ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N°2 (1978)

Gr — catégories strictes

HOÀNG XUÂN SÍNH
École Supérieure de Pédagogie de Hanoi

On se propose dans cet article de démontrer que toute Gr-catégorie est équivalente à une Gr-catégorie stricte.

1. Gr-catégories strictes

DÉFINITION 1.1. On appelle Gr-catégorie [1] tout groupoïde P ayant une loi, i.e un foncteur

$$\otimes : P \times P \to P;$$

une contrainte d'associativité-unité

$$a_{X,Y,Z}: X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z, \quad g_X : X \simeq 1 \otimes X, \quad d_X : X \simeq X \otimes 1;$$

et dont tous les objets X possèdent un inverse (X^{-1}, t_X, p_X) où

$$t_X : X^{-1} \otimes X \simeq 1, \quad p_X : X \otimes X^{-1} \simeq 1.$$

La Gr-catégorie P est dite *stricte* si les isomorphismes a, g, d, t, p sont des identités.

EXEMPLE 1.2. Soient $d : L_1 \to L_0$, $\theta : L_0 \to \mathrm{Aut}\, L_1$ deux homomorphismes de groupes vérifiant deux conditions suivantes :

(i) Le triangle

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "\mu"'] & & L_0 \arrow[dl, "\theta"] \\ & \mathrm{Aut}\, L_1 & \end{tikzcd}$$

est commutatif, μ_x désignant l'automorphisme intérieur de L_1 défini par x.

(ii) $d\left(\theta_x(z)\right) = \mu_x\left(d(z)\right)$ pour tout $x \in L_0$ et tout $z \in L_1$.

A partir de d et θ vérifiant (i) et (ii), définissons une Gr-catégorie stricte P de la manière suivante :

$$\text{Ob } P = L_0$$

$$\text{Hom}_P(x, y) = \{(x, y)\} \times d^{-1}(yx^{-1})$$

et pour $\left((x_1, y_1), f_1\right) : x_1 \to y_1$, $\left((x_2, y_2), f_2\right) : x_2 \to y_2$ $\quad x_1 \otimes x_2 = x_1 x_2$

$$\left((x_1, y_1), f_1\right) \otimes \left((x_2, y_2), f_2\right) = \left((x_1 x_2, y_1 y_2), f_1\, \theta_{x_1}(f_2)\right).$$

DEFINITIONS 1.3. On appelle S-système tout quadrupole (L_1, L_0, d, θ) où L_1, L_0 sont des groupes et $d: L_1 \to L_0$, $\theta: L_0 \to \text{Aut } L_1$ des homomorphismes de groupes vérifiant les condditions de 1.2. La Gr-catégorie stricte P définie dans 1.2 est appellée *Gr-catégorie stricte définie par un S-système.*

Soient P et P' deux Gr-catégories strictes définies par deux S-systèmes (L_1, L_0, d, θ) et $(L'_1, L'_0, d', \theta')$ respectivement. Un Gr-foncteur de P dans P' est donc un couple (f_1, f_0) où $f_1: L_1 \to L'_1$, $f_0: L_0 \to L'_0$ sont des homomorphismes de groupes vérifiant les conditions :

(i) Le carré

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "f_0"] & L'_1 \arrow[d, "d'"] \\ L_0 \arrow[r] & L'_0 \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) $f_1\left(\theta(x)\, z\right) = \theta'\left(f_0(x)\right) f_1(z)$

pour tout $x \in L_0$ et tout $z \in L_1$.

2. Noyau d'un Gr-foncteur

2.1. Soient P, P' des Gr-catégories et $(F, \breve{F}): P \to P'$ un Gr-foncteur [1]. On se propose de chercher un triple $(K, (J, \breve{J}), \lambda)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) K est une Gr-catégorie.

(ii) $(J, \breve{J}): K \to P$ est un Gr-foncteur.

(iii) $\lambda: (I_{P'}, \breve{I}_{P'}) \simeq (F, \breve{F}) \circ (J, \breve{J})$ est un $\otimes$-isomorphisme fonctoriel où $(I_{P'}, \breve{I}_{P'})$ est le Gr-foncteur à valeur constante $I_{P'}$ de K dans P'.

(iv) Le triple $(K, (J, \breve{J}), \lambda)$ est universel, i. e. pour tous les triples $(Q, (E, \breve{E}), \mu)$ vérifiant (i), (ii), (iii), on a un Gr-foncteur unique $(E', \breve{E}'): Q \to K$ tel que $(E, \breve{E}) = (J, \breve{J}) \circ (E', \breve{E}')$ et $\mu = \lambda * E'$.

