

Violação da Desigualdade de Bell com
Variáveis Espaciais Transversais Usando
Transformada de Fourier Fracional

Daniel Schneider Tasca

Orientador: Paulo Henrique Souto Ribeiro



VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE DE BELL COM
VARIÁVEIS ESPACIAIS TRANSVERSAIS USANDO
TRANSFORMADA DE FOURIER FRACIONAL

Daniel Schneider Tasca

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Paulo Henrique Souto Ribeiro

Rio de Janeiro

Julho de 2006

Inserir folha de aprovação.

Rio de Janeiro

Julho de 2006

T197 Tasca, Daniel Schneider

Violação da Desigualdade de Bell com Variáveis Espaciais Transversais Usando Transformada de Fourier Fracional / Daniel Schneider Tasca - Rio de Janeiro: UFRJ/ IF, 2006.

xiv, 68f.: il.; 29,7cm.

Orientador: Paulo Henrique Souto Ribeiro.

Dissertação (Mestrado) - UFRJ/ Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física, 2006.

Referências Bibliográficas: f. 64-68.

1. Ótica Quântica. 2. Conversão Paramétrica Descendente Espontânea. 3. Fótons Gêmeos. 4. Desigualdades de Bell. 5. Transformada de Fourier Fracional. I. Souto Ribeiro, Paulo Henrique II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Violação da Desigualdade de Bell com Variáveis Espaciais Transversais Usando Transformada de Fourier Fracional.

RESUMO

VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE DE BELL COM VARIÁVEIS ESPACIAIS TRANSVERSAIS USANDO TRANSFORMADA DE FOURIER FRACIONAL

Daniel Schneider Tasca

Orientador: Paulo Henrique Souto Ribeiro

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Os experimentos de desigualdades de Bell visam confrontar certas previsões da mecânica quântica com as previsões de teorias de variáveis ocultas locais. Embora já se soubesse que a Mecânica Quântica prevê um estranho tipo de correlação não-local entre sistemas espacialmente separados, desde o trabalho de Einstein-Podolsk-Rosen, em 1935, esse tipo de correlação só pôde ser testado com o método proposto por John Bell em 1965. Nesse trabalho Bell propõe uma desigualdade que relaciona as probabilidades de detecção de dois observáveis dicotômicos, relativos a dois sistemas. Se a correlação entre os dois sistemas for descrita por uma teoria realista local, a desigualdade é sempre satisfeita. Por outro lado a violação dessa desigualdade implica que os sistemas em questão exibem uma correlação não-local, prevista pela Mecânica Quântica. Uma vez que essas desigualdades são expressas em termos de observáveis dicotômicos, partículas de spin $1/2$ e a polarização de fótons foram imediatamente identificadas como possíveis candidatos para a realização experimental de violações das desigualdades de Bell.

Correlações não-locais são também observadas em sistemas de variáveis contínuas, tais como as variáveis espaciais transversais de pares de fótons. Recentemente verificou-

se que o estado de dois fótons pós-selecionado produzido pela Conversão Paramétrica Descendente (CPD) é não separável para os graus de liberdade espaciais transversais.

O experimento descrito nessa dissertação teve o objetivo de testar as correlações espaciais transversais do estado de dois fótons produzido pela CPD com a desigualdade proposta por Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH). A desigualdade de CHSH é uma variante da desigualdade de Bell e portanto só se aplica a observáveis dicotômicos. Usando uma região de detecção dicotômica e analisadores compostos por sistemas ópticos de transformada de Fourier fracional, fomos capazes de aplicar a desigualdade de CHSH a esse grau de liberdade.

A transformada de Fourier fracional (FRFT) foi usada para realizar rotações arbitrárias na base de medida do espaço de variáveis transversais. Dessa forma a transformada de Fourier fracional pode ser vista como parte do analisador desse grau de liberdade. As medidas foram dicotomizadas dividindo os planos de detecção em duas metades. Após realizar uma FRFT em cada um dos dois feixes convertidos medimos a correlação entre cada uma das duas metades de cada plano de detecção, aplicando os resultados à desigualdade CHSH. Obtivemos uma violação da desigualdade CHSH comprovando o caráter não local das correlações espaciais transversais do estado de dois fótons produzido pela CPD.

Palavras-chave: Óptica Quântica, Desigualdades de Bell, Transformada de Fourier Fracional, Conversão Paramétrica Descendente Espontânea.

ABSTRACT

**VIOLATION OF BELL'S INEQUALITY WITH
TRANSVERSE SPATIAL VARIABLES USING
FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM**

Daniel Schneider Tasca

Orientador: Paulo Henrique Souto Ribeiro

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

The aim of Bell's inequalities experiments is to confront the predictions of Quantum Mechanics with those of the local hidden variables theories . Although it was already known that Quantum Mechanics predicts a strange counter-intuitive type of non-local correlation between systems spatially separated since the work of Einstein-Podolsk-Rosen in 1935, that Type of correlation was only able to be tested with the method proposed by John Bell in 1965. In this work Bell proposes an inequality that relates the probabilities of detection of two dichotomic observables, relative to two systems. If the correlation between the two systems is described by a local realistic theory, the inequality is always satisfied. On the other hand the violation of that inequality implies that the systems in subject exhibit a non-local correlation , predicted by Quantum Mechanics. Once those inequalities are expressed in terms of dichotomic observables, spin 1/2 particles and the polarization of photons were immediately identified as possible candidates for experimental violations of the Bell's inequality.

Non-local correlations are also observed in continuous variables systems, like the transverse spatial variables of photon pairs. Recently it was verified that the post-selected

two photon state produced by the Parametric Down Conversion (PDC) is non-separable in the transverse spatial degrees of freedom.

The experiment described in this thesis had the objective of testing the traverse spatial correlations of the two photon state produced by PDC with the inequality proposed by Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH). The CHSH inequality is a variant of the Bell's inequality and therefore is only applicable to a dichotomic observable. Using a dichotomic detection region and analyzers composed by optical fractional Fourier transform systems, we were able to test the CHSH inequality to this degree of freedom.

The fractional Fourier transform (FRFT) was used to accomplish arbitrary rotations in the measurement bases of the transverse spatial variables. In this way the FRFT can be seen as the analyzer of this degree of freedom. The measurements were dichotomized by dividing the detection planes in two halves. After each converted beam passed through a different FRFT system, we measured the correlation between each one of the two halves of each detection plane, using the results in CHSH inequality. We obtained a violation of the CHSH inequality proving the non-local character of the traverse spatial correlations of the two photon state produced by CPD.

Key-words: Quantum Optics, Bell's Inequalities, Fractional Fourier Transform, Spontaneous Parametric Down Conversion.

"Cortar aquilo que está incompleto e dizer:
agora está completo, porque termina aqui."

Citação retirada do livro "Duna", de Frank Herbert.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a orientação recebida do professor Paulo H. Souto Ribeiro. Por sua disposição e motivação para o trabalho. Pelos ensinamentos. Pela atenção e paciência. Pela confiança em mim depositada para a realização desse trabalho.

Aos colegas de laboratório Steve e Marcelo pelo companheirismo, pela imensa ajuda e colaboração.

Ao grupo de Óptica Quântica do Instituto de Física da UFRJ, professores e estudantes, colegas e amigos-colegas, pela excelência do grupo ao qual me integrei. Pelas proveitosas discussões e lições de Física. Pelas conversas, chás, cafés e cervejas.

Aos professores Carlos H. Monken e Pierre Pellat-Finet pelas proveitosas discussões e colaboração.

Ao CNPq, CNPq-Programa Institutos do Milênio e FAPERJ/PRONEX pela bolsa de estudos e financiamentos.

Aos amigos A, A, F, L, P e S pelo conjunto completo, pelo party team, pela amizade.

Aos eternos amigos Q.

À minha família “carioca” Odite, Ingrid e Ney pela calorosa acolhida no Rio de Janeiro. Por todo carinho.

Finalmente aos meus pais Matilde e Sérgio, e ao meu irmão Márcio, pelo apoio, carinho, compreensão. Pela superação e pelo engrandecimento.

Muito obrigado,

Daniel Schneider Tasca.

Índice

1	Introdução	1
2	Conversão Paramétrica Descendente Espontânea e Desigualdade de CHSH	4
2.1	Introdução	4
2.2	O Estado de Dois Fótons da CPDE	5
2.3	Emaranhamento em Polarização	8
2.4	Desigualdade de CHSH para Sistemas Dicotômicos	12
3	A Transformada de Fourier Fracional	14
3.1	Introdução	14
3.2	Transformada de Fourier Fracional e Rotação da Função de Wigner	16
3.3	Análise Geométrica da Transformada de Fourier Fracional	17
3.4	Definição Integral da TFF	29
3.5	Auto-funções da TFF	30
4	O Experimento	32
4.1	Introdução	32
4.2	Subespaço Bidimensional VET e Analisadores TFF	33
4.2.1	Subespaço Bidimensional de Variáveis Espaciais Transversais	36
4.2.2	Medidas em Bases Intermediárias - Analisadores TFF	45
4.3	Analogia das Correlações Espaciais com Correlações em Polarização	46

<i>ÍNDICE</i>	xii
4.4 Montagem Experimental	53
4.5 Resultados e discussão	57
4.6 Os Bits Quânticos nas Variáveis Espaciais Transversais (Qbit-VET) . . .	59
5 Conclusões e Perspectivas	62

Lista de Figuras

2.1	Esquema utilizado para geração de estados de Bell em polarização usando a CPDE com casamento de fase do tipo II.	10
2.2	Esquema utilizado para geração de estados de Bell em polarização usando a CPDE com casamento de fase do tipo I.	11
3.1	Representação de um raio paraxial. ρ é a distância transversal ao eixo z e θ o ângulo paraxial entre o raio e o eixo de coordenadas z	18
3.2	O campo no plano de saída está relacionado com o campo no plano de entrada através de uma propagação de distância z , refração em uma lente de distância focal f e novamente propagação de distância z	19
3.3	Geometria da transformada de Fourier implementada por uma lente.	20
3.4	Representação do sistema óptico de geração de imagem com uma lente e magnificação unitária. O plano de observação da imagem é chamado de \mathcal{Z}_I	22
3.5	Sistema óptico para geração de imagem composto por dois sistemas de Fourier.	23
3.6	Sistema óptico para implementação da transformada de Fourier fracional. A distribuição de campo no plano \mathcal{Z}_ϕ é dada pela FFT de grau ϕ do campo no plano \mathcal{D}	26
4.1	Sistema óptico usado para gerar a imagem do plano \mathcal{D} com magnificação unitária (figura 3.4 do capítulo 3).	36

- 4.2 Sistema óptico usado para implementar a transformada de Fourier de um campo de luz. A lente tem distância focal f e os planos \mathcal{D} e $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ coincidem com os planos focais da lente. 37
- 4.3 Representação da periodicidade da transformada de Fourier. A aplicação do operador $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}$ é equivalente a uma rotação de $\pi/2$ no sentido anti-horário no espaço definido pela função w e sua transformada de Fourier $v = \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}w$. As funções w e v podem representar a distribuição transversal de campo e o espectro angular, respectivamente. 44
- 4.4 Analisador TFF de ordem ϕ . A distância de propagação é $z_{\phi} = 2f \sin^2(\phi/2)$ onde f é a distância focal da lente. Medida na base $\{\phi^+, \phi^-\}$ 46
- 4.5 a) CPDE e analisadores TFF no caminho dos dois fótons. b) Diagrama ilustrativo da *imagem das ondas avançadas*. 48
- 4.6 Representação das bases de polarização. Mede-se a correlação entre cada base α com cada base β 54
- 4.7 Montagem experimental 55
- 4.8 Esquema de medida. Os símbolos “+” e “-” se referem às medidas ϕ_i^+ , ζ_j^+ e ϕ_i^- , ζ_j^- , respectivamente. O índice “0” se refere às medidas ϕ_i^0 e ζ_i^0 57
- 4.9 Resultados obtidos para as quatro configurações de analisadores TFF. 58

Capítulo 1

Introdução

Nessa dissertação faremos a descrição de um experimento realizado no laboratório de Óptica Quântica do Instituto de Física da UFRJ. Trata-se de um experimento de violação da desigualdade de Bell. Esse tipo de experimento visa confrontar as previsões da Mecânica Quântica com as teorias de variáveis ocultas locais. Embora já se soubesse que a Mecânica Quântica prevê um estranho tipo de correlação não-local entre sistemas espacialmente separados, desde o trabalho de Einstein-Podolsk-Rosen [1], esse tipo de correlação só pôde ser testado com o método proposto por John Bell em 1965 [2]. Nesse trabalho Bell propõe uma desigualdade que relaciona as probabilidades de detecção de dois observáveis dicotômicos, relativos a dois sistemas. Se a correlação entre os dois sistemas for descrita por uma teoria realista local, a desigualdade é sempre satisfeita. Por outro lado a violação dessa desigualdade implica que os sistemas em questão exibem uma correlação não-local, prevista pela Mecânica Quântica.

Os primeiros experimentos com violação da desigualdade de Bell foram feitos por Freedman e Clauser [3] e depois por Aspect, Grangier e Roger [4], usando a polarização de fótons emitidos por cascata atômica. O desenvolvimento da técnica da Conversão Paramétrica Descendente como uma robusta fonte de fótons emaranhados possibilitou o teste da desigualdade de Bell com vários graus de liberdade discretos tais como a

polarização [5, 6, 7, 8, 9], modos espaciais longitudinais[10], pacote temporal [11, 12] e momento angular orbital [13].

Recentemente verificou-se que os fótons produzidos pela Conversão Paramétrica Descendente (CPD) exibem correlação não-local entre os graus de liberdade espaciais transversais [14, 15]. Contudo, as correlações no espaço de variáveis espaciais transversais devem ser testadas usando-se critérios de não-classicalidade para variáveis contínuas [16].

O experimento que fizemos teve o objetivo de testar as correlações espaciais transversais do estado de dois fótons produzido pela CPD com a desigualdade proposta por Clauser, Horne, Shimony e Holt (desigualdade de CHSH) [17]. A desigualdade de CHSH é uma variante da desigualdade de Bell e portanto só se aplica para observáveis dicotômicos. Usando uma região de detecção dicotômica e analisadores compostos por sistemas ópticos de transformada de Fourier fracional [18, 19, 20, 21], fomos capazes de aplicar a desigualdade de CHSH a esse grau de liberdade, obtendo uma violação de mais de quatorze desvios padrão [22].

No segundo capítulo faremos uma breve descrição do estado de dois fótons produzido pela CPD. Discutiremos os estados emaranhados em polarização e nas variáveis espaciais transversais. Discutiremos também a desigualdade de Clauser-Horne-Shimoni-Holt para sistemas dicotômicos.

No terceiro capítulo introduziremos a transformada de Fourier fracional. A transformada de Fourier fracional tem um papel muito importante nesse trabalho. Através dela fomos capazes de fazer rotações arbitrárias na base de medida do espaço de variáveis transversais. Dessa forma a transformada de Fourier fracional pode ser vista como o analisador desse grau de liberdade.

A descrição do experimento será feita no quarto capítulo. Primeiramente definiremos o subespaço dicotômico nas variáveis espaciais transversais do campo. Após essa definição faremos uma analogia entre as correlações em polarização de um estado de Bell, e as correlações transversais do estado da CPD. Então a transformada de Fourier

fracional será usada para análise do campo no subespaço definido. Analisaremos os resultados obtidos usando a desigualdade de CHSH.

Capítulo 2

Conversão Paramétrica Descendente Espontânea e Desigualdade de CHSH

2.1 Introdução

A conversão paramétrica descendente espontânea [23, 24] é um processo óptico não-linear no qual um fóton do feixe de bombeamento com vetor de onda \mathbf{k}_b e frequência ω_b , propagando em um meio óptico não linear, é espontaneamente convertido em dois fótons, com vetores de onda \mathbf{k}_s e \mathbf{k}_c , e frequências ω_s e ω_c , respectivamente. O índice b se refere ao feixe de bombeamento e os índices s e c se referem aos feixes convertidos sinal e complementar, respectivamente. O estado quântico de dois fótons resultante da CPDE é na maioria das vezes não-separável ou emaranhado, significando que ele não pode ser escrito como o produto do estado dos dois fótons separadamente. Esse emaranhamento é consequência dos vínculos de conservação presentes no processo de conversão. Podemos escrever a conservação da energia nesse processo aproximadamente como se segue:

$$\omega_b = \omega_s + \omega_c. \quad (2.1)$$

Se o cristal for fino o suficiente, com comprimento longitudinal de uns poucos milime-

tros, as componentes transversais do momento dos fótons são conservadas:

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c. \quad (2.2)$$

A conservação do momento transversal dos fótons dentro de um cristal birrefringente uniaxial requer que certas condições de *casamento de fase* [25] sejam satisfeitas. Existem dois tipos de casamento de fase em um cristal uniaxial, chamadas *tipo I* e *tipo II*. No casamento de fase do tipo I, o feixe de bombeio, polarizado na direção extraordinária (e), é convertido em dois feixes polarizados na direção ordinária (o):

$$e \rightarrow oo, \quad (2.3)$$

Já no casamento de fase do tipo II as polarizações dos feixes de bombeamento, sinal e complementar são:

$$e \rightarrow eo \quad (2.4)$$

No casamento de fase do tipo I os feixes convertidos são emitidos na forma de um cone sólido. Para cada comprimento de onda existe uma superfície cônica. As superfícies cônicas de cada comprimento de onda são coaxiais e os fótons gêmeos são emitidos em lados opostos do cone. No tipo II existem dois cones para cada comprimento de onda. Um cone tem polarização ordinária e o outro tem polarização extraordinária. Os diferentes comprimentos de onda para cada cone sólido estão localizados em superfícies cônicas coaxiais.

