Electrónica Analógica
Respuesta en frecuencia. Transformada de Laplace

Transformada de Laplace. Introducción

La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil en electrónica ya que gracias a ella el comportamiento de sistemas electrónicos complejos puede describirse usando ecuaciones ordinarias en lugar de ecuaciones diferenciales. El ámbito de aplicación de esta transformada no queda reducido a los sistemas electrónicos. El comportamiento de cualquier sistema lineal, sea del tipo que sea, queda completamente descrito mediante las ecuaciones ordinarias obtenidas a través de la transformada de Laplace.

La transformación propiamente dicha es la siguiente:

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{1}$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$. Esta función se define para cualquier número complejo, s.

Observese que para el caso particular $s = j\omega$, la transformada de Laplace coincide con la transformada de Fourier, y por lo tanto la respuesta en frecuencia de un sistema lineal se obtiene de la transformada de Laplace de su función de transferencia sin más que sustituir s por $j\omega$.

A continuación se enumeran algunas de las propiedades más interesantes de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(a \cdot x(t) + b \cdot y(t)) = a \cdot X(s) + b \cdot Y(s) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = s \cdot X(s) \tag{3}$$

$$\mathcal{L}\left(\int x(t)dt\right) = \frac{1}{s}X(s) \tag{4}$$

La primera propiedad nos indica que la transformada de Laplace es una transformación lineal. Las siguientes nos van a permitir tratar las ecuaciones diferenciales que rigen a los sistemas lineales como simples ecuaciones ordinarias en el dominio de la transformada de Laplace (plano complejo 's'). para ello hacemos las siguientes sustituciones en las ecuaciones del sistema:

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow s \cdot X(s) \quad ; \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} \rightarrow s^2 \cdot X(s) \quad ; \quad \int x(t)dt \rightarrow \frac{1}{s} \cdot X(s) \quad ; \ldots \tag{5}$$

y las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo se convierten en ecuaciones ordinarias (cociente de polinomios de 's') en el dominio de la transformada de Laplace.

Ejemplo 1: Impedancia de un condensador. Respuesta en frecuencia

Sabemos que en un condensador el voltaje entre sus placas es proporcional a la carga almacenada e inversamente proporcional a la capacidad. Ademas podemos expresar la carga como la integral de la corriente que entra al condensador a lo largo del tiempo, de modo que obtenemos:

$$v(t) = q(t)/C \quad ; \quad v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{6}$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace según las reglas de (5) y obtenemos:

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad ; \quad Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{7}$$

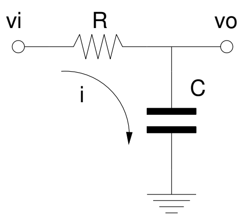
En el dominio de la transformada de Laplace la impedancia del condensador es $1/Cs$.

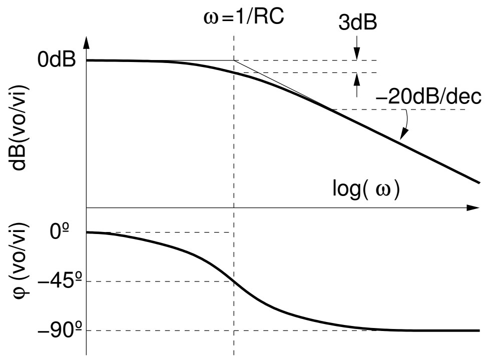
Para ver como depende la impedancia del condensador con la frecuencia sustituimos s por $j\omega$ en la ecuación 7 y obtenemos:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Cj\omega}$$

que, como todos sabemos, es la impedancia de alterna del condensador.

Ejemplo 2: Filtro RC.