PROPOSITION 2.2. Le triple $(K, (J, \breve{J}), \lambda)$ existe.

DÉMONSTRATION. On pose

$$Ob\, K = \left\{ (X, l') \mid X \in Ob\, P,\ l' : 1_{p'} \to F(X) \right\}$$

$$\mathrm{Hom}_K((X, l'), (Y, m')) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_p(X, Y) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} 1_{p'} & \xrightarrow{l'} & FX \\ \| & & \downarrow F(f) \\ 1_{p'} & \xrightarrow{m'} & FY \end{array} \text{ commute} \right\}$$

La loi $\otimes$ sur les objets est

$$(X_1, l_1') \otimes (X_2, l_2') = (X_1 \otimes X_2, l')$$

avec l' défini par le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} 1_{p'} \arrow[r, "l'"] \arrow[d, "d_{1_{p'}}"'] & F(X_1 \otimes X_2) \\ 1_{p'} \otimes 1_{p'} \arrow[r, "l_1' \otimes l_2'"] & FX_1 \otimes FX_2 \arrow[u, "\breve{F}"'] \end{tikzcd}$$

et sur les flèches

$$f_1 \otimes f_2 = f_1 \otimes f_2 \qquad \text{(dans } P\text{)}.$$

Enfin pour $(J, \breve{J})$ et λ on pose

$$J(X, l') = X, \qquad \breve{J} = id, \qquad \lambda_{(X, l')} = l'. \quad \square$$

DEFINITION 2.3. Le couple $(K, (J, \breve{J}))$ est appelé le *noyau* du Gr-foncteur $(F, \breve{F})$, on le note $\mathrm{Ker}(F, \breve{F})$.

3. Invariants d'une Gr-catégorie

3.1. Une Gr-catégorie P est déterminée à Gr-équivalence près par ses trois invariants [1] :

$\pi_0(P)$ = le groupe des classes d'isomorphie des objects de P,

$\pi_1(P) = \mathrm{Aut}\,(1)$ = le groupe abélien des automorphismes de l'objet unité qui est muni en plus d'une structure de π_0 — module,

$a(P) \in H^3(\pi_0, \pi_1)$ déterminé par la contrainte d'associativité de P.

On note par $S(\pi_0, \pi_1, \alpha)$ avec $\alpha \in a(P)$ une Gr-catégorie réduite de P. Un épinglage [1] dans P permet de construire la Gr-catégorie réduite de P et les Gr-équivalences canoniques correspondantes

$$P \underset{(H, \tilde{H})}{\overset{(G, \tilde{G})}{\rightleftarrows}} S(\pi_0, \pi_1, \alpha).$$

4. Cohomologie de groupes

4.1. Soient π un groupe et A un π-module. Nous considérons le complexe de cochaînes

$$\xrightarrow{\delta} C^n(\pi, A) \xrightarrow{\delta} C^{n+1}(\pi, A) \xrightarrow{\delta}$$

où le groupe $C^n(\pi, A)$ de n-cochaînes est le groupe des fonctions g de n variables x_i dans π à valeurs dans A, satisfaisant les conditions de normalisation

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

L'homomorphisme de cobord $\delta : C^n(\pi, A) \longrightarrow C^{n+1}(\pi, A)$ est défini par

$$\delta g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) =$$

$$= x_1\, g(x_2, \dots, x_{n+1}) + \Sigma (-1)^i g(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} g(x_1, \dots, x_n).$$

Nous notons par $H^n(\pi, A)$ les groupes de cohomologie de ce complexe, ce sont les groupes de cohomologie du groupe π à coefficients dans le π-module A [2].

4.2. Nous savons que pour un groupe libre F, $H^n(F, A) = 0$ pour $n > 1$ [2]. Ici nous allons introduire le homomorphismes

$$S_n : C^{n+1}(F, A) \longrightarrow C^n(F, A), \quad n \geqslant 1$$

vérifiant les relations

$$\delta S_{n-1} + S_n \delta = 1, \quad n \geqslant 2 \tag{4.2.1}$$

qui redonnent le résultat $H^n(F, A) = 0$ $(n > 1)$ et dont nous avons besoin par la suite.

Pour cela introduisons le polynôme $f(\varepsilon) = \varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{2}$ qui donne

$$f(1) = 0$$
$$f(-1) = -1.$$

Ensuite considérons le groupe libre F qui consiste de 1 et des mots $x = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_k^{\varepsilon_k}$ où les e_i sont des générateurs libres et les exposents $\varepsilon_i = \pm 1$.