2.2 O Estado de Dois Fótons da CPDE

Na aproximação de cristal fino o estado quântico gerado pela CPDE pode ser escrito como [26]:

$$|\psi\rangle_{CPDE} = C_1|vac\rangle + C_2|\psi\rangle, \quad (2.5)$$

onde

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma_s, \sigma_c} C_{\sigma_s, \sigma_c} \iint_D d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_c \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_c) |\mathbf{q}_s, \sigma_s\rangle_s |\mathbf{q}_c, \sigma_c\rangle_c, \quad (2.6)$$

e $|vac\rangle$ representa o estado de zero fótons nos modos s e c . Os coeficientes C_1 e C_2 são tais que $|C_2| \ll |C_1|$. C_2 é uma função do comprimento do cristal, do coeficiente de não-linearidade e da amplitude do feixe de bombeamento, além de outros fatores. $|\mathbf{q}_j, \sigma_j\rangle$ representa o estado de Fock de um fóton com vetor de onda transversal \mathbf{q}_j e polarização σ_j dos modos s e c . O estado de polarização no estado $|\psi\rangle$ é definido pelo coeficiente C_{σ_s, σ_c} . Quando os ângulos de saída dos modos sinal e complementar são pequenos, a função $\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_c)$ é dada por:

$$\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_c) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{K}} v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c) \text{sinc} \left(\frac{L|\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_c|^2}{4K} \right), \quad (2.7)$$

onde $v(\mathbf{q})$ é o espectro angular do feixe de bombeamento, L é o comprimento do cristal na direção z , e K é a magnitude do vetor de onda do feixe de bombeamento. A região de integração D é definida pela aproximação paraxial. Entretanto, na maioria dos experimentos, a região na qual $\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_c)$ é apreciável, é muito menor do que D . Note que o espectro angular do feixe de bombeamento é transferido para as correlações espaciais de quarta ordem do estado de dois fótons [26]. O espectro angular do feixe de bombeamento $v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c)$ é uma função não separável de \mathbf{q}_s e \mathbf{q}_c . Isso significa que o estado de dois fótons da CPDE apresenta emaranhamento nas variáveis espaciais transversais. Esse emaranhamento é responsável por vários efeitos não-locais e não-classicos observados em vários experimentos com propriedades transversais desse estado [27, 28, 14].

Trabalhando ainda na aproximação de cristal fino podemos aproximar a função “sinc” pela unidade [26], e assim o estado de dois fótons pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{K}} \sum_{\sigma_s, \sigma_c} C_{\sigma_s, \sigma_c} \iint_D d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_c v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c) |\mathbf{q}_s, \sigma_s\rangle_s |\mathbf{q}_c, \sigma_c\rangle_c. \quad (2.8)$$

Probabilidade de Detecção de dois Fótons

A probabilidade de detecção de dois fótons é definida por:

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são as posições dos detectores de fótons.

Usamos aqui a ortonormalidade e completeza dos estados de Fock para definir a amplitude de probabilidade de detecção de dois fótons¹:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle vac | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1) \otimes \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) | \psi \rangle. \quad (2.10)$$

$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$ é o operador de campo na aproximação paraxial, dado por:

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = \mathcal{V} \mathcal{E}_0 \frac{e^{i(kz - \omega t)}}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma} \sigma \int d\mathbf{q} \mathbf{a}(\mathbf{q}, \sigma) e^{i \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \frac{q^2}{2k} z}, \quad (2.11)$$

onde k é a magnitude do vetor de onda \mathbf{k} e $\boldsymbol{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ é a componente transversal do vetor de posição \mathbf{r} . O operador $\mathbf{a}(\mathbf{q}, \sigma)$ é o operador de aniquilação de um fóton com vetor de onda transversal \mathbf{q} e polarização σ . A soma em σ é feita nas duas polarizações ortogonais. \mathcal{E}_0 é uma constante dependente da frequência e \mathcal{V} é o volume de quantização.

Probabilidade de Detecção Simples e em Coincidência dos Campos Convertidos

A probabilidade de detecção simples de um dos feixes convertidos, sinal ou complementar, para um detector pontual posicionado na coordenada \mathbf{r}_i , é proporcional à potência do campo de bombeamento no plano do cristal:

¹Na aproximação monocromática $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ pode ser pensada como a função de onda de dois fótons[29].

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}_i) = \text{const} \times |W(\boldsymbol{\rho}'_i, 0)|^2, \quad (2.12)$$

onde $W(\mathbf{r})$ é a distribuição de campo do feixe de bombeamento no plano do cristal e o índice i se refere a um dos dois feixes convertidos.

A probabilidade de detecção em coincidência dos dois feixes convertidos para o caso degenerado é proporcional à intensidade do feixe de bombeamento:

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \text{const} \times |W(\boldsymbol{\rho}, z)|^2, \quad (2.13)$$

onde as coordenadas $\boldsymbol{\rho}$ e z são dadas por:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{z_1 \boldsymbol{\rho}_2 + z_2 \boldsymbol{\rho}_1}{z_1 + z_2}; \quad (2.14)$$

$$z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \quad (2.15)$$

No caso em que os detectores se encontram à mesma distância do cristal ($z_1 = z_2 = z_0$) temos que:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_1}{2}; \quad (2.16)$$

$$z = z_0. \quad (2.17)$$

2.3 Emaranhamento em Polarização

O estado quântico² de polarização de um fóton pode ser escrito como:

$$|\chi\rangle = \cos(\theta/2)|H\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|V\rangle, \quad (2.18)$$

²Trabalharemos aqui somente com estados puros.

onde $|H\rangle$ e $|V\rangle$ representam os estados de polarização linear horizontal e vertical, respectivamente. O estado quântico de polarização $|\chi\rangle$ pode ser usado como um bit quântico. Em sua representação na esfera de Bloch os ângulos θ e ϕ são os ângulos polar e azimutal, respectivamente.

O estado de polarização de dois fótons pode ser escrito, da forma mais geral, como:

$$|\psi\rangle_{1,2} = \alpha|H\rangle_1|H\rangle_2 + \beta|H\rangle_1|V\rangle_2 + \gamma|V\rangle_1|H\rangle_2 + \delta|V\rangle_1|V\rangle_2, \quad (2.19)$$

onde a condição de normalização impõe que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$.

O estado puro da polarização de dois fótons descrito acima é emaranhado se não puder ser escrito na forma de um produto dos estados de cada fóton individualmente. Escrevemos a seguir dois tipos de estados emaranhados em polarização:

$$|\phi\rangle_{1,2} = \cos(\theta/2)|H\rangle_1|H\rangle_2 + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|V\rangle_1|V\rangle_2, \quad (2.20)$$

e

$$|\psi\rangle_{1,2} = \cos(\theta/2)|H\rangle_1|V\rangle_2 + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|V\rangle_1|H\rangle_2. \quad (2.21)$$

Os estados maximamente emaranhados ou estados de Bell em polarização são obtidos a partir de (2.20) e (2.21) fazendo-se $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0, \pi$. Vejamos os quatro estados de Bell:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 \pm |V\rangle_1|V\rangle_2), \quad (2.22)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 \pm |V\rangle_1|H\rangle_2). \quad (2.23)$$

Os estados de Bell descritos acima podem ser gerados a partir da CPDE. Um dos métodos utiliza um cristal alinhado para o casamento de fase do tipo II. Nesse caso, como descrito anteriormente, os feixes convertidos são emitidos em dois cones. Um com

polarização ordinária e o outro com a polarização ortogonal extraordinária. Suponhamos que estamos interessados no caso degenerado onde os comprimentos de onda dos dois feixes convertidos são iguais. Cada um dos fótons gêmeos é emitido em um cone, com polarizações ortogonais. Posicionamos agora dois detectores à mesma distância do cristal, aproximadamente na direção onde os cones se interceptam. Para selecionar os modos de interesse equipamos os detectores com filtros de interferência centrados no comprimento de onda dos fótons degenerados. Os dois detectores estão ligados a um sistema eletrônico de coincidências. Para encontrar o máximo de contagens em coincidências varremos os detectores no espaço de posições transversais.

Como estamos olhando para a região de interseção dos cones (ver figura 2.1), o fóton detectado em cada um dos detectores pode ter sido produzido com polarização ordinária ou extraordinária. Dessa forma os fótons detectados em coincidência são descritos por um estado de Bell do tipo:

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 \pm e^{i\phi}|V\rangle_1|H\rangle_2). \quad (2.24)$$

A fase ϕ é originada da diferença de caminho óptico dentro do cristal pois cada polarização enxerga um diferente índice de refração. Podemos controla-la inserindo um compensador no caminho de um dos feixes.

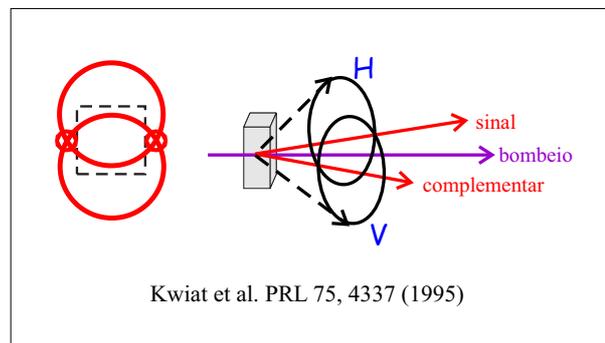


Figura 2.1: Esquema utilizado para geração de estados de Bell em polarização usando a CPDE com casamento de fase do tipo II.

Um outro método utilizado para gerar estados de Bell em polarização emprega cristais com casamento de fase do tipo I da CPDE. Usa-se dois cristais finos com eixos ópticos perpendiculares, posicionados um após o outro (ver figura 2.2).

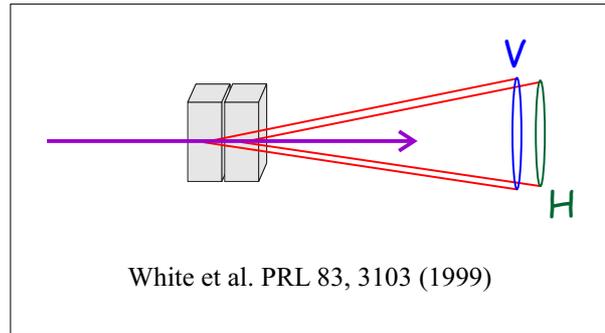


Figura 2.2: Esquema utilizado para geração de estados de Bell em polarização usando a CPDE com casamento de fase do tipo I.

Usamos a polarização do feixe de bombeamento para controlar a intensidade da conversão em cada cristal. Cada direção de polarização do feixe de bombeamento (H ou V) atua sobre apenas um dos cristais. Com a polarização do feixe de bombeamento a 45 graus, observamos as mesmas taxas de conversão nos dois cristais. A direção de polarização ordinária de um cristal é equivalente à direção de polarização extraordinária do outro cristal pois eles estão posicionados com os eixos ópticos perpendiculares. Nessa configuração observamos dois fótons ordinários (extraordinários) produzidos no primeiro cristal ou dois fótons extraordinários (ordinários) produzidos no segundo cristal. Entretanto há uma diferença temporal entre os pacotes dois fótons produzidos no primeiro ou no segundo cristal. Mesmo assim, um laser com comprimento de coerência maior do que a distância entre os dois cristais, garante a coerência da superposição dos estados $|HH\rangle$ e $|VV\rangle$.

Os estados de Bell produzidos com essa técnica são:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 \pm e^{i\phi}|V\rangle_1|V\rangle_2). \quad (2.25)$$

2.4 Desigualdade de CHSH para Sistemas Dicotômicos

John Bell mostrou em dois artigos [2, 30] que as previsões estatísticas da Mecânica Quântica, para certos sistemas de duas partículas espacialmente separadas, são incompatíveis com teorias estocásticas que satisfazem as condições de localidade. Inspirados pelo artigo de Bell, Clauser et al [31] mostraram que a análise de Bell podia ser estendida para sistemas experimentais realizáveis e que as teorias locais poderiam ser testadas. Essa análise considerava imperfeições nos aparatos experimentais, como fontes de duas partículas não ideais e eficiência não unitária dos detectores. Em um artigo de 1974 [31] Clauser caracteriza uma classe de teorias chamadas *Teorias Objetivas Locais* as quais são incompatíveis com as previsões da Mecânica Quântica. A incompatibilidade dessas teorias com a Mecânica Quântica já havia sido provada por Bell mas foram colocadas por ele de uma forma que não permitia a direta verificação experimental. O teorema de incompatibilidade proposto por Clauser pode ser escrito da seguinte forma: pares de partículas idênticas emitidas por uma fonte são analisadas por dois detectores, digamos 1 e 2. Cada aparato de medida tem um parâmetro ajustável relativo à propriedade que está sendo medida. Sejam α e α' e β e β' duas orientações dos parâmetros dos detectores 1 e 2, respectivamente. Toda teoria objetiva local deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$|\mathcal{S}| = |E(\alpha, \beta) + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) - E(\alpha', \beta')| \leq 2, \quad (2.26)$$

onde $E(\alpha, \beta)$ é a função de correlação relativa à medida da partícula 1 com parâmetro α e da partícula 2 com parâmetro β :

$$E(\alpha, \beta) = \frac{C(\alpha, \beta) + C(\alpha^\perp, \beta^\perp) - C(\alpha^\perp, \beta) - C(\alpha, \beta^\perp)}{C(\alpha, \beta) + C(\alpha^\perp, \beta^\perp) + C(\alpha^\perp, \beta) + C(\alpha, \beta^\perp)}, \quad (2.27)$$

$C(\alpha, \beta)$ é a taxa de detecção em coincidência da partícula 1 com parâmetro α e 2 com parâmetro β . Esse tipo de desigualdade é válida para observáveis dicotômicos para os quais uma medida na base α pode resultar em apenas duas respostas: α ou α^\perp .

Sabemos que os estados de Bell em polarização já foram usados para testar a desigualdade CHSH (eq. (2.26)). Os resultados apontaram para a comprovação das previsões da mecânica quântica em desfavor das teorias de variáveis ocultas locais. Soube-se, então, que dois fótons podem apresentar correlação quântica não local na medida de suas polarizações.

A correlação não local entre observáveis descritos por variáveis contínuas, tais como as variáveis espaciais transversais do fóton, já foi observada anteriormente em alguns experimentos. Entretanto os métodos e os critérios para as variáveis contínuas são diferentes e inadequados para testar a correlação não local em polarização. Assim como as desigualdades de Bell não se aplicam aos sistemas de variáveis não-dicotômicas.

Capítulo 3

A Transformada de Fourier Fracional

3.1 Introdução

A transformada de Fourier (TF) tem um papel essencial no estudo de sistemas lineares. Ela é particularmente importante na óptica moderna pois aparece naturalmente da análise de sistemas ópticos. Tudo que está relacionado com a matemática da TF é importante para o estudo da óptica. A propagação (difração) do campo eletromagnético na aproximação de Fraunhofer pode ser descrita por uma transformada de Fourier, ou seja, a distribuição do campo difratado tende, no infinito, para seu espectro angular. Pode-se observar o espectro angular do campo também com auxílio de lentes. Em certas condições esse sistema óptico implementa a transformada de Fourier sobre o campo. Supondo que \mathcal{F} é o operador que representa a transformada de Fourier, podemos dizer em alguns casos que a geração da imagem corresponde à aplicação de duas transformadas de Fourier, representada pelo operador \mathcal{F}^2 . Podemos implementar qualquer número inteiro e positivo de transformadas de Fourier sobre um campo. A implementação do operador \mathcal{F}^n , onde $n = 0, 1, 2, \dots$, pode ser feita com n sistemas ópticos com lentes que serão explicados mais a frente.

