Introdução à teoria da relatividade restrita

José Amoreira

Conteúdo

Na base de qualquer descrição científica da natureza está a especificação das posições e instantes em que determinados acontecimentos têm lugar. Como é sabido, esta especificação é feita recorrendo a um sistema de coordenadas, escolhido por cada observador da forma por ele julgada mais conveniente. Dada a arbitrariedade na escolha do sistema de coordenadas é útil conhecer as leis que nos permitem comparar cálculos feitos em diferentes sistemas.

Nestas notas serão estudadas estas leis e as suas consequências, à luz da teoria da relatividade restrita de Einstein. Interessam-nos em particular as transformações entre sistemas em movimento relativo, já que para sistemas imóveis um relativamente ao outro a transformação é puramente geométrica.

Estas notas estão organizadas como se segue: na Secção 1 é apresentado o princípio da relatividade e discutido o seu significado. A interpretação clássica deste princípio, bem como algumas das suas insuficiências, são o assunto da Secção 2. É apresentada a transformação de Galileu; verifica-se que a mecânica de Newton é invariante sob aquelas transformações, mas que o mesmo não se passa com a Electrodinâmica de Maxwell; analisam-se criticamente algumas possibilidades para a resolução desta dificuldade e conclui-se que a solução mais de acordo com os resultados experimentais passa pelo abandono da relatividade de Galileu e da mecânica de Newton. Na Secção 3 são reexaminados criticamente os conceitos básicos de simultaneidade, tempo e espaço, à luz dos postulados da relatividade. Na Secção 4 são deduzidas as expressões relativísticas para a transformação de coordenadas e de velocidades. A Secção 5 trata da nova dinâmica que vem substituir a de Newton e, finalmente, na Secção 6 estuda-se o campo electromagnético.

1 O princípio da relatividade

O princípio da relatividade restrita foi pela primeira vez formulado por Galileu e mantém-se ainda hoje como uma das leis fundamentais da física. Um dos seus enunciados mais frequente é o seguinte:

> **Princípio da relatividade:** *As leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.*

Vejamos o que esta frase quer dizer. Um dado observador ligado a um referencial inercial estuda o movimento de um corpo, sob a acção de uma dada força. Depois de medir o valor da força ($\boldsymbol{F}$), da massa do corpo (m) e da sua aceleração ($\boldsymbol{a}$), constata que

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

De acordo com o princípio da relatividade, qualquer outro observador que se mova com velocidade uniforme relativamente ao primeiro obtém

$$\boldsymbol{F}' = m'\boldsymbol{a}', \tag{2}$$

onde $\boldsymbol{F}'$, m' e $\boldsymbol{a}'$ são os valores por ele medidos da força, da massa e da aceleração. É importante notar que o princípio da relatividade não obriga a que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$, $m = m'$ e $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, se bem que esta seja uma forma (trivial) de o satisfazer. Os valores das grandezas fisicamente observáveis podem aparecer diferentes a diferentes observadores, mas as relações entre elas têm que ser as mesmas para todos, de acordo com o princípio da relatividade. Algumas leis da física incluem também constantes fundamentais como ϵ_0. Evidentemente, se as leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais, estas constantes têm que ter o mesmo valor em todos eles.

2 A relatividade de Galileu

Um enunciado equivalente do princípio da relatividade consiste na afirmação de que todos os referenciais inerciais são equivalentes. A escolha de um referencial inercial é então totalmente arbitrária e, portanto, interessa conhecer as regras para a comparação de medições feitas por diferentes observadores. Como é evidente, na base destas regras estão as da transformação das coordenadas.

As características revolucionárias da teoria de Einstein resultam da transformação de coordenadas por ele introduzida. Antes de iniciarmos o seu estudo, vamos rever a tradicional transformação de Galileu, e pôr a claro as suas insuficiências.

2.1 A transformação de Galileu

Consideremos dois sistemas de coordenadas cartesianas S e S', em movimento relativo uniforme. Com o objectivo de nos concentrarmos na física e reduzirmos ao máximo as complicações puramente geométricas, escolhemos a orientação dos dois sistemas de coordenadas da seguinte forma (ver a Figura 1): os eixos xx de ambos os sistemas