Maintenant définissons S_n. Soient $g \in C^{n+1}(F, A)$ et $x_1, \dots, x_n \in F$. Posons, pour $x_n = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_m^{\varepsilon_m}$ (représentation pas nécessairement réduite)

$$(4.2.2) \qquad S_n g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^n \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}} e_i^{f(\varepsilon_i)}, e_i).$$

On voit immédiatement que $s_n g(x_1, \dots, x_n)$ ainsi défini ne varie pas quand on fait varier la représentation de x_n, et on vérifie aisément que $s_n g$ satisfait aux conditions de normalisation. Montrons que

$$\delta S_{n-1} + S_n \delta = 1, \ n \geqslant 2.$$

Pour cela supposons que la représentation de $x_n = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_m^{\varepsilon_m}$ soit réduite et raisonnons par récurrence sur la longueur de la représentation réduite de x_n. Il est clair que la relation est vérifiée pour la longueur 0, i.e pour $x_n = 1$. Supposons que la relation est vérifiée pour pour la longueur $m - 1$ et montrons la pour la longueur m. Pour cela on s'apercoit qu'on a

$$(\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_n) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= (\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}) +$$

$$+ \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)} e_m) -$$

$$- \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)}),$$

où compte tenu de l'hypothèse de récurrence

$$(\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_n) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}) + \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)} e_m) -$$

$$- \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)})$$

ce qui donne, pour $\varepsilon_m = \pm 1$,

$$(\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_n) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n). \ \square$$

5. Gr-catégorie stricte d'une Gr-catégorie

5.1. On se propose ici de démontrer que toute *Gr*-catégorie est *Gr*-équivalente à une *Gr*-catégorie stricte définie par un *S*-système. La Méthode employée ici est la méthode d'effacement.

LEMMA 5.2. Soient P une Gr-catégorie préépinglée par (M, N) où M est un groupe et N un M-module [1], et $u: L_0 \to M$ un homomorphisme d'un groupe L_0 dans M. Posons $S(L_0) = S(L_0, 0, 0)$. Pour qu'il existe un Gr-foncteur $S(L_0) \to P$ compatible avec u il faut et il suffit que $a(P) \in H^3(M, N)$ s'ammule dans $H^3(L_0, N)$.

DEMONSTRATION. Soit $(E, \breve{E}): S(L_0) \to P$ un Gr-foncteur compatible avec u. Par un épinglage dans P nous obtenons un Gr-foncteur

$$(u, \breve{u}): S(L_0) \to S(M, N, \alpha)$$

où $\alpha \in Z^3(M, N)$, $S(M, N, \alpha)$ une Gr-catégorie réduite de P [1], u l'homomorphisme donné et $\breve{u} \in C^2(L_0, N)$. En experiment la compatibilité de $(u, \breve{u})$ avec les contraintes d'associativité de $S(L_0)$ et $S(M, N, \alpha)$ nous obtenons

$$u^*(\alpha) = \delta\breve{u},$$

i.e $a(P)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$.

Inversement supposons que $a(P)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$. D'où $u^*(\alpha)$ est un cobord $\delta\breve{u}$, i.e $(u, \breve{u})$ est un Gr-foncteur de $S(L_0)$ dans $S(M, N, \alpha)$. Par la Gr-équivalence canonique

$$S(M, N, \alpha) \to P$$

donnée par l'épinglagle et le préépinglage dans P, nous obtenons un Gr-foncteur

$$(E, \breve{E}): S(L_0) \to P. \quad \square$$

PROPOSITION 5.3. Soient P une Gr-catégorie préépinglée par (M, N) et u un épimorphisme d'un groupe. L_0 dans M. Pour qu'il existe une Gr-cartégorie stricte P_0 préépinglée par (M, N), déterminnée par un S-système (L_1, L_0, d, θ) et un Gr-foncteur préépinglé $P_0 \to P$ compatible avec u, il faut et il suffit que $a(P) \in H^3(M, N)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$.

DEMONSTRATION. Supposons qu'il existe une Gr-catégorie P_0 déterminée par un S-système (L_1, L_0, d, θ) et un Gr-foncteur préépinglé $(F, \breve{F}): P_0 \to P$ compatible avec u. Soit $(D, \breve{D}): S(L_0) \to P_0$ le Gr-foncteur canonique. Posons

$$(E, \breve{E}) = (F, \breve{F}) \circ (D, \breve{D}): S(L_0) \to P$$

nous avons un Gr-foncteur compatible avec u. En vertu de 5.2 $a(P) \in H^3(M, N)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$.

