UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Anja Naglič

PRIBLIŽKI KOVARIANČNIH MATRIK

Seminarska naloga pri predmetu Optimizacija v financah

Ljubljana, 2011

Optimizacijski problemi z dopustnimi rešitvami v stožcu se pojavljajo na različnih področjih, kot na primer projektiranju ogrodij, nadzoru sistemov, statistiki, optimizaciji lastnih vrednosti,… Robustna optimizacija formulacije številnih konveksnih problemov prav tako vodi k tej vrsti problemov. Poleg tega so te vrste problemi uporabni tudi pri iskanju približnih rešitev težjih kombinatoričnih optimizacijskih problemov.
Nekatere od najbolj zanimivih uporab teh optimizacijskih problemov pa se najdejo na področju finančne matematike. Pogledali si bomo izračun približkov kovariančnih matrik.

Kovariančna matrika vektorja naključnih spremenljivk je ena najpomembnejših in najpogosteje uporabljenih statističnih metod za opazovanje skupnega delovanja teh spremenljivk. Kovariančne matrike se pogosto pojavljajo na področju finančne matematike, na primer pri optimizaciji upanja in variance, napovedovanju, v modeliranju časovnih vrst itd.
Pogosto so prave vrednosti kovariančne matrike neznane in se je potrebno zanesti na ocene. Ne bomo se lotili problema ocenjevanja teh matrik, temveč bomo privzeli, da so ocene kovariančne matrike že podane ter da nas zanima določanje sprememb teh ocen, da bo matrika še vedno izpolnjevala želene lastnosti. Značilno je, da želimo poiskati najmanjše izkrivljanje prvotne ocene matrike, ki še vedno ohranja želene lastnosti.

Simetričnost in pozitivna semidefinitnost sta strukturni lastnosti, ki ju imajo vse »prave« kovariančne matrike. Korelacijska matrika izpolnjuje dodatno lastnost, da je njena diagonala iz samih enk. Spomnimo se, da simetrična in pozitivno semidefinitna matrika $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zadošča pogoju

$$x^T M x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Ta pogoj je ekvivalenten pogoju nenegativnosti lastnih vrednosti matrike *M*.

V nekaterih primerih, na primer, ko je ocena kovariančne matrike vnesena korak za korakom, dobljena ocenjena matrika lahko ni pozitivno semidefinitna, torej ima lahko negativne lastne vrednosti. Uporaba take ocene nakazuje, da imajo nekatere linearne kombinacije naključnih spremenljivk negativne variance in lahko povzročijo katastrofalne rezultate pri optimizaciji upanja in variance. Zato je pomembno, da take ocene popravimo, preden se uporabijo v katerikoli finančni odločitvi.
Tudi če je prvotna ocena simetrična in pozitivno semidefinitna matrika, včasih obstaja želja po spremembi te ocene, ne da bi ogrozili želene lastnosti. Vse te različice problema pridobivanja želenih sprememb osnovne ocene matrike lahko formuliramo v močan okvir semidefinitne optimizacije in jih je mogoče rešiti s standardno programsko opremo.

Matematično obravnavo problema začnemo ob predpostavki, da imamo oceno $\hat{\Sigma} \in S^n$ kovariančne matrike in da $\hat{\Sigma}$ ni nujno pozitivno semidefinitna. Tu S^n označuje prostor simetričnih matrik velikosti $n \times n$. Pri vsem tem je pomembno vprašanje: katera je »najbližja« pozitivno semidefinitna matrika matriki $\hat{\Sigma}$? Kot merilo bližine uporabimo Frobeniusovo normo:

$$d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) := \sqrt{\sum_{i,j} (\Sigma_{ij} - \hat{\Sigma}_{ij})^2}$$

Sedaj lahko definiramo problem najboljšega približka kovariančne matrike: poznamo oceno $\hat{\Sigma} \in S^n$ in želimo izračunati

$$\begin{aligned} &\min_{\Sigma} d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \\ &\Sigma \in C_s^n \end{aligned}$$

kjer je C_s^n stožec $n \times n$ simetričnih in pozitivno semidefinitnih matrik. Opazimo, da je v tem primeru glavna spremenljivka v obliki matrike in ne vektorja, kot pri vseh drugih optimizacijskih problemih.

Ta problem pa lahko z uvedbo slamnate spremenljivke zapišemo kot

$$\begin{aligned} &\min t \\ &d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \le t \\ &\Sigma \in C_s^n \end{aligned}$$

Neenakost $d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \le t$ pa lahko zapišemo tudi kot omejitev drugega reda za stožec, in zato se zgornji problem spremeni v stožčasti optimizacijski problem.

