eliminación de la misma.

Las reglas expresan las condiciones que tienen que ocurrir para pasar de unas fórmulas a otras. Estas condiciones quedan por encima de la raya que simboliza la transformación, la nueva fórmula se coloca por debajo de la raya. Es decir, una regla de transformación se puede leer de la siguiente manera: "si en el curso de una derivación, me encuentro con u obtengo las fórmulas que aparecen por encima de la raya, entonces en el siguiente paso de la derivación puedo escribir la fórmula que aparece debajo de la raya". Las reglas básicas son las siguientes:

<u>Reglas de la Negación</u>

IN: Introducción de la Negación

$$\begin{array}{|l}
\mathbf{X} \\
. \\
. \\
. \\
\mathbf{Y \wedge \neg Y} \\
\hline
\quad \mathbf{\neg X}
\end{array}$$

Esta regla recoge un procedimiento básico de inferencia lógica que se denomina **reducción al absurdo**, es un procedimiento indirecto de prueba. **C**onsiste en que si un supuesto nos lleva a una contradicción, tiene que ser falso y, si es falso, lo contrario será verdadero. Una contradicción la expresamos mediante la conjunción de una variable proposicional con su negación , $Y \wedge \neg Y$.

Suponer significa que introducimos una fórmula en nuestra derivación sin ser el resultado del uso de una regla, aunque, naturalmente, existe una regla que nos lo permite. Es una hipótesis que realizamos, como tal su verdad no está establecida, y precisamente lo que deseamos es ver si podemos verificarlo o ver a dónde, deductivamente, nos puede llevar. Es una forma muy natural de razonar. Imaginemos que queremos encontrarnos con alguien que conocemos bien y que sabemos de sus hábitos y costumbres, pero en ese momento no sabemos dónde puede estar. Posiblemente supongamos que se puede encontrar en su casa, entonces iríamos a su casa y llamaríamos, si nadie nos contesta, deduciríamos que lo contrario del supuesto inicial, es decir, que no está en casa. Entonces podríamos suponer que haya ido a comprar donde él suele ir a comprar y así sucesivamente

El hecho de la suposición lo vamos a expresar abriendo una llave a la izquierda de la fórmula introducida que prolongaremos a lo largo de la derivación hasta que podamos cerrar el supuesto. Cerrar el supuesto significará volver a la derivación principal y, en este sentido, lo que escribamos tendrá que ser valido, es decir, justificado por una regla de transformación.

EN : Eliminación de la Negación.

$$\frac{\neg\neg X}{X}$$

Si tenemos una fórmula doblemente negada, entonces resulta estar afirmada, luego si tenemos una fórmula de esta manera podremos simplificarla eliminando la negación.

Reglas de la Conjunción

IC: Introducción de la Conjunción.

$$\frac{\begin{array}{c}X\\ Y\end{array}}{X \wedge Y}$$

Si en el proceso de nuestra derivación tenemos o hemos obtenido dos fórmulas cualesquiera, X e Y, entonces podemos en un paso posterior unirlas conjuntivamente. Dado que todo lo que escribimos en la derivación es fruto del uso adecuado de nuestras reglas y como éstas aseguran la validez, entonces si sabemos que X es lógicamente válida y sabemos que Y también lo es, por la interpretación semántica de la conjunción, sabemos también que $X \wedge Y$ es una fórmula igualmente válida.

EC: Eliminación de la Conjunción.

$$\frac{X \wedge Y}{X} \qquad\qquad \frac{X \wedge Y}{Y}$$

Si tenemos dos formulas unidas conjuntivamente en nuestra derivación, entonces sabemos que esa fórmula es lógicamente válida, pero si lo es, lo es porque cada una de las fórmulas atómicas que componen la conjunción son igualmente válidas, en consecuencia, podemos así mismo afirmarlas tanto por separado. Es decir, si sabemos que es verdad $X \wedge Y$, también que sabemos que podemos afirmar X y que podemos afirmar Y.

Reglas de la Disyunción

ID: Introducción de la Disyunción.

$$\frac{X}{X \vee Y} \qquad\qquad \frac{Y}{X \vee Y}$$

En este caso la regla es autoevidente, pues si una disyunción es verdadera cuando lo es alguno de sus miembros, siempre podremos unir disyuntivamente a una fórmula dada cualquier otra, tanto por la derecha como por la izquierda. Es decir, si es verdad X, como una disyunción es verdadera con que lo sea uno de sus elementos, también será verdad X o Y, independientemente de la verdad de X. Y si es verdad Y también lo será $X \vee Y$.

ED: Eliminación de la Disyunción.

$$\begin{array}{l} X \vee Y \\ \left[\begin{array}{l} X \\ . \\ . \\ Z \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} Y \\ . \\ . \\ Z \end{array}\right. \\ \hline Z \end{array}$$

Esta regla también se denomina **procedimiento por casos.** Puesto que en una disyunción no sabemos cuál de sus componentes es verdadero, recordemos que nos basta con que lo sea sólo uno de ellos, para eliminar la conectiva tendremos que probar con cada uno de ellos. Esta regla exige suponer consecutivamente la verdad de cada uno de los elementos de la disyunción para ver a dónde nos lleva. Si de ambos supuestos podemos obtener la misma fórmula, esa será la fórmula que podamos afirmar.

Ciertamente, en el uso de esta regla eliminamos la disyunción en la medida en que podemos afirmar una consecuencia lógica que se deriva de esa disyunción; más bien, probamos que una fórmula Z, la misma para los dos supuestos, (que puede ser distinta a X y a Y), se deduce tanto de la suposición de la verdad de X, como del supuesto de la verdad de Y.

Reglas del Condicional o Implicación Material

II: Introducción del Implicador o del Condicional.

$$\begin{array}{l} X \\ . \\ . \\ . \\ Y \\ \hline X \rightarrow Y \end{array}$$

La regla de introducción del condicional, *-usamos aquí el sinónimo 'implicador' para no confundir en siglas con la conjunción-,* resume la idea de lo que es una deducción lógica. Nos exige también un proceso indirecto, consistente en suponer el antecedente del condicional que queremos probar y ver si en el curso de la derivación podemos probar el consecuente. En este caso queda probada la relación entre las dos proposiciones y podemos ya afirmarla más allá de la hipótesis.

EI: Eliminación del Implicador.