En la figura se muestra un filtro RC de primer orden junto con el diagrama de Bode de su respuesta en frecuencia. Vamos a analizar este circuito en busca de su función de transferencia, esto es: la ecuación que relaciona el voltaje de salida con el de la entrada. La tensión de salida, v_o, es el voltaje del condensador, de modo que podemos escribir:

$$v_o(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C} = \frac{\int [v_i(t) - v_o(t)]dt}{RC}$$

y aplicando la transformada de Laplace obtenemos:

$$V_o(s) = \frac{V_i(s) - V_o(s)}{RCs} \quad ; \quad V_o(s)\left(1 + \frac{1}{RCs}\right) = \frac{V_i(s)}{RCs} \quad ; \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{1}{1+RCs} \tag{8}$$

Al mismo resultado llegamos si simplemente consideramos el circuito como un divisor de tensión y en su ecuación usamos la impedancia del condensador de la ecuación 7:

$$\frac{V_o}{V_i} = H(s) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = \frac{1}{1+RCs}$$

La respuesta en frecuencia del filtro se obtiene sustituyendo s por $j\omega$ en su función de transferencia, $H(s)$. El resultado es un valor complejo que se puede descomponer en una magnitud y una fase (la magnitud muy habitualmente se expresa en decibelios: $dB(|H(j\omega)|) = 20\log_{10}|H(j\omega)|$):

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} \tag{9}$$

$$\varphi(H(j\omega)) = -\arctan(RC\omega) \tag{10}$$

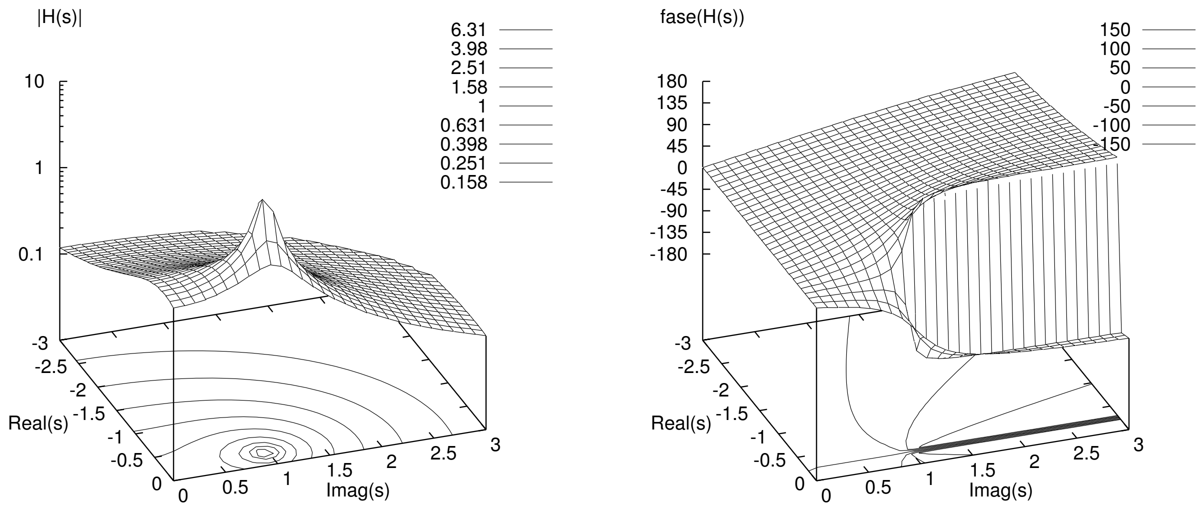
Diagrama de Bode asintótico: Si ω es pequeña la magnitud vale aproximadamente 1 (0 dB). Por el contrario, si ω es grande la magnitud se puede aproximar por $1/RC\omega$, de modo que ésta decrece de forma inversamete proporcional a la frecuencia (pendiente de -20 dB/década: $dB(|H(j\omega)|) = dB(1/RC) - 20 \cdot \log_{10}\omega$). Finalmente, la magnitud vale $1/\sqrt{2}$ (-3.01 dB) para $\omega = 1/RC$.

La fase de la función de transferencia comienza valiendo 0^o para ω pequeñas, vale justo -45^o para $\omega = 1/RC$ y -90^o para frecuencias altas.