Inversement supposons que $a(P)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$. En vertu de 5.2 il existe un Gr-foncteur $(E, \breve{E}): S(L_0) \to P$ compatible avec u, qui par composition avec la Gr-équivalence canonique $P \to S(M, N, \alpha)$ nous donne le

Gr-foncteur $(u, \breve{u}) : S(L_0) \to S(M, N, \alpha)$ où $u^*(\alpha) = \delta\breve{u}$. Considérons la Gr-catégorie $\mathrm{Ker}(u, \breve{u})$. Nous avons

$$\mathrm{Ker}(u, \breve{u}) = S(L_1, 0, 0)$$

où $L_1 = \mathrm{Ker}\, u \times N$, la multiplication dans L_1 étant

$$(x, m)(y, n) = \big(xy, m + n + \breve{u}(x, y)\big) \tag{5.3.1}$$

d'après (2. 2). Soient $y \in L_0$ et $(x, m) \in L_1$. Nous allons définir une action de y sur (x, m) notée $\theta(y)(x, m)$ et donnée par la formule

$$\theta(y)(x, m) = (yxy^{-1}, m_1)$$

avec m_1 défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
u(yxy^{-1}) & u(y)\,u(xy^{-1}) \arrow[l, "\breve{u}(y,\, xy^{-1})"'] & u(y)\big(u(x)\,u(y^{-1})\big) \arrow[l, "id \otimes \breve{u}(x,\, y^{-1})"'] \\
 & & u(y)\big(1 - u(y^{-1})\big) \arrow[u, "id \otimes (m \otimes id)"'] \\
1 = u(1) = u(yy^{-1}) \arrow[uu, "m_1"] & & u(y)\,u(y^{-1}) \arrow[ll, "\breve{u}(y,\, y^{-1})"] \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

i.e

$$m_1 = u(y)\,m + u(y)\,\breve{u}(x, y^{-1}) + \breve{u}(y, xy^{-1}) - \breve{u}(y, y^{-1}). \tag{5.3.2}$$

Montrons que $\theta(y)$ est un homomorphisme de L_1 dans L_1. Il est clair que $\theta(y)(x, m) \in L_1$. Pour avoir l'égalité

$$\theta(y)\big((x, m)(x', m')\big) = \theta(y)(x, m)\,\theta(y)(x', m')$$

il suffit de considérer le diagramme commutatif suivant venant de la compatibilité de $(u, \breve{u})$ avec les contraintes d'associativité dans $S(L_0)$ et $S(M, N, \alpha)$ [1] :

$$\begin{tikzcd}
u(yxy^{-1})\,u(yx'y^{-1}) \arrow[d, "\breve{u}(yxy^{-1},\, yx'y^{-1})"'] & \big(u(y)\,u(xy^{-1})\big)\big(u(y)\,u(x'y^{-1})\big) \arrow[l, "\breve{u}(y,\, xy^{-1}) \otimes \breve{u}(y,\, x'y^{-1})"'] \\
u(yxy^{-1}yx'y^{-1}) & \big(u(y)\big(u(x)\,u(y^{-1})\big)\big)\big(u(y)\big(u(x)\,u(y^{-1})\big)\big) \arrow[u, "(id \otimes \breve{u}(x,\, y^{-1})) \otimes (id \otimes \breve{u}(x',\, y^{-1}))"'] \arrow[d, equal] \\
u(y)\,u(xy^{-1}yx'y^{-1}) \arrow[u, "\breve{u}(y,\, xx'y^{-1})"] & u(y)\Big(\big(u(x)\,u(y^{-1})\big)\big(u(y)\big(u(x')\,u(y^{-1})\big)\big)\Big)
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[d, "id\otimes\alpha\left(u(x)u(y^{-1}),\,u(y),\,u(x')u(y^{-1})\right)"] \\
u(y)\left(u(xy^{-1}yx')u(y^{-1})\right) \arrow[u, "id\otimes\breve{u}(xx',y^{-1})"] & u(y)\Big(\big((u(x)u(y^{-1}))u(y)\big)\big(u(x')u(y^{-1})\big)\Big) \arrow[d, equal] \\
u(y)\Big(\big(u(xy^{-1}y)u(x')\big)u(y^{-1})\Big) \arrow[u, "id\otimes\left(\breve{u}(x,x')\otimes id\right)"] \arrow[d, equal] & u(y)\Big(\big(u(x)(u(y^{-1})u(y))\big)\big(u(x')u(y^{-1})\big)\Big) \arrow[d, equal] \\
u(y)\Big(\big((u(x)u(y^{-1}y))u(x')\big)u(y^{-1})\Big) & u(y)\Big(\big((u(x)(u(y^{-1})u(y)))u(x')\big)u(y^{-1})\Big) \arrow[l, "id\otimes\left(\left((id\otimes\breve{u}(y^{-1},y))\otimes id\right)\otimes id\right)"']
\end{tikzcd}
$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&u(y)\,\breve{u}(x, y^{-1}) + u(y)\,\breve{u}(x', y^{-1}) + \breve{u}(y, xy^{-1}) + \breve{u}(y, x'y^{-1}) + \breve{u}(yxy^{-1}, yx'y^{-1}) = \\
&= \breve{u}(y, xx'y^{-1}) + u(y)\,\breve{u}(xx', y^{-1}) + u(y)\,\breve{u}(x, x') + \breve{u}(y, y^{-1})
\end{aligned}
$$