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$$

Esta regla, también conocida como *Modus Ponens,* Establece que si tenemos un condicional y tenemos su antecedente entonces podemos obtener su consecuente. Intuitivamente parece evidente y nos devuelve al ejemplo que usábamos al explicar la noción de validez formal. Si sabemos que si *llueve* entonces *me mojo* y sabemos también que *llueve* evidentemente podemos afirmar que *me mojo*.

Reglas del Bicondicional

IB y EB: Introducción y Eliminación del Bicondiccional.

$$\begin{array}{c} X \leftrightarrow Y \\ \hline\hline (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \end{array}$$

Esta regla tiene una doble lectura, que es lo que queda simbolizado por la doble línea. Es decir podemos emplearla de arriba abajo y viceversa. Naturalmente la regla se basa en la definición del bicondicional como un condicional en las dos direcciones. Así que cuando tengamos un bicondicional podemos transformarlo en la conjunción de los condicionales que lo componen y al revés.

Estas son las reglas básicas de transformación del cálculo. Como están expresadas en forma de esquemas de inferencia podemos ir ampliándolas según vayamos probando como válidos otros nuevos esquemas a partir de estas reglas. Tradicionalmente existen otras reglas derivadas que por su utilidad forman parte también del sistema de reglas. Vamos a ir conociéndolas, pero según seamos capaces de probarlas. De esta manera nos servirán de ejemplo de cómo poner en funcionamiento nuestro cálculo lógico.

Reglas Derivadas

Modus Tollens: M.T.

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

Prueba:

1.	$X \rightarrow Y$	Premisa
2.	$\neg Y$	Premisa
3.	X	Supuesto
4.	Y	EI 1,3
5.	$\neg Y \wedge Y$	IC 2,4
6.	$\neg X$	IN 3-5

Explicación:

Esta regla es muy interesante, pues es otra forma de eliminar el condicional. Como vemos el cálculo parte de unas premisas que nos son dadas y pretende mediante la transformación de estas fórmulas llegar a la conclusión que se propone. Una vez dispuestas las premisas, tenemos que preguntarnos cuál es la conectiva principal o estructura de la formula a obtener, indudablemente para conseguir dicha fórmula tendremos que introducir en primer lugar su conectiva principal, en este caso la negación. Haciendo uso de la regla de introducción de la negación, IN, suponemos lo contrario de lo que queremos probar y vemos si esto nos conduce a una contradicción, como es el caso, podemos negar lo contrario de lo que hemos supuesto, lo que coincide con la fórmula a probar. Adviértase que cerramos el supuesto cuando podemos justificar el uso de la regla que lo originó.

De suma importancia es la columna de la derecha donde justificamos lo que escribimos en la derivación, indicando por qué regla y entre qué líneas de la derivación llegamos a lo que escribimos en la línea correspondiente.

Silogismo disyuntivo: SIL DISY.

		Prueba:	
$X \vee Y$			
$\neg X$	1.	$X \vee Y$	Premisa.
	2.	$\neg X$	Premisa.
Y	3.	$\neg X \rightarrow Y$	Def. D. 1
	4.	Y	EI 3,4

	1.	$X \vee Y$	Premisa
$X \vee Y$	2.	$\neg Y$	Premisa
$\neg Y$	3.	$\neg X$	Supuesto
	4.	$\neg X \rightarrow Y$	Def. D. 1
X	5.	Y	EI 4,3
	6.	$Y \wedge \neg Y$	IC 5,2
	7.	$\neg\neg X$	IN 3-6
	8.	X	EN 7.

Explicación:

La regla intuitivamente es evidente si tenemos una disyunción y sabemos la invalidez de uno de sus términos, inmediatamente podemos afirmar el otro. La prueba hace uso de la interdefinición de las conectivas (según en el punto *4.2.1 Reducción de Conectivas*), que son definiciones de unas conectivas a partir de otras, son también reglas de inferencia derivadas del sistema. Además en la aplicación de la regla por la izquierda, procedemos por reducción al absurdo, lo que es habitual cuando la fórmula a probar es una fórmula atómica.

Transitividad del Condicional: TRANS C.

$X \rightarrow Y$	**Prueba:**		
$Y \rightarrow Z$			
	1.	$X \rightarrow Y$	Premisa
$X \rightarrow Z$	2.	$Y \rightarrow Z$	Premisa
	3.	X	Supuesto
	4.	Y	EI 1,3
	5.	Z	EI 2,4
	6.	$X \rightarrow Z$	II 3-5

Explicación:

En este caso puesto que lo que queremos probar es un condicional tendremos que emplear la regla de introducción del condicional. Esta regla nos dice que supongamos el antecedente del condicional a probar y veamos si podemos llegar al consecuente. Así lo hacemos, suponemos X. Ahora necesitamos poder escribir Z. Z podríamos obtenerlo eliminando el condicional en 2. Para ello necesitamos

Y. ¿Podemos obtener Y? Podemos hacerlo aplicando la regla de eliminación entre 1 y 3. Después se cierra el supuesto y se introduce el condicional entre X y Z, que era lo que se pedía.

Contraposición del Condicional: CONT C.

$$\frac{X \rightarrow Y}{\neg Y \rightarrow \neg X}$$

Prueba:

1.	$X \rightarrow Y$	Premisa
2.	$\neg Y$	Supuesto
3.	X	Supuesto
4.	Y	EI 1,3
5.	$Y \wedge \neg Y$	IC 4,2
6.	$\neg X$	IN 3-5
7.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	II 2-6

Explicación:

El proceso nos es ya conocido, advirtamos el doble supuesto que nos exige la introducción del condicional en primer lugar, y después como el consecuente del condicional a probar esta negado, la necesidad de suponer lo contrario del consecuente como nos indica la regla de introducción de la negación.

Ejercicio 4

A partir de ahora se exponen nuevas reglas derivadas, pero ahora las pruebas de su validez pueden ser un buen ejercicio.

