

**Міністерство освіти і науки України  
Державний заклад  
«Луганський національний університет  
імені Тараса Шевченка»**

# **АКТУАРНА МАТЕМАТИКА**

## **ЧАСТИНА 1**

*Навчальний посібник*

**Луганськ  
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»  
2009**

**УДК 51-7(075.8)**  
**ББК 22.1я73**  
**А 43**

**Рецензенти:**

*Димарський Я.М.* – доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедри інформатики Луганського державного університету внутрішніх справ імені Е.О. Дідоренка.

*Семенов М.А.* – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри економічної інформатики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

**А-43 Актуарна математика. Ч. 1:** навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / упоряд.: О. М. Іє, С. А. Сотникова; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ: Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2009. – 132 с.

Видання призначене для студентів та викладачів, які спеціалізуються з прикладних напрямків статистики, зокрема для студентів, що навчаються за спеціальностями 7.080102 «Статистика», 6.030506 «Прикладна статистика».

Посібник містить програму курсу «Актуарна математика», загальні методичні вказівки, приклади розв'язування задач, питання та завдання для самоконтролю по темах курсу, матеріал для самостійного опрацювання. У першій частині посібника основна увага приділяється майновому та особистому страхуванню.

**УДК 51-7(075.8)**  
**ББК 22.1я73**

*Затверджено до друку навчально-методичною радою  
Луганського національного університету імені Тараса  
Шевченка (протокол № 8 від 06.05.2009 року).*

© Іє О.М., Сотникова С.А., 2009  
© ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2009

## ЗМІСТ

---

<b>Вступ</b> .....	5
<b>Структура курсу за темами</b> .....	6
<b>Модуль 1. Майнове страхування</b> .....	7
Тема 1. Актуарні розрахунки.....	7
1.1. Суть та завдання актуарних розрахунків. ....	7
1.2. Страховий ринок.....	9
Тема 2. Тарифна ставка. ....	14
2.1. Структура та методи розрахунку тарифної ставки. ....	14
2.2. Визначення тарифів за новими видами страхування. ....	18
Тема 3. Суть та види страхових премій.....	21
3.1. Страхові премії. ....	21
3.2. Види страхових премій. ....	25
Тема 4. Майнове страхування.....	30
4.1. Структура майнового страхування. ....	30
4.2. Добровільне страхування майна підприємств... ..	32
4.3. Добровільне страхування домашнього майна громадян. ....	34
Приклади розв'язання задач до модуля 1 .....	37
Питання для самоконтролю до модуля 1.....	49
Задачі до модуля 1 .....	50
<b>Модуль 2. Особисте страхування</b> .....	55
Тема 5. Соціальне страхування.....	55
5.1. Основні поняття соціального страхування. ....	55
5.2. Загальнообов'язкове державне соціальне страхування. ....	56
Тема 6. Ймовірнісні характеристики тривалості життя. .	58
6.1. Функція виживання. ....	58
6.2. Крива смертності. ....	61
6.3. Функція інтенсивності смертності.....	63

---

6.4. Показники тривалості життя.....	63
6.5. Аналітичні закони смертності.....	65
Тема 7. Залишкова тривалість життя.....	68
7.1. Залишковий час життя.....	68
7.2. Часткова залишкова тривалість життя й округлений залишковий час життя.....	71
7.3. Сплайнові апроксимації для дробових віків.....	72
Приклади розв'язання задач до модуля 2.....	75
Питання для самоконтролю до модуля 2.....	86
Задачі до модуля 2.....	87
<b>Матеріал для самостійного опрацювання.....</b>	<b>91</b>
Тема 1. Актуарні розрахунки в добровільному медичному страхуванні.....	91
1.1. Добровільне медичне страхування.....	91
1.2. Розрахунок тарифних ставок по ДМС.....	93
Тема 2. Страхування на випадок непрацездатності- інвалідності.....	96
2.1. Непрацездатність-інвалідність.....	96
2.2. Технічна база страхування на випадок інвалідності.....	97
2.3. Особливості страхування на випадок непрацездатності чи інвалідності.....	104
Тема 3. Страхування від нещасного випадку та хвороби.....	107
3.1. Страхування на випадок хвороби.....	109
3.2. Страхування медичних витрат.....	110
3.3. Розрахунок чистої премії з повного страхування на випадок хвороби.....	113
3.4. Страхування на випадок необхідності в опіці.....	118
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>126</b>
<b>Додатки.....</b>	<b>127</b>
<b>Список використаної та рекомендованої літератури.....</b>	<b>131</b>

## ВСТУП

Удосконалення в Україні ринкової економіки, розбудова її інфраструктури, створення дієвих механізмів господарювання для усіх суб'єктів ринку передбачає необхідність теоретичного з'ясування суті страхової діяльності, пошук адекватних новим умовам методів захисту та відшкодування втрат як фізичним, так і юридичним особам.

Підприємець у ринкових умовах ризикує втратити свій капітал. Працівник може втратити роботу, здоров'я, працездатність, заощадження, майно тощо. Суттєво впливає на зростання ризиків, пов'язаних із технікою та технологією, розвиток науково-технічного прогресу. Зростання ризику в усіх сферах людського життя та господарської діяльності зумовлює необхідність захисту громадян від можливих втрат.

Страхування у ринковій економіці ґрунтується на попередньому створенні страхових фондів із страхових внесків та на відшкодуванні збитків потерпілим учасникам. Отже, *страхування* – це спосіб захисту майнових інтересів громадян в умовах ринкової економіки. Кожна людина має знати, як вона може обмежити свій ризик і скільки їй це коштуватиме.

Страхова діяльність, як і будь-який різновид економічної діяльності, пов'язана з витратами. Визначення витрат, необхідних для страхування даного об'єкта, називається *актуарними розрахунками* та розглядається в *актуарній математиці*.

Мета курсу «Актуарна математика» – формування у студентів знань, умінь та навичок, необхідних для засвоєння та раціонального використання понять, законів і методів актуарної математики для актуарних розрахунків, як самостійного предмета вивчення, так і засобу для вивчення суміжних дисциплін. Даний посібник призначений для успішного оволодіння читачем понять та методів курсу «Актуарна математика».

---

## СТРУКТУРА КУРСУ ЗА ТЕМАМИ

### ЧАСТИНА 1

#### Модуль 1. Майнове страхування

- Тема 1. Актуарні розрахунки.
- Тема 2. Тарифна ставка.
- Тема 3. Суть та види страхових премій.
- Тема 4. Майнове страхування.

#### Модуль 2. Особисте страхування

- Тема 5. Соціальне страхування.
- Тема 6. Ймовірнісні характеристики тривалості життя.
- Тема 7. Залишкова тривалість життя.

#### Матеріал для самостійного опрацювання

- Тема 1. Актуарні розрахунки в добровільному медичному страхуванні.
- Тема 2. Страхування на випадок непрацездатності-інвалідності.
- Тема 3. Страхування від нещасного випадку та хвороби.

### ЧАСТИНА 2

#### Модуль 1. Пенсійне страхування

- Тема 1. Схеми пенсійного страхування.
- Тема 2. Загальна теорія пенсійного страхування.
- Тема 3. Колективні методи пенсійного страхування.

#### Модуль 2. Страхові компанії

- Тема 4. Поведінка страхових компаній.
- Тема 5. Перестраховання.
- Тема 6. Розорення страхових компаній.

#### Матеріал для самостійного опрацювання

- Тема 1. Фінансова стійкість страхових операцій та методи її забезпечення.
- Тема 2. Випадкова величина показника результатів.
- Тема 3. Промислові ризики.

## **МОДУЛЬ 1. МАЙНОВЕ СТРАХУВАННЯ**

---

- ◆ *Актуарні розрахунки.*
- ◆ *Тарифна ставка.*
- ◆ *Суть та види страхових премій.*
- ◆ *Майнове страхування.*

### **Тема 1. Актуарні розрахунки**

#### **1.1. Суть та задачі актуарних розрахунків**

За допомогою *актуарних розрахунків* визначається частка участі кожного страховика в створенні страхового фонду, тобто розмір тарифних ставок. Форма, за якою ведеться обрахунок витрат на ведення певного об'єкта страхування, називається *актуарною калькуляцією*. За її допомогою можна визначити собівартість послуги страховика, страхові платежі, розмір страхового ризику, суму та частку витрат на ведення справи з обслуговування договору страхування.

*Актуарні розрахунки у страховій справі ґрунтуються на наступних принципах:*

- страхові події мають ймовірністний характер, що впливає на величину страхових платежів;
- загальна закономірність проявляється через сукупність відокремлених страхових випадків, що зумовлює необхідність розрахунку собівартості страхової послуги стосовно всієї страхової сукупності;
- нерівномірність та ймовірністний характер подій, які підлягають страхуванню, зумовлюють необхідність формування спеціальних резервів, які перебувають в розпорядженні страховика, а також визначення їх оптимального розміру;

- необхідність прогнозування сторнування (зменшення страхового портфеля) договорів та експертного оцінювання їхньої величини;
- необхідність дослідження норми позичкового процента впродовж певного проміжку часу та виявлення тенденцій його руху;
- наявність повного або часткового збитку, пов'язаного зі страховим випадком, зумовлює необхідність вимірювання його величини та здійснення його розподілу в просторі та в часі за допомогою спеціальних таблиць;
- необхідність дотримання еквівалентності між страховими внесками страховика та страховим забезпеченням з боку страхувальника;
- потреба у виділенні групи ризику в межах даної страхової сукупності.

*Задачі актуарних розрахунків:*

- дослідження та групування ризиків у межах страхової сукупності;
- визначення математичної ймовірності настання страхового випадку, обчислення частоти й міри складності наслідків спричинених збитків як за групами ризику, так і за всією страховою сукупністю;
- математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення страхової справи та прогнозування тенденцій їх розвитку;
- математичне обґрунтування необхідних резервних фондів страховика, а також джерел та способів їх формування;



- дослідження норми дохідності капіталу при інвестуванні страховиком зібраних страхових внесків, а також тенденцій її зміни протягом певного часового інтервалу;
- визначення залежності між величинами процентної ставки та брутто-ставки.

*Класифікація актуарних розрахунків:*

- *за видами страхування:* актуарні розрахунки в майновому, особистому страхуванні та страхуванні відповідальності. У майновому страхуванні у зв'язку зі значним коливанням ризику актуарні розрахунки передбачають визначення *надбавки за ризик*. Ця надбавка, як правило, не визначається при актуарних розрахунках за особистим страхуванням, де ризик більш-менш рівномірний;
- *залежно від часу складання:* планові (для нових видів страхування) та звітні (за здійсненими операціями);
- *залежно від ієрархії:* для всієї країни (загальні), для регіону (зональні), для району (територіальні).

## 1.2. Страховий ринок

Наведемо необхідні страхові поняття.

*Страховий захист* – сукупність розподільчих та перерозподільчих відносин з приводу відшкодування збитків та надання матеріальної допомоги громадянам у разі загибелі або ушкодження матеріальних об'єктів, або втрат у сімейних доходах населення у зв'язку з втратою здоров'я, працездатності та іншими подіями.

*Страховий інтерес* – усвідомлена потреба в захисті майна, доходів, життя, здоров'я, працездатності тощо шляхом страхування.

*Страховики* – юридичні особи (акціонерні, повні, командитні товариства або товариства з додатковою відповідальністю), що одержали у встановленому порядку ліцензію на здійснення страхової діяльності. Вони встановлюють умови страхування та пропонують страхові послуги своїм клієнтам.

*Страхувальники* – юридичні особи та дієздатні громадяни, які уклали зі страховиками договори щодо страхування свого власного інтересу або інтересу третьої особи, сплачують страхові премії й мають право (за договором або за законом) на отримання компенсації (відшкодування) при настанні страхового випадку.

*Страхова сума* – сума, на яку страхується об'єкт за законом (обов'язкове страхування) або за договором (добровільне страхування).

*Страховий випадок* – подія, з настанням якої страховик зобов'язаний за законом або за договором виплатити страхове відшкодування (страхову суму).

*Страхове свідоцтво (страховий поліс)* – документ, що засвідчує факт страхування відповідно до правил страхування.

**Означення.** *Страховий ринок* – частина фінансового ринку, де об'єктом купівлі-продажу виступає страховий захист, формуються попит і пропозиція на нього.

Головною функцією страхового ринку є акумуляція та розподіл страхового фонду з метою страхового захисту суспільства.

Об'єктивна необхідність виникнення та розвитку страхового ринку зумовлюється наявністю суспільної потреби у страхових послугах та наявністю страховика, здатного їх задовольнити. Залежно від критерію, покладеного в основу класифікації страхового ринку,

розрізняють інституціональну, територіальну, галузеву та організаційну структури.

*Інституціональна структура* ґрунтується на розмежуванні приватної, публічної або комбінованої форм власності, на якій створюється страхова організація. Вона може бути представлена акціонерними, корпоративними, взаємними, державними страховими компаніями.

У *територіальному аспекті* виділяють місцевий (регіональний), національний (внутрішній) та світовий (зовнішній) страхові ринки. *Місцевий* (регіональний) ринок задовольняє страхові інтереси регіону; *національний* – інтереси, що переросли межі регіону і розширились до рівня нації (держави), *світовий* – задовольняє попит на страхові послуги в масштабі світового господарства.

*За галузевою ознакою* виділяють ринки *особистого* та *майнового* страхування. Кожна з названих ланок має свою структуру (сегментацію).

Організаційна *структура страхового ринку* може бути представлена наступним чином.

1. Страхове товариство або страхова компанія, де відбувається формування страхового фонду і переплітаються індивідуальні, колективні та групові інтереси. Свої стосунки з іншими страховиками економічно відокремлені страхові товариства будують на основі співстрахування та перестрахування.

2. Страхові товариства можуть об'єднуватись у спілки, асоціації, пули та інші об'єднання для координації діяльності, захисту інтересів своїх членів та здійснення спільних програм, якщо їх утворення не суперечить законодавству України. Вони не мають права займатися страховою діяльністю.

3. Товариства взаємного страхування – юридичні особи – страховики, створені відповідно до Закону України «Про страхування» з метою страхування ризиків цього товариства. Сплата страхового платежу здійснюється за рахунок чистого прибутку, що залишається у розпорядженні членів товариства, крім випадків, передбачених законодавством України. Кожний член товариства за умови використання ним усіх зобов'язань перед товариством взаємного страхування, незалежно від суми страхового внеску, має право отримати повністю необхідне страхове відшкодування у разі настання страхового випадку.

4. Страхові агенти та страхові брокери – страхові посередники, через яких страховики здійснюють страхову діяльність. Страхове законодавство визначає їхні функції наступним чином:

- консультивання;
- експертно-інформаційні послуги;
- підготовка, укладення та супровід договорів страхування (перестраховання), в тому числі щодо врегулювання збитків у частині одержання та перерахування страхових платежів, страхових виплат та страхових відшкодувань відповідно зі страховиком або перестраховиком;
- інші посередницькі послуги у страхуванні та перестрахованні за переліком, встановленим Уповноваженим органом.

*Страхові агенти* – громадяни або юридичні особи, які діють від імені та за дорученням страховика і виконують частину його страхової діяльності (укладання договорів страхування, одержання страхових платежів, виконання робіт, пов'язаних з виплатами страхових сум і страхового відшкодування). Страхові агенти є

представниками страховика та діють в його інтересах за комісійну винагороду на підставі договору зі страховиком.

*Страхові брокери* – громадяни або юридичні особи, які зареєстровані у встановленому порядку як суб'єкти підприємницької діяльності та здійснюють посередницьку діяльність на страховому ринку за винагороду від свого імені на підставі доручень страховика або страхувальника. Страхові брокери – громадяни, які не мають права отримувати та перераховувати страхові платежі, страхові виплати та виплати страхового відшкодування.

5. Перестраховальні компанії (перестраховики) – організації, які не виконують прямих страхових операцій, а приймають у перестраховання ризики інших страховиків і можуть передавати частину з них в ретроцесію.

6. Перестрахові брокери – юридичні особи, які здійснюють за винагороду посередницьку діяльність у перестрахованні від свого імені на підставі брокерської угоди зі страховиком, який має потребу у перестрахованні як посередник.

7. Моторне (транспортне) страхове бюро – юридична особа, що утримується за рахунок коштів страховиків, яким дозволено займатися страхуванням відповідальності власників транспортних засобів за шкоду, заподіяну третім особам, та за умовами, передбаченими міжнародними договорами України щодо вказаного виду страхування.

8. Спеціальний Уповноважений орган у справах нагляду за страховою діяльністю, який здійснює нагляд з боку держави з метою дотримання вимог учасниками страхового ринку законодавства України про страхування, ефективного розвитку страхових послуг, запобігання неплатоспроможності страховиків та захисту інтересів страхувальника.

## Тема 2. Тарифна ставка

### 2.1. Структура та методи розрахунку тарифної ставки

**Означення.** *Тарифна ставка* – ціна страхового ризику та інших витрат, необхідних для виконання зобов'язань страховика перед страхувальником за підписаним договором страхування. Сукупність тарифних ставок називається *тарифом*.

Система відображення тарифів називається *тарифним керівництвом*.

**Означення.** Тарифна ставка, за якою укладається страховий договір, називається *брутто-ставкою*. Вона складається з двох частин: нетто-ставки та навантаження.

*Нетто-ставка* – ціна страхового ризику (вибуху, пожежі тощо).

*Навантаження* – вартість, яка покриває витрати страховика з організації та ведення страхової справи, а також містить елементи прибутку.

Для розрахунку тарифів можуть бути використані кілька методів:

- ◆ на основі теорії ймовірностей та методів математичної статистики з використанням часових рядів;
- ◆ на базі експертних оцінок;
- ◆ за аналогією до інших об'єктів або компаній;
- ◆ з використанням математичної статистики й розрахунку дохідності.

*Методика розрахунків тарифної ставки на основі теорії ймовірностей:*

- ◆ визначення ймовірності настання страхового випадку;
- ◆ розрахунок нетто-ставки із 100 грн.;
- ◆ розрахунок ризикової надбавки з використанням стійких статистичних рядів;
- ◆ визначення можливого інтервалу змін показника з певною мірою ймовірності;

- ◆ розрахунок брутто-ставки виходячи із планової рентабельності;
- ◆ визначення структури брутто-ставки та частки кожного елемента в ній.

Нетто-ставка визначається за формулою:

$$T_H = PK100,$$

де  $T_H$  – тарифна нетто-ставка, грн.;  $P$  – ймовірність страхової події;  $K$  – коефіцієнт відношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір; 100 – одиниця страхової суми (100 грн.).

$$P = \frac{K_B}{K_D},$$

де  $K_B$  – кількість виплат за певний період (рік);  $K_D$  – кількість підписаних за рік договорів.

$$K = \frac{C_B}{C_C},$$

де  $C_B$  – середня виплата на один договір;  $C_C$  – середня страхова сума на один договір.

Отже,

$$T_H = \frac{K_B C_B}{K_D C_C} 100,$$

чи

$$T_H = \frac{B}{C} 100,$$

де  $B$  – загальна сума виплат страхового відшкодування;  
 $C$  – загальна страхова сума застрахованих об'єктів.

У майновому страхуванні виникає потреба обчислення *ризикової надбавки*. Розглянемо методику її розрахунку.

На практиці іноді у страховика виникає запас страхового фонду, а іноді – дефіцит. Через це створюється резервний фонд. Він розраховується на основі показника — середньоквадратичного відхилення ( $\sigma$ ) за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (q_i - \bar{q})^2}{(n - 1)}}$$

де  $q_i$  – число страхових подій кожного року (місяця);  $\bar{q}$  – середня кількість страхових подій;  $n$  – тарифний період.

Статистично встановлено: одиничне середньоквадратичне відхилення гарантує 68% упевненості в тому, що витрати не вийдуть за межі тарифу; подвійне – 95%, а потрійне – 97,9%. Відхилення, вищі трикратного середньоквадратичного, не використовують, оскільки, по-перше, 100%-ї гарантії того, що втрати не перевищать величини тарифу, не можна досягти, і, по-друге, чотирикратне і ще вищі середньоквадратичні відхилення значно підвищували б тарифну ставку, а це звужувало б страхове поле внаслідок здорожчання страхових послуг.

Ще однією частиною тарифної ставки є *витрати на ведення страхової справи*. Ці витрати нормувати практично неможливо, оскільки факторів, що впливають на їх величину, багато і до того ж вони змінні. Найчастіше в актуарних розрахунках використовують класифікацію, яка відображає такі витрати на ведення страхової справи:

- ◆ організаційні;
- ◆ аквізиційні;
- ◆ ліквідаційні;
- ◆ управлінські;
- ◆ інкасаційні.



*Організаційні* – витрати, пов'язані із заснуванням страхової компанії, їх відносять до активів страховика, оскільки вони, по суті, є інвестиціями.

*Аквізиційні* – витрати, пов'язані із залученням нових страхувальників й укладенням нових страхових договорів при посередництві страхових агентів.

*Ліквідаційні* – витрати з ліквідації збитків, спричинених страховим випадком; на оплату праці ліквідаторам (особам, що займаються ліквідацією збитків); понятим; судові витрати; поштово-телеграфні; витрати на відшкодування збитків страховику.

*Управлінські* – загальні управлінські витрати та витрати з управління майном.

*Інкасаційні* – витрати, пов'язані з обслуговуванням готівкового обороту надходжень страхових платежів. Сюди входять витрати на виготовлення бланків квитанцій про прийняття страхових платежів, облікових реєстрів: книг, відомостей, довідок тощо.

Останньою складовою тарифу є *прибуток від страхових операцій*. Він не є обов'язковим компонентом страхового тарифу. Страховик може відмовитись закладати прибуток на деякий проміжок часу з того чи іншого об'єкта з метою розширення страхового поля. Однак, оскільки страхування – комерційна діяльність, вона має бути прибутковою. У зв'язку з цим розглянемо прибуток як структурний елемент тарифу. Оскільки згідно з інструкцією з ліцензування страхової діяльності величина страхових резервів становить не більш ніж 50% від страхових платежів, тариф дорівнюватиме нетто-ставці, помноженій на 2.

Норматив витрат на ведення страхової справи встановлюють у певному процентному відношенні до бруто-ставки, а прибуток – до собівартості. Якщо перший

норматив встановити на рівні 20-25%, а прибуток – на рівні 5% від собівартості, то тариф буде значно нижчим.

Загальна методика розрахунку тарифу має вигляд:

$$T = T_H + H = T_H + H_C + H_o T_o,$$

де  $T$  – тариф;  $T_o$  – брутто-ставка;  $T_H$  – нетто-ставка;  $H$  – навантаження;  $H_C$  – статті навантаження, що встановлюються в абсолютній сумі;  $H_o$  – статті навантаження, закладені в тариф у відсотках до брутто-ставки.

