Statisztika I.

KÉPLETEK

2011-2012-es tanév I. félév

Statisztikai alapfogalmak

Adatok pontossága

$$\hat{A} \pm \hat{a} \qquad \hat{\alpha} = \frac{\hat{a}}{\hat{A}}$$

Mért adat — Abszolút hibakorlát — Relatív hibakorlát

$$\hat{a} \leq \frac{10^k}{2}, \text{ ahol}$$

10^k : a legutolsó kiírt szignifikáns számjegy helyértéke

Statisztikai elemzések viszonyszámokkal

Viszonyszámok

Viszonyszám:

$$V = \frac{A}{B}$$, ahol A: a viszonyítás tárgya (viszonyítandó adat)

B: a viszonyítás alapja

Viszonyszámok fajtái

- Megoszlási viszonyszám:

$$Vm = \frac{\text{A (a sokaság egy részadata)}}{\text{B (a sokaság egészére vonatkozó adat)}}$$

- Koordinációs viszonyszám:

$$Vk = \frac{\text{A (viszonyított részadat)}}{\text{B (a viszonyítás alapjául szolg. részadat)}}$$

Dinamikus viszonyszámok

- Bázisviszonyszám: $Vdb\ /\ b = \dfrac{y_t}{y_b}$
- Láncviszonyszám: $Vdl\ \ /\ l = \dfrac{y_i}{y_{i-1}}$

Dinamikus viszonyszámok

Viszonyszámok közötti összefüggések:

Láncból bázis:

$$l_2 \cdot l_3 \ldots \cdot l_k = b_k \rightarrow \prod_{i=2}^{k} \ l_i = b_i$$

Bázisból lánc:

$$\frac{b_i}{b_{i-1}} = l_i$$

Viszonyszámok fajtái

- Feladatmutató viszonyszám:

$$\mathrm{Vf} = \frac{\text{Tárgyid. tervezett adata}}{\text{Bázisid. adata}}$$

- Teljesítménymutató viszonyszám:

$$\mathrm{Vt} = \frac{\text{Tárgyid. tényleges adata}}{\text{Tárgyid. tervezett teljesítménye}}$$

Viszonyszámok fajtái

- Területi összehasonlító viszonyszám:

$$\mathrm{Vö} = \frac{\text{Viszonyítandó terület adata}}{\text{Viszonyítás alapjául szolg. terület adata}}$$

Mennyiségi ismérv szerinti elemzés

1) Középértékek

Számított középértékek (átlagok)

- számtani átlag
- harmonikus átlag
- mértani átlag
- négyzetes átlag

Helyzeti középértékek:

- módusz
- medián
- kvartilisek

Átlagok

	Súlyozatlan	Súlyozott
Számtani $\bar{x}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$
Harmonikus $\bar{x}_h$	$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$	$\bar{x} = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$
Mértani $\bar{x}_g$	$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod x_i}$	$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod x_i^{f_i}}$
Négyzetes $\bar{x}_q$	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i}}$

Medián

$$Me = x_{me0} + \frac{\frac{n}{2} - f'_{me-1}}{f_{me}} \cdot h_{me}$$

Módusz

$$f^* = \frac{gyakoriság}{eredeti\,osztközh.} \cdot új\,osztközh.$$

$$Mo = x_{mo0} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot h_{mo}$$

Kvartilisek

Alsó kvartilis: $$Q_1 = x_{q1,0} + \frac{\frac{n}{4} - f'_{q1-1}}{f_{q1}} h_{q1}$$

Felső kvartilis: $$Q_3 = x_{q3,0} + \frac{\frac{3 \cdot n}{4} - f'_{q3-1}}{f_{q3}} h_{q3}$$

Szóródási mérőszámok

A legfontosabb szóródási mérőszámok:

1. Terjedelem, **R** (vagy **IQR**)
2. Átlagos eltérés, **δ**
3. Szórás, **σ** (vagy s)
4. Relatív szórás, **V**
5. (Átlagos különbség, G)

Szóródási mérőszámok

1) Terjedelem:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Interkvartilis terjedelem (IQR):

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Szóródási mérőszámok

2) Átlagos eltérés (egyszerű és súlyozott):

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i|}{n} \qquad \delta = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot |d_i|}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

Szóródási mérőszámok

3) Szórás (egyszerű és súlyozott):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

A szórás négyzetét **varianciá**nak hívjuk.

$$\sigma^2 = \bar{x}_q^2 - \bar{x}^2$$

Szóródási mérőszámok

4) Relatív szórás

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

5) Átlagos különbség, G (Gini-féle mutató, egyszerű és súlyozott):

$$G = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_j|$$

$$G = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot f_j \cdot |x_i - x_j|$$