Polos y Ceros

Las funciones de transferencia de los sistemas se pueden expresar como el cociente de polinomios de 's': $H(s) = N(s)/D(s)$. Un polinomio de grado n tiene n raíces, esto es: hay n valores de s que hacen que dicho polinomio valga cero. Los valores de s que hacen cero el numerador de $H(s)$ se llaman *ceros*, mientras que los valores de s que hacen cero el denominador se denominan *polos* (del inglés "pole": poste, pues para dicho valor $H(s) = \infty$). Los ceros y polos son, en principio, valores complejos que constan de una parte real y otra imaginaria. El mapa que representa la posición de los polos y ceros de un sistema en el plano complejo se denomina "el lugar de las raíces".

A título de ejemplo se muestra en la siguiente figura (como gráficas separadas para la magnitud y la fase) la función de transferencia $H(s) = 1/(s^2 + 0{,}5s + 1)$, que tiene dos polos complejos conjugados con parte real negativa ($p_{1,2} = -0{,}25 \pm j \cdot 0{,}968$). En la figura se muestra sólo el segundo cuadrante del plano 's', de modo que uno de los cortes es el del eje imaginario positivo ($s = j\omega$). La curva obtenida en dicho corte será por lo tanto la de la respuesta en frecuencia del sistema.



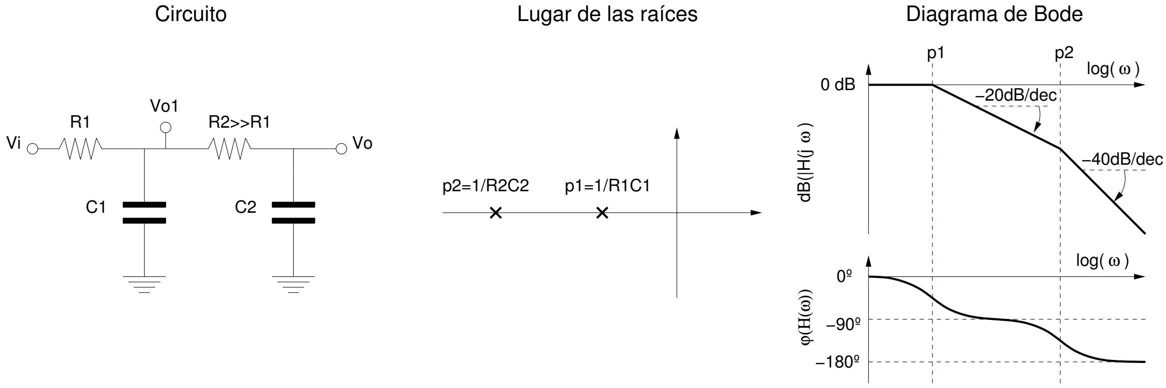
En la figura vemos que cuando en el plano complejo el valor de 's' se acerca al polo, $|H(s)|$ tiende a infinito. De este modo, cuando un polo está cerca del eje imaginario va a 'tirar hacia arrriba' de la magnitud de $H(j\omega)$, lo que da lugar a un pico de resonancia.

La respuesta en frecuencia de un sistema se puede deducir de forma aproximada mediante unas reglas sencillas que relacionan las posiciones de los polos y los ceros en el lugar de las raíces con sus efectos en el diagrama de Bode. Algunas de estas reglas son:

Polo/Cero	Parte Real	Efecto en ganancia	Efecto en fase
Polo en el origen: $1/s = 1/0$ (Integrador)	0	Decremento: -20 dB/dec (todas las frec.) (ganancia ∞ para $\omega = 0$)	Desfase de -90º (todas las frec.)
Polo, real: $1/(s/\omega_p + 1) = 1/0$	negativa	Decremento: -20 dB/dec ($\omega > \lvert\omega_p\rvert$)	Decremento: -90º ($\omega \gg \lvert\omega_p\rvert$)
Cero en origen: $s = 0$ (Derivador)	0	Incremento: +20 dB/dec (todas las frec.) (ganancia 0 para $\omega = 0$)	Desfase de +90º (todas las frec.)
Cero, real: $(s/\omega_z + 1) = 0$	negativa	Incremento: +20 dB/dec ($\omega > \lvert\omega_z\rvert$)	Incremento: +90º ($\omega \gg \lvert\omega_z\rvert$)
Cero, real: $(s/\omega_z - 1) = 0$	positiva	Incremento: +20 dB/dec ($\omega > \lvert\omega_z\rvert$)	Decremento: -90º ($\omega \gg \lvert\omega_z\rvert$)
Par de polos complejos conjugados: $1/(s^2/\omega_o^2 + s/(Q\omega_0) + 1) = 1/0$	negativa	Decremento: -40 dB/dec ($\omega > \lvert\omega_0\rvert$), resonancia	Decremento: -180º ($\omega \gg \lvert\omega_0\rvert$)