Або

$$T_o = \frac{100(T_H + H_C)}{100 - H_o}.$$

Якщо ж усі елементи навантаження визначено у відсотках до брутто-ставки, то величину брутто-ставки розраховують за формулою

$$T_o = \frac{100T_H}{100 - H_o}.$$

## 2.2. Визначення тарифів за новими видами страхування

Для нових видів страхування тарифна ставка складається з нетто-ставки та навантаження (ризикової надбавки). Але, на відміну від діючих видів страхування, в яких основою нетто-ставки є збитковість зі 100 грн страхової суми, основою нетто-ставки за новими видами страхування є очікувана частота страхового випадку та ймовірне співвідношення середньої очікуваної виплати на відшкодування збитків і середньої очікуваної страхової суми. Ризикова надбавка встановлюється на основі використання коефіцієнта вибірки.

**Означення.** *Очікувана частота страхового випадку* за новим видом страхування визначається як відношення числа потенційних об'єктів страхування, що будуть потребувати страхового відшкодування внаслідок страхової події, до загальної кількості очікуваних застрахованих об'єктів, тобто

$$Ч_{св} = \frac{K_{св.оч}}{K_o},$$

де  $Ч_{св}$  – очікувана частота страхових випадків за новим видом страхування;  $K_{св.оч}$  – кількість очікуваних страхових подій (виплат страхового відшкодування або страхових сум за певний проміжок часу);  $K_o$  – загальна кількість очікуваних (потенційних) об'єктів страхування.

Для підрахунку нетто-ставки за новими видами страхування слід враховувати *коефіцієнт поправки*. Він визначається за формулою

$$K_{п} = \frac{C_{в.оч}}{C_{с.с.оч}},$$

де  $K_{п}$  – коефіцієнт поправки;  $C_{в.оч}$  – очікувана середня виплата на один договір (об'єкт) страхування;  $C_{с.с.оч}$  – очікувана середня страхова сума на один договір (об'єкт) страхування.

Величина ризикової надбавки розраховується за допомогою *коефіцієнта вибірки*, що дає змогу враховувати вплив рівня розвитку даного виду страхування на рівень збитковості страхової суми. Зв'язок між ними обернено пропорційний, тобто зі зростанням рівня розвитку (страхове поле розширюється) рівень збитковості знижується. Це пояснюється тим, що у сферу даного виду страхування залучається все більше страхувальників, які менше підлягають ризику. Коефіцієнт вибірки має вигляд:

$$K_{\text{виб}} = \frac{1 - K_B(1 - K_P)}{K_P},$$

де  $K_{\text{виб}}$  – коефіцієнт вибірки;  $K_B$  – коефіцієнт відставання відносного зниження (зростання) суми виплат порівняно зі зниженням (зростанням) рівня розвитку страхування;  $K_P$  – коефіцієнт очікуваного рівня розвитку страхування.

Коефіцієнт очікуваного рівня розвитку страхування визначається за формулою

$$K_P = \frac{P_p}{100\%},$$

де  $P_p$  – очікуваний рівень розвитку страхування, %.

Коефіцієнт розвитку не може бути більшим від 1 та меншим від 0:  $0 < K_P < 1$ . Чим ближчий коефіцієнт рівня розвитку страхування до 0, тим вища вибірка страхування, якщо  $K_P$  прямує до 1, вибірка зменшується. Для коефіцієнту відставання маємо:  $0 < K_B < 1$ .  $K_B$  показує міру зменшення виплат страховиком зі зменшенням рівня розвитку на 1%.

Нетто-ставка за новим видом страхування визначається шляхом множення трьох розглянутих коефіцієнтів. Оскільки тарифна ставка, як правило, розраховується зі страхової суми 100 грн., то добуток трьох коефіцієнтів слід помножити на 100. Отже, *тарифна нетто-ставка* матиме вигляд:

$$T_H = C_{\text{св}} K_{\text{П}} K_{\text{виб}} 100.$$

До обчисленої за вже наведеною методикою основної частини нетто-ставки додається ризикова надбавка за кожним ризиковим видом страхування. Отриманий результат є певною часткою тарифної брутто-

ставки, з якої формується фонд виплат за даним видом страхування.

На основі встановленого нормативу нетто-ставки в брутто-ставці визначається розмір брутто-ставки, а потім – окремих часток навантаження (в гривнях із 100 грн. страхової суми). Формула, за якою визначають *брутто-ставку* має вигляд:

$$T_{\sigma} = \frac{T_H 100}{100 - f},$$

де  $T_{\sigma}$  – тарифна брутто-ставка, грн.;  $T_H$  – тарифна нетто-ставка, грн.;  $f$  – частка навантаження в брутто-ставці згідно з нормативом, %.

### Тема 3. Суть та види страхових премій

#### 3.1. Страхові премії

*Страхова премія* (страховий внесок) має трьохаспектну форму прояву: економічну, юридичну та математичну.

*Економічний зміст страхової премії* проявляється в тому, що вона є частиною національного доходу, яка виділяється страхувальником з метою забезпечення гарантування його інтересів на випадок небажаних, несприятливих для нього подій (страхових подій).

В *юридичному аспекті страхова премія* – грошовий вираз страхового зобов'язання, яке відображене у страховому договорі.

*Математичний зміст страхової премії* полягає в тому, що вона набирає форму періодично повторюваного платежу страховика страхувальнику.

Під час розгляду змісту страхової калькуляції зазначалось, що при визначенні індивідуального розміру платежу має враховуватись уся страхова сукупність.

Зобов'язання за окремим видом страхування розраховується як середня величина.

*Вартість ренти* – довічний або на певний період часу річний дохід, який страхувальник зобов'язується сплачувати страховику.

Зазначене свідчить: страховий внесок у математичному сенсі виражається як середня величина, тобто як частка, що припадає на один поліс страхового портфеля, від усіх зобов'язань страхувальника.

На практиці досить часто страхова премія, яку страховик зобов'язаний сплатити страховику за взяті ним на себе ризики, встановлюється в певних відсотках від страхової суми (розроблені категорії).

У *майновому страхуванні страховий внесок* може бути представлений середньою величиною, що є співвідношенням між загальним очікуваним розміром платежів страховика ( $\sum Q$ ) за певний проміжок часу й загальним числом застрахованих об'єктів ( $n$ ), тобто

$$P = \frac{\sum Q}{n}.$$

У загальному плані *страхова премія* ( $P$ ) – середня величина відносно страхової сукупності.

Страховий внесок (премія) показує, як розподіляється загальний розмір зобов'язань страховика на кожен окремо взятую одиницю страхової сукупності. Величина страхової премії залежить від ряду показників і насамперед від галузевих особливостей особистого та майнового страхування.

Для визначення страхових премій за майновим страхуванням слід враховувати: ймовірність настання страхового випадку, частоту та складність ризику, коефіцієнт кумуляції ризику, коефіцієнт збитковості,

збитковість страхової суми, норму збитковості, частоту збитків тощо.

Розглянемо деякі з показників в загальному випадку.

**Означення.** *Частота страхових подій* – показник, який характеризує кількість страхових подій у розрахунку на один об’єкт страхування:

$$Ч_{c.n} = \frac{L}{n},$$

де  $Ч_{c.n}$  – частота страхових подій;  $L$  – кількість страхових подій, од.;  $n$  – число об’єктів страхування, од.

Якщо  $Ч_{c.n} < 1$ , то це означає, що одна страхова подія спричинила багато страхових випадків (наприклад, паводком пошкоджено багато страхових об’єктів).

**Означення.** *Коефіцієнт кумуляції* (накопичення) *ризик*у показує середню кількість об’єктів, що постраждали від страхової події:

$$K_k = \frac{m}{L},$$

де  $K_k$  – коефіцієнт кумуляції ризику;  $m$  – кількість застрахованих об’єктів, що постраждали внаслідок страхового випадку, од.;  $L$  – число страхових подій, од.

Мінімальне значення коефіцієнта кумуляції дорівнює одиниці, тобто число страхових подій дорівнює числу страхових випадків. Якщо  $K_k > 1$ , то це означає, що на одну страхову подію припадає більше страхових випадків. Страховик уникає майнового страхування ризиків з великим коефіцієнтом кумуляції.

**Означення.** Коефіцієнт збитковості ( $K_{зб}$ ) показує частку виплаченого страхового відшкодування в страховій сумі усіх об'єктів, що постраждали:

$$K_{зб} = \frac{B_T}{C_T},$$

де  $K_{зб}$  – коефіцієнт збитковості;  $B_T$  – сума виплаченого страхового відшкодування на один об'єкт, грн.;  $C_T$  – страхова сума, що припадає на один пошкоджений об'єкт страхової сукупності, грн.

$K_{зб} \leq 1$ . Це означає, що коефіцієнт збитковості не може бути більшим за одиницю, оскільки застраховані об'єкти не знищуються двічі в межах дії одного страхового договору.

**Означення.** Збитковість страхової суми (ймовірність збитків) показує частку виплаченого страховиком відшкодування збитків у страховій сумі усіх застрахованих об'єктів:

$$З = \frac{B}{C},$$

де  $З$  – збитковість страхової суми, грн.;  $B$  – сума виплаченого страхового відшкодування, грн.;  $C$  – страхова сума для всіх об'єктів страхування, грн.

Цей показник завжди менший за одиницю. Збитковість страхової суми розглядають ще як міру величини ризикової премії.

**Означення.** Середня страхова сума на один об'єкт (договір) страхування визначається як відношення загальної страхової суми всіх об'єктів страхування до кількості всіх об'єктів страхування:



$$\bar{C} = \frac{C}{n},$$

де  $\bar{C}$  – середня страхова сума на один об'єкт страхування, грн.;  $C$  – страхова сума для всіх об'єктів страхування;  $n$  – кількість об'єктів страхування, од.

**Означення.** *Норма збитковості* (коефіцієнт виплат) – відношення суми виплаченого страхового відшкодування до суми зібраних страхових премій, виражене у відсотках:

$$N_z = \frac{B}{P} 100\%,$$

де  $N_z$  – норма збитковості, %;  $B$  – сума виплаченого страхового відшкодування, грн.;  $P$  – сума зібраних страхових премій, грн. На практиці розраховують нетто-норму та брутто-норму.

*Частота збитків* визначається множенням частоти страхових подій на коефіцієнт кумуляції:

$$Ч_z = Ч_{c.n.} K_k.$$

### 3.2. Види страхових премій

*За своїм призначенням* страхові внески набувають наступних форм:

- ◆ ризикова премія;
- ◆ заощаджувальний (нагромаджувальний) внесок;
- ◆ нетто-премія;
- ◆ достатній внесок;
- ◆ брутто-премія (тарифна ставка).

*Ризикова премія* – чиста нетто-премія. Це частина страхового внеску в грошовій формі, покликана забезпечити покриття ризику, її величина залежить від ступеня ймовірності настання страхового випадку. Ризиковий внесок є функцією від ймовірності настання

ризик. В особистому страхуванні вона залежить від структури за віком та статтю, у майновому – ризикові премії відносно постійні.

*Заощаджувальний (нагромаджувальний)* внесок має місце при страхуванні життя. Він мусить покривати платежі страховика по закінченні строку страхування. Як правило, умови страхування вимагають, щоб страхова нетто-премія протягом дії договору залишалася сталою, а зі зростанням ризику збільшувалася ризикова премія та зменшувалася заощаджувальна, і навпаки.

*Нетто-премія* – внесок, необхідний для покриття страхових платежів за певний проміжок часу за даним видом страхування. Якщо має місце планомірний розвиток ризику, то нетто-премія дорівнює ризиковій премії. В умовах змінного ризику передбачається гарантійна (стабілізаційна) надбавка. За цих умов нетто-премія відрізняється від ризикової на величину стабілізаційної надбавки, яка може бути виражена додатним або від’ємним числом. У майновому страхуванні нетто-премія дорівнює ризиковій премії плюс стабілізаційна надбавка, а в особистому нетто-премія дорівнює ризиковій премії плюс заощаджувальний внесок. Іноді додають ще стабілізаційну надбавку.

*Достатній внесок* – сума нетто-премії та навантаження, які включають у витрати страховика. Цей внесок розглядають як бруто-премію або тарифну ставку.

*Бруто-премія* – тарифна ставка страховика. Вона дорівнює достатньому внеску плюс надбавки, що йдуть на покриття витрат, пов’язаних з превентивними заходами, рекламою, покриттям збиткових видів страхування тощо. Кожний додатковий елемент зумовлює зростання тарифної ставки.

**За характером ризиків**, які підлягають страхуванню, страхові премії розподіляють на натуральні та постійні.

*Натуральна премія* – премія, що покриває ризик за певний проміжок часу. Вона відповідає фактичному розвитку ризику. На даний проміжок часу дорівнює ризиковій премії. У довгостроковому періоді вона змінюється зі щорічною зміною ризику. Страховик вивчає тенденції розвитку натуральної премії та з урахуванням їх, вносить корективи в політику страхової компанії.

*Постійні (фіксовані) премії* – внески, які з часом залишаються незмінними. Найпоширеніші вони в майновому страхуванні, властиві сталим ризикам, хоча стабільність відносна, оскільки зі зміною технологій змінюються і ризики, і премії.

**За формою сплати страхових внесків** їх розподіляють на:

- ◆ одноразові;
- ◆ поточні;
- ◆ річні;
- ◆ розстроченні.

*Одноразова премія* сплачується страхувальником страховику за весь період страхування наперед.

*Поточні страхові премії* – частина від загальних зобов'язань страхувальника перед страховиком. Сума поточних внесків більша від одноразового внеску.

*Річний внесок* – одноразовий внесок за договорами, які мають річний термін дії, цей внесок неподільний. В особистому страхуванні мають місце строкові та довічні річні страхові премії.

*Розстрочена премія* – розподілена на частини річна премія (за півріччями, кварталами, місяцями).

*За часом сплати страхових премій* їх розподіляють на:

- ◆ авансові;
- ◆ попередні.

*Авансові премії* – платежі, які страхувальник сплачує страховику до настання терміну їх сплати, зазначеного в договорі.

*Попередня премія* – дозволена страховиком повна або часткова сплата внеску до настання строку сплати, її розглядають як внесок заощаджувального характеру. На ці премії нараховують відсотки за вкладами. З настанням страхового випадку до закінчення строку договору страхувальник або спадкоємець отримують крім страхової суми ще й ті страхові премії, за якими строк сплати ще не настав. У цьому відмінність між авансовими та попередніми преміями.

*Залежно від того, як страхові платежі відображаються в балансі страховика*, розрізняють премії:

- ◆ перехідну;
- ◆ ефективну;
- ◆ результативну.

*Перехідні премії* утворюються внаслідок незбігання календарного та страхового року. Якщо застрахований зробив річний внесок, а застрахувався він, скажімо, у четвертому кварталі, то 3/4 його річного платежу переносять на наступний календарний рік. Це перехідні платежі.

*Ефективна премія* – вся сума наявних страхових платежів, які перебувають в розпорядженні страховика в поточному році.

*Результативна премія* – різниця між річною нетто-премією та перехідними платежами.

*За величиною* розрізняють премії:

- ◆ необхідну;
- ◆ справедливу;
- ◆ конкурентну.

*Необхідна премія* – внесок, величина якого достатня для того, щоб страховик зміг здійснити виплати страхових сум та відшкодувань.

*Справедлива премія* на засадах справедливості гри та теорії ймовірностей відображає еквівалентність зобов'язань сторін, які беруть участь у договорі страхування.

*Конкурентна премія* – внесок, який у ринкових умовах дає змогу страховику залучити максимальну кількість страхувальників.

*Залежно від способу нарахування страхових премій* їх розподіляють на:

- ◆ середні;
- ◆ ступеневі;
- ◆ індивідуальні.

*Середні* премії – платежі, які обчислюють як середньоарифметичну для всієї страхової сукупності, їх застосовують за умови, коли у страховика немає інформації щодо розвитку ризику.

*Ступеневі* передбачають при визначенні величини страхової премії врахування ступеня ризику.

*Індивідуальні премії* враховують індивідуальні особливості об'єкта страхування.

Крім вже перерахованих виділяють ще *основну* премію, яка визначається на момент підписання договору, та *додаткову*, яка передбачає надбавки до основної. Якщо страховик передає частину ризиків у перестраховання, то він передає страховику і частину премії, її називають *перестраховальною* премією.

*Цільмерівська* (резервна) премія дорівнює сумі нетто-премії та витрат із укладення договорів страхування за рік.

## **Тема 4. Майнове страхування**

### **4.1. Структура майнового страхування**

*Власність громадян* – це система економічних відносин між громадянами й державою, між громадянами та підприємствами та організаціями усіх форм власності, між самими громадянами щодо майна, яке входить у коло об'єктів особистого споживання, а також господарського, виробничого, комерційного, соціального, культурного, інтелектуального та іншого призначення. У власності громадян можуть бути: житло, земельні ділянки, предмети домашнього господарства, сільськогосподарські та інші тварини, грошові засоби, підприємства; майнові комплекси у сфері виробництва товарів, побутового обслуговування, торгівлі, в інших сферах підприємницької діяльності; споруди, устаткування, транспортні засоби, засоби інформаційного обслуговування тощо.

Із розвитком суспільства зростає обсяг майна, яке перебуває у приватній власності громадян, а отже, зростає потреба в захисті майнових інтересів громадян.

**Означення.** *Майнове страхування* – галузь страхової діяльності, в якій об'єктом страхового захисту є майно в найрізноманітніших його проявах.

До майнового страхування відносять: страхування засобів повітряного, наземного та водного транспорту, страхування вантажів, інших видів майна, страхування фінансових ризиків тощо.

Раніше майнове страхування поширювалося тільки на об'єкти особистого споживання. У зв'язку з цим все майно громадян розподілялось на дві категорії:

- *перша категорія* – пріоритетне майно, втрата якого зачіпає інтереси не тільки власника-громадянина, а й суспільні інтереси (житло, сільськогосподарські тварини);
- *друга категорія* – майно, втрата якого зачіпає насамперед особисті інтереси громадян.

Втрата громадянами майна, віднесеного до першої категорії, не може не зачіпати інтереси держави. З метою підвищення відповідальності громадян за збереження цього майна й забезпечення страхового захисту держава організовує *обов'язкове* страхування майна першої категорії, інша ж його частина підлягає добровільному страхуванню.

Закон України «Про страхування» називає тільки два різновиди *обов'язкового* страхування майна: страхування авіаційних суден та обов'язкове страхування врожаю сільськогосподарських культур, багаторічних насаджень і цукрових буряків сільськогосподарськими підприємствами всіх форм власності.

#### *Страхування врожаю сільськогосподарських культур*

За цим видом страхують врожай від засухи, вимерзання, бурі, нападу шкідників та інших хвороб. Об'єктом страхування є головна продукція культури.

У державних підприємствах страхова оцінка врожаю визначається за середньою врожайністю з 1 га. за попередні 5 років у діючих цінах.

## 4.2. Добровільне страхування майна підприємств

Цей вид страхування забезпечує страховий захист від пошкодження та загибелі майна внаслідок пожежі, удару блискавки, вибуху газу тощо. Відшкодуванню підлягають збитки, яких зазнав страховик, вживаючи заходів, спрямованих на врятування майна, запобігання поширенню пожежі тощо.

За додатковим договором страхування можуть бути застраховані можливі збитки внаслідок наступних причин: стихійних лих, вибуху парових котлів, газосховищ, газопроводів, машин, агрегатів та інших аналогічних об'єктів, пошкодження застрахованого майна в результаті аварії водопроводу, каналізаційної та опалювальної системи, систем гасіння пожежі, крадіжки зі зломом та грабунку, биття скла, дзеркал, вітрин та з інших причин за домовленістю сторін.

Страхова сума визначається страховиком за погодженням із страхувальником з урахуванням кон'юнктури ринку, особливостей конкретного об'єкта страхування тощо.

*Основою* для визначення страхової суми є дійсна вартість застрахованого майна на момент підписання договору, яка визначається за балансовою вартістю та вартістю придбання за вилученням зносу (амортизації). Майно може бути застраховане і за відновною вартістю, яка визначається:

- для будівель та споруд – за вартістю будівництва будівлі (споруди) з урахуванням зносу та експлуатаційно-технічного стану;
- для устаткування, машин, інвентарю відповідно суми, необхідної для придбання аналогічних предметів;
- для товарів власного виробництва – на основі витрат виробництва, але не вище ціни їх реалізації;



- для сировини та товарів, якими страховик торгує і які знаходяться на складі, – за цінами, необхідними для їх закупівлі, але не вище ціни, за якою їх могли продати на дату настання страхового випадку.

Страхове відшкодування з настанням страхового випадку стосовно застрахованого майна підприємства сплачується тільки після того, як повністю виявлено причини та розмір збитків. Після отримання всіх необхідних належним чином оформлених документів на страхову подію та збитки, спричинені нею, страховик зобов'язаний в строк, що не перевищує 30 днів, виплатити відшкодування.

У випадку втрати або пошкодження майна через необачність страхувальника страхове відшкодування зменшується на 30%.

Якщо за фактами знищення або пошкодження майна відкрито кримінальну справу, то страховик сплачує 30% страхового відшкодування, а решту 70% – після закінчення розслідування.

Страхове відшкодування виплачується:

- у випадку повної загибелі майна – в розмірі дійсної (відновної) вартості з вирахуванням зносу та вартості залишків майна, придатного для подальшого використання, але *в межах страхової суми*;
- у разі часткового пошкодження майна – в розмірі різниці між заявленою страховою сумою та вартістю залишків майна, придатних для подальшого використання, а при страхуванні за відновною вартістю – в розмірі витрат на його відновлення, але *не більше страхової суми*.

Витрати на відновлення включають:

- витрати на придбання матеріалів та запасних частин для ремонту;
- витрати на оплату ремонту;

- витрати на доставку матеріалів до місця ремонту та інші видатки, необхідні для доведення пошкодженого майна до стану що був перед настанням страхового випадку.

Після виплати страхового відшкодування до страховика переходять права страхувальника, які той має щодо особи, відповідальної за спричинені збитки, в межах виплаченої страхової суми.

Виплата страхового відшкодування не проводиться, якщо страхувальнику відшкодовують збитки треті особи. Страховик зобов'язаний виплатити відшкодування в розмірі різниці між сумою збитків та сумою, відшкодованою третіми особами.

### **4.3. Добровільне страхування домашнього майна громадян**

Страхова компанія бере на страхування майно громадян за місцем постійного проживання страхувальника.

Об'єктами страхування можуть виступати: стіни, перестінки, стеля, підлога, дах, огорожа тощо, а також меблі, одяг, інші предмети довгострокового користування.

Мінімальний термін страхування – два тижні, максимальний – рік.

*Страховими подіями*, з настанням яких страховик зобов'язується виплачувати страхове відшкодування, є знищення або пошкодження домашнього майна внаслідок:

- стихійного лиха (паводку, бурі, смерчу, цунамі, зливи, граду, землетрусу);
- пожежі, удару блискавки, вибуху;
- аварії систем опалення, водопостачання, каналізації;
- крадіжки зі зломом та пограбування.

*Умови страхування*

За загальним тарифом страхуються всі наявні у даному господарстві предмети домашнього майна, крім тих, що приймаються за спеціальним тарифом. З коефіцієнтом на страхування приймаються:

- вироби із дорогоцінних металів, дорогоцінних та напівдорогоцінних каменів;
- колекції, картини, унікальні предмети, якщо страхувальник має документи компетентної організації про оцінку їх вартості;
- комп'ютери, ксерокси, факси, телефакси та інша оргтехніка.