Aszimmetria mutatók

A-mutató

Pearson-féle mutatószám:

$$A = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

F- mutató

$$F_{0,25} = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)}$$

Idősorok elemzése átlagokkal

Tapasztalati idősor:

- időtényező:

$$t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n$$

- megfigyelt érték:

$$y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n$$

Idősorok elemzése átlagokkal

Időegységre számított átlagok

Stock típusú idősor esetén: (számtani átlag)

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

Flow típusú idősor esetén: (kronologikus átlag)

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n - 1}$$

Idősorok elemzése átlagokkal

Változások átlaga

Átlagos abszolút változás

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}, ahol$$

$$d_i = y_i - y_{i-1}$$

Átlagos relatív változás

$$\bar{l} = \sqrt[n-1]{\prod l_i} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}, ahol\, l_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}$$

Sztochasztikus kapcsolatok

Asszociációs kapcsolat szorosságának mérése

1) Alternatív ismérvek esetén:

Yule –együttható (Y):

$$Y = \frac{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}}{f_{11}f_{22} + f_{21}f_{12}}$$

Asszociációs kapcsolat szorosságának mérése

2) Általánosan alkalmazható mutatószám (alternatív és két ismérvváltozatnál több változattal rendelkező ismérvek esetén egyaránt): (ahol **s** az egyik ismérv változatainak, míg **t** a másik ismérv változatainak a számát jelenti)**:**

Csuprov-mutató (T):

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{\chi^2}{\mathrm{n} \cdot \sqrt{(s-1)} \cdot \sqrt{(t-1)}}}$$,ahol $$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(f_{ij} - f^*_{ij}\right)^2}{f^*_{ij}}$$

,ahol $$f^*_{ij} = \frac{f_{i.} \cdot f_{.j}}{n}$$

Asszociációs kapcsolat szorosságának mérése

A Csuprov-mutató tulajdonságai:

$s < t$ esetén a **Cramer-mutatót** (C) használjuk:

$$\mathrm{C} = \frac{T}{T_{\max}},\ ahol\ \ T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{s-1}{t-1}}$$

$s = t = 2$ Esetén Y és T mutatók is alkalmazhatók, a T mutató alakja ebben az esetben:

$$T = \frac{|f_{11} \cdot f_{22} - f_{12} \cdot f_{21}|}{\sqrt{f_{.1} \cdot f_{.2} \cdot f_{1.} \cdot f_{2.}}}$$

Heterogén sokaságok

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} n_j \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^{m} n_j} = \sum_{j=1}^{m} w_j \bar{x}_j$$

$$\frac{n_j}{n} = w_j$$

Szórásnégyzetek kiszámítása

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{m} (x_{ij} - \bar{x})^2}{n} = \frac{S}{n}$$

S: teljes eltérés-négyzetösszeg

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum\sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n} = \frac{\sum n_j \sigma_j^2}{n} = \frac{S_B}{n}$$

S_B: belső eltérés-négyzetösszeg

$$\sigma_K^2 = \frac{\sum n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{n} = \frac{S_K}{n}$$

S_K: külső eltérés-négyzetösszeg

Összefüggések

$$d_{ij} = B_{ij} + K_j$$

$$x_{ij} - \bar{x} = (x_{ij} - \bar{x}_j) + (\bar{x}_j - \bar{x})$$

Teljes eltérés — Belső eltérés — Külső eltérés

$$\sigma^2 = \sigma_B^2 + \sigma_K^2$$

Teljes szórásnégyzet — Belső szórásnégyzet — Külső szórásnégyzet

$$S = S_B + S_K$$

Teljes eltérés négyzet összeg — Belső eltérés négyzet összeg — Külső eltérés négyzet összeg

A vegyes kapcsolat mutatószámai

Szórásnégyzet-hányados:

$$H^2 = \frac{\sigma_K^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{\sigma_B^2}{\sigma^2} = \frac{S_K}{S} = 1 - \frac{S_B}{S}$$

Szóráshányados:

$$H = \sqrt{H^2} = \sqrt{\frac{\sigma_K^2}{\sigma^2}} = \frac{\sigma_K}{\sigma} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_B^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{S_K}{S}} = \sqrt{1 - \frac{S_B}{S}}$$

Indexszámítás

Egyedi indexek (egy jószágcsoportra – egyfajta termékre – vonatkozó indexek)

Egyedi árindex:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}$$

Egyedi volumenindex:

$$i_v = i_q \cdot i_p$$

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

Egyedi értékindex:

$$i_v = \frac{v_1}{v_0} = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_0}$$

Együttes indexek aggregát formái (heterogén jószágcsoportra – többféle termékre – vonatkozó indexek)