A difração do campo no limite de Fraunhofer está associada à TF. No limite de Fresnel a propagação do campo é descrita pela integral de Fresnel. Podemos calcular a

distribuição de campo em qualquer plano transversal usando essa integral. De acordo com o princípio de Huygens-Fresnel a transferência de um campo por difração pode ser dividida em vários fenômenos de difração: descreve-se a propagação entre as superfícies intermediárias até chegar à superfície receptora. A difração do campo eletromagnético, descrita pela integral de Fresnel, está de acordo com esse princípio. Seria desejável associar a transformada de Fourier à transferência do campo por difração entre superfícies arbitrárias. Isso pode ser feito através da *transformada de Fourier fracional* (TFF).

A primeira noção da transformada de Fourier fracional aparece em um trabalho de Wiener em 1929 [32]. Outros trabalhos mencionaram a TFF em 1937 [33] e em 1959 [34]. Em 1980 a TFF foi usada pelo matemático Namias como um novo método para resolver a equação de Schrödinger [35]. As aplicações da TFF em óptica começaram a surgir com [36], mas tornaram-se importantes com os trabalhos de Lohmann, Mendlovic e Ozactas em 1993 [18, 19, 20]. Eles mostraram como a propagação do campo por dispositivos ópticos pode ser descrita através da TFF. Em [20, 37] Lohmann fala sobre a relação da função de Wigner com a TFF.

Certos textos utilizam ainda um outro tipo de montagem óptica para a realização da TFF sobre um campo. Essa montagem consiste da propagação do campo por uma fibra com índice de refração gradual (em inglês *graded index fibers or GRIN fibers*) [19, 38].

As montagens com lentes ou fibras podem ser facilmente utilizadas para implementação de TFF sobre campos ópticos. Entretanto a própria propagação do campo eletromagnético através do espaço livre já pode ser vista como a implementação física da TFF. Os trabalhos de Pellat-Finet [21, 39] mostram que a transformada de Fourier fracional de um campo óptico pode ser observada através da difração de Fresnel, da mesma maneira que a Transformada de Fourier ordinária é observada através da difração de Fraunhofer. Em [40] é feita uma representação da difração do campo em termos da TFF que está de acordo com o princípio de Huygens-Fresnel. A transformada de Fourier fracional com ordem complexa é discutida em [41].

3.2 Transformada de Fourier Fracional e Rotação da Função de Wigner

de Wigner

Qualquer campo $w(x)$, aqui feito em apenas uma dimensão, pode ser descrito indiretamente por sua distribuição de Wigner $\mathcal{W}(x, k_x)$:

$$\mathcal{W}(x, k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' w(x + x'/2) w(x - x'/2) e^{-ik_x x'}, \quad (3.1)$$

ou introduzindo a transformada de Fourier de $w(x)$:

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x v(k_x) e^{ik_x x}, \quad (3.2)$$

temos:

$$\mathcal{W}(x, k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x v(k_x + k'_x/2) v(k_x - k'_x/2) e^{ik'_x x}. \quad (3.3)$$

Dado $\mathcal{W}(x, k_x)$, podemos obter o módulo quadrado da distribuição de campo (ou do espectro angular) da seguinte maneira:

$$|w(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \mathcal{W}(x, k_x); \quad (3.4)$$

$$|v(k_x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{W}(x, k_x). \quad (3.5)$$

Vejam agora as consequências de algumas transformações realizadas no campo $w(x)$. Propagação paraxial do campo $w(x)$, de uma distância z em espaço livre, implica em um deslocamento da função de Wigner na variável x :

$$\mathcal{W}(x, k_x) \rightarrow \mathcal{W}\left(x + \frac{z}{|\mathbf{k}|} k_x, k_x\right). \quad (3.6)$$

A passagem por uma lente fina de distância focal f desloca $\mathcal{W}(x, k_x)$ na variável k_x :

$$\mathcal{W}(x, k_x) \rightarrow \mathcal{W}\left(x, k_x - \frac{|\mathbf{k}|}{f}x\right). \quad (3.7)$$

A transformada de Fourier implementada por uma lente de distância focal f implica em uma rotação de 90 graus da distribuição $\mathcal{W}(x, k_x)$:

$$\mathcal{W}(x, k_x) \rightarrow \mathcal{W}\left(\frac{f}{|\mathbf{k}|}k_x, -\frac{|\mathbf{k}|}{f}x\right). \quad (3.8)$$

As três operações realizadas no campo se manifestam na distribuição de Wigner apenas como translações ou rotação das coordenadas. Podemos representá-las matricialmente como na óptica de raios. A transformada de Fourier fracional de ordem ϕ é definida como a transformação realizada no campo, relativa a uma rotação da distribuição de Wigner de um ângulo ϕ . Aplicando a TFF no campo podemos rodar sua distribuição de Wigner de qualquer ângulo, sendo que rotações de $\pi/2$ e π representam a transformada de Fourier ordinária e imagem invertida do campo, respectivamente.

Nesse texto vamos nos restringir a uma análise geométrica da transformada de Fourier fracional. A análise geométrica, embora simples, é suficiente para o entendimento do experimento que fizemos.

3.3 Análise Geométrica da Transformada de Fourier Fracional

Consideremos um raio paraxial à direção z , descrito pela coordenada transversal ρ e ângulo θ com a direção z (ver figura 3.1):

Vamos representar o raio r por uma matriz coluna:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

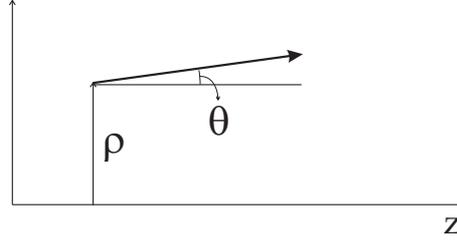


Figura 3.1: Representação de um raio paraxial. ρ é a distancia transversal ao eixo z e θ o ângulo paraxial entre o raio e o eixo de coordenadas z .

A matriz de propagação na direção paraxial z é dada por:

$$P_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Vejamos a atuação de P_z em r :

$$P_z r = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + z\theta \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

A propagação translada o raio r de $z\theta$, mas preserva o seu ângulo.

A ação de uma lente fina [42, 43] de distância focal f pode ser representada pela matriz L_f :

$$L_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

O efeito da lente no raio r é uma rotação de um ângulo igual a $-\rho/f$.

$$L_f r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta - \frac{1}{f}\rho \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Vamos calcular agora a matriz correspondente ao produto $P_z L_f P_z$:

$$P_z L_f P_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P_z L_f P_z = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{f} & 2z - \frac{z^2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{z}{f} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

A matriz acima relaciona o raio no plano de entrada com o raio no plano de saída, de acordo com a figura 3.2.

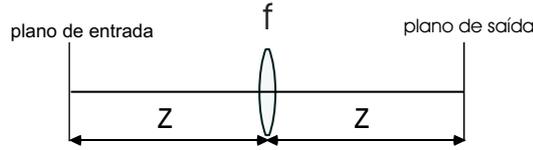


Figura 3.2: O campo no plano de saída está relacionado com o campo no plano de entrada através de uma propagação de distância z , refração em uma lente de distância focal f e novamente propagação de distância z .

Pode-se calcular agora a matriz correspondente ao arranjo óptico que implementa a transformada de Fourier. Basta que façamos $z = f$ em (3.14). Chamaremos essa matriz de $F_{\frac{\pi}{2}}$ por razões que veremos mais a frente.

$$F_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Chamaremos de r_F , ou raio de Fourier, a transformada de Fourier do raio r :

$$r_F = F_{\frac{\pi}{2}} r = \begin{pmatrix} \rho_F \\ \theta_F \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

substituindo as matrizes obtemos:

$$\mathbf{r}_F = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\theta \\ -\frac{1}{f}\rho \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

A observação da intensidade do campo (função de correlação de segunda ordem) no plano de detecção corresponde à observação da componente de posição do raio r . Então, a observação da intensidade do raio de Fourier r_F , nós dá informação da componente angular θ do raio r . Vejamos a geometria da transformada de Fourier mostrada na figura 3.3. Temos dois raios r_1 e r_2 sendo emitidos pela fonte \mathcal{D} . Ambos os raios são emitidos da mesma posição y (consideramos aqui só uma dimensão transversal), sendo que r_1 tem componente angular igual a $\theta_1 = 0$ e r_2 tem componente angular igual $\theta_2 = \theta$:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

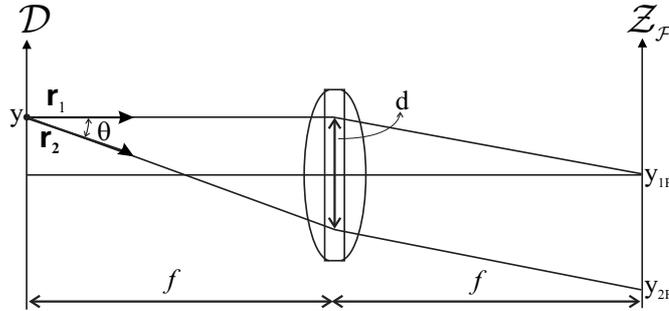


Figura 3.3: Geometria da transformada de Fourier implementada por uma lente.

O plano de observação do raio de Fourier será chamado de \mathcal{Z}_F ou plano de Fourier. Trabalhando na aproximação paraxial temos que $y \ll f$. Ou em termos do vetor de onda temos que a componente transversal k_y é muito menor que a componente longitudinal k_z ($k_y \ll k_z$). De acordo com a figura 3.3 podemos escrever que:

$$\theta \simeq \sin(\theta) \simeq \frac{d}{f}. \quad (3.19)$$

O raio 1 tem componente angular nula, ou seja, viaja paralelo ao eixo óptico do sistema. Portanto será detectado no ponto focal da lente, posição $y_{F_1} = 0$. O raio 2 será detectado na posição y_{F_2} . Todos os raios que saem de um mesmo ponto do plano focal de uma lente viajam paralelos após serem refratados pela lente. Temos então que $y_{F_2} = d$, consequentemente:

$$y_{F_2} \simeq f\theta. \quad (3.20)$$

A componente transversal k_{y_2} do vetor de onda do raio 2, \mathbf{k}_2 , pode ser escrita, em termos do ângulo θ , como:

$$k_{y_2} \simeq |\mathbf{k}_2|\theta, \quad (3.21)$$

onde usou-se a aproximação paraxial. Substituindo (3.20) em (3.21):

$$y_{F_2} \simeq \frac{f}{|\mathbf{k}_2|} k_{y_2}. \quad (3.22)$$

Isso mostra que as coordenadas do plano de Fourier estão relacionadas com as frequências espaciais transversais do campo em \mathcal{D} .

Vejam agora a matriz associada à formação de imagem. Consideraremos aqui dois sistemas de imagem. O primeiro sistema é composto por apenas uma lente. Devemos satisfazer a condição de formação de imagem imposta pela lei das lentes:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}, \quad (3.23)$$

onde d_o é a distância do plano objeto à lente e d_i é a distância do plano imagem à lente. Usaremos a condição de magnificação unitária $M = -1$, onde o sinal negativo significa a inversão da imagem. Nessa configuração temos que:

$$d_o = d_i = 2f, \quad (3.24)$$

e magnificação:

$$M = -\frac{d_i}{d_o} = -1. \quad (3.25)$$

Esse sistema de imagem é equivalente ao representado na figura 3.4. Para calcular a matriz correspondente devemos fazer $z = 2f$ na matriz (3.14), obtendo:

$$P_{2f}L_fP_{2f} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Vemos que esse sistema de imagem gira a coordenada angular do raio r , o que equivale a uma fase quadrática adquirida pelo campo. Aplicando essa matriz ao raio r temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ -\theta - \frac{1}{f}\rho \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

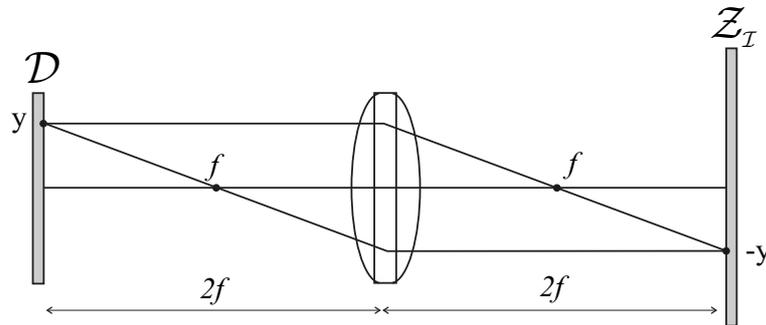


Figura 3.4: Representação do sistema óptico de geração de imagem com uma lente e magnificação unitária. O plano de observação da imagem é chamado de Z_I .

O segundo sistema de imagem considerado não introduz essa fase quadrática no campo. Ele consiste de dois sistemas de Fourier (ver figura 3.5), ambos com mesma distância focal f , descritos pela matriz $F_{\frac{\pi}{2}}$. Chamaremos essa matriz de F_{π} :

$$F_{\pi} = F_{\frac{\pi}{2}} F_{\frac{\pi}{2}}, \quad (3.28)$$

$$F_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

A matriz F_{π} gera a imagem invertida do raio r :

$$F_{\pi} r = -r = r_I = \begin{pmatrix} -\rho \\ -\theta \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

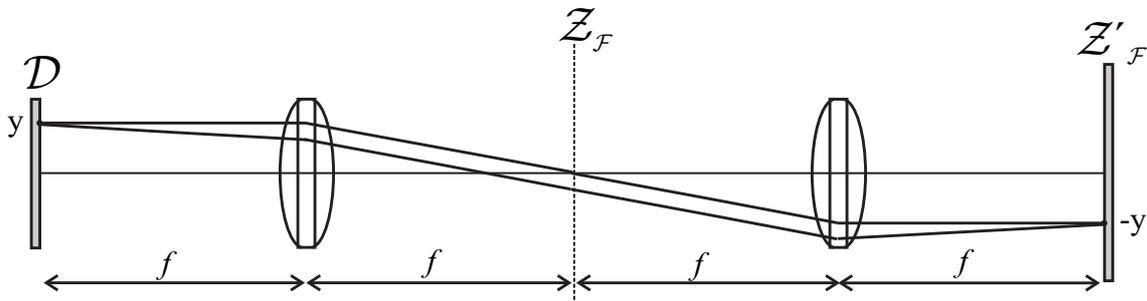


Figura 3.5: Sistema óptico para geração de imagem composto por dois sistemas de Fourier.

É fácil ver que a igualdade $F_{\pi} = F_{\frac{\pi}{2}} F_{\frac{\pi}{2}}$ só se aplica para dois sistemas de Fourier com mesmas distâncias focais. Matematicamente a composição da transformada de Fourier é sempre válida. Porém a aditividade na implementação óptica requer que uma condição seja satisfeita. A condição de aditividade está ligada ao fato de que as coordenadas transversais do plano de Fourier são escaladas pela distância focal da lente usada. Suponha que façamos a transformada de Fourier do raio r com uma lente de distância focal f_1 e

depois fazemos a transformada de Fourier do raio r_F com uma lente de distância focal f_2 .

No plano de entrada, ou plano da fonte \mathcal{D} , teremos o raio r :

$$r = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

de forma que no plano de Fourier \mathcal{Z}_F da primeira lente teremos a coordenada escalada $\rho_F = f_1\theta$:

$$r_F = \begin{pmatrix} \rho_F \\ \theta_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\theta \\ -\frac{1}{f_1}\rho \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

e no plano de Fourier \mathcal{Z}'_F da segunda lente teremos a coordenada escalada $\rho'_F = f_2\theta_F$:

$$r'_F = \begin{pmatrix} \rho'_F \\ \theta'_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2\theta_F \\ -\frac{1}{f_2}\rho_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{f_1}\rho \\ -\frac{f_1}{f_2}\theta \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

No caso em que $f_1 = f_2$ o plano de Fourier \mathcal{Z}'_F da segunda lente iguala-se ao plano imagem \mathcal{Z}_I do raio r . E só assim podemos escrever a relação aditiva (3.28). Observe que o operador \mathcal{F}^1 está relacionado com a matriz $F_{\frac{\pi}{2}}$ e \mathcal{F}^2 está relacionado com a matriz F_{π} . O ângulo $\pi/2$ está associado com a transformada de Fourier pelo fato de a TF rodar a função de Wigner do campo desse mesmo ângulo. De agora em diante adotaremos o índice angular para a representação do operador da TF, seja na representação matricial ou na representação integral. Temos então:

$$\mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} \quad e \quad \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathcal{F}_{\pi}. \quad (3.34)$$

Introduziremos agora a matriz de rotação F_{ϕ} :

$$F_{\phi} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & f' \sin(\phi) \\ -\frac{1}{f'} \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

A matriz F_ϕ é definida como o operador matricial da transformada de Fourier fracional (TFF) na óptica de raios. Com ela podemos girar o raio \mathbf{r} de um ângulo arbitrário ϕ . Observe que $F_{\pi/2}$ e F_π são casos especiais de F_ϕ para $\phi = \pi/2$ e $\phi = \pi$, respectivamente. Mais adiante nessa seção definiremos a expressão integral para o operador da transformada de Fourier fracional.