Identidad: I

$$\frac{X}{X}$$

Conmutatividad de la Conjunción: CONM C.

$$X \wedge Y$$
$$\overline{\overline{}}$$
$$Y \wedge X$$

Conmutatividad de la Disyunción: CONM D:

$$X \vee Y$$
$$\overline{\overline{}}$$
$$Y \vee X$$

Asociatividad de la Conjunción: AS C.

$$\frac{X \wedge (Y \wedge Z)}{\overline{(X \wedge Y) \wedge Z}}$$

Asociatividad de la Disyunción: AS D.

$$\frac{X \vee (Y \vee Z)}{\overline{(X \vee Y) \vee Z}}$$

Ex Contradictione Quolibet: ECQ

$$\frac{X \wedge \neg X}{Y}$$

Leyes de De Morgan

$$\frac{\neg(X \wedge Y)}{\overline{\neg X \vee \neg Y}} \qquad \frac{\neg(X \vee Y)}{\overline{\neg X \wedge \neg Y}}$$

Ejercicio 5

Formaliza y prueba la validez de los siguientes argumentos:

1. Si llueve entonces me mojo. Me llevo el paraguas o no llueve. Luego, si llueve entonces me mojo y saco el paraguas.
2. O no estudio lógica o el examen era conocido de antemano. Si el examen era conocido de antemano, entonces aprobaré lógica. Si apruebo lógica, apruebo filosofía. Luego si estudio lógica, apruebo filosofía.
3. O bien la Tierra es redonda y los hombres no lo saben, o bien la Tierra es redonda y los extraterrestres lo saben hace tiempo. Si los hombres no lo saben, entonces la Tierra no es redonda. En conclusión, los extraterrestres lo saben hace tiempo.
4. Si Ana estudia, sacará el curso. Si no estudia, se divierte en clase. Si no saca el curso, no se divierte en clase. Así pues, Ana sacará el curso.
5. A los gallegos les gustan los berberechos, pero no les gusta la carne o beben ginebra. Si beben ginebra, entonces se emborrachan o toman flan de postre.

Por tanto, si a los gallegos les gusta la carne, entonces si no se emborrachan toman flan de postre.

6. O vamos al cine, o no nos quedamos en casa. Si vamos en coche, no vamos al cine. Por consiguiente, si nos quedamos en casa, no vamos en coche.
7. Si Jaime lleva pareja de ases, lleva poker o gana; si lleva poker, no lleva pareja de ases; si no sabe jugar al poker, no gana. Luego, si Jaime lleva pareja de ases, sabe jugar al poker.

4.4.2. La Lógica proposicional como Sistema Axiomático

Como adelantábamos, la otra manera de construir un cálculo lógico es mediante un sistema axiomático. Los sistemas axiomáticos se conocen desde la antigüedad y uno de los mejores ejemplos son *los Principios de Geometría de Euclides.* Euclides desarrolló lo que conocemos hoy como Geometría Euclídea a partir de un conjunto de axiomas, lo más sencillo posible. Los axiomas recogían nuestras intuiciones espaciales básicas. A partir de ellos y valiéndose de un mecanismo inferencial desplegó todo el conocimiento geométrico que podía obtenerse de esos axiomas. Cuando en el siglo XIX y XX se puso en cuestión uno de los postulados de Euclides, a saber, el postulado de las paralelas, se crearon otras geometrías, a las que denominamos no-euclídeas.

En general, un sistema axiomático procede deduciendo todas las verdades, a las que llamamos **teoremas**, de un conjunto lo más sencillo e independiente de axiomas, que aceptamos como verdaderos sin prueba, por su autoevidencia. El sistema posee también un mecanismo de inferencia en forma de reglas, pero mucho más simplificado que en los sistemas de deducción natural.

Los sistemas axiomáticos son de suma importancia porque constituyen el ideal de estructura lógica y deductiva de toda teoría científica. Las teorías científicas deben asegurar la validez de sus deducciones, por lo que normalmente sería deseable que se estructuran como sistemas axiomáticos. Para ver como el cálculo de enunciados se puede estructurar como un sistema axiomático, vamos a utilizar un sistema clásico, el sistema de los Pricipia Mathematica (1910-13), que escribieron Russel y Whitehead y que significó una de las primeras fundamentaciones de la matemática a partir de la lógica.

El Sistema de los Principia Mathematica (PM) de Russell y Whitehead.

Nuestros símbolos primitivos van a ser los mismos que hemos visto en el sistema de deducción natural, pero reduciremos las conectivas a la negación y la disyunción. Esta reducción no resta capacidad expresiva, pues las conectivas pueden interdefinirse entre ellas, de acuerdo con la reglas derivadas que hemos visto con anterioridad. Las reglas de formación también serán las ya vistas.

El conjunto de axiomas será el siguiente:

Axiomas

A1. $(p \vee p) \rightarrow p$
A2. $p \rightarrow (p \vee q)$
A3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
A4. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
A5. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$

Reglas de Transformación

R1. **Regla de Sustitución:** Dada una tesis (cualquier fórmula verdadera del cálculo, axioma o teorema) del cálculo, en la que aparecen variables proposicionales, el resultado de sustituir una, algunas o todas las apariciones de esas variables por fbfs del cálculo será una tesis del cálculo. Con la restricción de que cada variable ha de ser sustituida siempre que aparezca y siempre por el mismo sustituto.
R2. **Regla de Separación** *(Modus Ponens)*: Si 'X' es una tesis del sistema, y lo es también la expresión 'X→Y', entonces 'Y' es una tesis del sistema.

¿Cómo se pone en funcionamiento el sistema axiomático? En el sistema axiomático debemos comenzar, en vez de con un conjunto de premisas, con un axioma o teorema ya demostrado. El axioma o el teorema ya probado de partida debe ser aquél que tenga la estructura lógica más parecida al teorema a probar. Ver que sustituciones de variables nos convienen para, si aún es necesario, realizar alguna transformación que nos lleve al teorema a probar.

Veamos algunos ejemplos.

Teorema 1. $p \rightarrow (p \vee p)$

1.-	$q \rightarrow (p \vee p)$	A2.
2.-	$p \rightarrow (p \vee p)$	RT1[q/p], 1.

Teorema 2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.-	$(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$	A4.
2.-	$(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg q \vee (\neg p \vee r))$	RT1[p/¬p, q/¬q], 1.
3.-	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$	Def. Condicional, 2.

Teorema 3. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.- $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \lor q) \rightarrow (p \lor r)]$	A5.
2.- $(q \rightarrow r) \rightarrow [(\neg p \lor q) \rightarrow (\neg p \lor r)]$	RT1[p/¬p], 1.
3.- $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	Def. Condicional, 2.

Ejercicio 6

Probar los siguientes teoremas.