Értékindex:

$$I_v = \frac{\sum v_1}{\sum v_0} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}$$

$$I_v = I_q^0 \cdot I_p^1$$

$$I_v = I_q^1 \cdot I_p^0$$

Árindex:

$$I_p^0 = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} \qquad I_p^1 = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$$

Volumenindex:

$$I_q^0 = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \qquad I_q^1 = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$$

Értékindex-számítás

$$I_v = \frac{\sum v_1}{\sum v_0} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}$$

Az értékindex átlagformái:

$$I_v = \frac{\sum q_0 p_0 \cdot i_v}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum v_0 \cdot i_v}{\sum v_0} \qquad I_v = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum \frac{q_1 p_1}{i_v}} = \frac{\sum v_1}{\sum \frac{v_1}{i_v}}$$

Árindex-számítás

Laspeyres árindex (bázisidőszaki súlyozású) : $I_p^0 = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0}$

Paashe árindex (tárgyidőszaki súlyozású) : $I_p^1 = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1 p_0}$

Fisher árindex: $I_p^F = \sqrt{I_p^0 \cdot I_p^1}$

Az árindex átlagformái (árindex-számítás egyedi árindexekből)

$$I_p^0 = \frac{\Sigma q_0 p_0 \cdot i_p}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{\Sigma v_0 \cdot i_p}{\Sigma v_0}$$

$$I_p^0 = \frac{\Sigma q_0 p_1}{\Sigma \frac{q_0 p_1}{i_p}}$$

$$I_p^1 = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma \frac{q_1 p_1}{i_p}} = \frac{\Sigma v_1}{\Sigma \frac{v_1}{i_p}}$$

$$I_p^1 = \frac{\Sigma q_1 p_0 . i_p}{\Sigma q_1 p_0}$$

Volumenindex-számítás

Laspeyres volumenindex (bázisidőszaki súlyozású) : $I_q^0 = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$

Paashe volumenindex (tárgyidőszaki súlyozású) : $I_q^1 = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}$

Fisher volumenindex: $I_q^F = \sqrt{I_q^0 \cdot I_q^1}$

A volumenindex átlagformái (volumenindex-számítás egyedi volumenindexekből)

$$I_q^0 = \frac{\Sigma q_0 p_0 \cdot i_q}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{\Sigma v_0 \cdot i_q}{\Sigma v_0}$$

$$I_q^0 = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma \frac{q_1 p_0}{i_q}}$$

$$I_q^1 = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma \frac{q_1 p_1}{i_q}} = \frac{\Sigma v_1}{\Sigma \frac{v_1}{i_q}}$$

$$I_q^1 = \frac{\Sigma q_0 p_1 \cdot i_q}{\Sigma q_0 p_1}$$

Az érték-, volumen- és árindex közötti összefüggés

$$i_v = i_q \cdot i_p$$

$$I_v = I_q^0 \cdot I_p^1$$

$$I_v = I_q^1 \cdot I_p^0$$

$$I_v = I_q^F \cdot I_p^F$$

Különbségfelbontás

$$K_v = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_0 p_0$$

$$K_q^0 = \Sigma q_1 p_0 - \Sigma q_0 p_0$$

$$K_p^1 = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_1 p_0$$

$$K_v = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_0 p_0$$

$$K_q^1 = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_0 p_1$$

$$K_p^0 = \Sigma q_0 p_1 - \Sigma q_0 p_0$$

Összefüggések:

$$K_v = K_q^0 + K_p^1 = K_q^1 + K_p^0$$

Területi volumenindex

$$Iq^{A}_{A/B} = \frac{\sum q_A p_A}{\sum q_B p_A} \qquad Iq^{A}_{B/A} = \frac{\sum q_B p_A}{\sum q_A p_A}$$

$$Iq^{B}_{A/B} = \frac{\sum q_A p_B}{\sum q_B p_B} \qquad Iq^{B}_{B/A} = \frac{\sum q_B p_B}{\sum q_A p_B}$$

$$Iq^{\text{Fisher}}_{A/B} = \sqrt{Iq^{A}_{A/B} Iq^{B}_{A/B}} \qquad Iq^{\text{Fisher}}_{B/A} = \sqrt{Iq^{A}_{B/A} Iq^{B}_{B/A}}$$

Területi árindex

$$Ip^{A}_{A/B} = \frac{\sum q_A p_A}{\sum q_A p_B} \qquad Ip^{A}_{B/A} = \frac{\sum q_A p_B}{\sum q_A p_A}$$

$$Ip^{B}_{A/B} = \frac{\sum q_B p_A}{\sum q_B p_B} \qquad Ip^{B}_{B/A} = \frac{\sum q_B p_B}{\sum q_B p_A}$$

$$Ip^{\text{Fisher}}_{A/B} = \sqrt{Ip^{A}_{A/B} Ip^{B}_{A/B}} \qquad Ip^{\text{Fisher}}_{B/A} = \sqrt{Ip^{A}_{B/A} Ip^{B}_{B/A}}$$