Особливою умовою цього виду страхування є те, що майно страхується тільки за умови страхування будівлі.

*Страхова сума* визначається страховиком, узгоджується зі страхувальником з урахуванням кон'юнктури ринку. Майно може бути застраховане за відновною вартістю, яка визначається для житла (за вартістю будівництва з урахуванням зносу та експлуатаційно-технічного стану), для меблів, одягу, предметів довгострокового користування (відповідно до суми, необхідної для придбання предмета, аналогічного пошкодженому або знищеному).

Страхова сума кожного застрахованого предмета має бути не менше його дійсної вартості на момент укладання договору страхування.

Страховик, який виплатив страхове відшкодування, має право вимагати компенсації від особи, винної за спричинені збитки.

Засоби транспорту, як і домашнє майно, страхуються добровільно. На страхування беруться

автотранспортні засоби та водні маломірні судна, які підлягають державній реєстрації у встановленому порядку.

До *автотранспортних засобів* відносять: легкові, вантажні, вантажопасажирські, мікроавтобуси, мотоцикли, моторолери, мотоколяски, мопеди, трактори та міні-трактори.

До *водних транспортних засобів* відносять різноманітні човни, яхти, катамарани та інше.

У майновому страхуванні виникає потреба обчислення ризикової надбавки. Методика її розрахунку наводилася раніше. Надбавка гарантує стійкість страхових операцій. Якщо ряд нестійкий, то збільшують тарифний період, коли для цього є інформація, або беруть трисигмовий інтервал. У разі надто нестійких рядів або надто високої ціни об'єктів страхування використовують інститут перестрахування.

**Приклади розв'язання задач до модуля 1**

**Приклад 1.** Розрахувати тарифну ставку страхування ризику пошкодження пральних машин, що перебувають на гарантійному обслуговуванні. Факт виходу з ладу пральної машини носить випадковий характер. Статистично встановлено, що зі 100 тис. вироблених пральних машин виходять з ладу 3500 машин в термін гарантійного ремонту. Пральну машину страхуємо на 1 тис. грн.

Розв'язок. Тарифна ставка страхування ризику – це нетто-ставка, що розраховується за формулою:

$$T_H = PK100,$$

де  $P$  – ймовірність страхової події:

$$P = \frac{K_B}{K_D} = \frac{3500}{100000} = 0,035,$$

$K_B$  – кількість виплат за певний період (кількість страхових випадків);  $K_D$  – кількість підписаних за період договорів (загальна можлива кількість страхових випадків);

$$K = \frac{C_B}{C_c} = \frac{3500 \cdot 1000}{3500} \cdot \frac{100000}{100000 \cdot 1000} = 1,$$

де  $C_B$  – середня виплата на один договір;  $C_c$  – середня страхова сума на один договір.

Отже,

$$T_H = 0,035 \cdot 1 \cdot 100 = 3,5 \text{ грн.},$$

тобто з кожної сотні страхової суми слід отримати 3,5 грн. страхової премії, яка забезпечує страховий фонд, що розглядається як математичне сподівання виплати.

Можна було порахувати за формулою:

$$T_H = \frac{B}{C} 100 = \frac{3500 \cdot 1000}{100000 \cdot 1000} 100 = 3,5 \text{ грн.},$$

де  $B$  – загальна сума виплат страхового відшкодування;  
 $C$  – загальна страхова сума застрахованих об'єктів.

**Приклад 2.** Розрахувати тарифну ставку страхування ризику виходу з ладу комп'ютерів, що перебувають на гарантійному обслуговуванні (1 рік), якщо відомо скільки комп'ютерів виходить з ладу щорічно зі 100000 одиниць, що продаються за рік:

Рік	2004	2005	2006	2007	2008
Кількість комп'ютерів, що вийшли з ладу	4000	4500	3600	4020	4050

Комп'ютер страхуємо на 2500 грн. Обчислити необхідний резервний фонд.

Розв'язок. Тарифна ставка страхування ризику – це нетто-ставка, що розраховується за формулою:

$$T_H = PK100,$$

де  $P$  – ймовірність страхової події, в нашому випадку – середня ймовірність:

$$P = \frac{K_B}{K_D} = \frac{(4000 + 4500 + 3600 + 4020 + 4050)/5}{100000} = 0,04034,$$

$K_B$  – кількість виплат за певний період (середня кількість страхових випадків);  $K_D$  – кількість підписаних за період договорів (загальна можлива кількість страхових випадків);

$$K = \frac{C_B}{C_c} = \frac{4034 \cdot 2500}{4034} \cdot \frac{100000}{100000 \cdot 2500} = 1,$$

де  $C_B$  – середня виплата на один договір;  $C_c$  – середня страхова сума на один договір.

Отже,

$$T_H = 0,04034 \cdot 1 \cdot 100 = 4,034 \text{ грн.},$$

тобто з кожної сотні страхової суми слід отримати 4,034 грн. страхової премії, яка забезпечує страховий фонд, що розглядається як математичне сподівання виплати.

Резервний страховий фонд розраховується на основі показника – середньоквадратичного відхилення ( $\sigma$ ) за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (q_i - \bar{q})^2}{(n-1)}},$$

де  $q_i$  – число страхових подій кожного року;  $\bar{q}$  – середня кількість страхових подій;  $n$  – тарифний період:

$$\bar{q} = 4034,$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{5-1}} \sqrt{(4000 - 4034)^2 + \dots + (4050 - 4034)^2} = 319,03.$$

Ризикову надбавку, яка створює запасний резервний фонд, утворює двосигмовий чи трисигмовий інтервал:

$$2\sigma = 638,06, \quad 3\sigma = 957,09.$$

Резервний фонд встановлює:

$$3\sigma \cdot 2500 = 957,09 \cdot 2500 = 2392725 \text{ грн.},$$

при цьому страховий фонд

$$\bar{q}2500 = 4034 \cdot 2500 = 10085000 \text{ грн.}$$

**Приклад 3.** Розрахувати тарифну ставку страхування від пожежі для студентського гуртожитку, якщо відомо, що кожен рік в середньому в даному гуртожитку буває дві пожежі з п'яти, що відбувалися в гуртожитках. Страхова сума об'єкта – 150 тис. грн. Витрати на ведення страхової справи складають 10% від страхової суми. Страхова компанія встановлює прибуток у розмірі 10% від тарифу страхування об'єкту.

Розв'язок. Тарифна ставка складається з нетто-ставки та навантаження.

Розрахуємо нетто-ставку (тарифна ставка страхування ризику), що розраховується за формулою:

$$T_H = PK100,$$

де  $P$  – ймовірність страхової події:

$$P = \frac{K_B}{K_D} = \frac{2}{5} = 0,4,$$

$K_B$  – кількість виплат за певний період (кількість страхових випадків);  $K_D$  – кількість підписаних за період договорів (загальна можлива кількість страхових випадків);

$$K = \frac{C_B}{C_C} = 1.$$

Отже,

$$T_H = 0,4 \cdot 1 \cdot 100 = 40 \text{ грн.},$$

тобто з кожної сотні страхової суми слід отримати 40 грн. страхової премії, яка забезпечує страховий фонд, що розглядається як математичне сподівання виплати.

Тариф (брутто-ставка) розраховуються за формулою:

$$T_\sigma = \frac{100(T_H + H_C)}{100 - H_o} = \frac{100(40 + 10)}{100 - 10} = 55,56 \text{ грн.},$$

де

$$H_C = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ грн. (на 100 грн.) –}$$

статті навантаження, що встановлюються в абсолютній сумі;  $H_o = 10$  – статті навантаження, закладені в тариф у відсотках до брутто-ставки.

**Приклад 4.** На кварталі в місті вводиться в експлуатацію нова котельня, яка буде обслуговувати 50 будинків (2500 квартир). Визначити тарифну ставку страхування квартири



від виходу з ладу опалення (порив труб, батарей, відсутність опалення з інших причин тощо) та щомісячну страхову премію. Страхова сума на одну квартиру складає 2000 гривень (ремонт квартири). Аналіз статистичних даних для інших котелень міста дає наступні цифри: зі 100 квартир за рік виходить з ладу опалення у 8 квартирах, при цьому страхова сума виплачується в середньому у розмірі 80% від загальної (частковій збитки). Прогнозоване зростання попиту на даний вид страхування – 10% на рік, при цьому коефіцієнт відставання 0,02. Навантаження для цього виду страхування прогнозують у розмірі 20% від тарифу.

Розв'язок. Розрахуємо очікувану частоту страхового випадку за новим видом страхування:

$$q_{св} = \frac{K_{св.оч}}{K_o} = \frac{2500 \cdot 8}{2500} = 0,08,$$

де  $K_{св.оч}$  – кількість очікуваних страхових подій;  $K_o$  – загальна кількість очікуваних (потенційних) об'єктів страхування.

Для підрахунку нетто-ставки за новими видами страхування слід враховувати коефіцієнт поправки:

$$K_{II} = \frac{C_{в.оч}}{C_{с.с.оч}} = \frac{2000 \cdot 0,8}{2000} = 0,8,$$

де  $C_{в.оч}$  – очікувана середня виплата на один договір (об'єкт) страхування;  $C_{с.с.оч}$  – очікувана середня страхова сума на один договір (об'єкт) страхування.

Величина ризикової надбавки розраховується за допомогою коефіцієнта вибірки:

$$K_{виб} = \frac{1 - K_B(1 - K_P)}{K_P} = \frac{1 - 0,02(1 - 0,1)}{0,1} = 9,82,$$

де  $K_B = 0,02$  – коефіцієнт відставання відносного зниження (зростання) суми виплат порівняно зі зниженням (зростанням) рівня розвитку страхування;

$$K_P = \frac{P_p}{100\%} = \frac{10\%}{100\%} = 0,1 –$$

коефіцієнт очікуваного рівня розвитку страхування.

Отже, тарифна нетто-ставка матиме вигляд:

$$T_H = C_{CB} K_{II} K_{виб} 100 = 0,08 \cdot 0,8 \cdot 9,82 \cdot 100 = 62,8 \text{ грн.}$$

Визначимо брутто-ставку (тариф):

$$T_o = \frac{T_H 100}{100 - f} = \frac{62,8 \cdot 100}{100 - 20} = 78,6 \text{ грн. (на 100 грн.),}$$

де  $f = 20$  – частка навантаження в брутто-ставці згідно з нормативом, %.

Страхова премія:

$$P = \frac{T_o 2000 \cdot 2500}{100} = 3928000 \text{ грн.}$$

на рік або щомісячно страхова премія складає:

$$P = 327333,3 \text{ грн.}$$

**Приклад 5.** На заводі збираються встановити партію станків нового зразку у розмірі 50 одиниць. Кожен рік буде встановлюватися ще по 10 станків. Завод страхує станки: страхова сума одного станку – 2500 грн. Знайти тарифну ставку, резервний фонд, страховий внесок, якщо відомо, що вихід з ладу станків – випадкова величина, що підпорядковується біноміальному закону, при цьому ймовірність виходу з ладу одного станка дорівнює 0,2. Коефіцієнт відставання дорівнює 0,3. Навантаження складає 25% від тарифної ставки.

Розв'язок. Розрахуємо очікувану частоту страхового випадку за новим видом страхування:

$$q_{св} = \frac{K_{св.оч}}{K_o},$$

де  $K_{св.оч}$  – середня кількість очікуваних страхових подій;  
 $K_o$  – загальна кількість очікуваних (потенційних) об'єктів страхування.

Вихід з ладу станків – це випадкова величина  $X$  з законом розподілу:

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m},$$

де  $n = 50$  – загальна кількість станків,  $p = 0,2$  – ймовірність виходу з ладу одного станка,  $m$  – кількість станків, що виходять з ладу з ймовірністю  $P(X = m)$ .

Середнє значення даної випадкової величини – це математичне очікування:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=0}^n i P(X = i) = np = 50 \cdot 0,2 = 10.$$

Отже,

$$q_{св} = \frac{K_{св.оч}}{K_o} = \frac{M(x)}{K_o} = \frac{10}{50} = 0,2.$$

Для підрахунку нетто-ставки за новими видами страхування слід враховувати коефіцієнт поправки:

$$K_{II} = \frac{C_{св.оч}}{C_{с.с.оч}} = \frac{2500}{2500} = 1,$$

де  $C_{св.оч}$  – очікувана середня виплата на один договір (об'єкт) страхування;  $C_{с.с.оч}$  – очікувана середня страхова сума на один договір (об'єкт) страхування.

Величина ризикової надбавки розраховується за допомогою коефіцієнта вибірки:

$$K_{\text{виб}} = \frac{1 - K_B(1 - K_P)}{K_P} = \frac{1 - 0,3(1 - 0,2)}{0,2} = 3,8,$$

де  $K_B = 0,3$  – коефіцієнт відставання відносного зниження (зростання) суми виплат порівняно зі зниженням (зростанням) рівня розвитку страхування;

$$K_P = \frac{P_p}{100\%} = \frac{20\%}{100\%} = 0,2 -$$

коефіцієнт очікуваного рівня розвитку страхування.

Отже, тарифна нетто-ставка матиме вигляд:

$$T_H = \mathcal{C}_{CB} K_{II} K_{\text{виб}} 100 = 0,2 \cdot 3,8 \cdot 100 \cdot 1 = 76 \text{ грн. (на 100 грн.)}$$

Визначимо брутто-ставку (тариф):

$$T_\sigma = \frac{T_H 100}{100 - f} = \frac{76 \cdot 100}{100 - 25} = 101,33 \text{ грн.,}$$

де  $f = 25$  – частка навантаження в брутто-ставці згідно з нормативом, %.

Для розрахунку резервного фонду визначимо дисперсію та виправлене середньоквадратичне відхилення:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = np(1 - p),$$

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} D(X)} = n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = 2,857,$$

тобто трисигмовий інтервал складає  $3\sigma = 8,571$ .

Отже, резервний фонд:

$$3\sigma 2500 = 21427,57 \text{ грн.}$$

Страхова премія:

$$P = \frac{T_\sigma 2500 \cdot 50}{100} + 21427,57 = 148094,2 \text{ грн.}$$

на рік або щомісячно страхова премія складає:

$$P = 12341,2 \text{ грн.}$$

**Приклад 6.** Розрахувати тарифну ставку страхування виходу з ладу телевізорів, що перебувають на гарантійному

обслуговуванні (1 рік), якщо відомо скільки телевізорів виходить з ладу щорічно з 10000 одиниць, що продаються за рік (деякої марки):

Рік	2004	2005	2006	2007	2008
Кількість телевізорів, що вийшли з ладу	500	700	600	650	580

Телевізор страхуємо на 1500 грн. Витрати на ведення справи – 1 грн. на кожні 100 грн. Прибуток страхова компанія встановлює 20% від тарифу. Обчислити необхідний резервний фонд, страхову премію, основні показники майнового страхування.

Розв'язок. Тариф (брутто-ставка) розраховуються за формулою:

$$T_{\sigma} = \frac{100(T_H + H_C)}{100 - H_o},$$

де  $H_C = 1$  грн. (на 100 грн.) – статті навантаження, що встановлюються в абсолютній сумі;  $H_o = 20$  – статті навантаження, закладені в тариф у відсотках до брутто-ставки;  $T_H$  – тарифна ставка страхування ризику – це нетто-ставка, що розраховується за формулою:

$$T_H = PK100,$$

де  $P$  – ймовірність страхової події, в нашому випадку – середня ймовірність:

$$P = \frac{K_B}{K_D} = \frac{(500 + 700 + 600 + 650 + 580)/5}{10000} = \frac{606}{10000} = 0,0606,$$

$K_B$  – кількість виплат за певний період (середня кількість страхових випадків);  $K_D$  – кількість підписаних за період договорів (загальна можлива кількість страхових випадків);

$$K = \frac{C_B}{C_c} = \frac{606 \cdot 1500}{606} \cdot \frac{10000}{10000 \cdot 1500} = 1,$$

де  $C_B$  – середня виплата на один договір;  $C_c$  – середня страхова сума на один договір.

Отже,

$$T_H = 0,0606 \cdot 1 \cdot 100 = 6,06 \text{ грн.},$$

тобто з кожної сотні страхової суми слід отримати 6,06 грн. страхової премії, яка забезпечує страховий фонд, що розглядається як математичне сподівання виплати.

Отже, тариф:

$$T_o = \frac{100(T_H + H_c)}{100 - H_o} = \frac{100(6,06 + 1)}{100 - 20} = 6,323 \text{ грн.},$$

на кожні 100 грн.

Резервний страховий фонд розраховується на основі показника — середньоквадратичного відхилення ( $\sigma$ ) за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (q_i - \bar{q})^2}{(n-1)}},$$

де  $q_i$  – число страхових подій кожного року;  $\bar{q}$  – середня кількість страхових подій;  $n$  – тарифний період:

$$\bar{q} = 606,$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{5-1}} \sqrt{(500-606)^2 + \dots + (580-606)^2} = 75,366.$$

Ризикову надбавку, яка створює запасний резервний фонд, утворює двосигмовий чи трисигмовий інтервал.

Резервний фонд встановлює:

$$3\sigma \cdot 1500 = 339147 \text{ грн.},$$

при цьому страховий фонд  $\bar{q}1500 = 908000$  грн.

Страхова премія:

$$P = \frac{T_0 \cdot 606 \cdot 1500}{100} + 339147 = 1287897 \text{ грн. на рік.}$$

Розрахуємо показники майнового страхування.

Частота страхових подій (за всі роки):

$$q_{c.n} = \frac{L}{n} = \frac{500 + 700 + 600 + 650 + 580}{10000 \cdot 5} = 0,0606,$$

де  $L$  – кількість страхових подій, од.;  $n$  – число об'єктів страхування, од.

Коефіцієнт кумуляції (накопичення) ризику:

$$K_k = \frac{m}{L} = \frac{500 + 700 + 600 + 650 + 580}{500 + 700 + 600 + 650 + 580} = 1,$$

де  $m$  – кількість застрахованих об'єктів, що постраждали внаслідок страхового випадку, од.;  $L$  – число страхових подій, од.

Коефіцієнт збитковості

$$K_{зб} = \frac{B_T}{C_T} = \frac{1500}{1500} = 1,$$

де  $B_T$  – сума виплаченого страхового відшкодування на один об'єкт, грн.;  $C_T$  – страхова сума, що припадає на один пошкоджений об'єкт страхової сукупності, грн.

Збитковість страхової суми (ймовірність збитків)

$$Z = \frac{B}{C} = \frac{1500 \cdot 606}{10000 \cdot 1500} = 0,0606,$$

де  $B$  – сума виплаченого страхового відшкодування, грн.;  $C$  – страхова сума для всіх об'єктів страхування, грн.

Середня страхова сума на один об'єкт (договір) страхування:

$$\bar{C} = \frac{C}{n} = \frac{10000 \cdot 1500}{10000} = 1500 \text{ грн.},$$

де  $C$  – страхова сума для всіх об'єктів страхування;  $n$  – кількість об'єктів страхування, од.

Норма збитковості (коефіцієнт виплат):

$$N_z = \frac{B}{P} 100\% = \frac{1500 \cdot 606}{1287897} 100\% = 71\%,$$

де  $B$  – сума виплаченого страхового відшкодування, грн.;  
 $P$  – сума зібраних страхових премій, грн.

Частота збитків:

$$Ч_z = Ч_{c.n.} K_k = 0,0606 .$$



**Питання для самоконтролю до модуля 1**

*Дати розгорнуту відповідь на питання:*

1. Суть та задачі актуарних розрахунків.
2. Страховий ринок.
3. Структура та методи розрахунку тарифної ставки.
4. Тарифи за новими видами страхування.
5. Страхові премії.
6. Види страхових премій.
7. Структура майнового страхування.
8. Добровільне страхування майна.
9. Добровільне страхування домашнього майна громадян.

*Дати означення (сформулювати) чи записати формули знаходження:*

1. Актуарні розрахунки.
2. Страховий захист.
3. Страховий ринок.
4. Тарифна ставка.
5. Нетто-ставка.
6. Навантаження.
7. Ризикова надбавка майнового страхування.
8. Коефіцієнт вибірки.
9. Нетто-ставка за новими видами страхування.
10. Страхова премія.
11. Коефіцієнт кумуляції.
12. Коефіцієнт збитковості.
13. Збитковість страхової суми.
14. Норма збитковості.
15. Частота збитків.
16. Майнове страхування.

## Задачі до модуля 1

### Основні задачі

1. Розрахувати тарифну ставку страхування ризику пошкодження холодильників, що перебувають на гарантійному обслуговуванні. Факт виходу з ладу холодильника носить випадковий характер. Статистично встановлено, що із 150 тис. вироблених холодильників виходять з ладу 8000 в термін гарантійного ремонту. Холодильник страхуємо на 2 тис. грн.
2. Розрахувати тарифну ставку страхування ризику пошкодження комп'ютерів, що перебувають на гарантійному обслуговуванні. Факт виходу з ладу комп'ютера носить випадковий характер. Статистично встановлено, що із 5 тис. вироблених комп'ютерів виходять з ладу 300 в термін гарантійного ремонту. Страхова сума одного комп'ютера – 3000 грн.
3. Розрахувати тарифну ставку страхування ризику виходу з ладу пральних машин, що перебувають на гарантійному обслуговуванні (1 рік), якщо відомо скільки пральних машин виходить з ладу щорічно з 1000 одиниць, що продаються за рік. Машину страхуємо на 2500 грн. Обчислити необхідний резервний фонд.

Рік	2004	2005	2006	2007	2008
Кількість машин, що вийшли з ладу	20	25	28	23	24

4. Розрахувати тарифну ставку страхування ризику виходу з ладу обігрівачів, що перебувають на гарантійному обслуговуванні (1 рік), якщо відомо скільки обігрівачів виходить з ладу щорічно з 5000 одиниць, що продаються за рік. Обігрівач страхуємо на 600 грн. Обчислити необхідний резервний фонд.

Рік	2005	2006	2007	2008
Кількість обігрівачів, що вийшли з ладу	50	70	55	60

5. Розрахувати тарифну ставку страхування від паводку будинків певного району, якщо відомо, що в кожному 5 років в середньому в даному районі буває один паводок з трьох, що відбувалися в місті. Середня страхова сума дому – 20 тис. грн. Витрати на ведення страхової справи складають 0,05% від страхової суми. Страхова компанія встановлює прибуток у розмірі 20% від тарифу страхування об'єкту.
6. Вводиться в експлуатацію новий багатоквартирний будинок (200 квартир). Визначити тарифну ставку страхування квартири від пожежі та щомісячну страхову премію. Страхова сума на одну квартиру складає 4000 гривень (ремонт квартири). Аналіз статистичних даних для інших будинків міста дає наступні цифри: зі 1000 квартир за рік пожежа відбувається у 5 квартирах, при цьому страхова сума виплачується в середньому у розмірі 60% від загальної (частковій збитки). Прогнозоване зростання попиту на даний вид страхування – 10% на рік, при цьому коефіцієнт відставання 0,01. Навантаження для цього виду страхування прогнозують у розмірі 25% від тарифу.
7. У квартири будинку збираються встановити партію газових котлів нового зразку (20). Кожен рік буде встановлюватися ще по 5 котлів. Завод страхує котли (гарантійний ремонт та інше): страхова сума одного котла – 4000 грн. Знайти тарифну ставку, резервний фонд, страховий внесок, якщо відомо, що вихід з ладу котла – випадкова величина з наведеним законом розподілу. Коефіцієнт відставання дорівнює 0,2. Навантаження складає 25% від тарифної ставки.