Vejam a ação de F_ϕ no raio \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} F_\phi \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & f' \sin(\phi) \\ -\frac{1}{f'} \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix}, \\ F_\phi \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi)\rho + f' \sin(\phi)\theta \\ -\frac{1}{f'} \sin(\phi)\rho + \cos(\phi)\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Podemos reescrever a equação acima em termos de \mathbf{r} e \mathbf{r}_F :

$$F_\phi \mathbf{r} = \mathbf{r}_\phi = \cos(\phi)\mathbf{r} + \sin(\phi)\mathbf{r}_F, \quad (3.37)$$

ou seja, a aplicação do operador F_ϕ em um raio \mathbf{r} gera uma combinação linear do próprio raio com seu raio de Fourier. Chamaremos esse raio de \mathbf{r}_ϕ e seu vetor de coordenadas será dado por:

$$\mathbf{r}_\phi = \begin{pmatrix} \rho_\phi \\ \theta_\phi \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

O operador F_ϕ também pode ser construído com o produto das três matrizes $P_z L_f P_z$. Devemos usar uma distância de propagação que chamaremos $z = z_\phi$. Controlando as distâncias de propagação e a distância focal da lente podemos variar continuamente a ordem da TFF. A relação entre z_ϕ , f e ϕ é dada por:

$$z_\phi = 2f \sin^2(\phi/2). \quad (3.39)$$

O plano de observação do raio r_ϕ será chamado de \mathcal{Z}_ϕ . A figura 4.6 ilustra o sistema óptico da TFF.

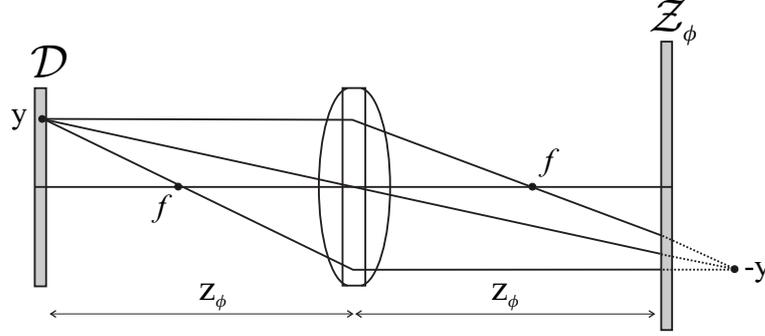


Figura 3.6: Sistema óptico para implementação da transformada de Fourier fracional. A distribuição de campo no plano \mathcal{Z}_ϕ é dada pela FFT de grau ϕ do campo no plano \mathcal{D} .

Substituindo $z = z_\phi$ em $P_z L_f P_z$, temos:

$$P_z L_f P_z = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & f \sin^2(\phi) \\ -\frac{1}{f} & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Devemos fazer $f' = f \sin(\phi)$ para que a matriz acima represente a transformada de Fourier fracional de grau ϕ . Note que a ordem ϕ e a distância focal f estão envolvidas no sistema óptico representado na figura 3.6. Contudo deve-se usar a coordenada escalada ρ_ϕ no plano \mathcal{Z}_ϕ , dada por:

$$\rho_\phi = \cos(\phi)\rho + f' \sin(\phi)\theta, \quad (3.41)$$

onde $f' = f \sin(\phi)$ é chamado de *distância focal fracional*.

A TFF é uma transformação aditiva em sua definição matemática [44]. Dados dois ângulos ϕ_1 e ϕ_2 podemos escrever :

$$\mathcal{F}_{\phi_1} \mathcal{F}_{\phi_2} = \mathcal{F}_{\phi_1 + \phi_2}, \quad (3.42)$$

porém, como no caso da transformada de Fourier ordinária, a aditividade não é sempre válida na implementação física da TFF. Isso se deve ao fato de que devemos descrever o campo em termos de uma coordenada escalada no plano \mathcal{Z}_ϕ , para que ele possa ser descrito em termos da TFF do campo de entrada. Esse fator de escala é introduzido pela propagação e pela refração na lente. Vejamos então a condição imposta sobre as distâncias focais fracionais para que dois sistemas ópticos de TFF sejam aditivos. Ou seja, dados dois operadores matriciais, F_{ϕ_1} e F_{ϕ_2} , queremos saber quais as condições para que a relação $F_{\phi_1} F_{\phi_2} = F_{\phi_1 + \phi_2}$ seja válida.

Temos $F_{\phi_1} F_{\phi_2}$:

$$F_{\phi_1} F_{\phi_2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) & f'_1 \sin(\phi_1) \\ -\frac{1}{f'_1} \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) & f'_2 \sin(\phi_2) \\ -\frac{1}{f'_2} \sin(\phi_2) & \cos(\phi_2) \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

onde $f'_1 = f_1 \sin(\phi_1)$ e $f'_2 = f_2 \sin(\phi_2)$.

Fazendo a multiplicação matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) - \frac{f'_1}{f'_2} \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) & f'_1 \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) + f'_2 \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \\ -\frac{1}{f'_1} \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) - \frac{1}{f'_2} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) & \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) - \frac{f'_2}{f'_1} \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Para $f'_1 = f'_2 = f'$ vemos claramente que a matriz F_ϕ é aditiva. Substituindo f'_1 e f'_2 por f' na matriz acima temos:

$$F_{\phi_1} F_{\phi_2} = F_{\phi_1 + \phi_2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & f' \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ -\frac{1}{f'} \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Considere agora que $f'_1 - f'_2 = \Delta f'$. Substituindo f'_1 na matriz (3.44) e rearranjando os termos podemos ver que:

$$F_{\phi_1} F_{\phi_2} = F_{\phi_1 + \phi_2} + F_E, \quad (3.46)$$

onde

$$F_{\phi_1+\phi_2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & f'_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ -\frac{1}{f'_2} \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

e

$$F_E = \Delta f' \sin(\phi_1) \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\phi_2)}{f'_2} & \cos(\phi_2) \\ \frac{\cos(\phi_2)}{f'_2(f'_2+\Delta f')} & \frac{\sin(\phi_2)}{f'_2+\Delta f'} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Para $\Delta f' = 0$ temos: $F_E = 0$ e $F_{\phi_1} F_{\phi_2} = F_{\phi_1+\phi_2}$. A condição de aditividade de dois sistemas ópticos de TFF é a igualdade de suas distâncias focais fracionais. Observe que para $\phi = \pi/2$, temos $f' = f$, e a condição de aditividade se torna $f_1 = f_2$, como havíamos visto anteriormente.

Observe que, independente de f'_1 e f'_2 , o determinante da matriz (3.44) é igual a 1. Podemos ver isso facilmente lembrando que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes de cada matriz individualmente. Uma vez que $\det[F_{\phi_1}] = \det[F_{\phi_2}] = 1$, temos que $\det[F_{\phi_1+\phi_2}] = 1$.

Vejam agora o erro introduzido no raio r_ϕ quando usamos dois sistemas de TFF com diferentes distâncias focais fracionais:

$$F_{\phi_1} F_{\phi_2} r = (F_{\phi_1+\phi_2} + F_E) r = r_\phi + F_E r. \quad (3.49)$$

O raio $F_E r$ representa o erro introduzido na transformada de Fourier fracional, quando usamos dois sistemas ópticos com diferentes distâncias focais fracionais.

$$F_E r = \Delta f' \sin(\phi_1) \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\phi_2)}{f'_2} & \cos(\phi_2) \\ \frac{\cos(\phi_2)}{f'_2(f'_2+\Delta f')} & \frac{\sin(\phi_2)}{f'_2+\Delta f'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix},$$

$$F_E r = \Delta f' \sin(\phi_1) \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\phi_2)}{f'_2} \rho + \cos(\phi_2) \theta \\ \frac{\cos(\phi_2)}{f'_2(f'_2+\Delta f')} \rho + \frac{\sin(\phi_2)}{f'_2+\Delta f'} \theta \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Nesse caso, a observação da intensidade do campo no plano \mathcal{Z}_ϕ , deve ser feita em termos da coordenada escalada ρ_ϕ dada por:

$$\rho_\phi = \cos(\phi_1 + \phi_2)\rho + f'_2 \sin(\phi_1 + \phi_2)\theta, \quad (3.51)$$

e o erro introduzido na coordenada ρ_ϕ é dado por:

$$\rho_E = \Delta f' \sin(\phi_1) \left[-\frac{\sin(\phi_2)}{f'_2} \rho + \cos(\phi_2)\theta \right]. \quad (3.52)$$

Observe que a matriz $F_{\phi_1+\phi_2}$ foi escrita em termos da distância focal fracional f'_2 . Também podemos escreve-la em termos de f'_1 . Nesse caso reescreve-se a matriz erro trocando ϕ_1 por ϕ_2 , e f'_2 por $(f'_1 - \Delta f')$.

3.4 Definição Integral da TFF

Em duas dimensões, a transformada de Fourier fracional de ordem α de uma função f é definida por [44]:

$$\mathcal{F}_\alpha[f](\rho') = \frac{ie^{-i\alpha}}{\sin \alpha} e^{-i\pi\rho'^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\pi\rho^2 \cot \alpha} e^{(2i\pi\rho \cdot \rho' / \sin \alpha)} f(\rho) d\rho, \quad (3.53)$$

onde α é um número complexo e ρ e ρ' são coordenadas bidimensionais de f e $\mathcal{F}_\alpha[f]$, respectivamente. Para $\alpha = \pi/2$ a TFF se reduz à transformada de Fourier ordinária:

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}[f](\rho') = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi\rho \cdot \rho'} f(\rho) d\rho. \quad (3.54)$$

Listaremos aqui algumas propriedades da TFF:

- (1) A transformada inversa de \mathcal{F}_α é $\mathcal{F}_{-\alpha}$;
- (2) O operador \mathcal{F}_0 é o operador identidade;

- (3) Para todo α e todo β tem-se $\mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}$;
- (4) $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\beta$ quando $\alpha \rightarrow \beta$;
- (5) Para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos $\mathcal{F}_{\alpha+2n\pi} = \mathcal{F}_\alpha$;
- (6) $\mathcal{F}_{\alpha+\pi}[f](\rho') = \mathcal{F}_\alpha[f](-\rho')$;
- (7) $\mathcal{F}_{-\alpha}[f^*](\rho') = [\mathcal{F}_\alpha[f](\rho')]^*$.

Na propriedade (7) o asterisco representa a conjugação complexa.

3.5 Auto-funções da TFF

As funções de Hermite-Gauss (HG) φ_n são definidas por:

$$\varphi_n(x) = H_n(\sqrt{2\pi}x) \exp(-\pi x^2), \quad (3.55)$$

onde $H_n(x)$ representa o polinômio de Hermite de ordem n :

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \quad (3.56)$$

e n é um número inteiro positivo.

Sabe-se que as funções de Hermite-Gauss são auto-funções da transformada de Fourier ordinária com auto-valores $\exp(in\pi/2)$ [44]. Se \mathcal{F} representa a transformada de Fourier temos que:

$$\mathcal{F}[\varphi_n] = \exp\left[i\frac{n\pi}{2}\right] \varphi_n. \quad (3.57)$$

A transformada de Fourier fracional pode ser definida como a transformada da qual as funções φ_n são auto-funções, com auto-valores intermediários aos da transformada de Fourier ordinária. Escreve-se:

$$\mathcal{F}_\alpha[\varphi_n] = \exp[in\alpha] \varphi_n. \quad (3.58)$$

Essa definição é equivalente à definição integral e pode ser dela deduzida.

Uma vez que as funções de Hermite-Gauss formam uma base completa para o espaço de Hilbert $L_2(\mathbb{R})$, podemos expandir qualquer função f de $L_2(\mathbb{R})$ em termos de φ_n . E então a TFF pode ser facilmente calculada usando-se a expansão em funções HG e aplicando a TFF a cada termo da expansão:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(x), \quad (3.59)$$

$$\mathcal{F}_\alpha[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathcal{F}_\alpha[\varphi_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\alpha} \varphi_n(x). \quad (3.60)$$

Usou-se aqui a propriedade de linearidade da TFF:

$$\mathcal{F}_\alpha[a_m \varphi_m + a_n \varphi_n] = a_m \mathcal{F}_\alpha[\varphi_m] + a_n \mathcal{F}_\alpha[\varphi_n], \quad (3.61)$$

onde a_m e a_n são números complexos.

Capítulo 4

O Experimento

4.1 Introdução

Nesse capítulo vamos analisar o experimento de violação da desigualdade de Bell realizado no laboratório de Óptica Quântica do Instituto de Física da UFRJ no primeiro semestre de 2006 [22].

Os experimentos de violação de desigualdade de Bell são realizados com sistemas bipartidos compostos por partículas que exibem alguma propriedade que permita a realização de medidas dicotômicas. Alguns exemplos dessas propriedades são: spin 1/2 do elétron, polarização do fóton, modos espaciais longitudinais do fóton e momento angular orbital do fóton. Nesse experimento realizamos medidas sobre as propriedades espaciais transversais do fóton. As variáveis espaciais transversais são graus de liberdade contínuos. As duas dimensões transversais são representadas pelo vetor posição transversal $\rho = x\hat{x} + y\hat{y}$. Embora o espaço de posições transversais se estenda até o infinito podemos nos restringir à região paraxial, e as medidas dicotômicas são feitas dividindo-se essa região em duas partes.

O sistema utilizado para produzir as “partículas” emaranhadas é a conversão paramétrica descendente. As propriedades espaciais transversais do estado de dois fótons, gerado em

média no centro do cristal, são mapeadas através de lentes no plano dos detectores. Dois casos especiais dessas medidas são: posições transversais e momentos transversais. Com o auxílio de lentes podemos mapear as posições e os momentos transversais dos fótons gerados pelo cristal não-linear. Basta que usemos os arranjos descritos no capítulo anterior: um sistema de Fourier para mapeamento de momentos transversais e dois sistemas de Fourier para mapeamento das posições transversais. Nas situações onde o mapeamento das propriedades espaciais é feito com um sistema óptico fracional (TFF com ordem diferente de $\pi/2$ ou π) dizemos que estamos medindo os *momentos transversais fracionais* ou *momentos transversais generalizados* dos fótons. As correlações de quarta ordem são obtidas fazendo-se medidas em coincidência dos fótons que atingem cada uma das duas regiões dos planos de detecção. Veremos na seção 3 que as correlações transversais de momentos e posições dos fótons da CPDE guardam uma analogia forte com as correlações em polarização de um estado de Bell.

A transformada de Fourier fracional tem um papel importante nesse experimento pois é através dela que podemos medir as propriedades espaciais transversais generalizadas do campo. Os sistemas de TFF nesse experimento são análogos aos analisadores usados nos experimentos com polarização. Pode-se dizer que as propriedades espaciais transversais do estado de dois fótons gerado pela CPDE são analisadas pelos sistemas ópticos de TFF, e então os fótons são detectados.

4.2 Subespaço Bidimensional VET e Analisadores TFF

Como foi descrito no capítulo 2, o estado de dois fótons da CPD apresenta correlação quântica ou emaranhamento entre as variáveis espaciais transversais dos dois fótons. Esse emaranhamento pode ser observado tanto no campo próximo quanto no campo distante, porém de formas diferentes. A função de correlação de quarta ordem avaliada no campo próximo nos dá informação sobre a posição transversal relativa dos dois fótons enquanto que, avaliada no campo distante, nos dá informação sobre o momento transversal dos

dois fótons. As correlações nas posições transversais dos fótons têm a forma funcional $G_p^{(2,2)}(\rho_s - \rho_c)$. Já as correlações em momento transversal têm a forma $G_d^{(2,2)}(\rho_s + \rho_c)$. Os índices p e d referem-se a próximo e distante, respectivamente, e os índices s, c referem-se aos feixes sinal e complementar, respectivamente.

A existência de emaranhamento nas variáveis espaciais transversais, simultaneamente nos campos próximo e distante, assegura um caráter quântico aos fenômenos de imagens de quarta ordem [45]. No experimento feito por Howell et al [14], as larguras das distribuições condicionais de contagens em coincidência para o campo próximo e distante dos fótons da CPD foram usadas para mostrar que $(\Delta x_2|_{x_1})^2(\Delta p_2|_{p_1})^2 < \hbar^2/4$, onde $\Delta x_2|_{x_1}$ significa a incerteza em x_2 condicionada à medida de x_1 , e $\Delta p_2|_{p_1}$ significa a incerteza em p_2 condicionada à medida de p_1 . Mostrou-se, dessa forma, que esse estado viola o critério de inseparabilidade de variáveis contínuas proposto por Mancini [16]. De acordo com o trabalho de Mancini et al. [16], a violação da desigualdade $(\Delta u)^2(\Delta v)^2 \geq \hbar^2/4$ é critério suficiente para a inseparabilidade de dois operadores de variáveis contínuas $u = q_1 - q_2$ e $v = p_1 + p_2$.