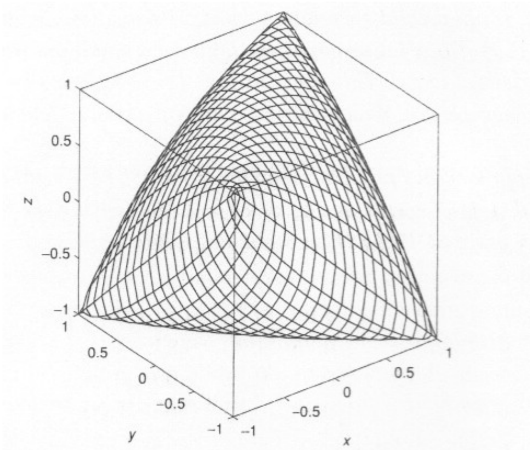
Različico te formulacije je mogoče dobiti z uvedbo dodatnih linearnih omejitev. Na primer, imamo množico E vseh (i, j) kovariančnih parov in spodnje/zgornje meje $l_{ij}, u_{ij}, \forall (i, j) \in E$, ki jih želimo imeti za te elemente. Potem rešujemo naslednji problem:

$$\begin{aligned} &\min d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \\ &l_{ij} \le \Sigma_{ij} \le u_{ij}, \forall (i, j) \in E \\ &\Sigma \in C_s^n \end{aligned}$$

Ko množica E vsebuje vse diagonalne (i, i) elemente in $l_{ii} = u_{ii} = 1, \forall i$, dobimo korelacijsko matriko v obliki prvotnega problema. Na primer, tridimenzionalne korelacijske matrike imajo obliko:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma \in C_s^3.$$

Možne rešitve za ta primer so na naslednji sliki:



Zgled: Imamo naslednjo oceno kovariančne matrike štirih vrednostnih papirjev:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0,8 & 1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,9 & 1 & 0,7 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}$$

To v bistvu ni »dopustna« korelacijska matrika, saj je njena najmanjša lastna vrednost negativna: $\lambda_{\min} = -0,1337$. Poleg tega opazimo, da obstaja visoka korelacija med papirjema 1 in 2 kot tudi med papirjema 2 in 3. To pomeni, da bi morala biti tudi papirja 1 in 3 močno povezana, vendar nista. Kako bi morali spremeniti matriko, da bi dobili »dopustno« korelacijsko matriko?

Lahko se tega problema lotimo z zadnjim postopkom z množico E, ki vsebuje vse diagonalne elemente in $l_{ii} = u_{ii} = 1, \forall i$. Z reševanjem tega problema dobimo sledeči najbližji popravek $\hat{\Sigma}$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,76 & 0,53 & 0,18 \\ 0,76 & 1 & 0,82 & 0,15 \\ 0,53 & 0,82 & 1 & 0,65 \\ 0,18 & 0,15 & 0,65 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posameznik lahko uporabi več variacij na »klasično« različico problema korelacijske matrike. Na primer, če želimo ohraniti nekatere elemente iz matrike $\hat{\Sigma}$ konstantne in jih ne bi spreminjali, potem lahko razširimo množico E, da vsebuje te elemente z ujemajočimi spodnjimi in zgornjimi mejami. Druga možnost je, da utežimo spremembe posameznih elementov, na primer, če so ocene nekaterih elementov bolj zanesljive kot drugih.

Naslednja pomembna variacija originalnega problema je postavitev spodnjih mej na najmanjšo lastno vrednost korelacijske matrike. Tudi ko imamo veljavno (pozitivno semidefinitno) oceno korelacijske matrike, so majhne lastne vrednosti v matriki nezaželene, saj vodijo v nestabilnost portfeljev. Če pogledamo zgornjo matriko, ima prav tako pozitivne, a zelo majhne lastne vrednosti, ki bi bile v eksaktni aritmetiki natanko nič.

Vse te variacije problema je mogoče obvladati z uporabo semidefinitnega programiranja in reševanjem s pomočjo semidefinitne optimizacijske programske opreme. Semidefinitna optimizacija namreč predstavlja novo orodje za upravitelje premoženja, ki na ravni sofisticiranosti in fleksibilnosti prej ni bila na voljo.

Literatura:

Cornuejols, Tütüncü, Optimization methods in finance, CUP, 2007