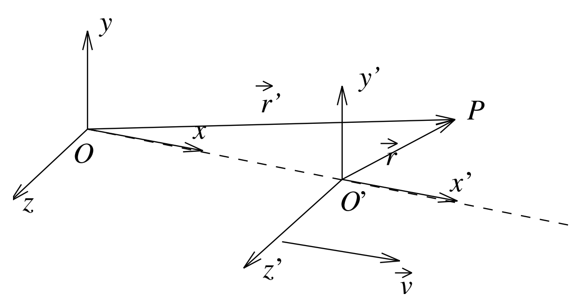

Figura 1: *Dois referenciais inerciais.*

têm a mesma direcção e sentido, e são paralelos ao movimento. Supomos ainda que a origem dos tempos (isto é, o instante escolhido como $t = 0$) é escolhida, em ambos os referenciais, por forma a coincidir com o instante em que as duas origens O e O' se encontram. Suponhamos que um determinado acontecimento tem lugar num ponto P, num certo instante. As coordenadas desse acontecimento são, no referencial S, $(t, \boldsymbol{r})$, ao passo que no referencial S' são $(t', \boldsymbol{r'})$.

Qual a relação entre estas coordenadas? Para os físicos anteriores a Einstein, parecia evidente que o intervalo de tempo que decorria entre o instante em que as duas origens coincidem ($t = 0$) e aquele em que o acontecimento tem lugar, deveria ter um mesmo valor, medido num ou noutro referencial. Assim, aceitavam implicitamente que

$$t = t'. \tag{3}$$

Mesmo que possa parecer natural, esta certeza não está alicerçada em nenhum princípio fundamental, sendo antes um postulado implícito, subjacente a toda a física pré-relativística. Aceitando este *tempo absoluto,* torna-se evidente que as relações entre as coordenadas espaciais do acontecimento ficam as seguintes:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r'} &= \boldsymbol{r} - \overrightarrow{OO'} \\ &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t. \end{aligned} \tag{4}$$

Juntando as equações (3) e (4) obtem-se a chamada *transformação de Galileu:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t' &=& t \\ x' &=& x - vt \\ y' &=& y \\ z' &=& z \end{array} \right. \tag{5}$$

Derivando estas expressões em ordem a t (ou t') resultam, sucessivamente, as leis de transformações para a velocidade ($\boldsymbol{u}$) e para a aceleração ($\boldsymbol{a}$) dos corpos:

$$\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{a} \tag{7}$$

A primeira destas relações vectoriais traduz o facto bem conhecido de que a velocidade de um corpo apresenta valores diferentes em diferentes referenciais. Mas note-se que um corpo que se desloque instantaneamente de ponto para ponto (ou seja, que apresente uma velocidade infinita) é igualmente rápido em todos os referenciais. Podemos pois dizer que uma velocidade infinita é invariante sob transformações de Galileu. A segunda destas equações afirma que o valor da aceleração de um objecto é o mesmo em todos os referenciais.

2.2 A mecânica

É trivial verificar que as leis da mecânica são invariantes sob as transformações definidas em (5). Com efeito, a segunda lei de Newton, que se traduz na famosa equação

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{8}$$

relaciona a força $\boldsymbol{F}$ aplicada num corpo de massa m com a sua aceleração $\boldsymbol{a}$. Ora, na mecânica de Newton, as forças entre corpos são, em geral, funções apenas das distâncias que os separam, que têm o mesmo valor nos dois referenciais. Por outro lado, na física clássica, a massa é uma característica invariante de um corpo, apresentando também o mesmo valor em qualquer referencial inercial.

Em resumo, tanto a força que actua num corpo, como a sua aceleração (ver a eq. 7) , como a sua massa têm o mesmo valor em todos os referenciais inerciais. Então é evidente que a segunda lei de Newton, a ser válida num referencial inercial particular, é válida em todos. Ou seja, a lei fundamental da dinâmica *é um invariante sob transformações de Galileu.* Este é o enunciado do princípio da relatividade de Galileu.

Ilustrámos esta equivalência da segunda lei de Newton considerando somente forças que dependem apenas das distâncias entre os corpos. Mas além destas há também as que dependem das suas velocidades. Quando (como no caso da resistência atmosférica) a dependência é apenas no valor relativo da velocidade dos corpos, este estado de coisas não é alterado, porque diferenças de velocidades são invariantes sob transformações de Galileu (vide eq. 6). No entanto, qualquer outra possibilidade, põe em causa a lei de Newton, o princípio da relatividade, ou ambos. Ora, há pelo menos um exemplo de forças deste tipo: a força magnética.