Величина	2	4	10	15	20
Ймовірність	0,25	0,3	0,2	0,15	0,1

8. В гуртожиток на кожен секцію (20 секцій) збираються встановити партію електричних пічок нового зразку (2 на кожен секцію). Кожен рік буде встановлюватися ще по 10 пічок в інші гуртожитки. Університет страхує пічки (гарантійний ремонт та інше): страхова сума однією пічки – 5000 грн. Знайти тарифну ставку, резервний фонд, страховий внесок, якщо відомо, що вихід з ладу пічки – випадкова величина з наведеним законом розподілу. Коефіцієнт відставання дорівнює 0,25. Навантаження складає 20% від тарифної ставки.

Величина	2	5	10	15	20	25	28	30	35	40
Ймовірність	0,1	0,1	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1	0,05	0,03	0,02

9. Розрахувати тарифну ставку страхування виходу з ладу телевізорів, що перебувають на гарантійному обслуговуванні (1 рік), якщо відомо, що вихід з ладу телевізору – випадкова величина з наведеним законом розподілу. Телевізор страхуємо на 2500 грн. Витрати на ведення справи – 2 грн. на кожні 100 грн. Прибуток страхова компанія встановлює 25% від тарифу. Обчислити необхідний резервний фонд, страхову премію, основні показники майнового страхування.

Величина	10	22	50	85	100
Ймовірність	0,25	0,3	0,2	0,15	0,1

*Додаткові задачі*

1. Загальна страхова сума по страхуванню будівель у господарствах громадян становила 56000000 грн., страхове відшкодування по цих об'єктах виплачено у розмірі 235200 грн. Який розмір збитковості страхової суми?
2. Цукровий буряк застрахований на суму 18900000 грн., страхове відшкодування виплачено у розмірі 585900 грн. Обчисліть збитковість страхової суми.
3. Застраховано 180000 дворів (господарств), у яких виникло 594 пожежі. Визначити частоту виникнення пожеж.
4. Визначити відношення ризиків (відношення середньої страхової суми об'єкта, що горів, до середньої страхової суми застрахованого об'єкта) на підставі таких даних: число застрахованих дворів – 220000, страхова сума – 990000000 грн., число дворів, що горіли – 1100, страхова сума дворів, що згоріли та ушкоджених пожежею – 4510000 грн.
5. Розробіть страхові тарифи з добровільного страхування туристів від нещасних випадків. За даними статистики кожен рік за туристичними путівками відпочиває близько 40 тис. чоловік. У середньому за рік травмується 1000 чол. Відношення середньої передбачуваної виплати до середньої очікуваної страхової суми становить 0,3. Передбачається, що страхуванням буде охоплено 30,0% туристів, причому коефіцієнт відставання береться за 0,9. Розрахуйте нетто-ставку.
6. Розробіть страхові тарифи з добровільного страхування автомобілів від ДТП. За даними статистики кількість автомобілів становить близько 1500 тис. У середньому за рік трапляється

30000 ДТП. Відношення середньої передбачуваної виплати до середньої очікуваної страхової суми становить 0,7. Передбачається, що страхуванням буде охоплено 30,0% автомобілів, причому коефіцієнт відставання приймається 0,6. Розрахуйте нетто-ставку.

7. Вихідні дані для розрахунку – значення збитковості по страхуванню від пожеж майна підприємств за останні 5 років:

Роки	1	2	3	4	5
Збитковість, %	0,605	0,706	0,725	0,715	0,694

Визначить середню збитковість та її середньоквадратичне відхилення.

## **МОДУЛЬ 2. ОСОБИСТЕ СТРАХУВАННЯ**

---

- ◆ *Соціальне страхування.*
- ◆ *Ймовірнісні характеристики тривалості життя.*
- ◆ *Залишкова тривалість життя.*

### **Тема 5. Соціальне страхування**

#### **5.1. Основні поняття соціального страхування**

**Означення.** *Соціальне страхування* – гарантована державою система заходів щодо забезпечення громадян у старості, на випадок захворювання, втрати працездатності, щодо підтримки материнства та дитинства, а також з охорони здоров'я членів суспільства в умовах безплатної медицини.

*Необхідність* соціального страхування зумовлена причинами:

- ◆ наявністю осіб, які, з огляду на певні обставини, не беруть участі в суспільно-корисній праці, отже, не можуть за рахунок заробітної плати підтримувати своє життя;
- ◆ наявністю громадян, які є дієздатними, але не мають можливості реалізувати цю дієздатність.

У соціально-політичному аспекті соціальне страхування є способом реалізації конституційного права громадян на матеріальне забезпечення у старості, у разі хвороби, повної або часткової втрати працездатності або ж за браком такої від народження, при втраті годувальника, при безробітті.

Соціальне страхування покликане виконувати функції:

- ◆ формування грошових фондів, з яких покриваються затрати, пов'язані з утриманням непрацездатних та осіб,

що, з огляду на обставини, не беруть участі в трудовому процесі;

- ◆ забезпечення певною мірою чисельності та структури трудових ресурсів;
- ◆ скорочення розриву в рівнях матеріального забезпечення працюючих та непрацюючих громадян;
- ◆ сприяння вирівнюванню життєвого рівня різних соціальних груп населення, не залучених до трудового процесу.

Система соціального страхування складається з двох видів:

- ◆ *перший* пов'язаний з відновленням та збереженням працездатності працівників;
- ◆ *другий* має гарантувати матеріальне забезпечення громадянам, які втратили працездатність або не мали її.

Матеріальною основою для виконання цих завдань виступають певні фонди з характерними для них напрямками використання коштів.

## **5.2. Загальнообов'язкове державне соціальне страхування**

Страхові внески на державне соціальне страхування нараховуються на фонд оплати праці та інші виплати, в тому числі в натуральній формі, які підлягають оподаткуванню прибутковим податком з громадян.

Не нараховуються внески на наступні види виплат працівникам:

- ◆ вихідна допомога при звільненні;
- ◆ компенсація за невикористану відпустку;
- ◆ вартість безплатно наданих деяким категоріям працівників квартир, комунальних послуг, палива, проїзних квитків;



- ◆ дивіденди за акціями;
- ◆ неоподаткована сума матеріальної допомоги;
- ◆ виплати з коштів фонду соціального страхування України і Пенсійного фонду України (крім коштів на оплату праці);
- ◆ допомога сім'ям з державного та місцевих бюджетів та деякі інші виплати.

Основні джерела коштів на загальнообов'язкове державне соціальне страхування – це внески роботодавців та застрахованих осіб. Бюджетні та інші джерела коштів для соціального страхування передбачаються відповідними законами з окремих видів загально-необов'язкового державного соціального страхування.

Розмір страхових внесків на загальнообов'язкове державне соціальне страхування залежно від його виду щорічно встановлюється Верховною Радою України у відсотках:

- ◆ для *роботодавців* – до суми фактичних витрат на оплату праці та інших виплат найманим працівникам, які підлягають оподаткуванню прибутковим податком з громадян.
- ◆ для *фізичних осіб* – до сум оподаткованого доходу (прибутку).

Внески на загальнообов'язкове державне соціальне страхування від нещасного випадку на виробництві та професійних захворювань сплачує виключно роботодавець.

**Означення.** *Пенсія* – гарантована щомісячна грошова виплата для забезпечення громадян у старості на випадок повної або часткової непрацездатності, втрати годувальника, а також у зв'язку з досягненням законодавче встановленого стажу роботи у сферах трудової діяльності.

Трудящі, їх сім'ї, з настанням страхового випадку, ті, що з огляду на обставини не брали участі в трудовому процесі, а за законом мають право на пенсійне забезпечення, отримують його із спеціального Пенсійного фонду, який створюється за рахунок внесків страховиків до Фонду соціального страхування. Величина ресурсів соціального страхування, спрямованих на пенсійне забезпечення, визначається демографічними та економічними факторами.

До *демографічних показників* відносять:

- ◆ середню тривалість життя та її динаміку;
- ◆ кількість людей пенсійного віку;
- ◆ чисельність працездатного населення тощо.

До *економічних показників* відносять:

- ◆ економічний стан країни в цілому;
- ◆ співвідношення рівнів заробітної плати та пенсії;
- ◆ надбавки за стаж, умови роботи тощо;
- ◆ наявність та питома вага осіб, які мають право на пільги при визначенні рівня пенсійного забезпечення тощо.

## **Тема 6. Ймовірнісні характеристики тривалості життя**

### **6.1. Функція виживання**

Розглянуті в страхуванні життя методи та моделі можуть бути застосовані і до інших видів страхування. Нехай  $X$  позначає тривалість життя,  $X_i$  – тривалість життя  $i$ -го індивідуума. У інших видах страхування під  $X$  можна, наприклад, розуміти:

- 1) час до настання захворювання (енцефаліт, хвороба Лайма);
- 2) час безаварійної роботи автомобіля;
- 3) час до заподіяння збитку майну тощо.

*Невизначеність* або *непередбачуваність* моменту смерті, захворювання, аварії є основним джерелом випадковості при страхуванні, що дозволяє використовувати випадкові події, величини, процеси при математичному аналізі різних аспектів страхування життя, здоров'я тощо.

Очевидно, що відносно моменту смерті конкретної людини, як правило, важко сказати що-небудь визначене. Проте, якщо розглядається достатньо велика *однорідна* група людей, то для неї вже будуть справедливі закономірності, які властиві масовим випадковим явищам, наприклад, сталість частот, збігання до нормального або пуассонівського законів розподілу і таке інше. Тому, використовуючи термінологію теорії ймовірностей, можна казати про тривалість життя як про випадкову величину  $X$ , причому  $X \geq 0$ .

Повною характеристикою випадкової величини  $X$  є функція розподілу

$$F(x) = P(X \leq x).$$

В актуарній математиці використовують замість функції розподілу *функцію виживання*.

**Означення.** *Функцією виживання* називається функція

$$s(x) = P(X > x) = 1 - F(x),$$

яка є ймовірністю того, що людина доживе до віку  $x$  років. Індивідуума у віці  $x$  років в актуарній математиці позначають  $(x)$ .

*Функція виживання* має властивості:

- 1)  $s(x)$  спадає (нестрого);
- 2)  $s(0) = 1$ ,  $s(\infty) = 0$ ;
- 3)  $s(x)$  неперервна справа.

Реальна тривалість життя  $X$  обмежена *граничним віком*  $\omega = 100 - 120$  років, тоді

$$s(x) = 0, x > \omega.$$

У зв'язку з цим таблиці тривалості життя (ТТЖ) складаються звичайно для цілих  $x \leq \omega$  віків. Проте для функцій  $s(x)$ , що задаються аналітично, час життя, як правило, необмежений, причому параметри  $s(x)$  підбирають так, щоб ймовірність  $P(X > \omega)$  була достатньо малою.

З'ясуємо, як функція виживання  $s(x)$  пов'язана з однією з основних характеристик  $l_x$  загальних ТТЖ (кількість людей у групі). Розглянемо достатньо велику групу з  $l_0$  новонароджених (для зручності беруть  $l_0 = 10000$  або  $l_0 = 100000$ ) і будемо фіксувати їх тривалість життя або моменти смерті:  $X_1, X_2, \dots, X_{l_0}$ .

Введемо для події  $A$  індикатор

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{якщо подія } A \text{ відбулася,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

який є випадковою величиною.

Число представників цієї групи, що дожили до віку  $x$  – випадкова величина

$$L(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I(X_i > x),$$

математичне очікування якої і визначає величина  $l_x$  :

$$l_x = M(L(x)) = \sum_{i=1}^{l_0} M(I(X_i > x)) = \sum_{i=1}^{l_0} P(X_i > x) = \sum_{i=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x)$$

тобто  $l_x = l_0 s(x)$ .

Впливає, що

- 1) крива  $l_x$  змінюється в залежності від віку  $x$  аналогічно функції виживання  $s(x)$  з точністю до

множника-константи  $l_0$ ;

- 2)  $s(x) = l_x / l_0$  – це середня доля доживших до віку  $x$  з аналізованої групи новонароджених.

## 6.2. Крива смертності

Розглянемо дані ТТЖ для населення США

$x$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1,000	0,983	0,977	0,965	0,949	0,915	0,873	0,682	0,432	0,142	0,012	0

Якщо взяти  $l_0 = 1000$ , то в перші 10 років життя помре приблизно 17 чоловік, від 10 до 20 років – 6 чоловік, від 20 до 30 років – 12 чоловік, від 30 до 40 років – 16 чоловік, від 40 до 50 років – 34 чоловік, від 50 до 60 років – 78 чоловік, від 60 до 70 років – 155 чоловік, від 70 до 80 років – 250 чоловік, від 80 до 90 років – 290 чоловік, від 90 до 100 років – 130 чоловік, від 100 до 110 років – 12 чоловік.

Очевидно, що ці дані, розбиті на інтервали, більш наочно характеризують смертність, у порівнянні з даними, поданими в таблиці. Наприклад, ми можемо виділити перше десятиліття, у якому смертність утворює вище, чим у другому, самому безпечному десятилітті, або період від 70 до 90 років, за який умирає 540 чоловік, що складає більше половини вихідної групи в 1000 чоловік.

Становиться зрозумілим уведення для інтервалу віку  $(x, x + t)$  випадкової величини

$${}_tD_x = L(x) - L(x + t) = \sum_{i=1}^{l_0} I(x < X_i \leq x + t),$$

яка дорівнює числу померлих у віці від  $x$  до  $x + t$  з фіксованої групи  $l_0$  новонароджених. Математичне

сподівання цієї випадкової величини визначає ще одну з основних характеристик  ${}_t d_x$  загальних таблиць тривалості життя:

$${}_t d_x = M({}_t D_x).$$

Очевидно, що

$${}_t d_x = M(L(x) + L(x+t)) = l_x - l_{x+t} = l_0(s(x) - s(x+t)),$$

де

$$s(x) - s(x-t) = P(x < X_i \leq x+t) -$$

ймовірність смерті в інтервалі часу  $(x, x+t]$ .

Індекс 1 у позначенні  ${}_1 d_x$  звичайно опускається, тому

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

**Означення.** Функція

$$f(x) = F'(x) = -s'(x)$$

називається щільністю розподілу випадкової величини  $X$ , або *кривою смертності*.

Крива  $d_x$  від змінної віку  $x$  змінюється приблизно як крива смертності  $f(x)$  із точністю до множника-константи  $l_0$ , тобто

$$d_x \approx l_0 f(x).$$

Можна сказати, що крива смертності є більш тонкою характеристикою в порівнянні з функцією виживання.

### 6.3. Функція інтенсивності смертності

У свою чергу, у порівнянні з кривою смертності більш тонкою характеристикою є функція інтенсивності смертності.

**Означення.** Величина  $\mu_x$

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$$

називається *функцією інтенсивності смертності*.

Величина  $\mu_x t$  приблизно дорівнює ймовірності смерті людини віку  $x$  в інтервалі  $(x, x + t)$ .

Зауважимо, що наближене значення функції інтенсивності смертності:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \approx \frac{l_0 f(x)}{l_0 s(x)} = \mu_x.$$

У теорії надійності функція  $\mu_x$  називається *функцією відмов*.

*Функція інтенсивності смертності* має наступні властивості:

1)  $\mu_x \geq 0$ ;

2)  $\int_0^{\infty} \mu_u du = \infty$ ;

3)  $s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u du}$ ,  $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_u du}$ .

### 6.4. Показники тривалості життя

Відомо, що *середня тривалість* життя випадкової величини  $X$

$$\bar{X} = M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx,$$

є одним із найважливіших показників, за допомогою якого порівнюють якість життя населення різних країн. Поряд із  $\bar{X}$  важливими практичними макрохарактеристиками випадкової величини  $X$  також є її дисперсія

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - \bar{X}^2,$$

коефіцієнт асиметрії

$$\gamma = \frac{M(X - \bar{X})^3}{(D(X))^{3/2}},$$

та ексцес

$$\chi = \frac{M(X - \bar{X})^4}{(D(X))^2} - 3.$$

Наприклад, величина  $\bar{X}$  дає середню тривалість життя навмання обраного новонародженого,  $D(X)$  – середній квадрат розкиду його тривалості життя щодо  $\bar{X}$ , коефіцієнт асиметрії  $\gamma > 0$  вказує на довгий хвіст у правій частині розподілу випадкової величини  $X$ , а якщо ексцес  $\chi \approx 0$ , то можна вважати, що  $X$  розподілено приблизно за нормальним законом (для нормальної випадкової величини  $\chi = 0$ ).

Знання, принаймні, перших чотирьох моментів або їх оцінок дозволяє наближати невідомі розподіли випадкового величини  $X$  різними параметричними сімействами (Пірсон, Джонсон).

Запишемо формули в термінах функції виживання:

$$\bar{X} = M(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = \int_0^{\infty} s(x) dx,$$



$$M(X^2) = 2 \int_0^{\infty} x(1 - F(x)) dx = 2 \int_0^{\infty} xs(x) dx.$$

### 6.5. Аналітичні закони смертності

При теоретичному аналізі процесів смертності, початковому та спрощеному вивченні реальних ситуацій використовують, як правило, стандартні ймовірнісні моделі, що дозволяють виявити основні закономірності, які цікавлять дослідника. До того ж, деякі реальні процеси смертності достатньо добре апроксимуються аналізованими нижче аналітичними законами.

#### Модель де Муавра

Один з основоположників теорії ймовірностей А. Муавр у 1729 р. запропонував вважати, що час життя розподілено рівномірно на інтервалі  $(0, \omega)$ , де параметр  $\omega$ , який цілком визначає закон рівномірного розподілу, називається *граничним віком*. Зрозуміло, що для цієї моделі при  $0 < x < \omega$  маємо:

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \quad F(x) = \frac{x}{\omega}, \quad s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad \mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{\omega - x}.$$

Закон де Муавра не відображає всі характерні риси, пов'язані з тривалістю життя людини. Наприклад, в аналізованій моделі крива смертності є горизонтальною прямою, а емпіричні криві мають максимум у районі 80 років.

#### Модель Гомпертца

У цій моделі (1825 р.) інтенсивність смертності задається формулою:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = Be^{\alpha x},$$

де  $\alpha > B > 0$  – деякі параметри. Тут функція виживання

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_u du\right) = \exp\left(-\frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right),$$

крива смертності дорівнює

$$f(x) = \mu_x s(x) = B \exp\left(\alpha x - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right),$$

і має максимум у точці

$$x = \frac{\ln \alpha - \ln B}{\alpha}.$$

Цю інформацію можна використовувати при знаходженні оцінок параметрів  $\alpha$ ,  $B$ . Так, якщо з якихось посилонк нам відомо, що максимальна смертність спостерігається для віку 78,3 року, а квартал функції розподілу Гомпертца  $x_{0,25} = 33,4$  року, то система рівнянь для знаходження оцінок прийме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\ln \alpha - \ln B}{\alpha} = 78,3, \\ 1 - \exp\left(-\frac{B(e^{\alpha 33,4} - 1)}{\alpha}\right) = 0,25. \end{cases}$$

Систему нелінійних рівнянь можна розв'язати на комп'ютері чисельними методами.

### Модель Мейкхама

Пізніше, у 1860 р., Мейкхам запропонував наближати інтенсивність смертності більш загальною функцією вигляду

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x},$$

де параметр  $A$  враховує ризики, пов'язані з нещасними випадками, а доданок  $Be^{\alpha x}$  враховує вплив віку на смертність.

Тут функція виживання

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x (A + Be^{\alpha u}) du\right) = \exp\left(-Ax - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right),$$

крива смертності дорівнює

$$f(x) = -s'(x) = (A + Be^{\alpha x}) \exp\left(-Ax - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right),$$

З моделей, приведених вище, закон Мейкхама найбільше підходить для вивчення процесу смертності людини, тому що в ньому враховується, що для малих віків переважну роль у смертності грають нещасні випадки, а зі збільшенням віку їх роль слабшає.

### Модель Вейбулла

У 1939 р. Вейбулл у якості простого наближення інтенсивності смертності став використовувати степеневу функцію

$$\mu_x = kx^n,$$

вигляд якої визначає функцію виживання

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x ku^n du\right) = \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right),$$

криву смертності

$$f(x) = -s'(x) = kx^n \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right)$$

із максимумом у точці

$$x = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

### Модель Ерланга

Розглянемо модель Ерланга 2-го порядку, для якої крива смертності описується формулою

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}}, \quad x \geq 0.$$

У цьому випадку функція виживання

$$s(x) = \frac{x+a}{a} e^{-\frac{x}{a}},$$

а інтенсивність смертності

$$\mu_x = \frac{x}{a(x+a)}.$$

Певною перевагою аналітичних законів є те, що для них ймовірнісні характеристики тривалості життя можна швидко обчислити по невеличкому числу параметрів. Це може виявитися важливим також і у випадках, коли доступні дані представлені в невеликій кількості.

## Тема 7. Залишкова тривалість життя

### 7.1. Залишковий час життя

Якщо людина дожила до віку  $x$  років, то страхову компанію, у силу специфіки її діяльності, цікавить вже не її загальна тривалість життя  $X$ , а *залишковий час життя*  $T(x) = X - x$ . Функція розподілу випадкової величини  $T(x)$  є умовною функцією розподілу величини  $X - x$  за умови, що  $X > x$ :

$$F_x(t) = P(T(x) \leq t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}.$$

Якщо відомі табличні значення  $l_x$  і  $l_{x+t}$ , то через них функція розподілу  $F_x(t)$  виражається:

$$F_x(t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

Щільність  $f_x(t)$  випадкової величини  $T(x)$  :

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

### Модель де Муавра

Введемо позначення:

$$I_x(a, b] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (a, b] \\ 0, & \text{якщо } x \notin (a, b] \end{cases}$$

Нехай розподіл тривалості життя описується законом де Муавра, для якого щільність розподілу і функція виживання, відповідно, задаються формулами:

$$f(x) = \frac{I_x(0, \omega)}{\omega},$$

$$s(x) = I_x(-\infty, \omega) - \frac{xI_x(0, \omega)}{\omega}.$$

З того що  $0 < X < \omega$ , випливає  $0 < T(x) < \omega - x$ , і

$$F_x(t) = \frac{t}{\omega - x} I_t(0, \omega - x) + I_t[\omega - x, \infty),$$

а для  $t \in (0, \omega - x]$

$$f_x(t) = \frac{1}{\omega - x},$$

тобто залишковий час життя також рівномірно розподілено, проте на проміжку  $(0, \omega - x)$ .