Ejemplos

Sistema con polos reales

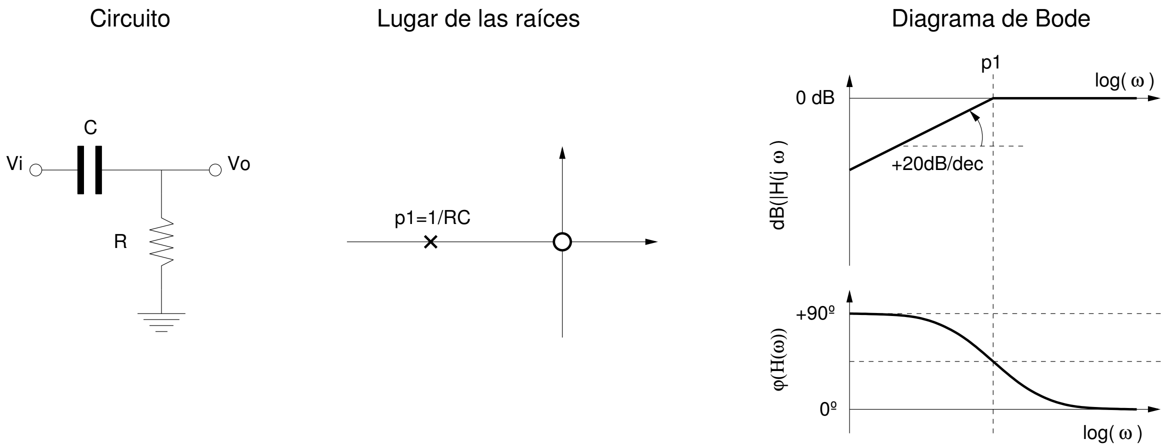


En la figura se muestra un sistema que presenta dos polos reales en su función de transferencia. Si suponemos que $R_2 \gg R1$ la corriente que circule a través de R2 va a tener muy poca influencia en el valor de V_{O1} y se va a poder despreciar. Nos quedan por lo tanto dos filtros RC del tipo analizado anteriormente conectados en cascada, esto es: con la salida del primero conectada a la entrada del segundo. La función de transferencia de este sistema será por lo tanto el producto de las funciones de transferencia de los filtros individuales:

$$H(s) = \frac{1}{1+R_1C_1s} \cdot \frac{1}{1+R_2C_2s} = \frac{1}{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)} \tag{11}$$

Este sistema tiene dos polos: $p_1 = -1/R_1C_1$ y $p_2 = -1/R_2C_2$. Estos polos son reales (no tienen parte imaginaria) y negativos. Supongamos además que $|p_1| < |p_2|$. En el diagrama de Bode la ganancia vale 1 (0 dB) hasta llegar a la frecuencia angular p_1. A partir de dicha frecuencia la ganancia decrece a razón de 20 dB por década hasta llegar a la frecuencia del polo p_2. A partir de la frecuencia del segundo polo la ganancia experimenta un decremento adicional y continúa decreciendo a razón de 40 dB por década. En el diagrama de Bode hemos aproximado la curva de la ganacia por sus tramos asintóticos. En realidad en cada esquina hay un cambio suave de la pendiente de la ganancia y justo a la frecuencia de cada polo se han bajado 3.01 dB respecto de la esquina. En cuanto a la fase, cada polo provoca una caída de 90º en el desfase.