2.3 A electrodinâmica

Consideremos uma carga eléctrica de valor q, movendo-se com velocidade $\boldsymbol{v}$ relativamente a algum referencial inercial, numa região onde está definido um campo magnético $\boldsymbol{B}$. A força sentida por esta partícula é dada por:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{9}$$

A presença de $\boldsymbol{v}$ nesta expressão faz com que a força magnética não seja invariante de Galileu: em dois referenciais inerciais diferentes, o valor da velocidade da carga (tal como pode ser calculado a partir da transformação de Galileu) tem valores diferentes, o mesmo acontecendo pois para a força.

Para se perceber a gravidade da situação, considere-se um sistema formado por duas cargas iguais, imóveis, num certo instante, relativamente a um referencial inercial. Um observador em repouso observa a força de repulsão electrostática entre as partículas e, usando a segunda lei de Newton, calcula a aceleração por elas adquirida. Pode assim estabelecer as leis do movimento destas duas cargas e calcular o tempo t necessário para que a distância entre elas seja igual a uma certa quantidade d. Consideremos agora um segundo observador, que se move com uma certa velocidade (uniforme) numa direcção perpendicular ao segmento que une as duas cargas. Este observador é também um observador inercial. No entanto, relativamente a este observador, as cargas estão em movimento, e portanto, além da força de repulsão electrostática, este observador deve notar também uma força, atractiva, de natureza magnética. Em consequência, determina, por cálculo, um valor para a aceleracção inferior ao obtido pelo primeiro. Se se propusesse determinar o tempo t necessário para que a distância entre as cargas igualasse d, obteria um resultado superior ao obtido pelo primeiro observador.

Como é evidente, esta situação é altamente insatisfatória. Com efeito, a física é uma actividade desenvolvida com o objectivo de prever os resultados de experiências. Como estes dois observadores não podem chegar a acordo, temos que concluir que um deles (pelo menos) *não é um observador adequado* para a descrição do fenómeno em estudo, *apesar de ambos estarem ligados a referenciais inerciais.* É exactamente isto que se pretende dizer quando se afirma que o electromagnetismo de Maxwell não é invariante sob transformações de Galileu.

O problema da não invariância da electrodinâmica pode ser ilustrado a um nível mais fundamental, o das equações de Maxwell, que são os postulados básicos do electromagnetismo. Estas equações incluem um parâmetro fundamental, c, cujo valor é o da velocidade da luz no vácuo[1]. Como a velocidade dos corpos não é um invariante

[1]Quando se usa o sistema internacional de unidades, este parâmetro "é camuflado" pelas constantes ε_0 e μ_0, definidas de tal forma que $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$

de Galileu (isto é, não mantém o seu valor numa transformação de Galileu) e, em particular, a velocidade da luz também não o é, resulta que a forma das equações de Maxwell não pode ser a mesma em todos os referenciais inerciais, *se se supuser que as transformações de Galileu são a lei correcta para a transformação de coordenadas entre sistemas inerciais.*

Em resumo, estamos face à seguinte situação: o princípio da relatividade de Galileu é satisfeito pelas leis da mecânica de Newton, mas não pelas do Electromagnetismo.

2.4 Várias possibilidades

Há três possibilidades para a interpretação da não invariância do electromagnetismo, a saber,

- não existe um princípio de relatividade válido para todos os domínios da física. Assim, os referenciais inerciais não são todos equivalentes e existe um referencial previlegiado, relativamente ao qual as leis do electromagnetismo têm a forma condensada nas equações de Maxwell.

- Existe um princípio de invariância (relatividade de Galileu) válido para todos os domínios da física. Este princípio é satisfeito pela mecânica de Newton, mas não pela teoria de Maxwell para os fenómenos electromagnéticos. Consequentemente, esta teoria não é, ainda, a correcta.

- Existe um princípio de invariância válido para todos os domínios da física. Este princípio, ainda por enunciar, é satisfeito pela teoria de Maxwell, mas poderá ser necessário modificar as leis da mecânica por forma a torná-las invariantes.

A equivalência de todos os referenciais inerciais é um conceito fortemente enraizado na nossa intuição física. Assim, a primeira hipótese deve ser considerada apenas em desespero de causa, caso fracassem as duas restantes. Destas, a primeira afirma que o princípio de Galileu e a mecânica de Newton são válidos, e, portanto, a teoria de Maxwell não o pode ser, ao passo que a segunda afirma o contrário, isto é, que a teoria de Maxwell é correcta e respeita um princípio de relatividade que não pode ser o de Galileu. Este princípio, que é válido para todos os domínios da física, pode impor a necessidade de modificações nas leis da mecânica.