Em um outro experimento feito por Almeida et al [27] observou-se o comportamento condicional das distribuições de coincidências nos campos próximo e distante. As correlações encontradas para os momentos (campo distante) e as posições (campo próximo) dos dois fótons são semelhantes às correlações do estado EPR, porém com uma distribuição mais larga. Também foi mostrada a ausência de correlação entre posições transversais de um fóton e momentos transversais do outro. O estado EPR ideal pode ser escrito como:

$$|EPR\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x, x\rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} |p, -p\rangle dp. \quad (4.1)$$

No estado EPR temos uma correlação perfeita entre as posições e os momentos das duas partículas:

$$x_1 = x_2 \text{ e } p_1 = -p_2. \quad (4.2)$$

Essa correlação perfeita, no entanto, não é conseguida na prática. Vimos que na CPD conseguimos um estado de dois fótons que apresenta a mesma forma condicional para as correlações entre as posições e momentos dos dois fótons, porém com uma incerteza diferente de zero. Podemos escrever o estado da CPD em termos dos momentos transversais dos fótons como se segue:

$$|\psi\rangle_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \quad (4.3)$$

As incertezas nas correlações entre x_1 e x_2 e entre p_1 e p_2 dependem da largura da função peso $A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ e podem ser escritas como:

$$x_1 = x_2 \pm \Delta x_2|_{x_1} \text{ e } p_1 = -p_2 \pm \Delta p_2|_{p_1}. \quad (4.4)$$

Dizemos que x_1 e x_2 estão correlacionados e p_1 e p_2 estão anti-correlacionados. Porém não encontramos correlações nem anti-correlações entre x_1 e p_2 e nem entre x_2 e p_1 [27]. Dizemos então que a posição transversal de um fóton está descorrelacionada com o momento transversal do outro fóton. Podemos descrever essa descorrelação entre x e p da seguinte forma: dado que a posição transversal do fóton 1 foi medida e o valor encontrado foi $x_1 > 0$, a probabilidade de medir $p_2 > 0$ é a mesma de medir $p_2 < 0$. O mesmo acontece para $x_1 < 0$. Temos então que a probabilidade de encontrar um dos fótons do par com posição “positiva” e o outro com momento “positivo” é igual à probabilidade de encontrar um dos fótons com posição “positiva” e o outro com momento “negativo”.

As correlações e anti-correlações encontradas nas medidas das posições e momentos transversais dos fótons gêmeos da CPD podem ser comparadas com as correlações em polarização de um estado de Bell do tipo $|\phi^-\rangle$ ou $|\psi^+\rangle$. Para que essa analogia seja feita devemos dividir o espaço de variáveis espaciais transversais do fóton em dois, e então

comparar com o espaço bidimensional de polarização da luz. Definiremos a seguir o subespaço bidimensional de Variáveis Espaciais Transversais (Subespaço VET).

4.2.1 Subespaço Bidimensional de Variáveis Espaciais Transversais

Suponha uma fonte de fótons simples \mathcal{D} . Essa fonte é gaussiana, de largura σ_p , e está centrada na origem do plano xy (plano $z = 0$). Fótons são emitidos por \mathcal{D} , com vetor de onda \mathbf{k} na aproximação paraxial e no sentido z positivo. Cada fóton gerado por essa fonte nasce em um ponto $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{D}$, onde $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$. O espaço de posições transversais xy do fóton é contínuo e cada ponto da fonte pode ser representado por $(x, y, 0)$. Suponha agora que inserimos uma lente em uma posição $z > 0$ tal que a imagem da fonte seja produzida em um plano que chamaremos \mathcal{Z}_I . O plano imagem está a uma distância z_I da fonte e pode ser definido por $z = z_I$. Cada ponto $(x, y, 0)$ de \mathcal{D} está associado ao seu ponto imagem $(-x, -y, z_I)$ em \mathcal{Z}_I (ver figura 4.1). Designaremos por $\boldsymbol{\rho}_I = (x_I, y_I)$ as coordenadas transversais do plano imagem tal que $x_I = -x$ e $y_I = -y$. Sendo assim vemos que a detecção de um fóton no plano imagem \mathcal{Z}_I nos dá informação da posição transversal desse fóton na fonte. Nessa configuração observa-se a distribuição de campo próximo.

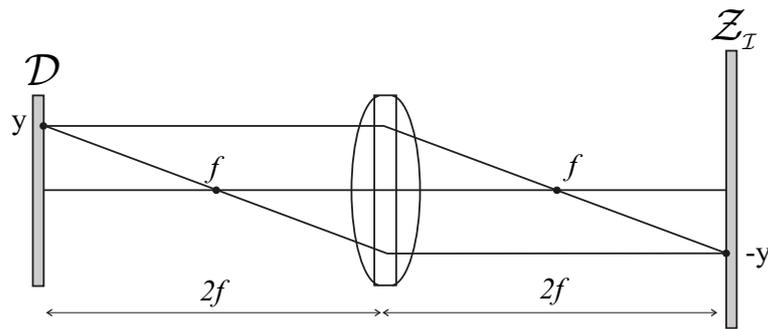


Figura 4.1: Sistema óptico usado para gerar a imagem do plano \mathcal{D} com magnificação unitária (figura 3.4 do capítulo 3).

A observação da distribuição de campo distante pode ser feita com o sistema de

Fourier descrito no capítulo anterior. Nessa configuração usa-se uma lente de distância focal f situada a uma distância igual a f do plano da fonte e também igual a f do plano de observação. O plano de observação do campo distante é chamado de \mathcal{Z}_F ou plano de Fourier. Dizemos que \mathcal{D} e \mathcal{Z}_F são planos conjugados [43].

A distribuição transversal do campo distante tem a forma do espectro angular do campo próximo. O espectro angular correspondente a um ponto da fonte é constante, ou seja, corresponde a uma onda plana no espaço de vetores de onda. Dessa forma qualquer ponto $(x, y, 0)$ em \mathcal{D} está associado a todos os pontos (x_F, y_F, z_F) no plano de Fourier \mathcal{Z}_F (ver figura 4.2). Se localizamos a emissão do fóton em um único ponto de \mathcal{D} , não temos nenhuma informação sobre seu momento transversal, uma vez que os pontos do plano de Fourier estão associados aos momentos transversais do fóton.

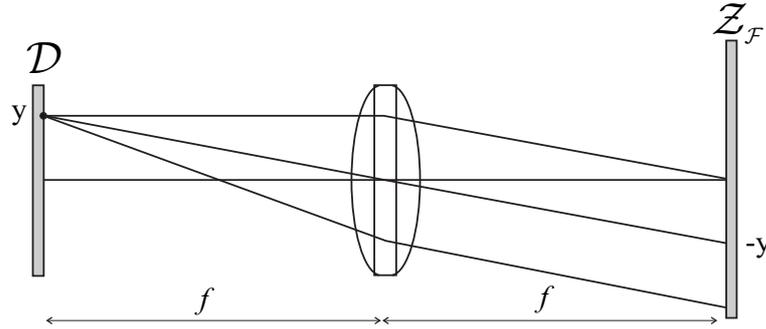


Figura 4.2: Sistema óptico usado para implementar a transformada de Fourier de um campo de luz. A lente tem distância focal f e os planos \mathcal{D} e \mathcal{Z}_F coincidem com os planos focais da lente.

Seja $w(x, y) = W(x, y, z = 0)$ a distribuição transversal do campo emitido por \mathcal{D} . Em termos do espectro angular $v(k_x, k_y, z)$ podemos escrever o campo como [46]:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y v(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (4.5)$$

onde

$$v(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy W(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (4.6)$$

e o campo em $z = 0$ é:

$$w(x, y) = W(x, y, z = 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y v(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)}. \quad (4.7)$$

A propagação do espectro angular é descrita por uma fase na direção z [46]:

$$v(k_x, k_y, z) = v(k_x, k_y, z = 0) e^{ik_z z}, \quad (4.8)$$

ou, usando o vetor de onda transversal $\mathbf{q} = (k_x, k_y)$:

$$v(\mathbf{q}, z) = v(\mathbf{q}, 0) e^{ik_z z}. \quad (4.9)$$

Podemos reescrever $W(\boldsymbol{\rho}, z)$ da seguinte forma:

$$W(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{q} v(\mathbf{q}, 0) e^{ik_z z} e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}. \quad (4.10)$$

No plano de Fourier teremos a transformada de Fourier do campo em \mathcal{D} :

$$W(\boldsymbol{\rho}_F, z_F) = \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} W(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}_{-\frac{\pi}{2}} v(\mathbf{q}, 0). \quad (4.11)$$

Vejam a distribuição transversal de intensidade, ou a função de auto-correlação de segunda ordem $G^{(1,1)}$, observada no plano de Fourier:

$$G^{(1,1)}(x_F, y_F) \propto |v(\mathbf{q}, z = 0) e^{ik_z z}|^2 = \left| v\left(\frac{|\mathbf{k}|}{f} x_F, \frac{|\mathbf{k}|}{f} y_F\right) \right|^2. \quad (4.12)$$

O fator de magnificação $\frac{|\mathbf{k}|}{f}$ aparece devido ao sistema óptico usado para implementar a transformada de Fourier do campo (f é a distancia focal da lente usada). O sistema óptico que implementa a transformada de Fourier do campo, de acordo com a figura 5.2,

consiste de duas propagações através de uma distância $z = f$, uma antes e uma depois da refração na lente. A expressão matemática que representa a transformação que esse sistema realiza no campo é:

$$\int dx \int dy e^{-i \frac{|\mathbf{k}|}{f} (x_F x + y_F y)}. \quad (4.13)$$

Vemos que a detecção no plano de Fourier nos dá informação sobre as frequências espaciais transversais k_x e k_y do campo $w(x, y)$, ou seja, a detecção de um fóton no ponto (x_F, y_F) do plano de Fourier significa que esse fóton pertencia a um modo com frequências espaciais transversais dadas por:

$$k_x = \frac{|\mathbf{k}|}{f} x_F; \quad (4.14)$$

$$k_y = \frac{|\mathbf{k}|}{f} y_F. \quad (4.15)$$

Essa relação entre as coordenadas do plano de Fourier e as frequências espaciais transversais do campo foram demonstradas geometricamente na aproximação paraxial no capítulo 3 (eq. 3.22).

Voltemos agora ao caso da formação de imagem. Usando o sistema de imagem é composto por dois sistemas ópticos de Fourier, ao invés de uma única lente, o campo no plano imagem \mathcal{Z}_I será dado por:

$$W(\boldsymbol{\rho}_I, z_I) = \mathcal{F}_\pi W(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = W(-\boldsymbol{\rho}, z = 0) = w(x_I = -x, y_I = -y). \quad (4.16)$$

E a função de auto-correlação de segunda ordem será dada por:

$$G^{(1,1)}(x_I, y_I) \propto |w(x_I = -x, y_I = -y)|^2. \quad (4.17)$$

Vamos analisar agora o caso em que a distribuição transversal de campo da fonte seja descrita por uma gaussiana centrada em $\boldsymbol{\rho}_0 = (x_0, y_0)$ e de largura σ_p . Nesse caso a

distribuição de campo distante será dada por uma gaussiana centrada na origem do plano de Fourier, e com largura igual a $\sigma_d = 1/\sigma_p$. À medida em que a largura σ_p da distribuição na fonte aumenta, vemos que a largura σ_d da distribuição do campo distante diminui. Ou seja, se o fóton está bem localizado no campo distante ele estará espalhado no campo próximo. No limite em que σ_p vai a infinito, vemos que a distribuição do campo avaliada no plano de Fourier tende para uma distribuição pontual. Esse limite é equivalente a uma fonte monocromática emitindo um campo com distribuição constante (uma onda plana com comprimento de onda λ e vetor de onda \mathbf{k}). No plano de Fourier vemos a transformada de Fourier dessa onda plana que equivale a uma distribuição Delta de Dirac centrada na coordenada do plano de Fourier, relativa ao seu vetor de onda transversal $\boldsymbol{\rho}_F = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{k}|}f$.

Vejam os então como ficam as funções de correlação $G^{(1,1)}$ no caso da distribuição gaussiana. No plano \mathcal{D} temos:

$$G_{\mathcal{D}}^{(1,1)}(\boldsymbol{\rho}) \propto |w(\boldsymbol{\rho})|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} e^{-\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)^2}{2\sigma_p^2}} \right|^2. \quad (4.18)$$

No plano $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ temos:

$$G_{\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}}^{(1,1)}(\boldsymbol{\rho}_F) \propto |\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} w(\boldsymbol{\rho})|^2 = |v(\frac{|\mathbf{k}|}{f}\boldsymbol{\rho}_F)|^2 = \left| e^{-i\boldsymbol{\rho}_0 \frac{|\mathbf{k}|}{f}\boldsymbol{\rho}_F} e^{\frac{1}{2\sigma_d^2}(\frac{|\mathbf{k}|}{f}\boldsymbol{\rho}_F)^2} \right|^2, \quad (4.19)$$

e no plano $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$:

$$G_{\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}}^{(1,1)}(\boldsymbol{\rho}_I) \propto |\mathcal{F}_{\pi} w(\boldsymbol{\rho})|^2 = |w(\boldsymbol{\rho}_I)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} e^{-\frac{(\boldsymbol{\rho}_I+\boldsymbol{\rho}_0)^2}{2\sigma_p^2}} \right|^2, \quad (4.20)$$

onde usou-se que $\sigma_d = 1/\sigma_p$.

A expressão (4.18) representa a densidade de probabilidade de que um fóton seja emitido da posição $\boldsymbol{\rho}$ no plano \mathcal{D} . As expressões (4.19) e (4.20) representam as densidades de probabilidade de detecções nas posições $\boldsymbol{\rho}_I$ e $\boldsymbol{\rho}_F$ nos planos $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$ e $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$, respectivamente.

Com o intuito de usar os graus de liberdade espaciais transversais para violar uma desigualdade de Bell devemos discretizar (dicotomizar) esse espaço de variáveis contínuas. Faremos isso dividindo a fonte de fótons simples em duas metades. Podemos escolher alguma direção qualquer e traçar uma reta diametral. Digamos que nossa reta divisória seja o eixo de coordenadas horizontal x . Essa reta divide a fonte em duas partes: parte y positiva e parte y negativa. À metade correspondente a y positivo daremos o nome de “+” e à metade correspondente a y negativo daremos o nome de “-”. Os planos imagem \mathcal{Z}_I e de Fourier \mathcal{Z}_F também serão divididos em duas partes: y_I positivo e negativo e y_F positivo e negativo, respectivamente. Dessa forma não estamos interessados em qual posição do espaço contínuo o fóton foi detectado. Queremos simplesmente discriminar nossas medidas em duas regiões ortogonais e complementares. As medidas binárias feitas no plano imagem recebem os nomes de y^+ e y^- e as medidas binárias feitas no plano de Fourier recebem os nomes de k_y^+ e k_y^- . Das equações (4.14) e (4.15) vemos que as coordenadas transversais x_F e y_F do plano de Fourier estão relacionadas com os vetores de onda transversais do campo emitido por \mathcal{D} , e por isso os nomes k_y^+ e k_y^- foram usados.

O espaço de variáveis espaciais transversais foi subdividido em um espaço bidimensional. A esse subespaço daremos o nome de *subespaço VET*. A medida binária no subespaço VET pode ser realizada com um detector de fótons totalmente aberto que discrimine a detecção do campo apenas entre as duas regiões de cada plano \mathcal{Z}_I ou \mathcal{Z}_F . Esse detector pode ser uma câmera CCD. Ou ainda, podemos medir separadamente cada uma das regiões, bloqueando o feixe em uma região e medindo a outra. Devemos nos certificar de que o detector cobre toda a área por onde o campo passa nesses planos. Por isso trabalhamos na aproximação paraxial, em que os vetores de onda dos fótons fazem ângulos pequenos com a direção paraxial z . Embora a distribuição do campo transversal nos planos \mathcal{D} , \mathcal{Z}_F e \mathcal{Z}_I seja gaussiana e portanto se estenda até o infinito, assumiremos que ao realizar medidas sobre regiões finitas suficientemente grandes, estaremos desprezando uma parcela irrisória do feixe de luz.

Em princípio, então, somos capazes de realizar medidas dicotômicas nas variáveis espaciais transversais de um campo emitido por uma fonte e isso é suficiente para aplicar as desigualdades de Bell a esse grau de liberdade. Contudo para obter uma violação devemos ser capazes de realizar projeções sobre quaisquer eixos neste subespaço bidimensional. As desigualdades de Bell [2] e de CHSH [17] são definidas para sistemas nos quais seja possível realizar medidas binárias ou dicotômicas. O espaço de spin 1/2 e o espaço de polarização da luz são espaços naturalmente bidimensionais. Para as medidas de polarização do fóton usam-se polarizadores ou divisores de feixes polarizados capazes de discriminar entre duas polarizações ortogonais entre si, mas que podem ser dispostas ao longo de qualquer direção no espaço de polarização. Nas medidas de partículas com spin 1/2 usa-se um sistema do tipo Stern-Gerlach.