Sistema con polo real y cero en el origen



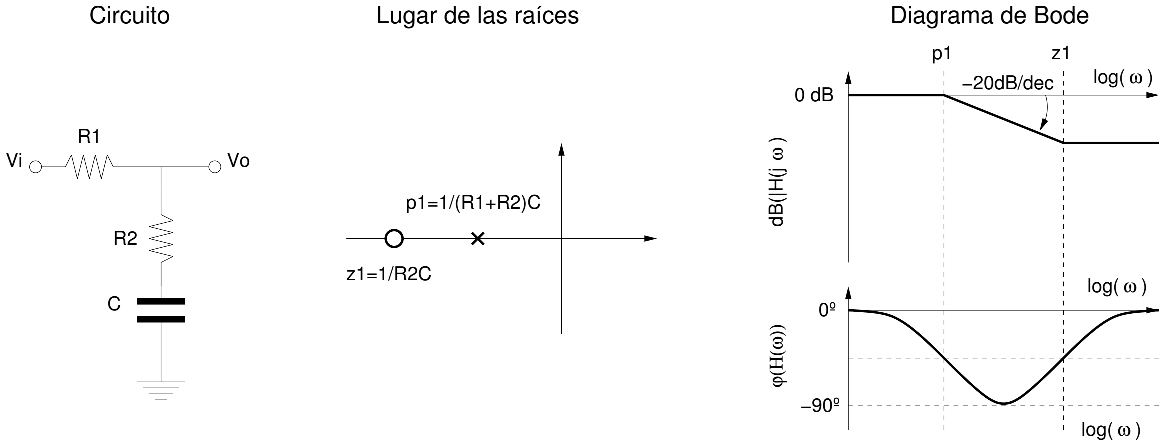
Este es el circuito típico de los filtros pasa-altos. Se corresponde con el esquema de un filtro pasa-bajos en el que se han intercambiado las posiciones de las resistencias y condensadores. Su función de transferencia tiene un polo y un cero en el origen ($z_1 = 0$). Analizamos el circuito como un divisor de tensión:

$$H(s) = \frac{V_O}{V_I} = \frac{R}{R+1/Cs} = \frac{RCs}{1+RCs} \tag{12}$$

Esta función de transferencia tiene un cero para $s = z_1 = 0$ (origen del plano complejo) y un polo en $s = p_1 = -1/RC$. El cero en el origen hace que la respuesta en frecuencia comience en las frecuencias bajas con un desfase de 90º y una pendiente en la ganancia de +20 dB/dec. Al alcanzar la frecuencia del polo el decremento que éste induce en la ganancia compensa al incremento debido al cero y la ganancia se vuelve constante e igual a 1 (0 dB). El polo también provoca una caída en la fase de 90^o, de modo que a frecuencias altas el desfase es de 0^o.

Nota: En las funciones de transferencia de los filtros pasa-altos el número de ceros en el origen es igual al número de polos.

Sistema con polo real y cero

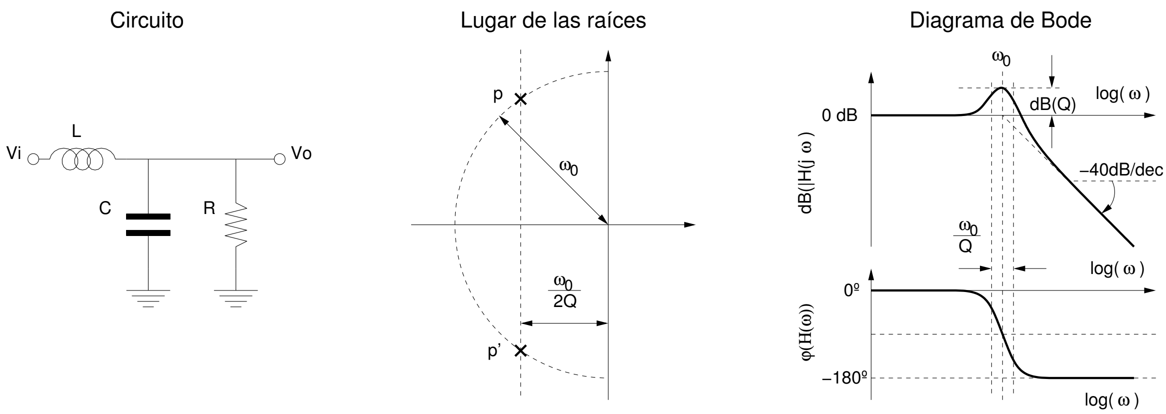


En este circuito aparece un polo y un cero a una frecuencia mayor que cero. Analizamos el circuito como un divisor de tensión en el que una de las impedancias es el equivalente en serie de C y R_2. La función de transferencia que obtenemos es:

$$H(s) = \frac{V_O}{V_I} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + (R_2 + 1/Cs)} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} \tag{13}$$