A escolha entre estas duas possibilidades deve ser ditada pelos factos experimentais. Podemos, desde já, apresentar um teste crucial para testar a validade da terceira hipótese. Com efeito, já foi dito que a velocidade da luz é um parâmetro de que dependem as equações de Maxwell. Assim, qualquer princípio de relatividade a ser satisfeito pela teoria de Maxwell deve usar uma lei de transformação de coordenadas entre sistemas inerciais tal que deixe inalterado o valor da velocidade da luz. Ou seja: a ser correcta a terceira possibilidade, o valor da velocidade da luz deve ser o mesmo em todos os referenciais inerciais, independentemente do seu estado de movimento. Além deste teste directo, devemos também estar alerta para possíveis violações experimentais da mecânica de Newton, já que, a serem observadas, apoiariam a terceira hipótese.

Alguns factos experimentais são os seguintes:

- A electrodinâmica de Maxwell previu, com bastante rigor, o resultado dos testes experimentais a que a sugeitaram até agora.
- A mecânica clássica, em contrapartida, falha sempre que estejam envolvidas velocidades próximas da velocidade da luz:
  - Contrariamente ao que seria de esperar, de acordo com a expressão da transformação de velocidades (6), o valor medido da velocidade da luz é o mesmo em todos os referenciais inerciais. (Ver literatura sobre a experiência de Michelson-Morley)
  - Em altas velocidades deixa de se verificar a relação usual
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
entre velocidade e energia cinética.
  - A própria lei fundamental da dinâmica de Newton perde a validade quando a velocidade dos corpos se torna muito grande.

(As duas últimas afirmações, bem como outras que poderiam ter sido referidas, são comprovadas diária e rotineiramente nos aceleradores de partículas de todo o mundo.)

Face à evidência experimental, elegemos a última possibilidade como a mais promissora. Vamos, de aqui em diante, explorá-la e ver onde nos conduz.

3 Crítica dos conceitos básicos

Aceitemos então os seguintes postulados

1. *As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.*
2. *A velocidade da luz tem o mesmo valor, $c \simeq 3\times10^8 m/s$, em todos os referenciais inerciais.*

O segundo postulado traduz a nossa opção de considerar a electrodinâmica de Maxwell como a teoria correcta dos fenómenos electromagnéticos. Como é evidente, as relações entre as coordenadas de um acontecimento em referenciais inerciais diferentes não podem pois ser as que formam a transformação de Galileu.

Mas a transformação de Galileu é uma consequência do conceito de tempo absoluto, isto é, da noção de que em dois quaisquer referenciais inerciais o tempo flui ao mesmo ritmo. Poderá esta suposição estar errada?

3.1 A simultaneidade

Na medição do intervalo de tempo que decorre entre dois acontecimentos I e F, fazemos uso de um conceito de *simultaneidade.* De facto, dizer que esse intervalo de tempo vale $t_f - t_i$ significa dizer que "o acontecimento I foi simultâneo com a indicação do valor t_i no meu relógio e o acontecimento F foi simultâneo com a indicação do valor t_f". Ora, o estabelecer da simultaneidade de dois acontecimentos não é tão trivial como pode parecer. É claro que não há qualquer problema quando os acontecimentos têm lugar numa vizinhança suficientemente próxima do observador. Mas como afirmar se dois acontecimentos afastados um do outro são ou não simultâneos? Para podermos afirmar que dois acontecimentos afastados de nós são simultâneos, é necessário que algum sinal se propague até nós, informando-nos de que os dois acontecimentos se deram. Mas, a menos que estes sinais se propaguem com uma velocidade infinita, demora algum tempo até que cheguem até nós... Podemos até ser enganados pelas diferentes distâncias que nos separam dos dois acontecimentos, declarando simultâneos acontecimentos que não o são e vice-versa.

Na física pré-Einsteiniana, supunha-se possível a transmissão de informação a velocidades infinitas. Sendo assim, a questão da simultaneidade de dois acontecimentos afastados era encarada trivialmente, como se ilustra a seguir: sejam A e B dois acontecimentos que tiveram lugar em dois pontos afastados um do outro. No momento em que cada um se deu, podemos imaginar que sinais foram emitidos, com velocidades infinitas, em todas as direcções. Assim, todos os observadores no Universo, em todos os sistemas de coordenadas (inerciais ou não), foram, instantaneamente, informados da ocorrência de cada um dos acontecimentos. Logo, todos concordam se os dois acontecimentos se deram simultaneamente (caso tenham recebido os sinais provenientes de cada acontecimento simultaneamente) ou não. É pois natural que todos concordem com a duração de intervalos de tempo. Esta é base da hipótese do tempo absoluto.