Embora esse tipo de medida no subespaço VET já nos permita aplicar as desigualdades de Bell a esse grau de liberdade espacial, seria desejável que pudessemos aplicar toda a algebra de sistemas bidimensionais ao subespaço VET. Isso nos permitiria usar os graus de liberdade espaciais transversais para todas as aplicações nas quais é usada a polarização da luz, tais como comunicação e computação quântica [47] e teletransporte [48]. Na seção 6 desse capítulo faremos uma proposta de formalização do subespaço VET para que possamos construir um Bit Quântico usando graus de liberdade contínuos.

Vimos que podemos realizar medidas dicotômicas no plano transversal à direção de propagação paraxial de um fóton. Essas medidas recebem nomes diferentes para cada plano: (1) Medidas feitas no plano imagem recebem o nome de y^+ e y^- ; (2) Medidas feitas no plano de Fourier recebem o nome de k_y^+ e k_y^- . Ambas as bases $\{y^+, y^-\}$ e $\{k_y^+, k_y^-\}$ são completas e dicotômicas. As bases de medida dos planos \mathcal{Z}_F e \mathcal{Z}_I estão relacionadas através de uma transformada de Fourier. Ou seja, as bases posição $\{y^+, y^-\}$ e momento $\{k_y^+, k_y^-\}$ do subespaço VET estão relacionados através da aplicação do operador $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}$ sobre o campo. Os sistemas ópticos de Fourier e de imagem (composto por dois sistemas de Fourier) são os analisadores para as medidas de posição e momento transver-

sal no subespaço VET. Veremos a seguir como realizar medidas análogas às projeções sobre polarizações ao longo de direções arbitrárias.

***Representação Gráfica da Periodicidade da Transformada de Fourier:
Aplicação à Distribuição Transversal de Campo e Espectro Angular***

Para uma função qualquer $w(x, y)$ em duas dimensões, para a qual a transformada de Fourier está definida, temos a seguinte relação:

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} w(x, y) = v(k_x, k_y); \quad (4.21)$$

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} v(k_x, k_y) = w(-x, -y) = \mathcal{F}_{\pi} w(x, y); \quad (4.22)$$

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} w(-x, -y) = v(-k_x, -k_y) = \mathcal{F}_{\frac{3\pi}{2}} w(x, y); \quad (4.23)$$

$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} v(-k_x, -k_y) = w(x, y) = \mathcal{F}_{2\pi} w(x, y), \quad (4.24)$$

onde x e y são coordenadas espaciais e k_x e k_y são as coordenadas no espaço conjugado a (x, y) , ou seja, as frequências espaciais relativas às coordenadas x e y . Usamos aqui a propriedade de aditividade número (3) da seção 3.4.

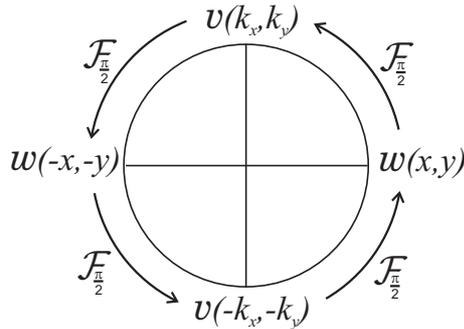


Figura 4.3: Representação da periodicidade da transformada de Fourier. A aplicação do operador $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}$ é equivalente a uma rotação de $\pi/2$ no sentido anti-horário no espaço definido pela função w e sua transformada de Fourier $v = \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} w$. As funções w e v podem representar a distribuição transversal de campo e o espectro angular, respectivamente.

4.2.2 Medidas em Bases Intermediárias - Analisadores TFF

As medidas binárias nos planos $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$ são o primeiro passo para testar as correlações espaciais transversais dos fótons gêmeos com desigualdades de Bell. Contudo a observação do comportamento quântico, ou seja, das correlações não locais, só é possível fazendo-se medidas em bases intermediárias às definidas até agora. Isso seria equivalente a projeções sobre polarizações ao longo de direções diferentes de H ou V . Rotações intermediárias no subespaço VET são feitas por meio da transformada de Fourier fracional.

Os sistemas ópticos de transformada de Fourier fracional serão chamados de analisadores TFF. Com eles realizamos rotações no espaço de momentos-posições transversais do fóton, observando a propriedade que denominamos momento fracional ou momento generalizado. Um analisador TFF de ordem ϕ está ilustrado na figura 4.4. O plano de observação do momento fracional de ordem ϕ é chamado de \mathcal{Z}_{ϕ} . O vetor de coordenadas transversais do plano \mathcal{Z}_{ϕ} é dado por $\rho_{\phi} = (x_{\phi}, y_{\phi})$. De acordo com a equação (3.41) do capítulo 3 ρ_{ϕ} é dado por uma combinação linear da coordenada transversal ρ e do ângulo θ do raio no plano de entrada \mathcal{D} .

$$\rho_{\phi} = \cos(\phi)\rho + f' \sin(\phi)\theta. \quad (4.25)$$

Lembramos que $f' = f \sin(\phi)$ é a distância focal fracional. O ângulo θ na aproximação paraxial está relacionado com o momento transversal do fóton no plano de entrada através da equação (3.21). O momento generalizado de ordem ϕ é mapeado através do analisador TFF na coordenada ρ_{ϕ} do plano \mathcal{Z}_{ϕ} . Entretanto estamos interessados em medidas dicotômicas e discriminaremos os momentos generalizados em duas regiões: $y_{\phi} > 0$ e $y_{\phi} < 0$. As medidas realizadas nesse plano recebem o nome de ϕ^+ e ϕ^- . O analisador TFF de ordem ϕ possibilita a medida do campo na base $\{\phi^+, \phi^-\}$ do subespaço VET.

Os analisadores de posição e momento estão incluídos no caso geral dos analisadores TFF. Para $\phi = \frac{\pi}{2}$ temos que $\{k_y^+, k_y^-\} = \{\frac{\pi^+}{2}, \frac{\pi^-}{2}\}$ e para $\phi = \pi$ temos $\{y^+, y^-\} = \{\pi^+, \pi^-\}$. Porém observe que o analisador para $\phi = \pi$ é composto de dois analisadores

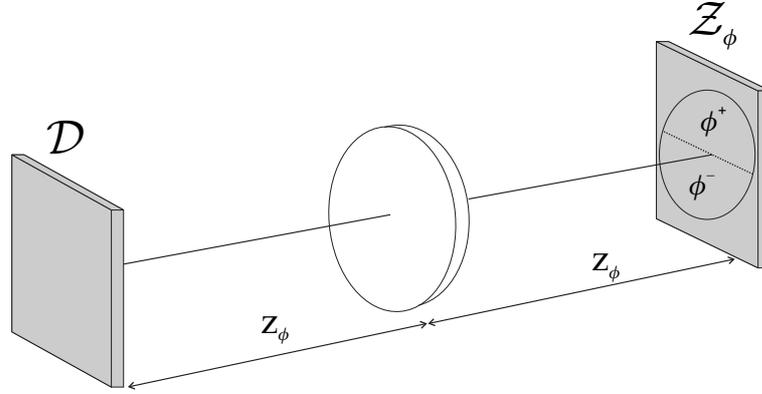


Figura 4.4: Analisador TFF de ordem ϕ . A distância de propagação é $z_\phi = 2f \sin^2(\phi/2)$ onde f é a distância focal da lente. Medida na base $\{\phi^+, \phi^-\}$.

com $\phi = \frac{\pi}{2}$.

4.3 Analogia das Correlações Espaciais com Correlações em Polarização

Imaginemos que nossa fonte de fótons simples \mathcal{D} passe agora a emitir dois fótons de cada vez. Os dois fótons são emitidos ao mesmo tempo e do mesmo ponto ¹. Por esse motivo eles são chamados de *fótons gêmeos*. A emissão dos dois fótons se dá de forma que o momento linear transversal seja conservado. Como a fonte não se move na direção transversal temos que a soma do momento linear transversal dos dois fótons deve ser nula. Na direção longitudinal podemos pensar em um recuo da fonte para que o momento linear se conserve nessa direção². Porém esse recuo pode ser desconsiderado. O fóton 1 é emitido com vetor de onda $\mathbf{k}_s = (k_{x_s}, k_{y_s}, k_{z_s})$ paraxialmente à direção z_s e o fóton 2 é emitido com vetor de onda $\mathbf{k}_c = (k_{x_c}, k_{y_c}, k_{z_c})$ paraxialmente à direção z_c . Imaginemos, também, que esse processo de criação de dois fótons aconteça de maneira que a soma

¹A fonte de pares de fótons é uma abstração do processo de conversão paramétrica descendente.

²No processo da CPD o momento na direção longitudinal é transferido pelo feixe de bombeamento.

das energias dos dois fótons seja uma constante E_B . Podemos escrever os vínculos de conservação como se segue:

$$\mathbf{q}_B = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_c; \quad (4.26)$$

$$E_B = E_s + E_c, \quad (4.27)$$

onde $E_{s(c)} = \hbar\omega_{s(c)}$ é a energia do fóton sinal (complementar) com frequência angular $\omega_{s(c)}$ e $\mathbf{q}_B = 0$ é o momento transversal da fonte de fótons gêmeos.

Para correlacionar os dois fótons no subespaço VET precisamos de analisadores TFF no caminho de cada fóton. Na detecção usamos detetores abertos em apenas uma das metades (“+” ou “-”) dos planos de detecção. E então olha-se para as contagens em coincidência para as quatro combinações “++”, “+-”, “-+” e “--”. Vamos inicialmente analisar as correlações nas bases $\frac{\pi}{2}$ e π (momento e posição). A imagem das ondas avançadas proposta em 1994 por Klyshko [49] fornece uma maneira simples de explicar essas correlações. Klyshko provou que a detecção em coincidência de dois fótons gerados na CPD pode ser entendida da seguinte forma: (1) Um dos detectores, digamos D_s , funciona como se fosse uma fonte de fótons simples; (2) A fonte de fótons gêmeos reflete o fóton emitido por D_s em direção a D_c . Nesse caso a fonte de fótons gêmeos pode ser vista como um espelho; (3) O detetor D_c detecta o fóton “emitido” por D_s (ver figura 4.5). Analizaremos agora o que acontece quando os sistemas de lentes são inseridos nos caminhos dos fótons.

Primeiro caso: analisadores TFF com ordem igual a π em ambos os braços. Detetores nos planos $(\mathcal{Z}_{\mathcal{I}_s}, \mathcal{Z}_{\mathcal{I}_c})$.

Nessa configuração medimos o campo de ambos os fótons na base $\{\pi^+, \pi^-\}$. Dentro da imagem das ondas avançadas um fóton é emitido pelo detetor D_s no plano $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}_s}$. O analisador TFF do feixe sinal gera a imagem do campo emitido por D_s no plano da fonte \mathcal{D} . Após ser refletido no plano \mathcal{D} , o fóton se propaga até o detetor D_c . No braço do feixe

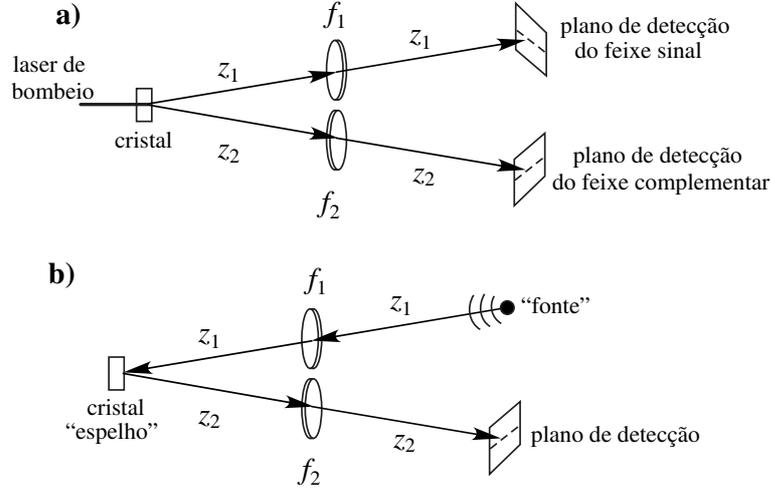


Figura 4.5: a) CPDE e analisadores TFF no caminho dos dois fótons. b) Diagrama ilustrativo da *imagem das ondas avançadas*.

complementar há um outro analisador TFF que faz a imagem do campo de \mathcal{D} em \mathcal{Z}_{Ic} . Vemos então que o campo no plano \mathcal{Z}_{Ic} é a imagem da imagem do campo no plano \mathcal{Z}_{Is} . A composição das TFF implementadas nos dois braços dos feixes convertidos é igual a 2π . Digamos que o raio “emitido” por D_s seja:

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} y_s \\ \theta_s \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

O operador $F_{2\pi}$ é o operador identidade. Então o raio visto pelo detector D_c será:

$$\mathbf{r}_c = F_{2\pi}\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s. \quad (4.29)$$

Dessa forma um fóton “emitido” da posição y_s^+ (π_s^+) será visto na posição y_c^+ (π_c^+) e um fóton emitido da posição y_s^- (π_s^-) será visto na posição y_c^- (π_c^-). Dizemos que a posição dos dois fótons está correlacionada.

Segundo caso: analisadores TFF com ordem igual a $\frac{\pi}{2}$ em ambos os braços. Detectores nos planos (\mathcal{Z}_{Fs} , \mathcal{Z}_{Fc}).

Nessa configuração medimos o campo de ambos os feixes gêmeos na base $\{\frac{\pi}{2}^+, \frac{\pi}{2}^-\}$. A composição dos dois analisadores TFF resulta em uma ordem igual a π . A ação do operador F_π gera a imagem invertida do raio “emitido” por D_s :

$$r_c = F_\pi r_s = -r_s. \quad (4.30)$$

Um fóton emitido da região $(\frac{\pi}{2})_s^+$ será visto na região $(\frac{\pi}{2})_c^-$ e o fóton emitido da região $(\frac{\pi}{2})_s^-$ será visto na região $(\frac{\pi}{2})_c^+$. Dizemos que o momento dos dois fótons está anti-correlacionado.

Terceiro caso: um braço com analisador TFF de ordem igual a π e outro braço com analisador TFF de ordem igual a $\frac{\pi}{2}$.

Dessa vez medimos um dos fóton na base $\{\pi^+, \pi^-\}$ e o outro fóton na base $\{\frac{\pi}{2}^+, \frac{\pi}{2}^-\}$. A composição dos analisadores TFF resulta em uma ordem igual a $\frac{3\pi}{2}$. O raio visto pelo detector D_c será a imagem invertida do raio de Fourier “emitido” por D_s :

$$r_c = F_{\frac{3\pi}{2}} r_s = -r_{F_s}. \quad (4.31)$$

A detecção do raio de Fourier nos dá informação do momento transversal do raio r_s . Dessa forma não observamos correlação entre as regiões de detecção dos dois fótons. O fóton “emitido” em uma das regiões do plano do detector D_s pode ser detectado em qualquer uma das duas regiões do plano de detecção do feixe complementar, com igual probabilidade. Dizemos que o momento de um fóton é descorrelacionado com a posição do outro fóton.

A Imagem das Ondas Avançadas é uma excelente ferramenta para explicar as correlações encontradas nas detecções em coincidência dos fótons gêmeos da CPDE. O ponto chave para o entendimento dessa correlação é a aditividade da transformada de Fourier. Sumarizemos os resultados obtidos.

- (1) D_s em Z_{I_s} e D_c em Z_{I_c} (Correlação)

✓ Contagens máximas para as posições (y_s^+, y_c^+) e (y_s^-, y_c^-) .

✓ Contagens nulas para as posições (y_s^+, y_c^-) e (y_s^-, y_c^+) .

(2) D_s em $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}_s}$ e D_c em $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}_c}$ (Anti-correlação)

✓ Contagens nulas para as posições $(k_{y_s}^+, k_{y_c}^+)$ e $(k_{y_s}^-, k_{y_c}^-)$.

✓ Contagens máximas para as posições $(k_{y_s}^+, k_{y_c}^-)$ e $(k_{y_s}^-, k_{y_c}^+)$.

(3) D_s em $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}_s}$ e D_c em $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}_c}$ ou D_s em $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}_s}$ e D_c em $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}_c}$ (Ausência de correlação)

✓ Contagens iguais para todas as posições: $(y_s^+, k_{y_c}^+)$, $(y_s^+, k_{y_c}^-)$, $(y_s^-, k_{y_c}^+)$ e $(y_s^-, k_{y_c}^-)$
ou $(k_{y_s}^+, y_c^+)$, $(k_{y_s}^+, y_c^-)$, $(k_{y_s}^-, y_c^+)$ e $(k_{y_s}^-, y_c^-)$.