В актуарній математиці ймовірність  $P(T(x) \leq t)$  і додаткова ймовірність  $P(T(x) > t)$ , які позначаються символами  ${}_t q_x$  і  ${}_t p_x$ , визначаються наступними формулами:

$${}_t q_x = P(T(x) \leq t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)},$$

$${}_t p_x = P(T(x) > t) = 1 - {}_t q_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Величина  ${}_t q_x$  виражає ймовірність смерті людини віку  $x$  років у проміжку часу  $(x, x+t]$ , а  ${}_t p_x$  – ймовірність, що така людина доживе до віку  $x+t$ .

При  $t=1$  одержуємо:

$$q_x = P(T(x) \leq 1) = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x},$$

$$p_x = P(T(x) > 1) = 1 - q_x = \frac{s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Змінні  $q_x, p_x$  частіше усього використовуються на практиці; величина  $q_x$  дорівнює ймовірності смерті індивідуума віку  $x$  років протягом найближчого року, а  $p_x$  – ймовірності, що він проживе ще принаймні один рік.

Маємо зв'язок:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

У страховій справі виникає необхідність розглядати і більш складні випадки. Наприклад, визначимо ймовірність того, що людина віку  $x$  проживе  $t$  років, але помре протягом наступних  $u$  років. Цю ймовірність позначають

$${}_{t|u} q_x = P(t < T(x) \leq t+u) = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}.$$

### Показники залишкового часу життя

В актуарній математиці середній залишковий час життя людини віку  $x$ :

$$\bar{T} = M(T(x)) = \frac{1}{s(x)} \int_x^{\infty} s(x) dx.$$

Для другого моменту маємо:

$$M([T(x)]^2) = \frac{2}{s(x)} \int_0^{\infty} ts(x+t)dt,$$

тобто дисперсія залишкового часу життя:

$$D(T(x)) = M([T(x)]^2) - [M(T(x))]^2 = \frac{2}{s(x)} \int_0^{\infty} ts(x+t)dt - \bar{T}^2.$$

## 7.2. Часткова залишкова тривалість життя й округлений залишковий час життя

Розглянемо  $n$ -літнє *страхування на дожиття* або *змішане страхування*, суть якого в тому, що клієнт укладає договір страхування на  $n$  років, і виплата відбувається: або в момент смерті застрахованого, якщо вона наступила до закінчення  $n$ -літнього періоду, або наприкінці  $n$ -літнього періоду, якщо застрахований залишився живий.

Момент страхової виплати виражається формулою  $\min(T(x), n)$  і називається *частковою тривалістю життя*, а відповідне математичне очікування – *частковою середньою тривалістю життя*:

$$\overline{X}_n = M[\min(T(x), n)] = \frac{1}{s(x)} \int_x^{x+n} s(x)dx.$$

Для дисперсії часткової тривалості життя маємо:

$$D[\min(T(x), n)] = \frac{2}{s(x)} \int_0^n ts(x+t)dt - (\overline{X}_n)^2.$$

В актуарній математиці поряд із залишковим часом життя розглядають його цілу частину  $K(x) = [T(x)]$ , яка називається *округленою залишковою тривалістю життя*. Це пов'язано з наступними причинами: людина звичайно рахує свій вік у цілих роках; договори страхування життя,

як правило, укладаються на ціле число років; у ТТЖ приводяться дані для віків у цілих роках.

Таким чином, випадкова величина  $K(x)$  є дискретною випадковою величиною, яка приймає цілі значення. Як відомо, характеристикою такої випадкової величини є закон розподілу:

$$P(K(x) = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)}.$$

Тепер, з огляду на те, що  $X = T(0)$ , можна визначити розподіл і округлений час життя  $K(0) = [X]$ :

$$P(K(0) = k) = s(k) - s(k+1),$$

або  $P(K(0) = k) \approx f(k)$ , де  $f(k)$  – щільність випадкової величини  $X$  (на один рік).

Середнє випадкової величини  $K(x)$  називається *середньою округленою залишковою тривалістю життя*:

$$\bar{K} = M(K(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(K(x) = k) = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k).$$

Аналогічно знаходиться другий початковий момент:

$$\begin{aligned} D(K(x)) &= M([K(x)]^2) - (\bar{K})^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(K(x) = k) - (\bar{K})^2 = \\ &= \frac{2}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} ks(x+k) - \bar{K} - (\bar{K})^2. \end{aligned}$$

### 7.3. Сплайнові апроксимації для дробових віків

Реальна статистика доступна звичайно тільки для цілих значень  $x$  (у літах), що обумовлено як певними традиціями і зручністю збору статистичних даних, так і формою їх представлення в ТТЖ, де аргументи  $x$ , як правило, приймає значення  $0,1,2,\dots$ . Більшість клієнтів у свій день народження в страхову компанію не приходять, тому для роботи з конкретними індивідуумами потрібно



вміти знаходити наближення деяких ймовірнісних характеристик для дробових віків по їх відомих значеннях для цілих  $x$ .

Дана задача – це типова задача інтерполяції, причому можна обмежитися її розв'язанням тільки для функції виживання  $s(x)$ , тому що інші величини можна знайти через  $s(x)$ . В актуарній математиці цю задачу вирішують за допомогою *сплайнів*. Існують три постулати, що дають різноманітні наближення:

- ◆ рівномірний розподіл смертності,
- ◆ постійна інтенсивність смертності,
- ◆ припущення Балдуччі.

### Рівномірний розподіл смертності

У цьому випадку функція виживання інтерполюється лінійною функцією вигляду

$$s(x) = a_n + b_n x \quad \text{при } n \leq x \leq n+1.$$

$s(n)$  і  $s(n+1)$  відомі (наприклад, із ТТЖ), записуємо рівняння:

$$\begin{cases} a_n + b_n n = s(n) \\ a_n + b_n (n+1) = s(n+1) \end{cases}$$

і визначаємо невідомі  $a_n, b_n$ .

Отже, на відрізку  $n \leq x \leq n+1$  функція  $s(x)$  апроксимується лінійним сплайном вигляду

$$s(x) = (n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1).$$

Звідси для кривої смертності  $f(x)$  і інтенсивності смертності  $\mu_x$  одержуємо відповідно:

$$f(x) = s(n) - s(n+1), \quad n < x < n+1,$$

$$\mu_x = \frac{s(n) - s(n+1)}{(n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1)} = \frac{q_n}{1 - (x-n)q_n},$$

де  $q_n$  – ймовірність того, що людина у віці  $n$  років помре протягом найближчого року.

### Постійна інтенсивність смертності

У цьому випадку функція виживання інтерполюється показовою спадною функцією вигляду

$$s(x) = a_n e^{-b_n x} \text{ при } n \leq x \leq n+1.$$

$s(n)$  і  $s(n+1)$  відомі (наприклад, із ТТЖ), записуємо рівняння:

$$\begin{cases} a_n e^{-b_n n} = s(n) \\ a_n e^{-b_n (n+1)} = s(n+1) \end{cases}$$

і визначаємо невідомі  $a_n, b_n$ .

Таким чином,

$$s(x) = s(n) p_n^{x-n},$$

де  $p_n$  – ймовірність того, що людина у віці  $n$  років проживе хоча б ще один рік.

### Припущення Балдуччі

У цьому випадку замість  $s(x)$  лінійною функцією інтерполюється  $\frac{1}{s(x)}$ . Застосовуючи метод із рівномірного розподілу смертності, маємо:

$$s(x) = \frac{s(n+1)}{p_n + (x-n)q_n}.$$

**Приклади розв'язання задач до модуля 2**

**Приклад 1.** Використовуючи ТТЖ для чоловіків (див. Додаток А), побудуйте параметричні оцінки функції виживання та функції інтенсивності смертності для моделі де Муавра. Порівняйте отриману функцію виживання з табличними значеннями.

Розв'язок. Для моделі де Муавра маємо:

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \quad F(x) = \frac{x}{\omega},$$

$$s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad \mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{\omega - x},$$

де  $\omega$  – граничний вік (наприклад  $\omega = 110$ ),  $f(x)$ ,  $F(x)$  – щільність (крива смертності) та функція розподілу величини  $X$  – віку життя,  $s(x)$ ,  $\mu_x$  – функція виживання та функція інтенсивності смертності відповідно.

Табличні значення дають функцію виживання:

Таблиця 1.

$x$	0	14	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1,000	0,954	0,947	0,922	0,878	0,795	0,651	0,434	0,188	0,003	0	0

Отже, розрахуємо функцію виживання та функцію інтенсивності смертності за законом де Муавра, результати оформимо в вигляді таблиці:

$$s(x = 0) = 1 - \frac{0}{110} = 1,000, \quad s(x = 14) = 1 - \frac{14}{110} = 0,872, \dots$$

$$\mu_0 = \frac{1}{110 - 0} = 0,009, \dots$$

Таблиця 2.

$x$	0	14	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1,000	0,872	0,818	0,727	0,636	0,545	0,455	0,364	0,273	0,182	0,091	0
$\mu_x$	0,009	0,01	0,011	0,013	0,014	0,017	0,02	0,025	0,033	0,05	0,1	-

Порівнюючи таблиці 1 та 2, бачимо, що модель де Муавра дає суттєву похибку при розрахунках.

**Приклад 2.** Розрахувати основні показники тривалості життя для моделі де Муавра ( $\omega = 110$ ).

Розв'язок. Середня тривалість життя випадкової величини  $X$  (для моделі де Муавра):

$$\bar{X} = M(X) = \int_0^{\infty} s(x) dx = \int_0^{110} \left(1 - \frac{x}{110}\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{220}\right) \Big|_0^{110} = 55.$$

Дисперсія

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - (M(X))^2 = 2 \int_0^{\infty} x s(x) dx - \bar{X}^2 = \\ &= 2 \int_0^{110} x \left(1 - \frac{x}{110}\right) dx - 55^2 = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{330}\right) \Big|_0^{110} - 55^2 = 1008. \end{aligned}$$

Коефіцієнт асиметрії

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{M(X - \bar{X})^3}{D(X)^{3/2}} = \frac{\int_0^{\infty} (x - \bar{X})^3 f(x) dx}{D(X)^{3/2}} = \\ &= \frac{\int_0^{110} (x - 55)^3 \frac{1}{110} dx}{1008^{3/2}} = \frac{(x - 55)^4}{110 \cdot 4 \cdot 1008^{3/2}} \Big|_0^{110} = 0. \end{aligned}$$

Екссес

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{M(X - \bar{X})^4}{(D(X))^2} - 3 = \frac{\int_0^{\infty} (x - \bar{X})^4 f(x) dx}{(D(X))^2} - 3 = \\ &= \frac{\int_0^{110} (x - 55)^4 \frac{1}{110} dx}{1008^2} - 3 = \frac{(x - 55)^5}{110 \cdot 5 \cdot 1008^2} \Big|_0^{110} - 3 = -1,2. \end{aligned}$$

Бачимо, що величина  $X$  не розподілена за нормальним законом розподілу та не має великого хвосту у правій частині розподілу. Це логічні результати, тому що модель де Муавра розрахована на рівномірний закон розподілу.

**Приклад 3.** Дана функція виживання  $s(x) = e^{-x^3/12}$ ,  $x \geq 0$ . Знайти функцію інтенсивності смертності, криву смертності та функцію розподілу.

Розв'язок. Крива смертності зв'язана з функцією виживання наступним чином:

$$f(x) = -s'(x),$$

тобто маємо:

$$f(x) = -\left(e^{-x^3/12}\right)' = \frac{x^2}{4} e^{-x^3/12}.$$

Функція інтенсивностей смертності за означенням:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{x^2 e^{-x^3/12}}{4e^{-x^3/12}} = \frac{x^2}{4}.$$

Функція розподілу зв'язана з функцією виживання:

$$s(x) = 1 - F(x) \Rightarrow$$

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - e^{-x^3/12}.$$

**Приклад 4.** Дана крива смертності

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x/a}.$$

Знайти функцію виживання та функцію інтенсивності смертності, середню тривалість життя та дисперсію тривалості життя.

Розв'язок. Крива смертності зв'язана з функцією виживання наступним чином:

$$\begin{aligned} f(x) &= -s'(x) \Rightarrow \\ s(x) &= -\int_{-\infty}^x f(x) dx = -\int_{-\infty}^x \frac{x}{a^2} e^{-x/a} dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = x \quad | \quad du = dx \\ e^{-x/a} dx = dv \quad | \quad v = -ae^{-x/a} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{a^2} \left( -axe^{-x/a} \Big|_{-\infty}^x + a \int_{-\infty}^x e^{-x/a} dx \right) = \frac{x+a}{a} e^{-x/a}. \end{aligned}$$

Функція інтенсивностей смертності за означенням:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{xe^{-x/a}}{a^2 \left( \frac{x+a}{a} e^{-x/a} \right)} = \frac{x}{(x+a)a}.$$

Середня тривалість життя:

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= M(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-x/a} dx = \\
 &= \left[ \begin{array}{l} u = x^2 \quad | \quad du = 2xdx \\ e^{-x/a} dx = dv \quad | \quad v = -ae^{-x/a} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{a^2} \left( -ax^2 e^{-x/a} \Big|_0^{\infty} + 2a \int_0^{\infty} xe^{-x/a} dx \right) = \frac{2}{a} \int_0^{\infty} xe^{-x/a} dx = \\
 &= \frac{2}{a} \left( -axe^{-x/a} \Big|_0^{\infty} + a \int_0^{\infty} e^{-x/a} dx \right) = -2ae^{-x/a} \Big|_0^{\infty} = 2a.
 \end{aligned}$$

Дисперсія

$$\begin{aligned}
 D(X) &= M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x/a} dx - \bar{X}^2 = \\
 &= \left[ \begin{array}{l} u = x^3 \quad | \quad du = 3x^2 dx \\ e^{-x/a} dx = dv \quad | \quad v = -ae^{-x/a} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{a^2} \left( -ax^2 e^{-x/a} \Big|_0^{\infty} + 3a \int_0^{\infty} x^2 e^{-x/a} dx \right) - \bar{X}^2 = 2a^2.
 \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Знайти точку максимуму кривої смертності для моделей Гомпертца та Вейбулла.

Розв'язок. Крива смертності моделі Гомпертца має вигляд:

$$f(x) = \mu_x s(x) = B \exp \left( \alpha x - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right),$$

звідки знаходимо точку максимуму кривої смертності:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= B \exp\left(\alpha x - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right) \left(\alpha - \frac{B\alpha e^{\alpha x}}{\alpha}\right) = \\
 &= B(\alpha - B e^{\alpha x}) \exp\left(\alpha x - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right) \equiv 0, \\
 B(\alpha - B e^{\alpha x}) &= 0 \Rightarrow \alpha = B e^{\alpha x} \Rightarrow x = \frac{\ln \alpha - \ln B}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Крива смертності моделі Вейбулла має вигляд:

$$f(x) = -s'(x) = kx^n \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right),$$

звідки знаходимо точку максимуму кривої смерті:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= nkx^{n-1} \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right) - k^2 x^{2n} \exp\left(-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right) \equiv 0, \\
 nkx^{n-1} - k^2 x^{2n} &= 0 \Rightarrow x = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(n+1)}.
 \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Для прикладу 1 побудуйте параметричні оцінки функції виживання для моделі Гомпертца. Порівняйте отриману функцію виживання з табличними значеннями та значеннями за моделлю де Муавра.

Розв'язок. Для моделі Гомпертца функція виживання має вигляд:

$$s(x) = \exp\left(-\frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right),$$

де  $\alpha, B > 0$  – параметри, які треба визначити.

Максимум смертності з ТГЖ  $x^* = 100$  (ймовірність дожити дорівнює нулю, а для попереднього значення – відмінна від нуля), отже

$$\frac{\ln \alpha - \ln B}{\alpha} = 100.$$



Візьмемо значення  $x$  та  $s(x)$  з ТТЖ, наприклад:

$$x = 50, s(x) = 0,795,$$

тоді маємо систему:

$$\begin{cases} \exp\left(-\frac{B(e^{\alpha 50} - 1)}{\alpha}\right) = 0,795, \\ \frac{\ln \alpha - \ln B}{\alpha} = 100. \end{cases}$$

Звідки чисельними методами отримаємо коефіцієнти  $\alpha = 0,1$ ,  $B = 0,000156$  (приблизно), тобто функція виживання має вигляд:

$$s(x) = \exp\left(-\frac{0,000156(e^{0,1x} - 1)}{0,1}\right) = \exp(-0,00156(e^{0,1x} - 1)).$$

Розрахуємо значення функції виживання для всіх  $x$ .

Таблиця 3.

$x$	0	14	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$s(x)$	1,000	0,996	0,990	0,970	0,920	0,795	0,534	0,181	0,009	0,000	0

Порівнюючи таблиці 1 та 3, бачимо, що закон Гомперца дає меншу похибку, тобто більш точно описує реальний процес, ніж закон де Муавра.

**Приклад 7.** Знайти щільність розподілу залишкового часу життя для моделі Гомперца.

Розв'язок. Для моделі Гомперца функція виживання та крива смертності дорівнює

$$s(x) = \exp\left(-\frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right),$$

$$f(x) = B \exp\left(\alpha x - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right).$$

Щільність розподілу залишкового часу життя знайдемо за формулою:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x)}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

тобто для моделі Гомпертца маємо:

$$\begin{aligned} f(x+t) &= B \exp\left(\alpha(x+t) - \frac{B(e^{\alpha(x+t)} - 1)}{\alpha}\right), \\ f_x(t) &= \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{B \exp\left(\alpha(x+t) - \frac{B(e^{\alpha(x+t)} - 1)}{\alpha}\right)}{\exp\left(-\frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right)} = \\ &= B \exp\left(\alpha(x+t) - \frac{B e^{\alpha x} (e^{\alpha t} - 1)}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

**Приклад 8.** Знайти середній залишковий час життя, його дисперсію та середньоквадратичне відхилення для моделі де Муавра.

Розв'язок. Для моделі де Муавра функція виживання має вигляд:

$$s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}.$$

Середній залишковий час життя людини віку  $x$ :

$$\bar{T} = M(T(x)) = \frac{1}{s(x)} \int_x^{\infty} s(x) dx = \frac{\omega}{\omega - x} \int_x^{\omega} \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) dx = \frac{\omega - x}{2}.$$

Для другого моменту маємо:

$$\begin{aligned} M([T(x)]^2) &= \frac{2}{s(x)} \int_0^{\infty} ts(x+t)dt = \\ &= \frac{2\omega}{\omega-x} \int_0^{\omega-x} t \left(1 - \frac{x+t}{\omega}\right) dt = \frac{(\omega-x)^2}{3}, \end{aligned}$$

тобто дисперсія залишкового часу життя:

$$\begin{aligned} D(T(x)) &= M([T(x)]^2) - [M(T(x))]^2 = \\ &= \frac{(\omega-x)^2}{3} - \left(\frac{\omega-x}{2}\right)^2 = \frac{(\omega-x)^2}{12}. \end{aligned}$$

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(T(x)) = \sqrt{D(T(x))} = \frac{\omega-x}{\sqrt{12}}.$$

**Приклад 9.** Знайти часткову середню тривалість життя та її дисперсію для моделі де Муавра. Навести розрахунки для  $\omega = 90$ ,  $n = 5$ .

Розв'язок. Для моделі де Муавра функція виживання має вигляд:

$$s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}.$$

Часткова середня тривалість життя:

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= M[\min(T(x), n)] = \frac{1}{s(x)} \int_x^{x+n} s(x) dx = \\ &= \frac{\omega}{\omega-x} \int_x^{x+n} \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) dx = n - \frac{n^2}{2(\omega-x)}. \end{aligned}$$

Для другого моменту маємо:

$$M([T(x)]^2) = \frac{2}{s(x)} \int_0^n ts(x+t) dt = \frac{n^2(-3n^2 + 2(\omega-x)(2n-3))}{12(\omega-x)^2} + 1.$$

Для дисперсії часткової тривалості життя маємо:

$$D[\min(T(x), n)] = \frac{n^2(-3n^2 + 2(\omega - x)(2n - 3))}{12(\omega - x)^2} +$$

$$+ 1 - \left( n - \frac{n^2}{2(\omega - x)} \right)^2 = \frac{n^3}{3(\omega - x)} - \frac{n^2}{4(\omega - x)^2}.$$

Розрахуємо для  $\omega = 90$ ,  $n = 5$ :

Таблиця 4.

$x$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{X}_n$	4,853	4,844	4,812	4,792	4,750	4,688	4,583	4,375	3,750	-
$D$	0,444	0,496	0,563	0,651	0,771	0,943	1,215	1,632	3,604	-

**Приклад 10.** Знайти ймовірність того, що чоловік (80 років) помре у віці 80,5-81,5 роки з урахуванням рівномірного розподілу смертності.

Розв'язок. Рівномірний розподіл смертності: на відріжку  $n \leq x \leq n + 1$  функція  $s(x)$  апроксимується лінійним сплайном вигляду

$$s(x) = (n + 1 - x)s(n) + (x - n)s(n + 1).$$

Отже,

$$s(80,5) = (80 + 1 - 80,5)s(80) + (80,5 - 80)s(80 + 1) =$$

$$= 0,5(s(80) + s(81)), \quad 80 \leq x \leq 81,$$

$$s(81,5) = (81 + 1 - 81,5)s(81) + (81,5 - 81)s(81 + 1) =$$

$$= 0,5(s(81) + s(82)), \quad 81 \leq x \leq 82.$$

Ймовірність

$$P(T(x) \leq t) = F_x(t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}$$

або

$$P(a < T(x) < b) = F_x(b) - F_x(a) = \frac{s(x) - s(x+b)}{s(x)} -$$

$$- \frac{s(x) - s(x+a)}{s(x)} = \frac{s(x+a) - s(x+b)}{s(x)}.$$

Таким чином,

$$P(0,5 < T(80) < 1,5) = \frac{s(80,5) - s(81,5)}{s(80)} =$$

$$= 0,5 \left( 1 - \frac{s(82)}{s(80)} \right) = 0,5 \left( 1 - \frac{s(82)s(81)}{s(81)s(80)} \right) =$$

$$= 0,5(1 - p_{81}p_{80}) = 0,5(1 - (1 - q_{81})(1 - q_{80})) =$$

$$= 0,5(1 - (1 - 0,12548)(1 - 0,11672)) = 0,11378,$$

де величина  $q_x$  дорівнює ймовірності смерті індивідуума віку  $x$  років протягом найближчого року, а  $p_x$  – ймовірності, що він проживе ще принаймні один рік,

$$p_x = 1 - q_x = \frac{s(x+1)}{s(x)}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x} \text{ – для ТТЖ.}$$

З ТТЖ відомо, що  $q_{81} = 0,12548$ ,  $q_{80} = 0,11672$ .

**Питання для самоконтролю до модуля 2**

*Дати розгорнуту відповідь на питання:*

1. Соціальне страхування.
2. Загальнообов'язкове державне страхування.
3. Функція виживання.
4. Крива смертності. Функція інтенсивності смертності.
5. Показники тривалості життя.
6. Аналітичні закони смертності.
7. Залишковий час життя.
8. Часткова залишкова тривалість життя й округлений залишковий час життя.
9. Сплайнні апроксимації для дробових віків.