Teorema 4. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$.
Teorema 5. $p \rightarrow p$
Teorema 6. $\neg p \lor p$
Teorema 7. $p \lor \neg p$
Teorema 8. $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

4.5. Lógica y Semántica

Por **Semántica** entendemos la disciplina que se ocupa de las relaciones entre los signos y aquello que éstos designan, entre los signos y aquello de lo cual hablamos por medio de ellos. En lógica, la semántica recibió un fuerte avance gracias a la labor de un lógico polaco A. Tarski y la teoría clásica de modelos, en los años 50. La manera clásica de describir la tarea de la teoría de modelos consiste en decir que en ella se estudian las relaciones entre los lenguajes formales, por un lado, y las realidades de que hablan dichos lenguajes, por otro.

Hasta ahora hemos estudiado los sistemas lógicos como el proceso de inscribir fórmulas o estructuras deductivas en un determinado armazón formal. Desde el punto de vista semántico nos interesa atribuir significados a las fórmulas y aceptar como integrantes del sistema aquellas fórmulas o estructuras deductivas cuyo significado cumple determinadas condiciones.

La atribución de significado, que no es más que ofrecer las condiciones que debe cumplir una fórmula para que sea verdadera, se realiza mediante la idea de **interpretación.**

En la lógica proposicional, la interpretación de una fórmula viene dada por la interpretación semántica de las conectivas que contiene. Es decir, en la medida en que nuestras conectivas son funciones veritativas, una interpretación para el cálculo proposicional consiste en atribuir un valor de verdad a cada una de las variables proposicionales que componen una fórmula y evaluar según la interpretación semántica de las conectivas el valor final de la fórmula.

Dicho de otro modo, la relación semántica básica entre el lenguaje de proposiciones y el mundo o universo del que habla es la *valoración veritativa.* Una valoración veritativa sobre el lenguaje proposicional es una aplicación que asigna a cada fórmula del lenguaje un valor de verdad, esto es, uno de los dos elementos del conjunto {V,F} de valores de verdad.

En nuestro sistema de lógica de enunciados tenemos un método de prueba semántico que nos permite decidir si una fórmula es o no una verdad lógica. Este método de prueba es **la tabla de verdad**. Como recordaremos, el método es bastante limitado, pues imaginad una fórmula con seis variables proposicionales. Las posibles combinaciones sería $2^6 = 64$ lo que su confección resulta sumamente larga e incómoda, aun así la validez del método no queda disminuida.

Tomemos como ejemplo una de la regla de inferencia que hemos demostrado, *el Modus Tollens* que en su formato de ley sería $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)$, y construyamos su tabla de verdad, veamos qué resultado arroja:

p	**q**	**$\neg q$**	**$p \rightarrow q$**	**$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$**	**$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)$**
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1

¿Qué es lo que hemos hecho? Primero asignamos un valor de verdad a las dos variables proposicionales que compomen la fórmula de la que queremos obtener sus posibles valores de verdad. Como tenemos dos valores, obtendremos cuatro (2^2) combinaciones posibles de valores de verdad. Después, en las siguientes columnas vamos evaluando cómo se modifican estos valores iniciales conforme las variables entrar a ser argumentos de conectivas, para ello tenemos presente la interpretación semántica de las conectivas. Así, por ejemplo, cuando $q=1$, $\neg q = 0$ y viceversa. Y si $p = 1$ y $q = 1$, entonces $p \rightarrow q = 1$. Procedemos de esta forma hasta que debajo de la conectiva principal[√] de la fórmula obtenemos la columna de todos los posibles resultados para la fórmula que estamos estudiando.

¿Qué fórmulas interesan a la lógica desde el punto de vista semántico?

[√] *La Conectiva Principal* de una fórmula es la conectiva más externa y la que define la estructura de la fórmula. Como nuestras conectivas son o monádicas o diádicas, cada una dependiendo de su tipo conectará dos cosas, si es diádica o actuará sobre una si es monádica. Por eso, debemos considerar la fórmulas moleculares como una composición de, como máximo, dos elementos:

Por ejemplo, la formula $(p \wedge q) \rightarrow r$ tenemos dos conectivas la '$\wedge$' une a 'p' y a 'q' y compone $(p \wedge q)$. Posteriormente, el condicional une a '$(p \wedge q)$' con 'r'. Es pues, este condiconal la conectiva principal pues es la conectiva más externa cuyos argumentos no son a su vez argumentos de ninguna otra. Es bajo esta conectiva donde recae el valor final del proceso de construcción de la tabla de verdad.

Evidentemente aquellas fórmulas que arrojen como resultado en la columna final de su tabla de verdad en todas sus filas el valor de 'verdadero'. A estas fórmulas las denominaremos, **tautologías** o **verdades lógicas.**

Por el contrario, si todos los resultados en la columna final de la tabla son 'falso', estas fórmulas serán **contradicciones** y si encontramos tanto 'verdadero' como 'falso', diremos que son fórmulas **satisfacibles**, es decir, que en *alguna* valoración veritativa la fórmula resulta verdadera.

Lo importante de las tautologías es que *toda* interpretación posible satisface a la fórmula, esto es, la hace verdadera, eso significa que son razonamientos correctos o formalmente válidos.

Como vemos, la columna final de la tabla de verdad del *Modus Tollens* en todas sus filas arroja el resultado de 'lo verdadero', luego sabemos que esta fórmula es una tautología y en consecuencia que toda valoración veritativa la hace verdadera lógicamente.

Ejercicio 7

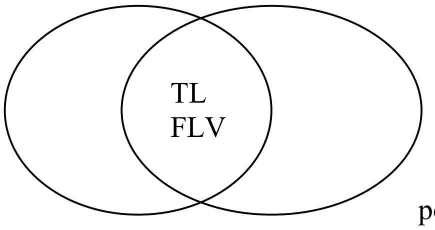
1. Probar la verdad lógica de las reglas derivadas que obtuvimos en el sistema de deducción natural.
2. Construir la tabla de verdad de los teoremas del sistema PM, que se recogen en el ejercicio 6, y verificar si son todos tautologías
3. Construir las tablas de verdad de los razonamientos del ejercicio 5 y decir qué tipo de fórmulas son desde el punto de vista semántico (tautologías, contradicciones o fórmulas satisfacibles).

4.6. Metalógica

Una cuestión fundamental en lógica es estudiar las relaciones que se establecen en los cálculos entre las estructuras sintácticas y sus interpretaciones semánticas que se establecen en los cálculos. Este estudio nos dará una visión de la utilidad del cálculo como herramienta deductiva. Imaginemos que queremos formalizar una teoría científica, por ejemplo la física, y que para ello tenemos que elegir un mecanismo deductivo que desarrolle toda la teoría. ¿Qué le pediríamos al cálculo deductivo a emplear?