en remarquant que

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(u(x)u(y^{-1}), u(y), u(x')u(y^{-1})\right) &= \alpha\left(u(y^{-1}), u(y), u(y^{-1})\right) = u^*(\alpha)(y^{-1}, y, y^{-1}) = \\
&= \delta\breve{u}(y^{-1}, y, y^{-1}) = u(y^{-1})\,\breve{u}(y, y^{-1}) - \breve{u}(y^{-1}, y).
\end{aligned}
$$

Nous avons donc une application

$$\theta : L_0 \to \mathrm{End}(L_1).$$

Montrons que

$$\theta(yz)(x, m) = \theta(y)\left(\theta(z)(x, m)\right). \tag{5.3.3}$$

Pour cela considérons le diagramme commutatif ci-dessous qui vient de la compatibilite de $(u, \breve{u})$ avec les contraintes d'associativité en remarquant que

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(u(z), u(x)u(z^{-1}), u(y^{-1})\right) &= \alpha\left(u(z), u(z^{-1}), u(y^{-1})\right) = \delta\breve{u}(z, z^{-1}, y^{-1}) = \\
&= u(z)\,\breve{u}(z^{-1}, y^{-1}) + \breve{u}(z, z^{-1}, y^{-1}) - \breve{u}(z, z^{-1})
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\alpha\left(u(y), u(z), \left(u(x)u(z^{-1})\right) u(y^{-1})\right) = \alpha\left(u(y), u(z), u(z^{-1}y^{-1})\right) = \\
&= \delta\breve{u}(y, z, z^{-1}, y^{-1}) = u(y)\,\breve{u}(z, z^{-1}y^{-1}) - \breve{u}(yz, z^{-1}y^{-1}) + \breve{u}(y, y^{-1}) - \breve{u}(y, z).
\end{aligned}
$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u(yzxz^{-1}y^{-1}) & u(y)\,u(zxz^{-1}y^{-1}) \arrow[l, "\widetilde{u}(y,\, zxz^{-1}y^{-1})"'] \\
u(yz)\,u(xz^{-1}y^{-1}) \arrow[u, "\widetilde{u}(yz,\, xz^{-1}y^{-1})"] & u(y)\big(u(zxz^{-1})\,u(y^{-1})\big) \arrow[u, "id \otimes \widetilde{u}(zxz^{-1},\, y^{-1})"'] \\
u(yz)\big(u(x)\,u(z^{-1}y^{-1})\big) \arrow[u, "id \otimes \widetilde{u}(x,\, z^{-1}y^{-1})"] & u(y)\Big(\big(u(z)\,u(xz^{-1})\big)\,u(y^{-1})\Big) \arrow[u, "id \otimes \big(\widetilde{u}(z,\, xz^{-1}) \otimes id\big)"'] \\
\big(u(y)\,u(z)\big)\Big(u(x)\big(u(z^{-1})\,u(y^{-1})\big)\Big) \arrow[u, "\widetilde{u}(y,z) \otimes \big(id \otimes \widetilde{u}(y^{-1}, z^{-1})\big)"] \arrow[d, equal] & u(y)\Big(\big(u(z)\,u(x)\,u(z^{-1})\big)\,u(y^{-1})\Big) \arrow[u, "id \otimes \Big(\big(id \otimes \widetilde{u}(x,\, z^{-1})\big) \otimes id\Big)"'] \\
\big(u(y)\,u(z)\big)\Big(\big(u(x)\,u(y^{-1})\big)\,u(y^{-1})\Big) \arrow[r, "\alpha\left(u(y),\, u(z),\, u(x)\,u(z^{-1})\,u(y^{-1})\right)"'] & u(y)\Big(u(z)\big(\big(u(x)u(z^{-1})\big)\,u(y^{-1})\big)\Big) \arrow[u, "id \otimes \alpha\left(u(z),\, u(x)u(z^{-1}),\, u(y^{-1})\right)"']
\end{tikzcd}$$