*Дати означення (сформулювати) чи записати формули знаходження:*

1. Функція виживання.
2. Крива смертності.
3. Функція інтенсивності смертності.
4. Середня тривалість життя.
5. Дисперсія тривалості життя.
6. Модель де Муавра.
7. Модель Гомперца.
8. Модель Мейкхема.
9. Модель Вейбула.
10. Функція розподілу залишкового часу життя.
11. Щільність залишкового часу життя.
12. Середній залишковий час життя.
13. Дисперсія залишкового часу життя.
14. Часткова середня тривалість життя.
15. Дисперсія часткової тривалості життя.
16. Рівномірний розподіл смертності.
17. Постійна інтенсивність смертності.
18. Припущення Балдуччі.

## Задачі до модуля 2

### Основні задачі

1. Характер залежності функції виживання від віку наведено в таблиці для жінок (СРСР, 1984-1985 р.):

$x$	0	14	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1,00	0,964	0,961	0,953	0,939	0,908	0,841	0,700	0,417	0,008	0	0

Побудуйте параметричні оцінки функції виживання та функції інтенсивності смертності для моделі де Муавра. Порівняйте отриману функцію виживання з табличними значеннями. Розрахувати основні показники тривалості життя.

2. Характер залежності функції виживання від віку наведено в таблиці для США, 1984-1985 р.:

$x$	0	14	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(x)$	1,00	0,983	0,977	0,965	0,949	0,915	0,837	0,682	0,432	0,142	0,012	0

Побудуйте параметричні оцінки функції виживання та функції інтенсивності смертності для моделі де Муавра. Порівняйте отриману функцію виживання з табличними значеннями. Розрахувати основні показники тривалості життя.

3. Дана функція виживання  $s(x) = e^{-x/4}$ ,  $x \geq 0$ . Знайти функцію інтенсивності смертності, криву смертності та функцію розподілу. Розрахувати основні показники тривалості життя.

4. Дана функція виживання  $s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}$ ,  $0 \leq x < 110$ .

Знайти функцію інтенсивності смертності, криву смертності та функцію розподілу. Розрахувати основні показники тривалості життя.

5. Знайти точку максимуму кривої смертності для моделей Гомперца та де Муавра.

6. Знайти точку максимуму кривої смертності для моделей Вейбула та Мейкхема.
7. Знайти точку максимуму кривої смертності для моделей Ерланга та Мейкхема.
8. Знайти щільність розподілу залишкового часу життя та основні показники залишкової тривалості життя для моделі де Муавра  $\omega = 100$  та моделі з функцією виживання  $s(x) = xe^{2x}$ .
9. Знайти функцію розподілу та щільність розподілу залишкового часу життя та основні показники залишкової тривалості життя для моделі з функцією виживання  $s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}$ ,  $0 \leq x < 110$ .
10. Знайти показники часткової тривалості життя для моделі де Муавра та моделі з функцією виживання  $s(x) = 2e^{x/2}$ .
11. Знайти показники часткової тривалості життя для моделей з функціями виживання  $s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}$ ,  $0 \leq x < 110$ ,  $s(x) = 2e^x$ .
12. Знайти ймовірність того, що чоловік СРСР (77 років) помре у віці  $77\frac{5}{12} - 78\frac{11}{12}$  роки з урахуванням рівномірного розподілу смертності. Розв'язати також задачу для жінки.
13. Знайти ймовірність того, що чоловік СРСР (75 років) помре у віці  $75\frac{1}{2} - 76\frac{1}{2}$  роки в припущенні Балдуччі. Розв'язати також задачу для жінки.



*Додаткові задачі*

1. Визначити тарифну нетто-ставку і нетто-внесок при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасного випадку. Ймовірність страхового випадку протягом року  $q = 0,002$ , страхова сума  $S = 10$  тис. грн., кількість застрахованих  $N = 3000$ , рівень гарантії безпеки – 0,95.
2. Відомо, що за договором страхування на випадок смерті, укладеним особою у віці 37 років терміном на три роки, одноразова нетто-премія становить 27 грн. 30 коп., а сучасна вартість майбутнього платежу – 2 грн. 83 коп. Обчисліть постійну річну нетто-премію.
3. У якому розмірі застрахований повинен сплачувати річну (постійну) нетто-премію за договором страхування на випадок смерті, укладеним на страхову суму в 2000 грн. терміном на п'ять років, якщо одноразова нетто-премія по страхуванню цієї особи становить 48 грн. 05 коп. із 1000 грн. страхової суми, а сучасна вартість майбутнього платежу – 4 грн. 45 коп.?
4. Обчисліть річну нетто-премію по змішаному страхуванню життя особи у віці 35 років, яка виявила бажання застрахуватися на суму 5000 грн. терміном на 15 років, якщо річна нетто-премія за втрату працездатності від нещасних випадків становить 1 грн. 50 коп., одноразова нетто-премія по страхуванню на випадок смерті – 120 грн. 77 коп., одноразова нетто-премія по страхуванню на дожиття – 393 грн. 51 коп. із 1000 грн. страхової суми, а сучасна вартість майбутнього платежу – 10 грн. 20 коп.
5. Визначити річну брутто-премію за договором страхування на випадок смерті й втрати

працевдатності, укладеним на суму 1000 грн. терміном на 3 роки, згідно з яким: річна нетто-премія на випадок смерті – 9 грн. 65 коп.; річна нетто-премія на випадок втрати працевдатності – 1 грн. 50 коп.; початкові витрати – одноразово 5 грн. на 1000 грн. страхової суми; адміністративно-господарські витрати – щорічно 3 грн. на 1000 грн. страхової суми; комісійні витрати – 10% брутто-премії. Сучасна вартість майбутнього платежу – 2 грн. 83 коп.

6. До річної нетто-премії за договором змішаного страхування життя, укладеному на суму 5000 грн. терміном на 15 років, робиться така надбавка:

- на початкові витрати – одноразово 25 грн. на 1000 грн. страхової суми;
- на адміністративно-господарські витрати – щорічно 2 грн. на 1000 грн. страхової суми;
- на комісійні витрати – 9% брутто-премії.

Річна нетто-премія становить 51 грн. 92 коп. із 1000 грн. страхової суми. Сучасна вартість майбутнього платежу – 10 грн. 20 коп. Обчисліть річну брутто-премію.

7. Страхувальник бажає укласти договір змішаного страхування життя на термін 5 років з умовою поквартальної сплати страхових внесків. Народився він у жовтні 1965 р., а заяву про страхування подав у липні 2000 р. За якою тарифною ставкою повинні обчислюватися страхові внески?

## **МАТЕРІАЛ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ**

- ◆ *АктUARні розрахунки в добровільному медичному страхуванні.*
- ◆ *Страхування на випадок непрацездатності-інвалідності.*
- ◆ *Страхування від нещасного випадку та хвороби.*

### **Тема 1. АктUARні розрахунки в добровільному медичному страхуванні**

#### **1.1. Добровільне медичне страхування**

АктUARні розрахунки в добровільному медичному страхуванні (ДМС) базуються на основних принципах розрахунку тарифних ставок за іншими видами страхування, але відрізняються від страхування життя з урахуванням особливостей страхування життя.

По-перше, тарифні ставки розраховуються щодо основних видів медичної допомоги: швидка медична допомога, денні стаціонари, діагностичні дослідження, стоматологічна допомога, лікарське забезпечення тощо, залежно від напрямків ДМС у страховій компанії.

По-друге, у рамках ліцензійних напрямків ДМС страхова компанія розробляє окремі програми ДМС, наприклад, такі: стоматологічна допомога, діагностичні дослідження та інші, для яких розрахунок тарифних ставок проводиться окремо.

По-третє, при розрахунку тарифних ставок і розробці програм ДМС повинні бути виключені ті види медичної допомоги (по об'ємах, вартості), які закладені в Територіальній програмі державних гарантій забезпечення населення області (міста) безкоштовною медичною допомогою.

В четверте, для розрахунку тарифних ставок по ДМС використовуються дані окремої галузі статистики – медичної статистики (статистики охорони здоров'я), у яких враховуються як основні демографічні показники (тривалість життя, смертність), так і показники захворюваності, госпіталізації.

В п'яте, розрахунок тарифних ставок ДМС може проводитись на випадок виплати страхової суми або добових виплат (розрахунок по стаціонарній медичній допомозі) при настанні захворювання.

В шосте, залежно від тривалості договорів ДМС існують розходження в характері страхових виплат і бази статистичних даних, необхідної для розрахунку страхових тарифів. Так, при укладанні договорів ДМС строком на один рік тарифи розраховуються дискретно й диференційовано залежно від приналежності застрахованого до певної групи ризику для кожного віку. Поточні страхові виплати при цьому здійснюються за рахунок страхових внесків, що надходять у даний фінансовий рік. При висновку ж багаторічних, довгострокових контрактів ДМС для розрахунку страхових тарифів береться до уваги не тільки ріст вікової захворюваності, але й зміна демографічного фактора в часі, зміна статистики захворюваності людей протягом строку страхування, можлива кумуляція застрахованих ризиків. Страхові внески при цьому використовуються як для фінансування поточних виплат, так і для створення резервів, призначених для майбутніх виплат з урахуванням зміни ступеня ризику в різних вікових категоріях застрахованих.

В сьоме, при розрахунку страхових тарифів накопичувального ДМС, що припускає одержання певного інвестиційного доходу застрахованими за рахунок розміщення страхових резервів страховиком,

можуть бути використані відомі підходи за аналогією зі страхуванням життя.

## 1.2. Розрахунок тарифних ставок по ДМС

У зв'язку з тим, що в цей час (і, ймовірно, у найближчому майбутньому) будуть відсутні реальні умови здійснення накопичувального ДМС, а також одноразові укладання договорів ДМС на тривалий строк у зв'язку з низьким рейтингом страхових компаній, в якості методичної основи пропонується використовувати наступний принципний порядок розрахунку тарифних ставок у ДМС.

1. Розрахунок тарифних ставок по ДМС проводиться за диференційованими видами медичної допомоги, які, як правило, діляться на:

- амбулаторно-поліклінічну;
- стаціонарну;
- комплексну (включаючи амбулаторно-поліклінічну і стаціонарну).

Розмір сукупності *брутто-ставки* розраховується за формулою:

$$B_{CT} = \frac{H_{CT}}{100 - n},$$

де  $B_{CT}$  – брутто-ставка,  $H_{CT}$  – нетто-ставка,  $n$  – навантаження, %.

*Нетто-ставка* розраховується за наступною формулою:

$$H_{cm} = H_0 + H_p,$$

де  $H_0$  – основна частина нетто-ставки. Вона визначається як:

$$H_0 = 100 \cdot B / C \cdot p,$$

$B$  – середнє відшкодування, од.;  $C$  – середня страхова сума, од.;  $p$  – ймовірність настання страхового випадку.

Вона розраховується за формулою:

$$p = [1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_k)],$$

$p_1, p_2, \dots, p_k$  – ймовірність звернення за медичною допомогою для кожного класу хвороб (профілю відділення), передбачених умовами страхування;  $H_p$  – ризикова надбавка. Вона може бути розрахована:

- при наявності даних по числу укладених договорів страхування за формулою

$$H_p = H_0 \cdot \alpha(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{1 - p + (\sigma)^2}{np}},$$

де  $\alpha(\gamma)$  – гарантія безпеки;  $(\sigma)^2$  – середньоквадратичне відхилення середнього відшкодування;  $n$  – число договорів страхування,

- при відсутності даних по числу укладених договорів страхування за формулою:

$$H_p = H_0 \cdot \alpha(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n-1}},$$

$n$  – число років спостереження;

- при розробці нової Програми ДМС за формулою:

$$H_p = 1,2 \cdot H_0 \cdot \alpha(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{1-p}{np}},$$

$n$  – прогнозоване число договорів ДМС.

2. З врахуванням того, що ДМС підлягають особи з істотно різними індивідуальними особливостями від середніх характеристик (вік, стан здоров'я, умови праці, спосіб життя та інше), ймовірність настання випадку захворювання в цих осіб різна. У зв'язку з цим розроблюються загальні принципи диференційованих

тарифних ставок за даними ознаками. Базова тарифна ставка (нетто-ставка) коректується за наступними *групами здоров'я* залежно від результатів попереднього медичного огляду:

- *група здоров'я 1* – практично здорові особи без обтяженої спадковості, що мають в анамнезі дитячі хвороби, простудні захворювання, апендицит, грижу; без шкідливих звичок або при їх помірній виразності, що не працюють на виробництві з особливо шкідливими умовами праці;
- *група здоров'я 2* – практично здорові особи з підвищеним ризиком захворювання, обтяжені спадковістю діабету, серцево-судинними, печінковою і жовчнокам'яною хворобами, психічними захворюваннями. В амнезії – черепно-мозкові травми, ускладнені дитячі хвороби, зловживання алкоголем, паління, що працювали або працюють на виробництві з особливо шкідливими умовами праці;
- *група здоров'я 3* – особи працездатного віку, що мають хронічні захворювання з тенденцією до загострення частіше двох разів на рік, які зловживають алкоголем, систематично вживають транквілізатори, снодійні, страждають вираженими неврозами, психопатіями, гіпертонічною хворобою I і II ступеня.

*Страховим випадком у ДМС є звернення за методичною допомогою за будь-якого випадку: установлення діагнозу з подальшим лікуванням або без нього, прояв одного або декількох захворювань і відповідне лікування, непрацездатність тощо.*

## Тема 2. Страхування на випадок непрацездатності-інвалідності

### 2.1. Непрацездатність-інвалідність

Застрахована особа, яка внаслідок хвороби або нещасного випадку була змушена цілком або частково перервати свою професійну діяльність, визначається такою, що перебуває у *стані непрацездатності*. В результаті цього випадку настає зменшення доходів або заробітної плати. Запобігти цьому й покликане страхування.

Термін «*непрацездатність*» включає два різних стани:

- а) тимчасову непрацездатність;
- б) постійну непрацездатність або професійну інвалідність.

Професійна інвалідність вимірюється звичайно у відсотках, які показують зниження спроможності застрахованої особи одержувати дохід від своєї або еквівалентної професійної діяльності.

Втім, застрахованій особі можуть бути заподіяні ушкодження, що загрожують її фізичній цілісності, але не тягнуть за собою серйозного зниження професійних прибутків, хоча викликають труднощі в повсякденному житті та певні витрати. Такий стан визначається як *функціональна інвалідність*.

Досить часто загальний відсоток інвалідності визначається сполученням відсотка професійної інвалідності та відсотка функціональної інвалідності, які не залежать від професії застрахованої особи.

Існує багато різновидів оцінки інвалідності: шкала нещасних випадків на виробництві, шкала для інвалідів війни тощо. Очевидно, що для цього виду гарантій необхідно дуже точно визначити межу між поняттями «непрацездатність» і «інвалідність». Це досить важко,



оскільки існує безліч причин, які спричинюють непрацездатність чи інвалідність – нещасний випадок, хвороба, старість.

Окремі випадки, наприклад, інвалідність, що настала в результаті нещасного випадку на виробництві, вивчені набагато краще, аніж інші, навіть якщо їх наслідки розрізняються залежно від законодавства або звичаїв тієї або іншої країни. Інвалідність, що спричинена хворобою, вивчена набагато менше. Чинники, що впливають на неї, різноманітні: вік, вид занять, умови життя, особистий стиль життя тощо. Інвалідність, що настає в результаті старіння, розглядається з позиції страхування на випадок необхідності в опіці.

У деяких країнах для найманих робітників і окремих професій ненайманих працівників критерієм визначення непрацездатності або постійної загальної або часткової інвалідності виступає факт початку виплат системою соціального захисту.

Надалі будемо вважати, що ризики визначені досить точно, щоб могли бути підібрані й використані відповідні статистичні дані.

## **2.2. Технічна база страхування на випадок інвалідності**

Як і в розрахунках зі страхування життя розглянемо два різних види ймовірностей:

- а) ймовірність зберігання певного існуючого на даний момент стану;
- б) ймовірність зміни цього стану, оскільки така зміна при страхуванні на випадок смерті може відбутися лише з однієї причини (настання смерті), у той час як при страхуванні на випадок інвалідності таких причин дві: настання смерті й інвалідності.

Розглянемо одну працездатну людину у віці  $x$  років на початку року. Введемо позначення:

$w_x$  – ймовірність для  $x$  стати інвалідом протягом року, до віку  $(x + 1)$  років, це річний відсоток інвалідності у віці  $x$  років;

$p_x^{aa}$  – ймовірність для  $x$  бути живим на кінець року, не ставши інвалідом;

$q_x^{aa}$  – ймовірність для  $x$  померти протягом року, не ставши інвалідом;

$p_x^{ai}$  – ймовірність для  $x$  стати інвалідом протягом року і бути живим на кінець року;

$q_x^{ai}$  – ймовірність для  $x$  стати інвалідом протягом року і померти до кінця року;

$p_x^a$  – ймовірність для  $x$  бути живим на кінець року або працездатним, або інвалідом;

$q_x^a$  – ймовірність для  $x$  померти протягом року перед тим, як стати (бо не стати) інвалідом.

Теорема повної ймовірності дає змогу записати:

$$p_x^a = p_x^{aa} + p_x^{ai};$$

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai};$$

$$w_x = p_x^{ai} + q_x^{ai};$$

$$p_x^a + q_x^a = 1;$$

звідки:

$$p_x^{aa} + q_x^{aa} + w_x = 1.$$

Якщо зробити припущення, що настання інвалідності рівномірно розподілене протягом року, і людина, яка стала інвалідом протягом цього року, схильна до ризику власної смерті в стані інвалідності протягом  $\frac{1}{2}$  року, можна записати в першому наближенні:

$$q_x^{ai} = w_x q_x^i \frac{1}{2},$$

з чого випливає:

$$p_x^{ai} = w_x - q_x^{ai} = w_x - w_x q_x^i \frac{1}{2} = w_x \left(1 - q_x^i \frac{1}{2}\right) = \frac{w_x (1 + p_x^i)}{2}.$$

Також маємо:

$$p_x^{ai} = p_x^a - p_x^{aa}.$$

Отже,

$$p_x^{aa} = p_x^a - \frac{w_x (1 + p_x^i)}{2}.$$

Зрозуміло, що можна визначити ймовірності  $p_x^{aa}$ ,  $q_x^{aa}$ ,  $p_x^{ai}$ ,  $q_x^{ai}$ , виходячи з таблиць  $W$  і відсотка смертності  $q_x^i$  і  $q_x^a$ . Визначення  $q_x^i$  здійснюється в результаті спостереження за групою, що складається з інвалідів.

Щоб визначити  $q_x^{aa}$  і  $w_x$ , треба простежити протягом одного року за групою з працездатних людей того ж самого віку  $x$ .

Якщо протягом року виявили  $d_x^{aa}$  випадків смерті людей, які залишилися працездатними до самої смерті, і  $j_x$  (випадків інвалідності), одержимо:

$$q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}};$$

$$w_x = \frac{j_x}{l_x^{aa}}.$$

Знаючи значення трьох показників  $q_x^i$ ,  $q_x^{aa}$ ,  $w_x$ , можна визначити тарифи зі страхування на випадок інвалідності. Може знадобитися ще один додатковий показник на випадок, якщо виплата пенсії у випадку

інвалідності припиняється в разі припинення інвалідності.

Тоді необхідно мати у своєму розпорядженні таблицю, що відбиває ймовірність повернення до нормальної діяльності. У багатьох країнах виплата ренти по інвалідності припиняється в 60 років у разі початку виплат «законної» пенсії по старості. Ускладнення, спричинені пошуком необхідних достовірних джерел інформації, часто призводять до значного «розкиду» результатів.

Розглянемо групу працездатних осіб у віці  $x$  років  $l_x^{aa}$  і розрахуємо сучасну ймовірну вартість ренти по інвалідності, яку вони можуть одержувати в майбутньому, тобто:

$$l_x^{aa} a_x^{ai}.$$

Протягом першого року число випадків, які буде заявлено, складе:

$$l_x^{aa} w_x,$$

при цьому кількість інвалідів, що доживуть до кінця року:

$$l_x^{aa} w_x \left( 1 - \frac{q_x^i}{2} \right),$$

і кожний із них має право на довічну ренту, наприклад, в 1 грн., виплачувану наприкінці року, сучасна ймовірна вартість якої складе:

$$V(1 + a_x^i) = 1.$$

Таким чином, розрахуємо протягом  $(k+l)$  років ймовірне число заявлених випадків інвалідності:

$$l_{x+k}^{aa} w_{x+k},$$

з яких до кінця року доживуть

$$l_{x+k}^{aa} w_{x+k} \left( 1 - \frac{q_{x+k}^i}{2} \right)$$

і кожному потрібно буде наприкінці року виплачувати довічну ренту в 1 грн., сучасна ймовірна рента:

$$V^{k+1}(1 + a_{x+k+1}^i).$$

У підсумку отримаємо:

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = \sum_{k=0}^{\infty} l_{x+k}^{aa} \cdot w_{x+k} \left(1 - \frac{q_{x+k}^i}{2}\right) (1 + a_{x+k+1}^i) V^{k+1}.$$

Вираз

$$l_{x+k}^{aa} w_{x+k} \left(1 - \frac{q_{x+k}^i}{2}\right)$$

означає кількість людей, що стали інвалідами протягом  $(x+k)$ -го року, ще живих наприкінці року. Для групи осіб у стані інвалідності цей вираз дорівнює:

$$l_{x+k+1}^{ii} - l_{x+k}^{ii} \cdot p_{x+k}^i,$$

отже,

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = \sum_{k=0}^{\infty} (l_{x+k+1}^{ii} - l_{x+k}^{ii} \cdot p_{x+k}^i) \ddot{a}_{x+k}^i V^{k+1}.$$

У той же час:

$$\ddot{a}_{x+k}^i = 1 + V p_{x+k}^i + V^2 {}_2p_{x+k}^i + \dots,$$

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = \sum_{k=0}^{\infty} V^{k+1} (l_{x+k+1}^{ii} - l_{x+k}^{ii} \cdot p_{x+k}^i) (1 + V p_{x+k}^i + V^2 {}_2p_{x+k}^i + \dots).$$

Підставивши усі вирази і записавши в порядку зростання ступеня  $V$ , одержимо:

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = V(l_{x+k+1}^{ii} - l_x^{ii} p_x^i) + V^2(l_{x+2}^{ii} - l_x^{ii} {}_2p_x^i) + \dots + V^k(l_{x+k}^{ii} - l_x^{ii} {}_k p_x^i) + \dots$$

У свою чергу:

$$l_{x+k}^{ii} = l_{x+k} - l_{x+k}^{aa},$$

тобто число інвалідів, які живуть у  $k$ -му році дорівнює різниці між загальним числом живих членів групи і числом живих членів групи, що не є інвалідами.