As correlações descritas acima são consequência dos vínculos de conservação (equações 4.26 e 4.27) estabelecidos na geração dos fótons gêmeos na fonte. Na situação real esses vínculos não são exatos e as correlações obtidas não são perfeitas. Contudo verifica-se que o processo de conversão paramétrica descendente é uma fonte bastante robusta de emaranhamento nas variáveis espaciais transversais dos fótons. Para modelar essas imperfeições nas correlações vamos reescrever as equações (4.26) e (4.27) inserindo um pequeno erro no momento linear transversal e na energia total dos fótons. Esses erros estão relacionados com a largura do espectro de frequência $\delta\omega_B$ (espectro angular) e com a incerteza do momento linear transversal $\delta\mathbf{q}_B$ do feixe de bombeamento.

$$\mathbf{q}_B \pm \delta\mathbf{q}_B = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2; \quad (4.32)$$

$$E_B \pm \hbar\delta\omega_B = E_1 + E_2. \quad (4.33)$$

As correlações no subespaço VET são perfeitamente análogas às correlações de estados maximamente emaranhados em polarização, ou estados de Bell, quando medimos

correlações em alguns ângulos específicos. Para verificar essa analogia consideremos o estado de Bell $|\phi^-\rangle$:

$$|\phi^-\rangle_{HV} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle - |V\rangle|V\rangle). \quad (4.34)$$

O índice HV significa que o estado $|\phi^-\rangle$ foi inicialmente escrito na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Escrevendo agora o estado $|\phi^-\rangle_{HV}$ na base $|+45\rangle$ e $|-45\rangle$ temos:

$$|\phi^-\rangle_{HV} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+45\rangle|-45\rangle + |-45\rangle|+45\rangle), \quad (4.35)$$

onde:

$$|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle); \quad (4.36)$$

$$|-45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle). \quad (4.37)$$

Vemos que o estado de Bell $|\phi^-\rangle$ escrito na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ é igual ao estado $|\psi^+\rangle$ escrito na base $\{|+45\rangle, |-45\rangle\}$. Ou seja, $|\phi^-\rangle_{HV} = |\psi^+\rangle_{\pm 45}$.

As medidas de polarização dos dois fótons indicarão sempre correlação (polarizações iguais) se a polarização de ambos os fótons for medida na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, porém indicarão sempre anticorrelação (polarizações ortogonais) se medidas na base $\{|+45\rangle, |-45\rangle\}$. Podemos também medir a polarização do fóton 1 na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ e do fóton 2 na base $\{|+45\rangle, |-45\rangle\}$. Para analisar essa situação escrevamos o estado $|\phi^-\rangle_{HV}$ da seguinte maneira:

$$|\phi^-\rangle_{HV} = \frac{1}{2}[|H\rangle(|+45\rangle - |-45\rangle) + |V\rangle(|+45\rangle + |-45\rangle)], \quad (4.38)$$

ou:

$$|\phi^-\rangle_{HV} = \frac{1}{2}(|H\rangle|+45\rangle - |H\rangle|-45\rangle + |V\rangle|+45\rangle + |V\rangle|-45\rangle). \quad (4.39)$$

Nesse caso não observaremos correlações entre as medidas de polarização dos dois fótons pois cada vetor de uma das bases tem projeção igual, em módulo, a $1/\sqrt{2}$ nos dois vetores da outra base. Ou seja:

$$|\langle H|+45\rangle| = |\langle H|-45\rangle| = |\langle V|+45\rangle| = |\langle V|-45\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.40)$$

As correlações encontradas entre as regiões de posições e momentos do subespaço VET para estado de dois fótons da CPDE, são iguais às correlações encontradas no estado de Bell em polarização $|\phi^-\rangle$, quando analisado nas bases $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ e $\{|+45\rangle, |-45\rangle\}$.

Faremos a seguinte analogia entre as bases $\{\pi^+, \pi^-\}$ e $\{\frac{\pi^+}{2}, \frac{\pi^-}{2}\}$ do subespaço VET e as bases de polarização $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ e $\{|+45\rangle, |-45\rangle\}$:

$$\{|H\rangle, |V\rangle\} \rightarrow \{\pi^+, \pi^-\}; \quad (4.41)$$

$$\{|+45\rangle, |-45\rangle\} \rightarrow \left\{ \frac{\pi^+}{2}, \frac{\pi^-}{2} \right\}. \quad (4.42)$$

Em um experimento com polarização a mudança de base é feita girando-se o polarizador ou divisor de feixe polarizado. Para trocar a base de medida de $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ para $\{|+45\rangle, |-45\rangle\}$ deve-se girar o polarizador de um ângulo igual a 45 graus. A mudança de base no subespaço VET é conseguida através da TFF aplicada ao campo. Uma transformada de Fourier no campo é análoga a uma rotação de 45 graus no polarizador. Há um fator de dois entre a ordem da TFF e a rotação equivalente de um polarizador. Uma TFF de ordem ϕ aplicada sobre o campo é equivalente a uma rotação do polarizador de um ângulo α igual a:

$$\alpha = \frac{\phi}{2}. \quad (4.43)$$

4.4 Montagem Experimental

Na montagem desse experimento usa-se um laser para bombear o cristal não-linear que gera os fótons gêmeos. O feixe sinal passa por um sistema de lentes que implementa uma TFF de grau ϕ e é detectado pelo detector D_s . O feixe complementar passa por um sistema de TFF de grau ζ e é detectado pelo detector D_c . Dentro da imagem das onda avançadas podemos pensar nesse sistema como se, por exemplo, o detector do feixe sinal fosse uma fonte de fótons simples, o cristal fosse um espelho e o detector do feixe complementar fosse um detector do campo emitido por D_s . Se os sistemas de TFF dos dois braços tiverem mesmas distâncias focais fracionais, sabemos que o campo no detector D_c será a TFF de grau $\phi + \zeta$ do campo “emitido” por D_s . Na detecção usa-se um detector para cada feixe, aberto em apenas uma das metades de cada plano de detecção. Então olha-se para as contagens em coincidência para todas as quatro combinações de medida: (ϕ^+, ζ^+) , (ϕ^+, ζ^-) , (ϕ^-, ζ^+) e (ϕ^-, ζ^-) . Devemos ainda realizar medidas em duas bases diferentes para cada braço. No braço do feixe sinal usamos TFF de graus ϕ_1 e ϕ_2 e no braço do feixe complementar usamos TFF de graus ζ_1 e ζ_2 .

Para que a violação da desigualdade de Bell com polarização seja máxima, devemos escolher bases de medidas para os dois feixes que satisfaçam a seguinte relação entre seus ângulos:

$$\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 - \beta_1 = \frac{\pi}{8} \quad e \quad \beta_2 - \alpha_2 = \frac{\pi}{8}, \quad (4.44)$$

onde as bases α são usadas na medida de um feixe e as bases β no outro (ver figura 4.6).

Usa-se frequentemente a direção de polarização vertical como referência, e mede-se o ângulo em relação à essa direção. Uma possível escolha de bases para esse experimento com polarização é: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{8}$ e $\beta_2 = \frac{3\pi}{8}$.

A TFF de grau ϕ aplicada em um campo é análoga a uma rotação de polarização de um ângulo igual $\alpha = \phi/2$. A analogia existente entre o grau da FFT e rotações da base de polarização, leva-nos a escrever a seguinte relação entre as ordens da FFT, necessárias

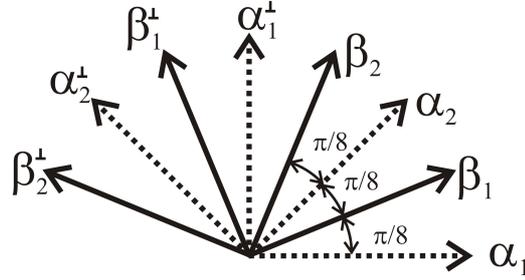


Figura 4.6: Representação das bases de polarização. Mede-se a correlação entre cada base α com cada base β

para a máxima violação da desigualdade de Bell aplicada ao subespaço VET:

$$\zeta_1 - \phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 - \zeta_1 = \frac{\pi}{4} \quad e \quad \zeta_2 - \phi_2 = \frac{\pi}{4}. \quad (4.45)$$

Lembramos que a mudança de base, na medida do campo no subespaço VET, é feita com a TFF. A medida na base $\phi = 0$ representa a medida no plano do cristal. Poderíamos realizar essa medida aplicando o operador \mathcal{F}^4 , mas isso exigiria um sistema composto de 4 lentes. Optamos então por girar nosso sistema de “coordenadas” de $\pi/2$. As ordens da TFF escolhidas para nosso experimento foram:

$$\begin{aligned} \{\phi_1^+, \phi_1^-\} &= \left\{ \frac{\pi^+}{2}, \frac{\pi^-}{2} \right\}; \\ \{\phi_2^+, \phi_2^-\} &= \{\pi^+, \pi^-\}; \\ \{\zeta_1^+, \zeta_1^-\} &= \left\{ \frac{3\pi^+}{4}, \frac{3\pi^-}{4} \right\}; \\ \{\zeta_2^+, \zeta_2^-\} &= \left\{ \frac{5\pi^+}{4}, \frac{5\pi^-}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

As ordens ϕ_2 e ζ_2 foram implementadas com dois sistemas de TFF. Já as ordens ϕ_1 e ζ_1 foram implementadas com apenas um sistema de TFF.

Usamos um laser de He – Cd ($\lambda = 441,6 \text{ nm}$), contínuo, operando com uma potência de 200 mW, para bombear um cristal de LiIO_3 com 5mm de comprimento, alinhado para casamento de fase do tipo I. Os detectores foram posicionados a uma distância fixa do cristal. Em cada braço foram posicionadas três lentes para a implementação das TFF’s.

As lentes foram montadas em estágios de translação para que pudessem ser inseridas e removidas do caminho dos feixes. A ilustração de nossa montagem experimental está mostrada na figura 4.7. As distâncias focais das lentes e as distâncias entre cada lente estão relacionadas na tabela 4.1.

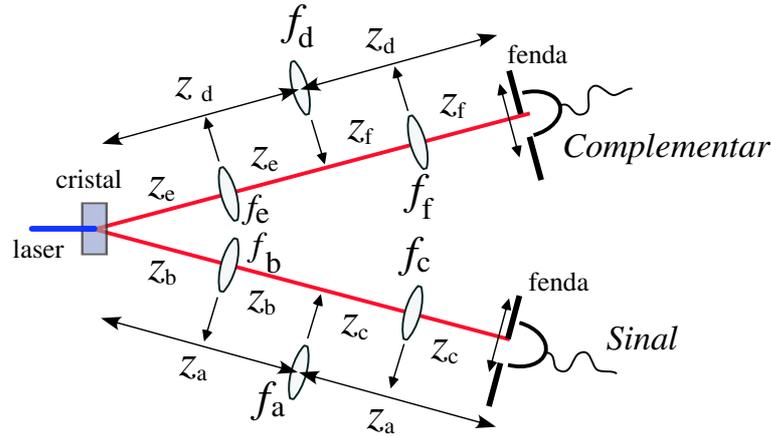


Figura 4.7: Montagem experimental

A distância do cristal aos detectores D_s e D_c são $z_s = 100\text{cm}$ e $z_c = 101,2\text{cm}$, respectivamente. As distâncias z_s e z_c podem ser relacionadas com as distâncias dos analisadores TFF:

$$\begin{aligned} z_s &= 2z_a = 2z_b + 2z_c; \\ z_c &= 2z_d = 2z_e + 2z_f. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Pode-se ver que as ordens das TFF's implementadas não correspondem exatamente às ordens relacionadas em (4.46). Essas distâncias foram ajustadas para aproximar ao máximo as ordens das TFF's implementadas das descritas acima para máxima violação. As distâncias focais fracionais usadas também não correspondem à condição de aditividade perfeita (f' iguais). Entretanto nós aceitamos esses erros em troca de uma montagem experimental simples com os planos de detecção fixos.

No feixe sinal as ordens das TFF's implementadas foram $\phi_1 = \phi_a$ e $\phi_2 = \phi_b + \phi_c$. No feixe complementar as ordens implementadas são $\zeta_1 = \zeta_d$ e $\zeta_2 = \zeta_e + \zeta_f$. Vejamos a

	z	f	ϕ, ζ	f'
sinal	$z_a = 50,0\text{cm}$	$f_a = 50,0\text{cm}$	$\phi_a = \frac{\pi}{2}$	$f'_a = 50,0\text{cm}$
	$z_b = 25,0\text{cm}$	$f_b = 25,0\text{cm}$	$\phi_b = \frac{\pi}{2}$	$f'_b = 25,0\text{cm}$
	$z_c = 25,0\text{cm}$	$f_c = 20,0\text{cm}$	$\phi_c = \frac{29\pi}{50}$	$f'_c = 19,4\text{cm}$
complementar	$z_d = 50,6\text{cm}$	$f_d = 30,0\text{cm}$	$\zeta_d = \frac{37\pi}{50}$	$f'_d = 21,9\text{cm}$
	$z_e = 25,0\text{cm}$	$f_e = 25,0\text{cm}$	$\zeta_e = \frac{\pi}{2}$	$f'_e = 25,0\text{cm}$
	$z_f = 25,6\text{cm}$	$f_f = 15,0\text{cm}$	$\zeta_f = \frac{3\pi}{4}$	$f'_f = 10,6\text{cm}$

Tabela 4.1: Relação entre as distâncias focais das lentes e distâncias de propagação com as respectivas ordens da TFF e suas distâncias focais fracionais.

diferença entre as ordens implementadas e as ordens para máxima violação:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \phi_b + \phi_c = \frac{54\pi}{50} = \pi + \frac{4\pi}{50}; \\ \zeta_1 &= \zeta_d = \frac{37\pi}{50} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{100}.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Os dois detectores foram inicialmente alinhados em torno do máximo de cotagens em coincidências. A abertura de cada detector era circular, de diâmetro igual a 12mm. Para que o pico das contagens em coincidência ficasse no centro da região de detecção, o alinhamento foi feito com aberturas de aproximadamente 1mm, sendo depois totalmente abertas até 12mm. Duas placas metálicas retangulares com largura vertical de 6mm foram confeccionadas para obstruir metade dos feixes no plano de detecção. A calibração era feita individualmente em cada feixe. Um dos feixes era integralmente detectado por um detector, enquanto o outro era obstruído em uma das metades, até se achar metade das contagens em coincidências. Tomamos o cuidado de verificar que a região correspondente à metade das contagens em coincidência correspondesse à uma região com metade das contagens simples em cada detector. Esse procedimento foi feito para as quatro metades em cada uma das quatro configurações de TFF's. A medida com o feixe desobstruído recebe o rotulo "0". Listaremos aqui as nove medidas realizadas para cada configuração:

✓ Medidas de calibração:

$$\{\phi_i^0, \zeta_j^0\}, \{\phi_i^0, \zeta_j^+\}, \{\phi_i^0, \zeta_j^-\}, \{\phi_i^+, \zeta_j^0\}, \{\phi_i^-, \zeta_j^0\};$$

✓ Tomada de dados:

$$\{\phi_i^+, \zeta_j^+\}, \{\phi_i^+, \zeta_j^-\}, \{\phi_i^-, \zeta_j^+\}, \{\phi_i^-, \zeta_j^-\}.$$

onde os índices $i, j = 1, 2$. A figura 4.8 ilustra o esquema de medida.

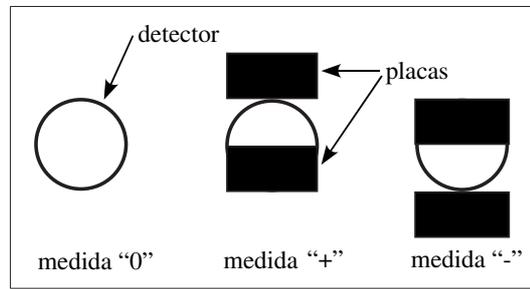


Figura 4.8: Esquema de medida. Os símbolos “+” e “-” se referem às medidas ϕ_i^+, ζ_j^+ e ϕ_i^-, ζ_j^- , respectivamente. O índice “0” se refere às medidas ϕ_i^0 e ζ_j^0 .

Cada detector estava também equipado com um filtro de interferência de largura 10nm, centrado em torno do comprimento de onda igual a 884nm.