A simple vista parecería importante que:

1. Todo lo que se derivase en el cálculo fuera una verdad lógica.
2. Toda verdad pudiera derivarse en el cálculo
3. Ante cualquier fórmula que pueda construirse pudiera determinarse si es o no verdadera.



Dicho de otra manera, si denominamos teoremas lógicos (TL) a lo que se deduce en un cálculo y fórmulas lógicamente verdaderas (FLV) a las que quedan satisfechas por cualquier interpretación, un cálculo será de interés si TL $\subseteq$ FLV por un lado, y por el otro si FLV $\subseteq$ TL. Es decir, que el conjunto de teoremas lógicos sea un subconjunto propio de las fórmulas lógicamente verdadera y viceversa, o lo que es lo mismo que en la intersección de estos dos conjuntos queden todos los elementos de los conjuntos.

Pues bien, la disciplina que estudia a los cálculos lógicos se denomina Metalógica y las propiedades importantes que pretende establecer para estos cálculos son:

a) **Consistencia:** Un cálculo es consistente si toda fórmula que se deriva en el cálculo es una verdad lógica.

Formalmente el **teorema de consistencia** se expresa de la siguiente forma:

Interpretando: $\vdash$ como '*se deduce lógicamente de*' y $\models$ como *'es consecuencia semántica de'*

Si $\vdash$ A, entonces $\models$ A.

O si lo consideramos como consecuencia de un conjunto de fórmulas, $\boldsymbol{\Gamma}$:

Si $\Gamma \vdash$ A, entonces $\Gamma \models$ A.

b) **Completud:** Un cálculo es completo si toda verdad lógica puede deducirse en el cálculo. El teorema se expresa formalmente de la siguiente manera:

Si $\models$ A, entonces $\vdash$ A.

O si lo consideramos como consecuencia de un conjunto de fórmulas, $\boldsymbol{\Gamma}$:

Si $\Gamma \models$ A, entonces $\Gamma \vdash$ A.

Como vemos el teorema de completud es lo inverso de la consistencia y en ambos se establece la equivalencia entre la sintaxis y la semántica de un cálculo lógico.

c) Decibilidad: Finalmente la tercera propiedad de interés es la decibilidad. Diremos que un cálculo es decidible si existe un procedimiento finito y algorítmico que permite decidir si una fórmula o deducción es demostrable en el cálculo.

En 1930 Kurt Gödel probó el Teorema de Completud para el cálculo lógico de 1er orden. Pero en 1931, estableció un resultado absolutamente sorprendente y de graves consecuencias para la ciencia y la racionalidad en general, el **Teorema de Incompletud**, que expresaba:

(1) Todos los sistemas formales de la matemática clásica son incompletos -entre ellos toda la lógica de primer orden-, es decir, puede construirse una sentencia verdadera, pero indecidible, tal que ni ella ni su negación son deducibles en el sistema. Por lo tanto, la incompletud es irremediable.

(2) Es imposible probar la consistencia de un sistema formal de la matemática clásica usando todos los recursos y razonamientos incorporados al sistema, es decir dentro del mismo. Para poder probar la consistencia deberemos ampliar los recursos propios del sistema

Estos resultados arruinaron el optimismo imperante en la primera mitad de siglo sobre la capacidad de la ciencia para explicar los fenómenos del mundo, sobre la capacidad de la razón humana y en general puso en evidencia las nociones de progreso científico y de verdad propiamente dicha. De hecho, el concepto de verdad dio paso al de *demostrabilidad* y esto ocasionó el importante desarrollo de las ciencias de la computación y con ellas del ordenador digital.

5. Introducción al cálculo de Predicados

Observemos el siguiente razonamiento:

Ningún fósil puede estar traspasado de amor
Una ostra puede estar traspasada de amor

Las ostras no son fósiles.

Intuitivamente el razonamiento parece válido. Si ningún fósil puede estar traspasado de amor y las otras sí pueden, entonces podemos concluir que las ostras no son fósiles. Formalicemos nuestro argumento, sea:
Ningún fósil puede estar traspasado de amor: $\neg p$
Una ostra puede estar traspasada de amor: q
Las ostras no son fósiles: $\neg r$
Entonces tendríamos:

$$\begin{array}{l} \neg p \\ q \\ \hline \neg r \end{array}$$

Lo que evidentemente, en el cálculo proposicional que conocemos, no resultaría demostrable. ¿Qué falla aquí?

Lo que ocurre en este argumento es que el proceso deductivo se realiza entre los elementos que conforman las oraciones, esto es, entre las relaciones lógicas que se establecen entre los sujetos y los predicados de la oración. De manera general lo que afirma el argumento es

Si Ningún A es B
Pero C es B
Entonces, C no es A.

Al predicar la misma propiedad a dos tipos de entidades, pero al hacerlo de manera negativa en uno de los tipos de entidad, entonces deducimos que C no forma parte de la clase de los A.

Pues bien, para estudiar estos tipos de argumentos donde las relaciones lógicas se establecen entre las estructuras internas de las oraciones, necesitamos más recursos expresivos que los que proporciona la lógica proposicional. En concreto, ¿qué nuevos recursos?

Ampliemos nuestro vocabulario básico. Parece claro que necesitamos poder referirnos a individuos y a predicados. Para designar formalmente a los individuos, y entendemos por individuos cualquier nombre común, usaremos **variables de individuos**. Denotemos a las variables de individuos con las letras minúsculas *x, y, z*, con subíndices si fuera necesario. Si alguna de nuestras oraciones mencionara a individuos concretos (nombre propios), como pudiera ser Pedro o Juan, usaremos **constantes individuales** que denotamos mediante las letras minúsculas, *a,b,c,...* Para referirnos a las propiedades o a los predicados usaremos **variables predicativas**. Estas variables predicativas las entenderemos como funciones que toman como argumentos individuos y arrojan como valor proposiciones. Dependiendo del número de argumentos que tomen, diremos si son *monádicas* -un argumento-, *diádicas* -dos argumentos- o, en general *n-ádicas* -n argumentos-. Denotemos a las variables predicativas mediante letras mayúsculas. Pensando la relación de atribución de propiedades a individuos como una función que asigna individuos a propiedades y arroja como valor una proposición, formalizamos las relaciones entre sujetos y predicados de la siguiente manera: *Px, Fy, Rxy.* Por ejemplo:

- 'Juan es alto' sería : *Aa.*
- 'x ama a y': *Axy*. (Si no conocemos quien es x y quien es y)

Sin embargo, si observamos la última proposición veremos que su formalización no permite decidir sobre su verdad, es decir, no es estrictamente una proposición, porque no sabemos a quién nos estamos refiriendo. x puede estar por un hombre, un perro, una mariposa, etc. Cuando esto ocurre decimos que *x* e *y* son **variables libres**. Para que podamos decidir sobre la verdad de la proposición tenemos que **ligar** estas variables de tal manera que quede estrictamente delimitado el dominio de búsqueda de instancias de sustitución de las variables. Podemos ligar estas variables asignando constantes, como en el caso de 'Juan es alto'. Pero también existe otro método que es cuantificando la variable. Es decir, ligando la variable al alcance de un **cuantificador**. Por ejemplo en nuestro ejemplo inicial, 'ningún' es un cuantificador que expresa que todo elemento de la clase especificada por el predicado *'ser fósil'* no cumple una determinada propiedad, *'estar traspasada de amor'*. Visto así necesitamos otro recurso expresivo que permite construir proposiciones, **los cuantificadores**. Estos pueden ser, en lógica de predicados, de dos tipos:

- Universales: Todo, Los, Todos, etc. Lo denotaremos mediante el símbolo: $\forall$

- Particulares: Uno, Alguno. Denotado por: $\exists$

Los cuantificadores indican el alcance de las variables a las que cuantifican. Pongamos un ejemplo de esto. Analicemos los siguientes predicados:

- *'x es idéntico a sí mismo'*. En principio no sabemos a qué se refiere x, pero evidentemente sea lo que sea x tendrá esa propiedad. Por eso, podemos **cerrar** esta fórmula mediante un cuantificador universal: 'Todo x es idéntico a sí mismo'. Está oración será satisfecha por cualquier sustitución que hagamos de la x.
- *'x es un corsario*'. Aquí x puede sustituirse por John Silver, Barbarroja o Pata palo, pero también podríamos cerrar la fórmula, convertirla en una proposición, refiriéndonos a todos o algunos de los corsarios a la vez, mientras que los distinguimos de los bucaneros, los panaderos o las avestruces: 'Algunos x son corsarios'. Esta oración será entonces verdadera si encontramos una instancia de sustitución de la x que satisfaga a la oración, es decir, que sea un corsario.

Resumiendo, nuestro lenguaje debe ampliarse con:

1. Términos individuales: que denotan a individuos y serán nuestras variables o constantes individuales.
2. Letras Predicativas n-ádicas: que denotan predicados o propiedades.
3. Cuantificadores: Que serán universales y particulares, que delimitan los dominios de los términos individuales y también generalizan nuestras fórmulas para tratar con conjuntos indefinidos, lo que naturalmente es importante para cualquier actividad de carácter científico.

De la misma manera nuestras reglas de formación deberán ampliarse para incluir como construir las nuevas fbfs que contengan los nuevos elementos del vocabulario.

Finalmente, necesitaremos dos nuevas reglas de transformación para cada uno de los cuantificadores.

No entraremos en la ampliación del cálculo, pero, para terminar resolvamos el argumento con el que iniciábamos esta breve introducción a la lógica de predicados. Su formalización sería:

$$\begin{array}{l} \forall x\ (Fx \rightarrow \neg Px) \\ \forall x\ (Ox \rightarrow Px) \\ \hline \forall x\ (Ox \rightarrow \neg Fx) \end{array}$$

Lo que podríamos leer de la siguiente manera:
Para todo x, si x es un Fósil, entonces no Puede estar traspasado de amor.

Para todo x, si x es una Ostra, entonces Puede estar traspasada de amor.
Luego, para todo x, si x es una Ostra, entonces no es un Fósil.

La demostración de su validez como argumento sería:

1.	$\forall x\ (Fx \rightarrow \neg Px)$	Premisa
2.	$\forall x\ (Ox \rightarrow Px)$	Premisa
3.	$Fa \rightarrow \neg Pa$	EU, 1
4.	$Oa \rightarrow Pa$	EU, 2
5.	$Pa \rightarrow \neg Fa$	CONT C, 3
6.	$Oa \rightarrow \neg Fa$	Trans. C, 4,5
7.	$\forall x\ (Ox \rightarrow \neg Fx)$	IU, 6.

Explicación: A simple vista, las pruebas en lógica de predicados consisten fundamentalmente en eliminar los cuantificadores. Para ello sustituimos las variables por constantes, pues, si algo ocurre a todos, ocurrirá también a uno que pertenezca al conjunto referido. Procedemos después como si fueran proposiciones y finalizamos introduciendo los cuantificadores, en este paso debemos respetar ciertas restricciones, que en este momento y para nuestro propósito no mencionaremos.

Dejemos aquí esta breve introducción a la lógica de predicados, que ya fuera desarrollada por Aristóteles en su Silogística, y aprovechando algunas de las nociones aprendidas, reflexionemos para qué puede servir todo esto.

Comentario de Texto

Lee atentamente el siguiente texto y contesta las preguntas que se formulan:

> *"Por fortuna hay otra manera de establecer la verdad de una fórmula, y de determinar si una fórmula es consecuencia de otras, que no es la verificación directa de las condiciones de verdad; se trata de inferir o deducir la fórmula en un cálculo deductivo utilizando las otras fórmulas como premisas o hipótesis: de establecer una cadena de razonamiento entre hipótesis y conclusión. Por supuesto, si el cálculo deductivo nos va a ser de alguna ayuda es porque no nos permitirá equivocarnos nunca; no nos va a conducir jamás de hipótesis verdaderas a conclusiones falsas: será un cálculo consistente.*
>
> *Además, con sus reglas obtendremos como teoremas todas las consecuencias de un conjunto dado de hipótesis: será un cálculo completo."*
>
> ***María Manzano. Teoría de Modelos.***

1.- ¿Qué significa establecer la verdad de una fórmula a partir de la verificación directa de sus condiciones de verdad?

2.- Explica las nociones de consistencia y completud.

3.- Comenta la oración *"establecer una cadena de razonamiento entre hipótesis y conclusión"* y concreta su sentido en el ámbito de un sistema de deducción natural y en el de un sistema axiomático.

6. ¿Razonar Correctamente o Equivocarnos?