Отже,

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = \sum_{k=1}^{\infty} V^k (l_{x+k} - l_{x+k}^{aa} - l_{x+k}^{ii} p_x).$$

У той час:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V^k l_{x+k} = l_x \sum_{k=1}^{\infty} V^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = l_x a_x,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} V^k l_{x+k}^{aa} = l_x^{aa} a_x^{aa},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_x^{ii} p_x^i = l_x^{ii} a_x^i.$$

Отже,

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = l_x a_x - l_x^{aa} a_x^{aa} - l_x^{ii} a_x^i.$$

Тим часом:

$$l_x^{ii} = l_x - l_x^{aa},$$

Отже,

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = l_x a_x - l_x^{aa} a_x^{aa} - (l_x - l_x^{aa}) a_x^i.$$

Тобто,

$$l_x^{aa} a_x^{ai} = l_x a_x - l_x^{aa} a_x^{aa} - l_x a_x^i + l_x^{aa} a_x^i,$$

$$a_x^{ai} = a_x^i - a_x^{aa} - \frac{l_x}{l_x^{aa}} (a_x^i - a_x),$$

(вираз, що лінійно залежить від значень  $a_x^i, a_x^{aa}, a_x$ ).

Якщо договором передбачена тимчасова рента по інвалідності виплачувана, наприклад, до 60-ти років, отримаємо:

$${}_{/60-x} a_x^{ai} = {}_{/60-x} a_x^i - {}_{/60-x} a_x^{aa} - \frac{l_x}{l_x^{aa}} ({}_{/60-x} a_x^i - {}_{/60-x} a_x).$$

Наведений вище вираз буде визначати верхню межу сучасної ймовірної вартості ренти по інвалідності, тому що ще існує можливість загубити право на ренту не тільки у

випадку смерті або при досягненні 60-ти років, а й у випадку повернення до нормальної діяльності.

### Річні премії зі страхування у випадку інвалідності

Як і у випадок страхування життя, розрахунок премій у разі інвалідності здійснюється на основі рівності сучасних ймовірних вартостей зобов'язань страховика та страхувальника.

Якщо  $P_x$  – чиста усереднена річна премія, а  $\Pi_x$  – чиста одноразова премія за договором, одержимо:

$$\Pi_x = P_x \ddot{a}_x^{aa},$$

або, якщо премії тимчасові (тобто сплачуються не довічно, а протягом визначеного терміну, наприклад,  $p$  років), то:

$$\Pi_x = P_x \cdot {}_p \ddot{a}_x^{aa}.$$

При цьому треба, зрозуміло, використовувати таблицю смертності для працездатних осіб, оскільки внески сплачують тільки працездатні страховики. Чиста премія збільшується на розмір необхідного навантаження, розмір якого часто вищий, ніж при страхуванні життя через складність управління договорами.

### Математичні резерви при страхуванні на випадок непрацездатності чи інвалідності

Ризик інвалідності збільшується з віком, отже, резерви розраховують при усереднених преміях. Такий розрахунок аналогічний тому, який використовується для визначення резервів у страхуванні життя.

Так, для договору ренти по інвалідності з довічною премією одержимо:

$$a_x^{ai} = p_x \cdot \ddot{a}_x^{aa}$$

$${}_k V^{ii} = a_{x+k}^{ai} - p_x \cdot \ddot{a}_{x+k}^{aa}.$$

Якщо рента по інвалідності вже виплачується, математичні резерви в такій ситуації будуть дорівнювати:

$${}_kV^{ii} = a_{x+k}^{ai}.$$

Варто також відзначити особливу важливість точного визначення ризиків при страхуванні на випадок непрацездатності і складність визначення надійної статистичної бази даних, враховуючи розходження в ступені ризику залежно від категорії населення.

Тільки по категорії найманих робітників, завдяки організації виплат із соціального забезпечення, в розвинутих країнах є численні статистичні дані.

### **2.3. Особливості страхування на випадок непрацездатності чи інвалідності**

Об'єктом страхування на випадок непрацездатності чи інвалідності є, в основному, часткова або повна компенсація недоотриманого прибутку, бо за період тимчасової непрацездатності здійснюються так звані «щоденні виплати». За період повної або часткової непрацездатності виплати здебільшого йменуються «пенсія по інвалідності». Цей період починається з моменту, коли стан здоров'я хворого або постраждалого в результаті нещасного випадку може розглядатися як стабілізуюче повернення (з низькою ймовірністю) до нормального стану.

Гарантії можуть бути виражені у гривнях за кожний оплачуваний за договором день або, у випадку ренти по інвалідності, у гривнях за рік.

Часто для застрахованих із категорії найманих робітників гарантії виражаються у відсотках від заробітної плати застрахованого працівника за вирахуванням виплат, які здійснюються відповідно до базового режиму (державою або системою соціального захисту). Сума цих



двох виплат не повинна перевищувати розмір заробітної плати, яку одержував застрахований під час роботи.

Визначення страхових сум у гривнях використовується лише для осіб, які не належать до категорії найманих робітників.

Виплати припиняються:

- 1) у випадку повернення здоров'я застрахованого працівника до стану, який дозволяє йому продовжувати працювати;
- 2) у момент виходу на пенсію (у загальному випадку, для інвалідів – у 60 років);
- 3) для осіб, які не належать до категорії найманих працівників, по досягненні ними граничного віку, визначеного в договорі (у загальному випадку – у 65 років).

Гарантії набувають сили у визначений момент, що має назву моменту припинення роботи.

Щоденні виплати досить часто здійснюються тільки після закінчення визначеного терміну (15 днів, 1 місяць, 3 місяці). Використання *франшизи* обумовлене бажанням уникнути шахрайства, зменшити ціну страховки і відповідати положенням колективного договору, що передбачає збереження повної заробітної плати протягом деякого часу після припинення роботи. В разі, якщо після повернення до нормальної діяльності протягом обговореного в договорі періоду настає рецидив захворювання, що викликало перед цим припинення роботи, франшиза вдруге не застосовується.

Необхідно зазначити, що гарантії на випадок непрацездатності або інвалідності бувають складовою одного договору страхування, у якому крім зазначених містяться гарантії на випадок смерті або хвороби. При цьому премія зі страхування на випадок інвалідності

визначається таким чином, що вся сукупність гарантій за договором для непрацездатних людей зберігається без сплати внесків.

Виплати у випадку непрацездатності, частково або у розмірі, що цілком відновлює заробітну плату, можуть продовжуватися тривалий час, особливо у випадку інвалідності, тому необхідно, за можливості, підтримувати їх купівельну спроможність, а, отже, здійснювати переоцінку.

Після вибору індексу, відповідно до якого буде робитися *переоцінка*, можливе використання двох методів:

- 1) страховик змушений здійснювати переоцінку математичних резервів відповідно до показника індексації рент, що дозволяє у випадку розірвання договору залишати розмір виплачуваних рент на останньому досягнутому рівні;
- 2) до переоцінки удаються при розподілі, використовуючи для цього фонд переоцінки, який формується найчастіше за рахунок спеціальних внесків і прибутків за договором. Це менш вартісний метод, тому що у випадку припинення дії договору або припинення існування застрахованої групи розмір виплачуваних рент повертається на початковий рівень, що тягне за собою суттєві незручності для застрахованих осіб.

### Технічні резерви

Зобов'язання страховика в разі страхування непрацездатності, тобто технічні резерви, розраховуються за такими ж принципами, що і при страхуванні життя, тобто передусім необхідно визначити закон зберігання стану непрацездатності.

Розрахунок резервів для виплат у період дії договору нічим не відрізняється від розрахунку резервів для термінової (тимчасової) ренти при страхуванні життя.

Закон зберігання стану інвалідності за віком є аналогом закону дожиття в страхуванні життя.

Розрахунок резервів для рент по інвалідності в період очікування не є надто складним при використанні припущення про систематичну затримку моменту виходу на інвалідність до вичерпування 365 днів після моменту припинення роботи. Основний капітал ренти відіграє роль відстроченої суми, а закон зберігання стану інвалідності відіграє ту ж роль, що й таблиці смертності.

### **Тема 3. Страхування від нещасного випадку та хвороби**

У світовій практиці мають місце окремі випадки одночасного страхування на випадок смерті та страхування на випадок інвалідності. Дійсно, гарантії набирають сили, тільки якщо подія, яка завдала шкоди, є *нещасним випадком*, у той час як при страхуванні на випадок смерті допускаються будь-які причини, до яких належать хвороба, нещасний випадок, настання старості.

Цей вид страхування не є дорогим, оскільки серед усіх випадків смерті в середньому тільки 10% відбуваються в результаті нещасного випадку.

Проте соціальна роль цього виду страхування дуже важлива, оскільки часто раптова смерть у результаті нещасного випадку глави сім'ї або керівника підприємства породжує більше проблем, ніж настання смерті після тривалої хвороби.

Подія «*нещасний випадок*» загалом визначається як будь-яке тілесне ушкодження в результаті раптового впливу зовнішніх причин, які не залежать від волі жертви.

У випадку інвалідності сума, передбачена в договорі, зменшується в пропорції з відсотком інвалідності, визначеним після поліпшення стану жертви. Деякі ризики виключаються: війна, бунти, стан сп'яніння та заняття небезпечними видами спорту, ядерні ризики. Цей вид страхування в колективній формі часто використовують спортивні клуби на користь своїх членів.

Тарифікація залежить від точного визначення застрахованих виплат: страхової суми на випадок смерті або інвалідності, щоденного відшкодування, виплачуваного протягом обговореного в договорі терміну, граничних витрат з медичного догляду тощо. Звичайною відсотковою ставкою, що використовується при страхуванні суми на випадок смерті або постійної повної інвалідності в результаті нещасного випадку, є 1,1% від страхової суми.

Для гарантій на випадок інвалідності в результаті нещасного випадку в розрахунок береться тільки функціональна інвалідність, і, крім того, часто на практиці встановлюють відсоток функціональної інвалідності, нижче якого ніяких виплат не здійснюється.

Щодо резервів, то ризик передбачається незалежним від віку, і премія є постійною, але не треба залишати запаси на кінець звітного року (крім резервів премій для врахування періоду страхування, що завершився до звітної дати).

### 3.1. Страхування на випадок хвороби

Страхування на випадок хвороби має на меті забезпечення виплат застрахованій особі для покриття медичних і супутніх витрат, які вона несе.

Можна здійснювати це страхування двома різними способами, наприклад, способом страхування щоденних виплат у випадку хвороби.

З теоретичної точки зору цей вид гарантій майже аналогічний страхуванню на випадок смерті або непрацездатності.

Якщо позначити через  $l_x$  число людей у віці  $x$  років, і через  $n_x$  загальне число днів хвороби протягом року, то їх відношення:

$$z_x = \frac{n_x}{l_x}$$

називається *річним відсотком захворюваності*.

Таблиця, що показує значення  $z_x$  для кожного віку, називається таблицею захворюваності.

Ті ж зауваження, що були зроблені при визначенні відсотка інвалідів  $w_x$ , застосовані і тут. Визначимо  $z_x$ , розділивши число днів хвороби  $n_x$  на середню чисельність

$$\frac{l_x - l_{x+1}}{2}.$$

Практичні труднощі пов'язані, головним чином, із добором статистичних даних.

На захворюваність діють численні чинники:

- вплив віку – не вдаючись у деталі різних таблиць захворюваності, що були створені, можна схематично сказати, що якщо середньорічне число днів хвороби для населення у віці 25 років складає 5, то той же показник досягає 25 і більше у віці 70 років;

- вплив віку – захворюваність у жінок, головним чином, більш висока, ніж захворюваність у чоловіків;
- вплив родинного стану – для жінок материнство істотно збільшує захворюваність;
- вплив місця проживання – захворюваність сільського населення на 20% нижча захворюваності міського;
- вплив сучасності, оскільки в різні історичні періоди ризик захворювання змінюється з часом і залежно від метеорологічних умов і економічної кон'юнктури;
- вплив неврахованих чинників і моральні аспекти, бо точний аналіз показує, що застраховані, які частіше хворіли протягом одного періоду, продовжують протягом іншого періоду показувати захворюваність, що перевищує середні значення.

Через усю цю розмаїтість страхування в даний час періодичність і розміри виплат на випадок хвороби недостатньо вивчені.

Крім того, є проблема згладжування таблиць захворюваності. Спроби згладити таблиці захворюваності розпочалися давно. Наприклад, формула Кінкеліна. Якщо  $x$  – вік застрахованого на початку року  $i$  – число днів хвороб, що він переніс протягом цього року, запропонована така формула вирівнювання:

$$n_x = 10,9271 - 0,409307x + 0,07589x^2.$$

Інакше вирівнювання за формулою:

$$n_x = h \cdot r^x$$

було запропоновано Грісхабером.

### **3.2. Страхування медичних витрат**

Система соціального захисту в будь-якій країні охоплює майже всіх громадян, але розрізняється, втім, умовами для осіб, які не є найманими працівниками, а також залежно від того, чи перебувають останні у віданні

загальнодержавного режиму соціального захисту або місцевого.

Система соціального захисту зазвичай здійснює оплату кожної медичної послуги відповідно до повного списку можливих медичних послуг (візит до лікаря, рентгенографія тощо) і фіксує для кожної із цих послуг вид звичайного тарифу, оплачуючи визначений відсоток вартості послуг.

Додаткове страхування на випадок хвороби функціонує за схожою системою, розраховуючи свої виплати за кожну послугу відповідно до номенклатури системи соціального захисту в межах того ж самого тарифу, більше того, оплачує перевищення цього тарифу.

Іноді страховик може підмінити собою систему соціального захисту і почати виплати, але згідно з такою самою системою відшкодування. Прикладом може бути обслуговування жителів прикордонної зони у Швейцарії, тобто країни, з якою немає угоди щодо соціального захисту.

Тарифікація здійснюється у такий спосіб, якщо позначити через  $\sum x$  розмір виплат, які здійснюються протягом року усім застрахованим у віці  $x$  років, а через  $N_x$  – число застрахованих у віці  $x$  років, то

$$\sigma_x = \frac{\sum x}{N_x}$$

складає середню річну вартість страхового випадку на одну людину у віці  $x$  років.

Сучасна ймовірна вартість відшкодування, яка буде виплачуватись у майбутньому застрахованим у віці  $x$  років у разі припущення, що виплати здійснюються в середині року, буде складати:

$$X_x = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \sigma_x \cdot \frac{D_x V^{1/2} + D_{x+2} V^{-1/2}}{2},$$

де  $D_x = l_x \cdot V^x$ .

Має сенс враховувати при визначенні  $l_x$  не тільки випадки смерті, але також і випадки розірвання договору.

«Чиста» річна довічна премія буде складати:

$$P_x = \frac{X_x}{\ddot{a}_x}.$$

Зрозуміло, витрати  $\sum x$  можуть бути розподілені за типами медичних послуг.

Як і для інвалідності, це теоретичний підхід до оцінки вартості ризику. Іноді особливості дії системи соціального захисту змушують використовувати інші підходи, відмінні від теоретичного.

При страхуванні на випадок хвороби мається на увазі покрити видатки, які залишилися у застрахованого після відшкодування системи соціального захисту.

Ці витрати класифікуються в основному так:

- консультації та візити;
- ліки та аналізи;
- ортопедичні й оптичні протези;
- спеціальні послуги;
- допоміжні медичні послуги;
- хірургія та хірургічна госпіталізація;
- медична госпіталізація;
- догляд і зубні протези;
- водолікування;
- вагітність.

Звичайно, виплати у випадку вагітності відповідають заздалегідь установленим сумам, крім випадку хірургічного втручання при пологах.



### 3.3. Розрахунок чистої премії з повного страхування на випадок хвороби

Системи соціального захисту, як правило, встановлюють для типової сім'ї (двоє дорослих, одна дитина) формулу, що визначає споживання медичних послуг залежно від різних видів послуг з переліку. Ця формула періодично переглядається відповідно до змін звичайного способу життя застрахованих і прогресу медицини. Крім того, вартість кожної послуги постійно змінюється, зокрема, залежно від інфляції.

Формула, яка використовується в Германії, має вигляд:

$$\begin{aligned}
 P(\text{чиста річна премія однієї сім'ї}) = & \\
 = & 8,5C + 3V + Ph + ort + 161B + 28Z + 13(K + K')_{ch} + \\
 & + 13Kspe + 33AM + \dots + 42D + 1,15Jch + 1,2Jcc + \\
 & + 2,2Jmh + 0,6Jmc + 2,1JD.
 \end{aligned}$$

У цій формулі кожний символ являє собою один вид медичних послуг і має грошову вартість, що використовується при упорядкуванні «тарифу відповідальності системи соціального захисту», від якого буде братися відсоток для покриття.

Наведена нижче таблиця є узагальненням французького досвіду і дає опис кожного символу і його ціни у євро, причому мова йде про одиничні оцінні вартості.

Потрібно, крім цього, зазначити, що одинична вартість, як ціна за 1 день перебування у хірургічній лікарні, також серйозно змінюється – до 20% за районами залежно від медичних установ.

Кожний страховик має скласти власну таблицю одиничних цін залежно від своїх спостережень, часто з диференціацією тарифів за районам.

Таблиця 5.

*Перелік медичних послуг*

<b>Символ</b>	<b>Визначення</b>	<b>Вартість у євро</b>
<i>Z</i>	Консультація терапевта фахівця	149,0
<i>V</i>	Виклик додому терапевта і фахівця	152,0
<i>Ph</i>	Витрати на ліки	2652,0
<i>Ort</i>	Витрати на протези, ортопедію або оптику	143,0
<i>Y</i>	Поточні аналізи, анатомо-цитологічні тощо	1,8
<i>Z</i>	Послуги з використанням іонізуючих випромінювань	10,9
<i>(K+K')ch</i>	Хірургічні послуги	13,7
<i>Kspe</i>	Спеціальні хірургічні послуги або поточна медична практика	12,6
<i>AM</i>	Додаткові медичні послуги: відвідування медпункту, масаж тощо	13,9
<i>D</i>	Стоматологічні хірургічні послуги	12,4
<i>Jch</i>	День у хірургічному громадському госпіталі	2744,0
<i>Jcc</i>	День у хірургічній клініці	1922,0
<i>Jmh</i>	День у медичному публічному госпіталі	2642,0
<i>Jmc</i>	День у медичній клініці	1564,0
<i>JD</i>	День у спеціалізованому закладі, будинку відпочинку, санаторії тощо	920,0

У результаті загальна річна вартість для типової сім'ї сьогодні є майже € 20 580.

Щоб одержати із загальної вартості для типової сім'ї індивідуальну вартість, рекомендується використовувати такий розподіл:

- чоловік – 35% сімейної премії, тобто € 7203;
- жінка – 40% сімейної премії, тобто € 8232;
- дитина – 25% від сімейної премії, тобто € 5145.

Формула споживання медичних послуг типової сім'єю (двоє дорослих, одна дитина) дозволяє розрахувати чисту премію для будь-якого набору гарантій, особливо частину вартості медичного обслуговування, яку оплачує сам пацієнт (різниця між виплатою Системи Соціального Захисту і встановленим тарифом), а також будь-які види перевищень над розміром нормального «тарифу відповідальності» системи соціального захисту.

Гарантії, які іменуються дослівно «регулюючий квиток», полягають для страховика в тому, що він бере на себе усе, що не було відшкодовано системою соціального захисту застрахованій особі, яка скористалася тільки «звичайною» медициною.

Щоб одержати цю вартість для розглянутої типової сім'ї, треба відняти від повної формули медичних витрат послуги, що на 100% покриваються системою соціального захисту і які не оплачуються самим пацієнтом.

Статистичні дані, які надаються системою соціального захисту, дозволяють одержати таку залишкову формулу:

$$P = 6,8C + 1,9V + 0,6PR + 0,46ort + 10B + 19Z + 2,6(ДО + K')ch + \\ + 9Kspe + 17AM + 36D + 0,23Jch + 0,44Jmh + 0,12Jmc + \\ + 0,105JD + 0,24Jcc.$$

Застосовуючи середній офіційний відсоток, який покривається системою соціального захисту, або його доповнення до 100%, що являє собою «регулярний квиток» до кожної послуги, одержують чисту премію за гарантією.

Вона може виражатися в такий спосіб:

$$P = 2,04C + 0,57V + 0,276Ph + 0,161ort + 41,2B + 5,7Z + \\ + 0,52(ДО + K') + 2,7Kspe + 6,8AM + 10,8D + 0,046Jch + 0,048Jcc + \\ + 0,088Jmh + 0,024Jmc + 0,021JD.$$

Чиста премія зі страхування медичних витрат, прийнятих на себе пацієнтом, для типової сім'ї утвориться

після підстановки вартості кожної послуги близько 2030 грн., або:

- для чоловіка – 710 грн.;
- для жінки – 812 грн.;
- для дитини – 507 грн.

Треба зазначити, що чиста премія частково відповідає груповому договору з обов'язковою участю для найманих робітників, які покидають групу після 65 років.

Слід мати на увазі, що для переважної більшості пенсіонерів медичні витрати значно збільшуються з віком. Крім того, їм рекомендується уникати залишати на своєму рахунку покриття, яке перевищує тарифи, як це часто буває в договорах із найманими робітниками. Коефіцієнти, що підвищують, для групи пенсіонерів, що фігурують у договорі через три місяці після їхнього виходу на пенсію, бувають порядку 1,6–1,8.

#### *Договір з добровільною участю*

Для цих договорів притаманні високі ризики, яких не можна уникнути шляхом відбору можливих ризиків при укладанні договорів страхування, оскільки треба передбачити медичний контроль і вводити термін затримки з деяких медичних послуг, що вимагається при деяких захворюваннях.

Після врахування базового режиму, що може бути відмінний від режиму для найманих працівників або навіть узагалі не існувати, отримані результати збільшують на 25–50%. У Франції витрати на управління відносно високі, але мають тенденцію до зниження через укладені угоди між страховиками і Центром управління системою соціального захисту, що стосуються прямого доступу до інформаційної бази системи соціального захисту.

Договори страхування на випадок хвороби, що передбачають відшкодування медичних витрат, найчастіше

мають річний термін дії до 31 грудня. В іншому разі треба було б передбачити резерви премій з невідомих (незаявлених) ризиків.

У самому загальному випадку страховик, що має звітувати до кінця звітнього року про витрати в цьому році, зіштовхується з неминучим адміністративним розривом між датою надання медичної послуги і датою, коли він був інформований про розмір виплати. Отже, є причини для створення резерву для невідомих страхових випадків, розмір якого залежить від швидкості врегулювання цих виплат. Досвід дозволяє визначити тільки його приблизний розмір. Його розрахунок проводиться виходячи із загального розміру відомих виплат і урегульованих на 31 грудня. Деякий відсоток (30-40) береться в звітному році у вигляді резервів для виплат за страховими випадками.

При укладанні договорів з добровільною участю повинні бути прийняті додаткові заходи щодо обережності з метою покриття ризиків, які не піддаються відбору (наприклад, вік). Рекомендується збільшувати базовий тариф приблизно на 25%.

Відзначимо, що страхування на випадок хвороби є єдиним видом особистого страхування, що має компенсаційний характер. У деяких країнах страховик має право подати регресний позов проти винної третьої особи та його страховика.