Esta función de transferencia tiene un cero en $s = z_1 = -1/R_2C$ y un polo en $s = p_1 = -1/(R_1 + R_2)C$. La frecuencia del polo siempre es inferior a la del cero, tal como se ha representado en el lugar de las raíces. La respuesta en frecuencia es como la representada: Hasta la frecuencia del polo la ganancia es aproximadamente 1 (0 dB), una vez superada la frecuencia del polo hay una caída de la ganancia de 20 dB/dec hasta que se llega a la frecuencia del cero. El incremento de ganancia del cero compensa el decremento debido al polo y para frecuencias altas la ganancia es constante y su valor es $R_2/(R_1 + R_2)$. Respecto a la fase: el polo provoca una caída de 90^o y el cero una subida, también de 90^o. Así, para frecuencias altas el desfase total es 0^o. Para frecuencias intermedias el desfase ronda los -90^o, pero puede que no sea tanto si las frecuencias del polo y del cero no están muy alejadas e interaccionen entre sí.

Sistema con dos polos complejos-conjugados



Otro tipo de sistemas muy comúnes son los de segundo orden caracterizados por tener una función de transferencia con dos polos complejos-conjugados, esto es: los dos polos tienen la misma parte real, pero sus respectivas partes imaginarias tienen signos opuestos. Todos estos sistemas tienen una función de transferencia del tipo siguiente:

$$H(s) = \frac{N(s)}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q}\frac{s}{\omega_0} + 1} \qquad (Q > 0{,}5) \tag{14}$$

La respuesta del sistema queda determinada por dos parámetros que son la frecuencia de resonancia, ω_0 , y el factor de calidad, Q . La posición de los polos en el lugar de las raíces es la indicada en la figura. Para una frecuencia de resonancia dada todos los polos se distribuyen sobre una circunferencia. Los polos cercanos al eje imaginario se corresponden con sistemas con Q elevado, mientras que los próximos al eje real tienen valores de Q ligeramente superiores a 0.5 . Observese que la función de transferencia de la ecuación 14 tiene dos polos reales en lugar de complejos conjugados si $Q < 0{,}5$.

La función de transferencia del circuito de la figura se puede obtener como la de un divisor de tensión formado por una autoinducción de impedancia $Z_L = Ls$, y el equivalente en paralelo de la impedancia del condensador y la resistencia:

$$(C \parallel R) = \frac{1}{Cs + 1/R} = \frac{R}{1 + RCs}$$

$$H(s) = \frac{V_O}{V_I} = \frac{(C \parallel R)}{Ls + (C \parallel R)} = \frac{\frac{R}{1+RCs}}{Ls + \frac{R}{1+RCs}} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \tag{15}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación 14 obtenemos las siguientes expresiones para ω_0 y Q :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{R}{X_L} \tag{16}$$

Donde X_L es la reactancia de la autoinducción a la frecuencia de resonancia, ω_0 .

La respuesta en frecuencia de este sistema se caracteriza en primer lugar por un decremento de la ganancia de 40 dB/dec y una caída de la fase de 180º para frecuencias altas, tal y como correspondería a cualquier sistema con dos polos. Pero además, el sistema muestra una resonancia a la frecuencia ω_0 . En esta frecuencia la ganancia coincide con el valor de Q y puede llegar a ser bastante mayor que la ganancia a frecuencias bajas (ganancia unidad: 0 dB). La anchura del pico de resonancia también depende de Q : Cuanto mayor es Q, más estrecho es el pico de resonancia y más rápida es la transición en el desfase.

Nota: Un sistema de segundo orden se dice que tiene un amortiguamiento crítico si $Q = 0{,}7 = \sqrt{2}/2$