La lógica es una norma para el razonamiento correcto. Como hemos visto, un cálculo lógico es una herramienta que nos permite decidir si un razonamiento es formalmente correcto o no. Es verdad que las limitaciones metalógicas de los cálculos debilitan la eficacia de esta herramienta, que termina siendo útil sólo para un fragmento pequeño del razonamiento humano, el pensamiento deductivo. Para solucionar esto se han desarrollando otras lógicas que exploran otro tipo de discurso y otras formas de razonamiento.

Por otro lado, la lógica es el fundamento de la matemática y resulta fundamental a la hora de producir teorías elaboradas como pueden ser las teorías científicas.

También la lógica es el lenguaje de los circuitos electrónicos y suponen el arranque de todos los ordenadores digitales tan presentes en nuestras sociedades.

Pero, para lo que nos interesa en nuestro curso de filosofía, la lógica es una norma para pensar, para producir nuevo conocimiento y hacerlo de manera correcta. Esto, que puede parecer sencillo, no lo es tanto y, a menudo, resulta sumamente difícil distinguir los razonamiento válidos de los incorrectos, sobre todo si no disponemos de una herramienta tan eficaz como puede ser un cálculo lógico.

Por ejemplo, el siguiente argumento ¿es válido o incorrecto?

Si París es la capital de Italia, Madrid es la capital de España; pero, París no es la capital de Italia. En consecuencia, Madrid no es la capital de España.

Muchas veces un argumento parece válido, pero un análisis lógico detallado puede desenmascararlo y mostrarlo como incorrecto. Muchas veces un argumento no válido, pero que parece válido, se usa con intención de engañar o convencer. La lógica puede prevenir estas situaciones.

Efectivamente, la lógica ha realizado un catálogo de argumentos de este tipo, argumentos que no válidos, pero lo parecen. A estos argumentos los denominamos *falacias* o *sofismas.*

6.1. Falacias

Hay muchos tipos de falacias, algunas lo son por su forma lógica y en ese sentido coinciden con argumentos incorrectos o falso argumentos, como el que mencionábamos arriba. Estas son sencillas de detectar utilizando un cálculo lógico. Pero hay otro tipo de falacias que lo son no tanto en virtud de su forma lógica sino en virtud de su contenido material. Una clasificación de las falacias puede ser la siguiente:

Falacias
- Formales
- Informales
  - Ambigüedad
    - Por equívoco
    - Anfibología
  - Materiales
    - Datos insuficientes
      - Generalización Inadecuada
      - Falsa prueba
      - Falsa causa
    - Pertinencia
      - Ad Hominen
      - Ad Baculum
      - Ad Populum
      - Ad verecundiam
      - Ad ignorantian
      - Tu quoque

Las falacias de ambigüedad

Son argumentos deductivos que parecen válidos pero que no lo son porque hay una modificación en el significado de alguno de los términos. Hay de dos tipos:

Por equívoco:

El término se usa dentro del mismo argumento con dos significados distintos, por ejemplo:

Sólo el hombre es racional
Ninguna mujer es un hombre

Luego, Ninguna mujer es racional

Anfibología:

La anfibología se origina por una ambigüedad estructural o por una ambigüedad semántica al interpretar un elemento que determina la estructura lógica. Por ejemplo:

Todo Hombre ama a una mujer
Romeo ama a Julieta

Luego, Todo hombre ama a Julieta

Falacias materiales

Las falacias de datos insuficientes

Son razonamientos inductivos incorrectos, porque en ellos se presentan las premisas como base para la generalización, cuando en realidad no la tienen. Este tipo de falacias son muy comunes cuando generalizamos a partir de sólo varios casos conocidos.
"Todos los hombres son iguales", es un ejemplo. A menudo, este tipo de generalizaciones resultan ser meros prejuicios.

La falsa causa y la falsa prueba

Son razonamientos que apelan a una causa o a una prueba para concluir alguna conclusión con la que no hay una verdadera conexión causal. Por ejemplo:

El fumar es malo para la salud,
me duele un pie,

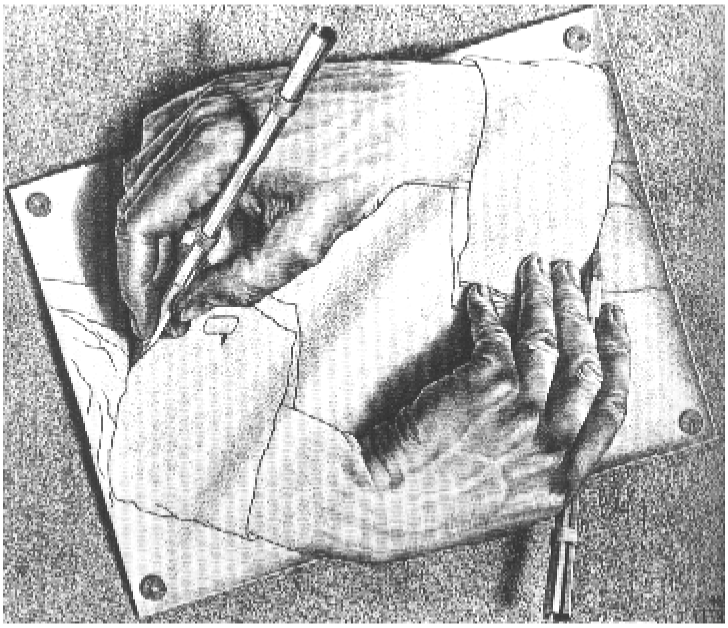
Eso es por el tabaco

Las falacias de pertinencia

A menudo, son meros argumentos retóricos o *entimemas*, que tienen el objetivo de convencer a alguien apelando a argumentos o razones que no son lógicamente pertinentes. Entre las más comunes podemos destacar lss siguientes:

- *Ad hominem* : Podemos atacar o desprestigiar la capacidad argumentativa del que presenta la opinión, pero sin presentar razones contra la opinión en sí . Por ejemplo cuando decimos en tono despectivo aquello de *'si tú lo dices...'*
- *Ad Baculum:* Las que apelan al poder o la autoridad para fundamentar una opinión. *¿Por qué? Porque lo digo yo*.
- *Ad populum:* Éstas apelan a emociones que conmueven no por su fuerza lógica sino por su capacidad retórica.
- *Ad verecundiam:* También resultan falaces las que se aprovechan de la autoridad intelectual o del prestigio de alguien para derivar una conclusión. Éstas tienen la siguiente estructura: *A afirma p, por tanto p.*
- *Ad ignorantiam:* Se basan en el desconocimiento o en la carencia de refutación para afirmar una aserción, que, en estas circunstancias, no resultaría confirmada. Por ejemplo, *Nadie ha podido refutar la existencia de Dios, por tanto tiene que existir.*
- *La falacia tu quoque* es un tipo de argumento muy utilizado, no sólo en deducción lógicas sino también en excusas del deber o en defensa de la culpa. *Tu quoque* significa 'tú también' y es la idea de poder excusarse, acusando a quien acusa. Produce tomas de decisión tan singulares como cuando todos hablan en clase, por ejemplo, yo también me creo en el derecho de hablar.