4.5 Resultados e discussão

Os resultados experimentais estão mostrados na figura 4.9. Pode-se ver que as medidas de calibração $\{\phi_i^0, \zeta_j^+\}, \{\phi_i^0, \zeta_j^-\}, \{\phi_i^+, \zeta_j^0\}$ e $\{\phi_i^-, \zeta_j^0\}$ correspondem a aproximadamente metade das contagens totais, mostradas nas medidas $\{\phi_i^0, \zeta_j^0\}$. Nós medimos as contagens em coincidência para todas as quatro combinações de regiões de detecção para todas as configurações de analisadores TFF. As taxas de contagens em coincidência $C(\phi_i, \zeta_j)$ medidas para cada configuração são usadas para calcular a função de correlação $E(\phi_i, \zeta_j)$ presente na desigualdade de CHSH. Os valores encontrados para as quatro funções de correlação foram:

$$\begin{aligned}
E(\phi_1, \zeta_1) &= 0,44 \pm 0,02; \\
E(\phi_1, \zeta_2) &= 0,62 \pm 0,01; \\
E(\phi_2, \zeta_1) &= 0,71 \pm 0,01; \\
E(\phi_2, \zeta_2) &= -0,67 \pm 0,01.
\end{aligned}
\tag{4.49}$$

Os erros foram calculados usando-se o procedimento usual para estatística Poissoniana [29]. A desigualdade de CHSH diz que as correlações que podem ser descritas por teorias de variáveis ocultas locais devem satisfazer $-2 < \mathcal{S} < 2$, onde \mathcal{S} é dado por:

$$\mathcal{S} = E(\phi_1, \zeta_1) + E(\phi_1, \zeta_2) + E(\phi_2, \zeta_1) - E(\phi_2, \zeta_2).
\tag{4.50}$$

O valor de \mathcal{S} calculado com as funções de correlação acima foi $\mathcal{S} = 2.44 \pm 0.03$, correspondendo a uma violação de mais de 14 desvios padrões. Notamos que conseguimos uma violação considerável, apesar de não termos usado os ângulos para a máxima violação e nem a condição de aditividade perfeita da transformada de Fourier fracional.

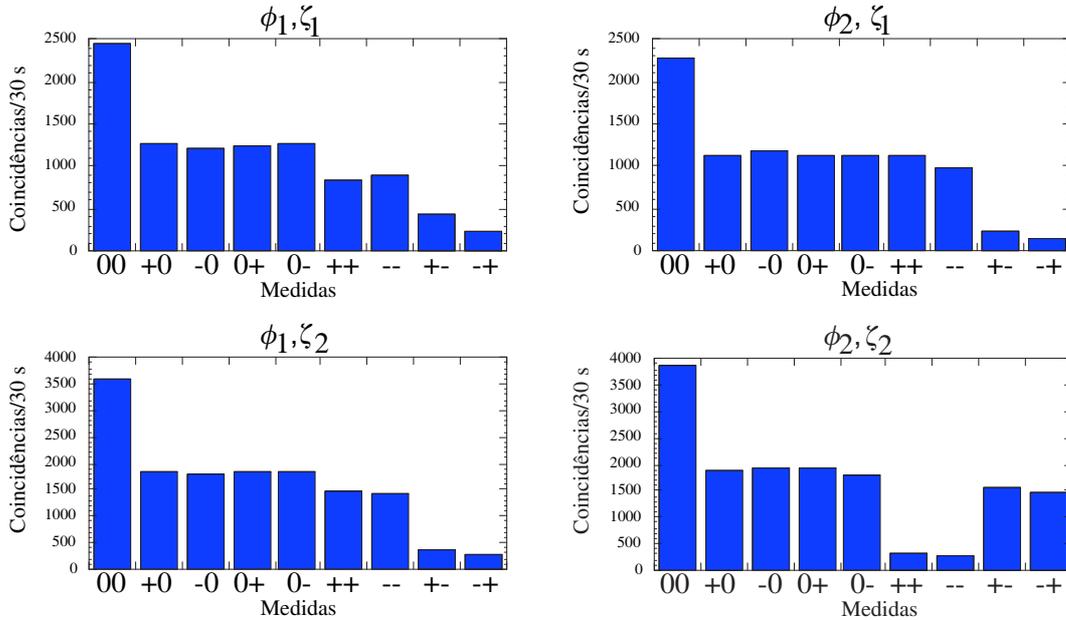


Figura 4.9: Resultados obtidos para as quatro configurações de analisadores TFF.

A violação da desigualdade de Bell aplicada às propriedades transversais do campo convertido da CPDE indica que as correlações existentes nesse grau de liberdade não podem ser descritas por uma teoria realista local. Podemos pensar que essas correlações exibem um caráter não-local da mesma forma que as correlações de um estado de Bell em polarização.

4.6 Os Bits Quânticos nas Variáveis Espaciais Transversais (Qbit-VET)

Para descrever o estado de variáveis espaciais transversais do campo emitido pela fonte \mathcal{D} na aproximação paraxial devemos usar uma superposição de ondas planas em todos os momentos transversais:

$$|\psi\rangle = \int v(\mathbf{q})|\mathbf{q}\rangle d\mathbf{q}, \quad (4.51)$$

onde $v(\mathbf{q})$ é o espectro angular definido por:

$$v(\mathbf{q}) = \int W(\boldsymbol{\rho}, 0)e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho}, \quad (4.52)$$

e $W(\boldsymbol{\rho}, 0)$ é a distribuição de campo no plano \mathcal{D} .

O espectro angular v nos dá informação sobre a distribuição de momentos transversais do campo emitido pela fonte. A distribuição transversal de campo W representa a amplitude de probabilidade de emissão de um fóton pela fonte.

Vamos representar um fóton emitido na parte superior da fonte pelo ket $|y^+\rangle$. O fóton emitido na parte inferior será representado pelo ket $|y^-\rangle$. Os dois estados de posições dos fótons na fonte \mathcal{D} serão usados para construir o Qbit-VET. Como não há superposição das duas áreas “+” e “-”, temos que esses dois estados são ortogonais:

$$\langle y^+|y^-\rangle = 0. \quad (4.53)$$

Qualquer estado no subespaço VET definido pode ser escrito como:

$$|\alpha\rangle = a|y^+\rangle + b|y^-\rangle, \quad (4.54)$$

onde:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (4.55)$$

Para fazer uma medida binária do Qbit-VET na base $\{|y^+\rangle, |y^-\rangle\}$, é necessário gerar a imagem da fonte com um analisador TFF de ordem π . Observe que a imagem do estado $|y^+\rangle$, no plano \mathcal{D} , é um estado $|y^-\rangle$ no plano $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}$.

Pense agora o caso em que o plano de observação seja o plano de Fourier $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$. Nesse plano os fótons são caracterizados por seus vetores de onda transversais. O fóton medido na parte superior (inferior) do plano de Fourier será representado pelo ket $|k_y^+\rangle$ ($|k_y^-\rangle$). Na base de vetores de onda transversais um estado qualquer no subespaço VET pode ser escrito como:

$$|\alpha\rangle = c|k_y^+\rangle + d|k_y^-\rangle, \quad (4.56)$$

onde a condição de normalização impõe que:

$$|c|^2 + |d|^2 = 1. \quad (4.57)$$

A relação de ortogonalidade também é válida na base de vetores de onda pois não há superposição entre as regiões k_y^+ e k_y^- :

$$\langle k_y^+ | k_y^- \rangle = 0. \quad (4.58)$$

As bases de posição e momento do subespaço VET podem ser representadas vetorialmente da mesma forma com a qual representamos o espaço de polarizações lineares. A relação entre as bases $\{|y^+\rangle, |y^-\rangle\}$ e $\{|k_y^+\rangle, |k_y^-\rangle\}$ é dada por:

$$|k_y^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|y^+\rangle + |y^-\rangle); \quad (4.59)$$

$$|k_y^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|y^+\rangle + |y^-\rangle). \quad (4.60)$$

Os analisadores TFF implementam rotações arbitrárias no campo possibilitando projeções em bases intermediárias. Porém a forma funcional dessas projeções devem depender do espectro angular do campo emitido pela fonte. Em algum caso particular pensamos que essas projeções tenham uma dependência senoidal e cossenoidal, como no espaço de polarização. Escreveremos da seguinte forma:

$$|\phi^+\rangle = g_v(\phi)|y^+\rangle + h_v(\phi)|y^-\rangle; \quad (4.61)$$

$$|\phi^-\rangle = -h_v(\phi)|y^+\rangle + g_v(\phi)|y^-\rangle, \quad (4.62)$$

onde o índice v explicita a dependência das funções g e h no espectro angular. A ortogonalidade dos estados $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$ é garantida independentemente da forma dessas funções.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

O experimento realizado usa a técnica da CPDE como fonte de pares de fótons emaranhados nos graus de liberdade espaciais transversais. Usa-se os analisadores TFF para projetar a propriedade, que denominamos momento transversal fracional, nas coordenadas espaciais do plano de detecção. Faz-se medidas dicotômicas em coincidência dos momentos transversais fracionais dos dois fótons. E então aplica-se a desigualdade de CHSH para essa propriedade.

A violação da desigualdade de CHSH conseguida nesse experimento comprova de uma nova maneira o caráter não-local das correlações espaciais transversais do estado de dois fótons da CPDE. Outros experimentos já haviam verificado o caráter quântico dessas correlações, utilizando os critérios de não-separabilidade para variáveis contínuas. Entretanto, a aplicação da desigualdade de CHSH aos graus de liberdade (contínuos) espaciais transversais, possibilita detectar o emaranhamento presente nas variáveis espaciais dos campos convertidos, da mesma forma que é feito para os sistemas naturalmente dicotômicos e bipartidos. Ao aplicar os quantificadores de emaranhamento existentes, tais como *concorrência* ou *negatividade logarítmica*, ao subsistema VET definido aqui, estamos obviamente caracterizando apenas o emaranhamento desse subsistema dicotômico VET, e não todo o emaranhamento presente nas variáveis transversais do campo.

Alem disso as medidas dicotômicas aplicadas ao espaço VET do campo abrem caminho para a utilização desse grau de liberdade em todas as aplicações nas quais são usadas os bits quânticos tradicionais, por exemplo: estado eletrônico de átomos e íons, polarização do fóton, etc. Para que isso seja possível devemos formalizar a estrutura dos bits quânticos nas variáveis espaciais transversais, construir uma álgebra semelhante à álgebra do espaço de spin $1/2$. Além disso devemos ser capazes de produzir esse bit quântico em todas as superposições possíveis, preenchendo toda a superfície da esfera de Bloch correspondente.

A construção de uma teoria sólida para trabalhar no subespaço bidimensional VET seria de suma importância para as aplicações em computação quântica e também para os fundamentos da técnica da conversão paramétrica descendente.

Esse projeto de formalização teórica é uma de nossas perspectivas para o futuro próximo. As possíveis aplicações em computação e informação quântica também são de implementação imediata em nosso laboratório. O uso da transformada de Fourier fracional em experimentos com conversão paramétrica descendente deve ser estudado com muita atenção. Acreditamos que muitos trabalhos serão feitos em cima desse tema nos próximos anos.

A discretização feita no espaço de variáveis espaciais transversais pode ser estendida para dimensões maiores que dois. Deve-se dividir o plano de detecção em fatias diametraes (como fatias de uma pizza) respeitando a simetria radial das correlações espaciais transversais. Com isso poderíamos aplicar desigualdades de Bell para dimensões maiores que dois [50] a essa propriedade transversal do campo eletromagnético.

As aplicações sugeridas para esse sistema são muito importantes. Porém gostaríamos de enfatizar a importância desse experimento como um teste fundamental, confrontando a Mecânica Quântica e as teorias locais de variáveis ocultas ou *Teorias Objetivas Locais*, na forma proposta por Clauser e Horne [31].

Referências

- [1] A. Einstein, D. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777, 1935.
- [2] J. S. Bell. *Physics*, 1:195, 1965.
- [3] S.J. Freedman and J.F. Clauser. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938, 1972.
- [4] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91, 1982.
- [5] Y.H. Shih and C.O. Alley. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2921, 1988.
- [6] Z. Y. Ou and L. Mandel. *Phys. Rev. Lett.*, 61:50, 1988.
- [7] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337, 1995.
- [8] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. *Phys. Rev. Lett.*,.
- [9] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, and Phillippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A.*, 60:R773, 1999.
- [10] J.G. Rarity and P.R. Tapster. Experimental violation of bell's inequality based on phase and momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2495, 1990.

- [11] P.R. Tapster, J.G. Rarity, and P.C.M. Owens. Violation of bell-s inequality over 4 km of optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1923, 1994.
- [12] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3563, 1998.
- [13] Alipasha Vaziri, Gregor Weihs, and Anton Zeilinger. *Phys. Rev. Lett.*, 89:240401, 2002.
- [14] John C. Howell, Ryan S. Bennink, Sean J. Bentley, and R. W. Boyd. Realization of the einstein-podolsky-rosen paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92:210403, 2004.
- [15] Milena D’Angelo, Yoon-Ho Kim, Sergei P. Kulik, and Yanhua Shih. Identifying entanglement using quantum ghost interference and imaging. *Phys. Rev. Lett.*, 92:233601, 2004.
- [16] Stefano Mancini, Vittorio Giovannetti, David Vitali, and Paolo Tombesi. Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure. *Physical Review Letters*, 88(12):120401, 2002.
- [17] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, and R.A. Holt. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880, 1969.
- [18] D. Mendlovic and H. M. Ozaktas. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10:1875, 1993.
- [19] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10:2522, 1993.
- [20] Adolf W. Lohmann. Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10:2181–2186, 1993.
- [21] P. Pellat-Finet. *Opt. Lett.*, 94:1388, 1994.

- [22] D. S. Tasca, M. P. Almeida, S. P. Walborn, P. Pellat-Finet, C. H. Monken, and P. H. Souto Ribeiro. Violation of bell's inequality with transverse spatial variables using fractional fourier transform. *quant-ph/0605061*, *Submetido para publicação na Phys. Rev. Lett.*, 2006.
- [23] D. N. Klyshko. *JETP*, 28:522, 1969.
- [24] D.C. Burnham and D.L. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.*, 25:84, 1970.
- [25] V.G. Dmitriev, G.G. Gurzadyan, and D.N. Nikoyosyan. *Handbook of Nonlinear Optical Crystals (Springer Series in Optical Sciences Vol. 64)*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [26] C. H. Monken, P.H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. *Phys. Rev. A.*, 57:3123, 1998.
- [27] M. P. Almeida, S. P. Walborn, and P. H. Souto Ribeiro. Experimental investigation of quantum key distribution with position and momentum of photon pairs. *Phys. Rev. A*, 73:R040301, 2006.
- [28] M. P. Almeida, S. P. Walborn, and P. H. Souto Ribeiro. Simultaneous observation of correlations in position-momentum and polarization variables. *Phys. Rev. A*, 72:022313, 2005.
- [29] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [30] J. S. Bell. in foundations of quantum mechanics, proceedings of the international school of physics "enrico fermi," 1971.
- [31] J.F. Clauser and M.A. Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Phys. Rev. D*, 10:526, 1974.
- [32] N. Wiener. Hermitian polynomials and fourier analysis. *J. Math. Phys. MIT*, 8:70–73, 1929.

- [33] E. U. Condon. Immersion of the fourier transform in a continuous of functional transformations. *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, 23:158–164, 1937.
- [34] A. L. Patterson. *Zeits. Kristal*, 112:22–32, 1959.
- [35] V. Namias. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Maths Applics.*, 25:241–265, 1980.
- [36] R. S. Khare. Fractional fourier analysis of defocused images. *Opt. Comm.*, 12:386–388, 1974.
- [37] Adolf W. Lohmann, D. Mendlovic, and Z. Zalevisky. *Fractional transforms in optics*, 1998.
- [38] Adolf W. Lohmann. A fake zoom lens for fractional fourier experiments. *Opt. Comm.*, 115:437–443, 1995.
- [39] P. Pellat-Finet. *Opt. Comm.*, 111:141–154, 1994.
- [40] P. Pellat-Finet. Agreement of fractional fourier optics with the huygens-fresnel principle. *Artigo submetido para publicação na revista Opt. Comm.*, 2006.
- [41] P. Pellat-Finet. Complex order fractional fourier transforms and their use in diffraction theory. application to optical resonators. *Opt. Comm.*, 258:103–113, 2006.
- [42] Grant. R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover, New York, 1989.
- [43] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, New York.
- [44] Georges Bonnet and Pierre Pellat-Finet. *Cours d’optique de Fourier*.
- [45] A. Gatti, E. Brambilla, and L. A. Lugiato. *Phys. Rev. Lett.*, 90:133603, 2003.
- [46] C. H. Monken. Transferência de espectro angular e correlações transversais na conversão paramétrica descendente, 1998-2002. unpublished lecture notes.

- [47] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, Cambridge, 2000.
- [48] D. Bouwmeester, J. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390:575, 1997.
- [49] A. V. Belinski and D. N. Klyshko. *JETP*, 78:259, 1994.
- [50] Daniel Collins, Nicolas Gisin, Noah Linden, Serge Massar, and Sandu Popescu. *Phys. Rev. Lett.*, 88:040404, 2002.