En vertu de (5.3.2) et (5.3.3) nous pouvons écrire

$$(x, m) = \theta(1)\,(x, m) = \theta(yy^{-1})\,(x, m) = \theta\big(y^{-1}y\,(x, m)\big) =$$
$$= \theta(y)\,\big(\theta(y^{-1})\,(x, m)\big) = \theta(y^{-1})\,\big(\theta(y)\,(x, m)\big).$$

Donc $\theta(y)$ est un automorphisme, par conséquent θ est un homomorphisme du groupe L_0 dans le groupe Aut (L_1).

Posons

$$d : L_1 \to L_0$$
$$(x, m) \mapsto x$$

Nous obtenons ainsi un quadrupole (L_1, L_0, d, θ) qui est un S-système. Soit P_0 la Gr-catégorie stricte définie par ce S-système. Définissons un Gr-foncteur $(v, \widetilde{v}) : P_0 \to S(M, N, \alpha)$ de la manière suivante. Soient $x, y \in Ob\ P_0$ et $(s, m) : x \to y$ une flèche de P_0. Posons

$$v(x) = u(x),\ v(s, m) = m + \widetilde{u}(s, x)$$
$$\widetilde{v}(x, x') = \widetilde{u}(x, x').$$

Vérifions d'abord que v est un foncteur. It est clair que $v(id_x) = id_{u(x)}$. Soient deux fliches

$$x \xrightarrow{(s,\, m)} y \xrightarrow{(t,\, n)} z$$

Montrons que

$$v\big((t, n)(s, m)\big) = v(t, n)\, v(s, m)$$

i.e

$$m + n + \breve{u}(t, s) + \breve{u}(ts, x) = m + n + \breve{u}(s, x) + \breve{u}(t, y).$$

Or nous avons

$$\alpha\big(u(t), u(s), u(x)\big) = \alpha\big(1, 1, u(x)\big) = 0 = \partial\breve{u}\,(t, s, x) = \breve{u}\,(s, x) - \breve{u}\,(ts, x) + \breve{u}\,(t, sx) - \breve{u}\,(t, s)\,.$$

ce qui donne l'égalité voulue.

Il nous reste à vérifier que $\breve{v}\,(x, x') : v(x)v(x') \to v(xx')$ est un $\otimes$-morphisme fonctoriel, i.e le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
v(x)v(x') \arrow[r, "\breve{v}(x, x')"] \arrow[d, "v(s, m)\,\otimes\, v(s', m')"'] & v(xx') \arrow[d, "v\left((s, m)\,\otimes\,(s', m')\right)"] \\
v(y)v(y') \arrow[r, "\breve{v}(y, y')"] & v(yy')
\end{tikzcd}$$

ou en l'explicitant

$$\begin{aligned}
m + \breve{u}\,(s, x) + u(x)m' + u(x)\breve{u}\,(s', x') + \breve{u}\,(y, y') &= m + u(x)m' + \\
&+ u(x)\breve{u}\,(s', x^{-1}) + \breve{u}(x, s' x^{-1}) - \breve{u}(x, x^{-1}) + \breve{u}(s, xs'x^{-1}) + \\
&+ \breve{u}\,(sx\, s' x^{-1}, xx') + \breve{u}\,(x, x').
\end{aligned}$$