6.2. Paradojas



M.C. Escher: Manos dibujando

Observemos el dibujo y preguntémonos ¿Qué mano dibuja qué? Si seguimos el trazo de una mano nos encontramos que anda dibujando otra mano, pero cuando seguimos el trazo de ésta descubrimos que es ella la que pinta a aquélla. ¿Quién pinta qué? Esto ilustra la idea de una paradoja.

Una paradoja, a veces también llamada aporía, es algo, dibujo, oración, argumento, que no tiene una solución definitiva. Si optamos por una posible solución entonces parece transformarse y convertirse en lo contrario. Si afirmamos que la mano derecha pinta a la izquierda, entonces vemos que es al contrario.

Como hemos visto en la sección de metalógica, los sistemas lógicos equivalentes a la aritmética elementas resultan indecidibles, es decir, existen verdades que no se pueden demostrar. De algún modo esto subvierte la intuición de sentido común de que las oraciones o razonamientos son o verdadero o falsos. Una paradoja es un tipo de argumento que si es verdadero entonces es falso.

Existen muchos tipos de paradojas, que no son triviales sino que suponen serios problemas a teorías tan aparentemente sólidas como la matemática o la lógica. En el tema sobre la verdad estudiaremos la famosa paradoja de Epiménides, un buen y antiguo ejemplo de paradoja semántica, que podemos formular como: 'Esta oración es falsa' o 'Estoy mintiendo'. ¿Es verdad que la oración es falsa, es verdad que miento? Pero, si es verdad que miento, entonces no miento. Luego si es verdad esta aseveración, entonces es falsa. Estas paradojas semánticas se producen cuando nos referimos en la misma afirmación a dos mundos distintos, de tal manera, que en uno la oración es verdadera y en el otro falsa.

Otra famosa paradoja, minó desde sus orígenes la teoría de conjuntos. La formula Russell de la siguiente manera: Un conjunto es una colección de cosas. Normalmente el conjunto entero no forma parte de sí mismo. Pero si decidimos unir en un conjunto a todos los conjuntos que no forman parte de sí mismo, obtendríamos el conjunto de todos los conjuntos que no forman parte de sí mismo, pero este conjunto , ¿forma parte de sí mismo o no?. No debería, pero si es el conjunto de todos los conjuntos de este tipo, entonces debería estar incluido en sí mismo.

Pero, ¿qué pasa con los barberos que no se afeitan a sí mismos? Si existen estos barberos habrá alguien que los afeite. Imaginemos que es uno solo. El barbero de todos los barberos que no se afeitan a sí mismos, ¿se afeita a sí mismo? Si no lo hace estará dentro del grupo al que afeita y entonces se afeitará a sí mismo, y si no está, entonces no se afeita a sí mismo y debería, por consiguiente, formar parte del conjunto. Difícil tarea tiene este barbero, quizá fuera mejor dejarse barba.

Otra famosa paradoja es la de Zenón, aunque en este caso quizá sea un aporía, es decir, un argumento problemático, pues pareciendo perfectamente correcto y sin tacha, produce un resultado completamente inadmisible.

Zenon de Elea: (aprox. 490-420 a.C.) discípulo de Parménides es conocido fundamentalmente por su aporías o paradojas sobre el movimiento. Fiel a su maestro Parménides intentaba negar la posibilidad del movimiento, para lo cual construyó sus aporías. La más famosa es la de Aquiles y la Tortuga.

Si Aquiles retara a una carrera a una tortuga, dándola ventaja, Aquiles no la alcanzaría nunca. Porque para cuando Aquiles llegara al lugar alcanzado por la Tortuga, ésta ya se habría desplazado hacia delante, y para cuando Aquiles llegara al nuevo lugar alcanzado por la Tortuga, ésta de nuevo habría avanzado otro tanto. En esta persecución, la tortuga alcanzaría la meta siempre antes que Aquiles, aunque fuera por poco.

En principio este argumento contra el movimiento y otros semejantes que se le ocurrieron parecen definitivos y sólo hasta que la matemática moderna ha comprendido la idea de límite de una sucesión decreciente ha podido disolverse la aporía. Comprendemos que la noción de aporía es un problema que se presenta al comparar lo que debería ocurrir según la razón y lo que ocurre en los hechos reales.

Para terminar de ejemplificar la noción de paradoja, podemos mencionar otra de un tipo distinto. La relata Proclos (aprox. 450 d.C). Proclos contaba que Protágoras, un sofista ilustre de la Atenas democrática, había enseñado a un discípulo lo que era justo para que fuera un buen abogado y había pactado con él que no tenía que pagarle los estudios hasta que hubiera ganado un proceso. Pero, el discípulo al acabar los estudios no se hace cargo de ningún proceso para no ganarlo. Protágoras razona y decide demandarlo. Si pierde -piensa Protágoras- el discípulo le tendrá que pagar según el acuerdo, y si gana cobrará por mandato del juez. El discípulo, curiosamente, piensa que en ningún caso tendrá que pagar el coste de los estudios: Bien por el acuerdo tomado, o bien por la sentencia judicial.

Aunque los seres humanos tienen otras formas de producir nuevos conocimientos y razonan en muchas otras circunstancias para las que la lógica clásica no dispone de recursos, sin duda la existencia desde los tiempos de Aristóteles de un canon del razonamiento que produce una aceptación por su propia fuerza ha conducido las maneras de hacer ciencia, de argumentar y convencer, en fin, de pensar. La razón, esa propiedad del pensamiento humano, se construye y se emplea argumentando y lo hace de tal manera que la propia fuerza del argumento aúna posturas y convence, si somos racionales. La filosofía usa la lógica no sólo para articular o estructurar sus conocimientos, sino, sobre todo, para crearlos. Así, filosofía y lógica han ido históricamente de la mano.