Ризик захворювання, який збільшується з віком, і використання усереднених премій привели до появи математичних резервів. На практиці зміну вартості медичних послуг неможливо спрогнозувати. З цього випливає, що договори передбачають премію, яка може бути переглянута в будь-який час, навіть премію, виражену у відсотках від початкової вартості, що істотно змінюється

залежно від інфляції (наприклад, ліміт системи соціального захисту).

Відсутність чіткості в математичних резервах виключає можливість попередньої виплати за можливими індивідуальними договорами.

### **3.4. Страхування на випадок необхідності в опіці**

Збільшення тривалості життя та зниження народжуваності призводять велику частину країн Європи до старіння їхнього населення. Підрахунок серед громадян, яким необхідна опіка, вимагає, у першу чергу, визначення поняття «залежність» («необхідність в опіці»).

Допомога сім'ї частково заміняє потребу у догляді, але і вона має свої межі, тим більше що ускладнення умов сучасного життя значно загострює проблему допомоги людям похилого віку.

Підхід до проблеми страхування на випадок потреби у догляді має певну подібність до підходу, використовуваному страховиками при розв'язанні проблеми пенсій.

Перший рівень відшкодування здебільшого є у веденні соціального захисту та фінансується з податків.

Другий рівень (особисте забезпечення) є страховою послугою, що використовує капіталізацію, тобто приватні заощадження.

Визначення ризику при страхуванні при необхідності опіки є одним з основних моментів. Ризиком є можливість втрати самостійності індивідумом протягом періоду, рівного, принаймні, періоду зміцнення здоров'я, що полягає:

а) у неможливості здійснювати без допомоги третіх осіб елементарні повсякденні дії (харчуватися, переміщатися, вдягатися, здійснювати туалет тощо);

б) у необхідності знаходитися під доглядом третьої особи, щоб запобігти діям, які небезпечні для самого хворого або третіх осіб.

Розмір страхових виплат визначається залежно від ступеня потреби в опіці, який встановлюється кваліфікованою медичною комісією. За європейським досвідом такі комісії визначають три ступені залежності:

1. За максимальним інтервалом часу, протягом якого суб'єкт може залишатися один без догляду:

- рівень 3 – інтервал менше півгодини;
- рівень 2 – інтервал від півгодини до двох годин;
- рівень 1 – інтервал від двох до чотирьох годин.

Якщо інтервал часу перевищує чотири години, стан, що вимагає опіки, не фіксується.

2. За загальною необхідністю тривалості догляду протягом 24 годин:

- рівень 3 – якщо тривалість перевищує 6 годин;
- рівень 2 – якщо тривалість від 4 до 6 годин;
- рівень 1 – якщо тривалість від 2 до 4 годин.

Якщо тривалість догляду не перевищує дві години, стан, що вимагає догляду, не фіксується. Медична комісія визначає ступінь залежності від опіки на основі медичного висновку застрахованого.

Страхова сума збільшується на:

- 1 для рівня 3;
- 0,7 для рівня 2;
- 0,4 для рівня 1.

Деякі страховики визначили залежність від опіки більш простим і радикальним способом, називаючи *повною залежністю* стан, при якому медичним способом підтверджена неможливість здійснювати принаймні три із чотирьох звичайних життєвих дій: переміщатися, вдягатися, харчуватися, умиватися, і необхідність у третій особі або в госпіталізації в закладі тривалого перебування,

або якщо застрахований досяг похилого слабоумства, що викликає втрату працездатності, чи у нього хвороба Альцгеймера, підтверджена медичним висновком.

Інші страховики при визначенні ступеня *часткової залежності* оцінюють його на підставі кількості дій повсякденного життя, що може виконувати застрахований.

Приймають різноманітні запобіжні заходи, щоб уникнути ризику обману.

Прийняття на страхування може бути здійснене тільки у віці від 50 до 75 років за умови, що заявник:

- а) ніколи не одержував ренти по інвалідності;
- б) ніколи не одержував ренти у разі нещасного випадку на роботі з рівня, який перевищує 40%;
- в) не має захворювання, яке дає право на звільнення від оплати медичних витрат, здійснюваною системою соціального захисту;
- г) не знаходиться в стані непрацездатності;
- д) не був госпіталізований більш ніж на 15 днів підряд і не мав перерв у роботі більш ніж на три місяці поспіль протягом п'ятих останніх років.

Незалежно від нестачі статистичних даних, які ми маємо в розпорядженні, у теоретичному плані ми зіштовхуємося з проблемою, схожою на ту, із якою зіштовхнулися при розгляді інвалідності, плюс до цього існує велика невпевненість у часі та менша підтримка з боку офіційних структур.

У теоретичному плані маємо такі ж ймовірності зберігання або зміни стану:

$p_x^{aa}$  – ймовірність для особи у віці  $x$  років на початок року бути живою і не потрапити під опіку наприкінці року;

$q_x^{aa}$  – ймовірність для особи у віці  $x$  років на початку року померти протягом року, не потрапивши до стану, що вимагає опіки;



$p_x^{aa}$  – ймовірність для особи у віці  $x$  років на початок року потребувати опіки протягом року, але бути живою на кінець року;

$q_x^{aa}$  – ймовірність для особи у віці  $x$  років на початок року потребувати опіки протягом року, але померти до кінця року;

$p_x^t$  – ймовірність для особи у віці  $x$  років, що перебуває в опіці з початку року, дожити до кінця року;

$q_x^t$  – ймовірність для особи, що перебуває в опіці, у віці  $x$  років з початку року, померти протягом року;

$i_x$  – ймовірність для особи, що не перебуває в опіці, у віці  $x$  років на початок року потребувати опіки протягом року (так званий відсоток настання залежності);

$j_x$  – відсоток тих, хто потребує опіки, який визначає співвідношення осіб, що перебувають в опіці у віці  $x$  років, до загальної чисельності населення.

Таким чином, параметр  $l_x$  відповідає інтенсивності потрапляння в стан залежності від опіки,  $j_x$  відповідає кількісній оцінці, тобто пропорції людей, що потребують догляду.

Ці два параметри зв'язані співвідношенням:

$$l_{x+1}^t = l_x^t (1 - q_x^t) + l_x^a i_x (1 - 0,5q_x^t).$$

Якщо уявити, що люди, які потрапили в стан залежності протягом року, були схильні до ризику потрапити в цей стан залежності протягом півроку, то:

$$i_x = \frac{l_{x+1}^t - l_x^t (1 - q_x^t)}{l_x^a (1 - 0,5q_x^t)}.$$

Розділивши на  $l_x$  і з огляду на те, що

$$j_x = \frac{l'_x}{l_x};$$

$$j_{x+1} = \frac{l'_{x+1}}{l_{x+2}} = \frac{l'_{x+1}}{l_x(1-q_x)};$$

одержимо:

$$i_x = \frac{j_{x+1}(1-q_x) - j_x(1-q_x)}{(1-j_x)(1-0,5q_x^t)}.$$

Припустимо наступні спрощення:

- немає зміни ризику з часом, тобто ймовірність для людини у віці  $x$  років стати залежним в опіці у віці від  $(x+k)$  до  $(x+k+1)$  дорівнює ймовірності для людини у віці  $(x+k)$  років стати залежною протягом року;
- немає можливості повернення із стану, який вимагає опіки, у нормальний стан:

$$p_x^{ta} = q_x^{ta} = 0.$$

Показник смертності серед залежних осіб визначається, виходячи із загальної смертності, із наступного співвідношенням:

$$q_x^t = \alpha q_x + \beta,$$

де  $\alpha$  – фактор, що враховує смертність, коефіцієнт пропорційності;  $\beta$  – додатковий фактор, що враховує смертність (часто приймається  $\alpha = 2$  і  $\beta = 3,5\%$ ).

Маємо основні співвідношення:

$$p_x^{at} + q_x^{at} = i_x;$$

$$p_x^{aa} + q_x^{aa} + p_x^{at} + q_x^{at} = 1;$$

$$p_x^{aa} = 1 - i_x - q_x^{aa}.$$

Одноразова чиста премія довічної ренти в 1 грн. на рік на випадок потреби в опіці буде:

$$P_x = \sum_{k=0}^{\infty} V^k p_x^{aa} i_{x+k} \ddot{a}_{x+k}^t$$

Якщо внески для страховика передбачені довічні і постійні, отримаємо:

$$p_x = \frac{P_x}{\ddot{a}_x^{aa}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} V^k p_x^{aa} i_{x+k} \ddot{a}_{x+k}^t}{\sum_{k=0}^{\infty} V^k p_x^{aa}}$$

Як і у випадку з гарантіями по інвалідності, тариф розрахований на базі:

- а) закону дожиття активного населення;
- б) закону дожиття людей, які потребують опіки;
- в) відсотка потрапляння в стан залежності або відсотка тих, хто потребує опіки за віком.

Зрозуміло, ці формули ідентичні формулам, що відповідають гарантіям по інвалідності. Якщо застрахована особа знаходиться в нормальному стані на момент розрахунку, то:

$${}_k V^u = P_{x+k} - p_x \ddot{a}_{x+k}^{aa}$$

Якщо застрахована особа перебуває в опіці на дату розрахунку, то:

$${}_k V^u = \ddot{a}_{x+k}^l$$

Статистичні дані у цілому недостатні, незважаючи на існування деяких часткових аналізів, здійснених різними організаціями деякі результати досліджень, проведених у Німеччині і Японії зокрема були запропоновані чотири моделі, кожна з яких виділяє показники, необхідні для розрахунку тарифів.

### Модель 1

- а) закон смертності активного населення –  $q_{aa}$  ;
- б) закон смертності для осіб, які перебувають в опіці

$$qix = 2TD88 - 90 + 3,5\%;$$

в) закон настання залежності від опіки:

$$ix = 1,35 \cdot 0,00041e.$$

Отже, прийняття на страхування починається з 55 років.

#### Модель 2

а) закон смертності активного населення –  $qaax = TD73 - 77$  на 100%;

б) закон смертності для осіб, що перебувають в опіці:  $qix$  (німецькі таблиці);

в) закон зміни частки осіб, що перебувають в опіці –  $jx$  (отримано за французькими статистичними даними).

#### Модель 3

а) закон смертності активного населення  $qaax = TV73 - 77$  на 100%;

б) закон смертності осіб, які перебувають в опіці:

$$qix - (1 + k(x)) \cdot qx;$$

в) закон зміни частки осіб, що перебувають в опіці:

$$jx = 0,00023xe0,07x.$$

Отже, прийняття на страхування починається з 50 років.

#### Модель 4

а) закон смертності активного населення  $qaax$  (німецька таблиця);

б) закон смертності осіб, що перебувають в опіці:  $qix$ ;

в) закон потрапляння в стан залежності –  $ix$ ;

Отже, прийняття на страхування починається з 50 років.

Довічна рента на випадок потреби в опіці найкраще відповідає потребам застрахованих. Однак можуть бути запропоновані також інші види покриття, наприклад,

довічне страхування суми на випадок залежності або довічна негайна рента «за залежністю».

Проте зауважимо, що ці форми більш ризикові для страховика, ніж довічна рента на випадок потреби в опіці, через неявну компенсацію між законами смертності для залежних осіб і законом настання залежності, якщо розглядати їх при постійному відсотку осіб, які перебувають в опіці.

Зберігання купівельної спроможності рент за залежністю має велике значення, тому договори в основному передбачають індексацію застрахованої ренти і відповідних внесків на кожну річницю укладання договору. Крім того, фонд переоцінки, сформований за рахунок прибутку за груповим договором, служить для переоцінки в процесі капіталізації виплачуваних рент.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

---

- А**ктуарні розрахунки, 7
- Б**рутто-ставка, 14
- Д**исперсія залишкового часу життя, 71  
Дисперсія тривалості життя, 63
- З**алишковий час життя, 68  
Збитковість страхової суми, 24  
Змішане страхування, 71
- К**оефіцієнт збитковості, 24  
Коефіцієнт кумуляції, 23  
Крива смертності, 62
- М**айнове страхування, 31  
Модель Вейбулла, 67  
Модель Гомпертца, 65  
Модель де Муавра, 65  
Модель Ерланга, 68  
Модель Мейкхама, 66
- Н**авантаження, 14  
Нетто-ставка, 14  
Норма збитковості, 25
- О**круглена залишкова тривалість життя, 72
- П**енсія, 57  
Перестраховики, 13  
Постійна інтенсивність смертності, 74  
Припущення Балдуччі, 74
- Р**изикова надбавка, 16  
Рівномірний розподіл смертності, 73
- С**ередній залишковий час життя, 70  
Середня округлена залишкова тривалість життя, 72  
Середня тривалість життя, 63  
Середня часткова тривалість життя, 71  
Соціальне страхування, 55  
Сплайн, 73  
Страхова премія, 21  
Страхова сума, 10  
Страхове свідоцтво, 10  
Страховий випадок, 10  
Страховий захист, 9  
Страховий інтерес, 9  
Страховий ринок, 10  
Страховики, 10  
Страхові агенти, 12  
Страхові брокери, 13
- Т**арифна ставка, 14
- Ф**ункція виживання, 59  
Функція інтенсивності смертності, 63
- Ч**асткова тривалість життя, 71  
Частота збитків, 25

## ДОДАТКИ

### ДОДАТОК А

Таблиця тривалості життя (СРСР, 1984-1985 р.)

Вік $x$	Чоловіки			Жінки		
	$l_x$	$q_x$	$d_x$	$l_x$	$q_x$	$d_x$
14	95,438	0,00068	65	96,407	0,00037	36
15	95,373	0,00082	78	96,371	0,00041	40
16	95,295	0,00101	97	96,331	0,00047	45
17	95,198	0,00124	118	96,286	0,00053	51
18	95,08	0,00149	142	96,235	0,00059	57
19	94,938	0,00173	164	96,178	0,00065	62
20	94,774	0,00196	186	96,116	0,00069	66
21	94,588	0,00216	205	96,05	0,00072	69
22	94,383	0,00234	221	95,981	0,00074	71
23	94,162	0,00249	235	95,91	0,00076	73
24	93,927	0,00263	247	95,837	0,00078	75
25	93,68	0,00277	260	95,762	0,00081	77
26	93,42	0,00293	274	95,685	0,00084	80
27	93,146	0,00312	290	95,605	0,00088	84
28	92,856	0,00333	310	95,521	0,00093	89
29	92,546	0,00356	330	95,432	0,00099	95
30	92,216	0,00381	352	95,337	0,00106	101
31	91,864	0,00405	372	95,236	0,00113	108
32	91,492	0,00425	389	95,128	0,00121	116
33	91,103	0,00445	406	95,012	0,00131	125
34	90,697	0,00465	422	94,887	0,00142	135
35	90,275	0,00487	440	94,752	0,00155	147
36	89,835	0,00514	462	94,605	0,00168	159
37	89,373	0,0055	492	94,446	0,00182	172
38	88,881	0,00595	529	94,274	0,00196	185
39	88,352	0,00649	573	94,089	0,00212	199
40	87,779	0,00708	622	93,89	0,00228	214
41	87,157	0,0077	671	93,676	0,00247	231
42	86,486	0,00831	719	93,445	0,00267	249
43	85,767	0,00888	762	93,196	0,00289	270
44	85,005	0,00943	801	92,926	0,00314	292

## Продовження додатку А

Вік $x$	Чоловіки			Жінки		
	$l_x$	$q_x$	$d_x$	$l_x$	$q_x$	$d_x$
45	84,204	0,00997	840	92,634	0,00341	316
46	83,364	0,01057	881	92,318	0,00369	341
47	82,483	0,01126	929	91,977	0,00399	367
48	81,554	0,01208	985	91,61	0,0043	394
49	80,569	0,01303	1,05	91,216	0,00465	424
50	79,519	0,01409	1,121	90,792	0,00506	459
51	78,398	0,01522	1,193	90,333	0,00554	500
52	77,205	0,01637	1,264	89,833	0,0061	548
53	75,941	0,01754	1,332	89,285	0,00673	601
54	74,609	0,01872	1,397	88,684	0,0074	656
55	73,212	0,01997	1,462	88,028	0,00806	709
56	71,75	0,02136	1,532	87,319	0,00866	756
57	70,218	0,02293	1,61	86,563	0,00919	795
58	68,608	0,0247	1,695	85,768	0,00969	831
59	66,913	0,02665	1,783	84,937	0,01023	869
60	65,13	0,02871	1,87	84,068	0,01094	919
61	63,26	0,0308	1,949	83,149	0,01193	992
62	61,311	0,03296	2,021	82,157	0,01318	1,083
63	59,29	0,03523	2,089	81,074	0,01467	1,189
64	57,201	0,03765	2,153	79,885	0,01634	1,305
65	55,048	0,04027	2,217	78,58	0,01819	1,43
66	52,831	0,0431	2,277	77,15	0,02024	1,561
67	50,554	0,04616	2,333	75,589	0,02249	1,7
68	48,221	0,04947	2,385	73,889	0,02497	1,845
69	45,836	0,05304	2,431	72,044	0,02771	1,997
70	43,405	0,05691	2,47	70,043	0,03073	2,153
71	40,935	0,06108	2,5	67,894	0,03406	2,212
72	38,435	0,06558	2,521	65,582	0,03772	2,474
73	35,914	0,07044	2,53	63,108	0,04176	2,635
74	33,384	0,07568	2,527	60,473	0,0462	2,794
75	30,857	0,08129	2,508	57,679	0,05106	2,945
76	28,349	0,08738	2,477	54,736	0,05642	3,088
77	25,872	0,09393	2,43	51,646	0,06232	3,218



## Продовження додатку А

Вік $x$	Чоловіки			Жінки		
	$l_x$	$q_x$	$d_x$	$l_x$	$q_x$	$d_x$
78	23,442	0,10098	2,367	48,428	0,06879	3,331
79	21,075	0,10857	2,288	45,097	0,07589	3,423
80	18,787	0,11672	2,193	41,674	0,08368	3,487
81	16,594	0,12548	2,082	38,187	0,09221	3,521
82	14,512	0,13489	1,957	34,666	0,10155	3,52
83	12,555	0,14497	1,82	31,146	0,11176	3,481
84	10,735	0,15577	1,672	27,665	0,12291	3,4
85	9,063	0,16733	1,517	24,265	0,13507	3,277
86	7,546	0,2	1,509	20,988	0,2	4,197
87	6,037	0,4	2,414	16,791	0,4	6,716
88	3,623	0,6	2,174	10,075	0,6	6,045
89	1,449	0,8	1,159	4,03	0,8	3,224
90	0,29	1	0,29	0,806	1	0,806
78	23,442	0,10098	2,367	48,428	0,06879	3,331
79	21,075	0,10857	2,288	45,097	0,07589	3,423
80	18,787	0,11672	2,193	41,674	0,08368	3,487
81	16,594	0,12548	2,082	38,187	0,09221	3,521
82	14,512	0,13489	1,957	34,666	0,10155	3,52
83	12,555	0,14497	1,82	31,146	0,11176	3,481
84	10,735	0,15577	1,672	27,665	0,12291	3,4
85	9,063	0,16733	1,517	24,265	0,13507	3,277
86	7,546	0,2	1,509	20,988	0,2	4,197
87	6,037	0,4	2,414	16,791	0,4	6,716
88	3,623	0,6	2,174	10,075	0,6	6,045
89	1,449	0,8	1,159	4,03	0,8	3,224
90	0,29	1	0,29	0,806	1	0,806

## ДОДАТОК В

Таблиця тривалості життя (США, 1979-1981 р.)

Вік $x$	Чоловіки			Жінки		
	$l_x$	$q_x$	$d_x$	$l_x$	$q_x$	$d_x$
0	100000	0,0126	1260	98 973	7387758	73,88
1	98 740	0,00093	92	98 694	7288785	73,82
2	98 648	0,00065	64	98 617	7190091	72,89
3	98 584	0,0005	49	98 560	7091474	71,93
...	...	...	...	...	...	...
19	97851	0,00112	110	97796	5518733	56,4
20	97 741	0,0012	118	97682	5420937	55,46
21	97623	0,00127	124	97561	5323255	54,53
22	97499	0,00132	129	97435	5225694	53,6
....	...	...	...	...	...	...
40	94926	0,00232	220	94817	3492100	36,79
41	94 706	0,00254	241	94585	3397283	35,87
42	94465	0,00279	264	94334	3302698	34,96
43	94 201	0,00306	288	94057	3208364	34,06
...	...	...	...	...	...	...
60	83 726	0,01368	1145	83153	1676326	20,02
61	82 581	0,01493	1233	81965	1593173	19,29
62	81348	0,01628	1324	80686	1511208	18,58
63	80 024	0,01767	1415	79316	1430522	17,88
...	...	...	...	...	...	...
100	1150	0,2912	335	983	3137	2,73
101	815	0,30139	245	692	2154	2,64
102	570	0,31089	177	481	1462	2,57
103	393	0,3197	126	330	981	2,5
104	267	0,32786	88	223	651	2,44
105	179	0,33539	60	150	428	2,38
106	119	0,34233	41	99	278	2,33
107	78	0,3487	27	64	179	2,29

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

---

### *Основна*

1. Базилевич В. Д. Страхова справа / В. Д. Базилевич, К. С. Базилевич. – К. : Т-во «Знання», КОО, 2003. – 250 с.
2. Ковтун І. О. Основи актуарних розрахунків: навчальний посібник / І. О. Ковтун, М. П. Денисенко, В. Г. Кабанов. – К. : «ВД «Професіонал», 2008. – 480 с.
3. Кутуков В. Б. Основы финансовой и страховой математики / В. Б. Кутуков. – Москва: Дело, 1998. – 200 с.
4. Малыхин В. И. Финансовая математика: учеб. пособ. для вузов / В. И. Малыхин. – Москва: ЮНИТ-ДАНА, 2003. – 237 с.
5. Пономаренко О. І. Вступ до актуарної математики / О. І. Пономаренко. – К. : ЕМЦ, 2003. – 450 с.
6. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования / Э. Штрауб. – Москва: Дело, 1995. – 320 с.

### *Додаткова*

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. – Москва: Наука, 1984. – 350 с.
2. Капитоненко В. В. Финансовая математика и ее приложения / В. В. Капитоненко. – Москва: Приор, 1998. – 210 с.
3. Пономаренко О. І. Основи математики фінансів і страхування. У 2 ч. / О. І. Пономаренко. – К. : ІВЦ Держкомстату України, 2004. – 256 с.
4. Фалин Г. И. Введение в актуарную математику / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. – Москва: изд-во Моск. ун-та, 1994. – 305 с.

Навчальне видання

**ІЄ Ольга Миколаївна  
СОТНИКОВА Софія Анатоліївна**

## **АКТУАРНА МАТЕМАТИКА**

### **ЧАСТИНА 1**

*Навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів*

Редактор – Іє О. М.  
Комп'ютерний макет – Сотникова С. А.  
Коректор – Кубатіна Ю. А.  
Макет обкладинки – Сотникова С. А.

---

Здано до складання 20.05.2009 р. Підписано до друку 20.06.2009 р.  
Формат 60×84/16 . Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.  
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 7,67. Наклад 30 прим.

---

**Видавництво Державного закладу  
«Луганський національний університет  
імені Тараса Шевченка»**

вул. Оборонна 2, м. Луганськ, 91011. Тел./факс: (0642)58-03-20