or cette égalité vient de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u(sxs'x^{-1}xx') & & u(sxs'x^{-1})\,u(xx') \arrow[ll, "\breve{u}(sxs'x^{-1},\, xx')"'] \\
u(sx)\,u(s'x^{-1}xx') \arrow[u, "\breve{u}(y, y')"] & & \big(u(s)\,u(xs'x^{-1})\big)\big(u(x)\,u(x')\big) \arrow[u, "\breve{u}(s,\, xs'x^{-1})\,\otimes\,\breve{u}(x, x')"'] \\
\big(u(s)\,u(x)\big)\big(u(s')\,u(x^{-1}xx')\big) \arrow[u, "\breve{u}(s, x)\,\otimes\,\breve{u}(s', x')"] & & \Big(u(s)\big(u(x)\,u(s'x^{-1})\big)\Big)\big(u(x)\,u(x')\big) \arrow[u, "(id\,\otimes\,\breve{u}(x,\, s'x^{-1}))\,\otimes\, id"'] \\
\big(u(s)\,u(x)\big)\Big(u(s')\big(u(x^{-1})\,u(xx')\big)\Big) \arrow[u, "id\,\otimes\,(id\,\otimes\,\breve{u}(x^{-1},\, xx'))"] \arrow[d, equal] & & \Big(u(s)\Big(u(x)\big(u(s')\,u(x^{-1})\big)\Big)\Big)\big(u(x)\,u(x')\big) \arrow[u, "(id\,\otimes\,(id\,\otimes\,\breve{u}(s',\, x^{-1})))\,\otimes\, id"'] \arrow[d, equal] \\
\big(u(s)\,u(x)\big)\Big(\big(u(s')\,u(x^{-1})\big)\,u(xx')\Big) & & \Big(\big(u(s)\,u(x)\big)\big(u(s')\,u(x^{-1})\big)\Big)\big(u(x)\,u(x')\big) \\
& \big(u(s)\,u(x)\big)\Big(\big(u(s')\,u(x^{-1})\big)\big(u(x)\,u(x')\big)\Big) \arrow[ul, "id\,\otimes\,(id\,\otimes\,\breve{u}(x, x'))"] \arrow[ur, "\alpha(u(s)\,u(x),\, u(s')\,u(x^{-1}),\, u(x)\,u(x'))"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc $(v, \breve{v})$ est un $\otimes$-foncteur qui est en plus compatible avec les contraintes d'associativité dans P_0 et $S(M, N, \alpha)$. Par conséquent $(v, \breve{v})$ est un Gr-foncteur. En outre par sa construction on a

$$\pi_0(P_0) = M, \quad \pi_1(P_0) = N$$

et on peut vérifier facilement que $(v, \breve{v})$ est un Gr-foncteur préépinglé. Par composition de $(v, \breve{v})$ avec la Gr-équivalence canonique $S(M, N, \alpha) \to P$, nous obtenons un Gr-foncteur préépinglé

$$(F, \breve{F}) : P_0 \to P \, . \, \square$$

COROLLAIRE 5.4. Soit P une Gr-catégorie préépinglée par (M, N). Il existe une Gr-catégorie stricte P_0 préépinglée par (M, N), déterminée par un S-système (L_1, L_0, d, θ) et un Gr-foncteur préépinglé $P_0 \to P$.

DEMONSTRATION. Il suffit de prendre pour L_0 le groupe libre ayant pour générateurs les éléments de M, car on a dans ce cas $H^3(L_0, N) = 0$, d'où l'existence de P_0 et du Gr-foncteur préépinglé $P_0 \to P$ en vertu de (5.3). Etudions d'une manière plus détaillée P_0.

Les éléments y de L_0 sont alors les mots de la forme

$$y = e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_m^{\varepsilon_m}$$

avec $e_i \in M$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. Soit $u : L_0 \to M$ l'épimorphisme canonique et soit $S(M, N, \alpha)$ une Gr-catégorie réduite de P. Nous avons

$$u^*(\alpha) \in Z^3(L_0, N).$$

Considérons l'homomorphisme $S_2 : C^3(L_0, N) \to C^2(L_0, N)$ (4.2) qui nous donne, en vertu de (4.2.1),

$$\delta S_2(u^*(\alpha)) = u^*(\alpha).$$

Posons

$$\breve{u} = S_2(u^*(\alpha))$$

Le couple $(u, \breve{u})$ est le Gr-foncteur de $S(L_0)$ dans $S(M, N, \alpha)$ que nous avons considéré dans 5.3. Pour $x, y = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_m^{\varepsilon_m}$ de L_0 nous avons en vertu de (4.2.2)

$$(5.4.1)\ \breve{u}(x, y) = S_2(u^*(\alpha))(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha\left(u(x), u(e_1)^{\varepsilon_1} \dots u(e_{i-1})^{\varepsilon_{i-1}} u(e_i)^{f(\varepsilon_i)}, u(e_i)\right)$$

ce qui nous permet de conclure que $\breve{u}(x, y) = 0$ pour $x \in \operatorname{Ker} u$. Donc $L_1 = \operatorname{Ker} u \times N$ avec comme multiplication

(5.4.2) $$(x, m).(y, n) = (xy,\ m + n)$$

d'après (5.3.1), et l'homomorphisme $\theta : L_0 \to \mathrm{Aut}\,(L_1)$ est défini par