Indexsorok

- **Értékindexsorok:**
  - Bázis
  - Lánc
- **Volumenindexsorok:**
  - Bázis
    - Állandó súlyozású
    - Változó súlyozású (B,T)
  - Lánc
    - Állandó súlyozású
    - Változó súlyozású (B,T)
- **Árindexsorok:**
  - Bázis
    - Állandó súlyozású
    - Változó súlyozású (B,T)
  - Lánc
    - Állandó súlyozású
    - Változó súlyozású (B,T)

Indexsorok

Értékindexsorok:

- Bázis-értékindexsor (0. év a bázis)

$$\underset{(100\%)}{\frac{\sum q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}}, \quad \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}, \quad \frac{\sum q_2 p_2}{\sum q_0 p_0}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_0}$$

- Lánc-értékindexsor

$$-, \quad \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}, \quad \frac{\sum q_2 p_2}{\sum q_1 p_1}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_{n-1} p_{n-1}}$$

Indexsorok

Bázis volumenindexsorok:

- Állandó súlyozású bázis-volumenindexsor:
  (bázis: a 0. időszak mennyisége, állandó súly: a 0. időszak ára)

$$100\%, \quad \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \quad \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_0 p_0}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_0}{\sum q_0 p_0}$$

- Változó súlyozású bázis-volumenindexsor (bázis: 0. év) - (B)

$$100\%, \quad \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \quad \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_0 p_1}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_{n-1}}{\sum q_0 p_{n-1}}$$

- Változó súlyozású bázis-volumenindexsor (bázis: 0. év) - (T)

$$100\%, \quad \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}, \quad \frac{\sum q_2 p_2}{\sum q_0 p_2}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_n}$$

Indexsorok

Lánc volumenindexsorok:

- Állandó súlyozású lánc-volumenindexsor:
  (állandó súly: a 0. időszak ára)

$$-, \quad \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \quad \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_0}{\sum q_{n-1} p_0}$$

- Változó súlyozású lánc-volumenindexsor - (B)

$$-, \quad \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \quad \frac{\sum q_2 p_1}{\sum q_1 p_1}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_{n-1}}{\sum q_{n-1} p_{n-1}}$$

- Változó súlyozású lánc-volumenindexsor - (T)

$$-, \quad \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}, \quad \frac{\sum q_2 p_2}{\sum q_1 p_2}, \ \dots, \quad \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_{n-1} p_n}$$

Indexsorok

Bázis árindexsorok:

- Állandó súlyozású bázis-árindexsor:
  (bázis: a 0. időszak mennyisége, állandó súly: a 0. időszak ára)

$$100\,\%,\quad \frac{\sum q_0p_1}{\sum q_0p_0},\ \frac{\sum q_0p_2}{\sum q_0p_0},\ \ldots,\ \frac{\sum q_0p_n}{\sum q_0p_0}$$

- Változó súlyozású bázis-árindexsor (bázis: 0. év) - (B)

$$100\,\%,\quad \frac{\sum q_0p_1}{\sum q_0p_0},\ \frac{\sum q_1p_2}{\sum q_1p_0},\ \ldots,\ \frac{\sum q_{n-1}p_n}{\sum q_{n-1}p_0}$$

- Változó súlyozású bázis-árindexsor (bázis: 0. év) - (T)

$$100\%,\quad \frac{\sum q_1p_1}{\sum q_1p_0},\ \frac{\sum q_2p_2}{\sum q_2p_0},\ \ldots,\ \frac{\sum q_np_n}{\sum q_np_0}$$

Indexsorok

Lánc árindexindexsorok:

- Állandó súlyozású lánc-árindexsor:
  (állandó súly: a 0. időszak ára)

$$-,\quad \frac{\sum q_0p_1}{\sum q_0p_0},\ \frac{\sum q_0p_2}{\sum q_0p_1},\ \ldots,\ \frac{\sum q_0p_n}{\sum q_0p_{n-1}}$$

- Változó súlyozású lánc-árindexsor - (B)

$$-,\quad \frac{\sum q_0p_1}{\sum q_0p_0},\ \frac{\sum q_1p_2}{\sum q_1p_1},\ \ldots,\ \frac{\sum q_{n-1}p_n}{\sum q_{n-1}p_{n-1}}$$

- Változó súlyozású lánc-árindexsor - (T)

$$-,\quad \frac{\sum q_1p_1}{\sum q_1p_0},\ \frac{\sum q_2p_2}{\sum q_2p_1},\ \ldots,\ \frac{\sum q_np_n}{\sum q_np_{n-1}}$$