(5.4.3) $$\theta(y)\,(x,m) = \left(yxy^{-1},\ u(y)\,m + \overline{u}(y, x)\right)$$

en vertu de (5.3.2) en tenant compte des relations

$$\overline{u}(x, y^{-1}) = 0$$

$$\alpha\left(u(y), u(x), u(y^{-1})\right) = \alpha\left(u(y), 1, u(y^{-1})\right) = 0 = \delta\overline{u}(y, x, y^{-1})$$

$$\overline{u}(yx, y^{-1}) = \overline{u}(y, y^{-1}).$$

Définissons $d : L_1 \to L_0$ toujours comme dans (5.3), nous obtenons une *Gr*-catégorie stricte P_0 déterminée par le *S*-système (L_1, L_0, d, θ). Quant au *Gr*-foncteur préépinglé $(v, \overline{v}) : P_0 \to S(M, N, \alpha)$, il est donné par les formules

$$v(x) = u(x),\ v(S, m) = m,\ \overline{v}(x, x') = \overline{u}(x, x')$$

d'après (5.3) en tenant compte de

$$\overline{u}(S, x) = 0. \ \square$$

5.5. Application : réalisation d'un 3-cocycle comme l'obstruction d'un problème d'extension.

5.5.1. On se propose d'appliquer (5.4) pour retrouver le résultat de Mac Lane sur la realisation d'un 3-cocycle comme l'obstruction d'un problème d'extension [2].

5.5.2. Invariant de Mac Lane. Soient G un groupe, Aut G le groupe des automorphismes de G, $\mu : G \to \mathrm{Aut}\ G$ l'homomorphisme qui fait correspondre à chaque $x \in G$ l'automorphisme intérieur μ_x de G, $Z(G)$ le centre de G et Autext G le groupe des automorphismes extérieurs de G. Le *S*-système (G, Aut G, μ, $id_{\mathrm{Aut}\ G}$) définit une *Gr*-catégorie stricte notée Aut G dont les invariants sont

$$\pi_0(\mathrm{Aut}\ G) = \mathrm{Autext}\ G, \quad \pi_1(\mathrm{Aut}\ G) = Z(G),$$

$$\alpha(\mathrm{Aut}\ G) = \text{invariant de Mac Lane [1]}.$$

PROPOSITION 5.5.3. Soient M un groupe, N un M-module et $\overline{\alpha} \in H^3(M, N)$. Il existe un groupe L_1 ayant pour centre N et un homomorphisme $\varphi : M \to \mathrm{Autext}\ L_1$ induisant la structure de M-module donnée sur N et tels que Obs $(M, L_1, \varphi) = \overline{\alpha}$ (théorème de la réalisation d'un 3-cocycle comme l'obstruction d'un problème d'extension [2]).

DEMONSTRATION. Soit $\alpha \in \overline{\alpha}$. Nous obtenons une *Gr*-catégorie $S(M, N, \alpha)$. Construisons le *S*-système (L_1, L_0, d, θ) à partir de M, N, α

comme dans 5.4. Ensuite considérons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \xrightarrow{d} & L_0 & \xrightarrow{u} & M & \longrightarrow & O \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & & & \\ \mathrm{Int}\, L_1 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\, L_0 & \longrightarrow & \mathrm{Autext}\, L_1 & & \end{array}$$

Par conséquent θ induit un homomorphisme $\psi : M \to \mathrm{Autext}\ L_1$ qui, par la définition de θ (5.4.3), définit une structure de M-module sur N qui est la même que cella donnée sur N. En outre on voit sans peine que $Z(L_1) = N$ si $M \neq \{1\}$. Enfin considérons la Gr-catégorie stricte N Aut L_1 définie par le S-système $(L_1 \xrightarrow{\mu} \mathrm{Aut}\ L_1, id_{\mathrm{Aut}\ L_1})$ et le Gr-foncteur $(id_{L_1}, \theta) : P_0 \to \mathrm{Aut}\ L_1$ (1.3) où P_0 désigne toujours la Gr-catégorie stricte définie par le S-système $(L_1 \xrightarrow{d} L, \theta)$ Ce Gr-foncteur induit l'homomorphisme

$$\psi : \pi_0(P_0) = M \to \mathrm{Autext}\ L_1 = \pi_0(\mathrm{Aut}\ L_1).$$

Par conséquent

$$\psi^*\big(a(\mathrm{Aut}\ L_1)\big) = a(P_0).$$

Or nous avons

$$\psi^*\big(a(\mathrm{Aut}\ L_1)\big) = \mathrm{Obs}(M, L_1, \psi)$$
$$a(P_0) = \bar{\alpha}$$

ce qui donne

$$\mathrm{Obs}(M, L_1, \psi) = \bar{\alpha}. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hoang Xuan Sinh : *Thèse*, Paris 1975.

[2] MacLane, S. : *Homology*, Springer Verlag 1967.