Apesar de parecer natural e evidente, a noção de tempo absoluto baseia-se, como acabámos de ver, na possibilidade da transmissão de sinais a velocidades infinitas, apesar de nunca se terem observado estas velocidades. Ora nenhuma teoria científica pode assentar em factos não verificados experimentalmente. Vamos então tentar construir uma noção de tempo (que não será necessariamente absoluto) sem recorrer a sinais com velocidades de propagação infinitas.

Em primeiro lugar, temos que estabelecer um critério objectivo de simultaneidade de acontecimentos afastados. O critério que vamos usar é o seguinte:

> *Dois acontecimentos afastados dizem-se simultâneos num dado referencial, se raios de luz emitidos pelos dois acontecimentos atingirem no mesmo instante o ponto situado a meio caminho entre os locais onde se deram os acontecimentos.*

A simultaneidade da chegada dos dois raios de luz a um ponto qualquer não levanta problemas porque se trata de acontecimentos que têm lugar num mesmo ponto. Os raios de luz são usados nesta definição (e não os de som, por exemplo) porque a velocidade da luz tem o mesmo valor para todos os observadores.

Um dos aspectos mais interessantes deste critério é o da simultaneidade por ele estabelecida não ser invariante, isto é, dois acontecimentos podem ser simultâneos para um observador e não o serem para outro. Vamos ilustrar este facto com um exemplo. Consideremos uma carruagem dos caminhos de ferro, que se move com velocidade constante $\boldsymbol{v}$ ao longo de uma porção rectilínea da linha. Seja O' um observador situado sobre a carruagem e O um observador situado no solo, imóvel. Ambos os observadores estão ligados a referenciais inerciais. Imaginemos que o observador O colocou na linha férrea dois petardos, dotados de detonadores sensíveis à luz, a uma distância $\overline{AB}$ um do outro, e se colocou a meia distância entre eles (ver a Figura 2). Ele pode provocar a explosão simultânea dos dois petardos enviando dois raios de

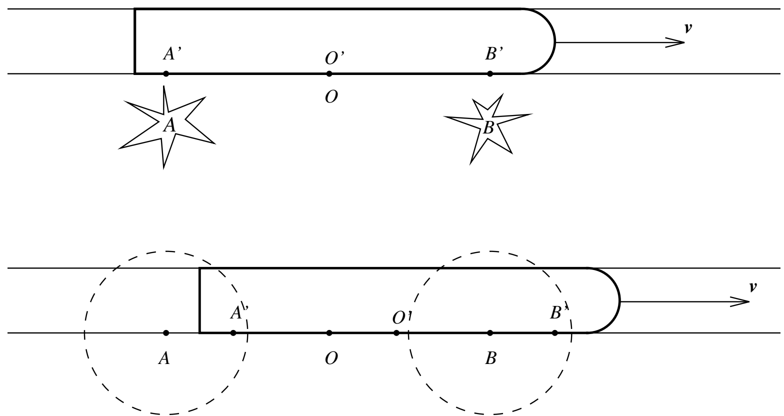

Figura 2: *Montagem experimental para a demonstração da relatividade do conceito de simultaneidade. Os círculos a tracejado representam as frentes luminosas das explosões.*

luz simultaneamente, cada um dirigido a seu petardo. Suponhamos que o faz de tal forma que os petardos explodem quando o observador O' está situado exactamente à sua frente. Ao explodirem, os petardos deixam marcas na carruagem, em dois pontos que o observador O' designa A' e B', e dos quais ele se encontra equidistante.

As explosões emitem raios de luz que, evidentemente chegam a O simultaneamente (e daí que O diga que elas foram simultâneas), mas não podem atingir O' simultaneamente porque enquanto a luz viaja após as explosões, este observador deslocou-se devido ao movimento da carruagem. O sinal proveniente de A' (ou A) chega a O' antes do que foi enviado de B' (ou B). Assim, o observador O' afirma que os dois acontecimentos não são simultâneos.

Ambos os observadores estão ligados a referenciais inerciais, equivalentes face ao princípio da relatividade, e como tal as suas opiniões são igualmente válidas. Foi o conceito de simultaneidade de dois acontecimentos que deixou de ser absoluto, passando a depender do referencial onde são observados.

Note-se que se a luz se propagasse com velocidade infinita, os dois observadores não estariam em desacordo: dois acontecimentos simultâneos para um também o seriam para outro. É por estarmos acostumados a pensar que velocidades infinitas são possíveis que achamos estranha a relatividade da noção de simultaneidade que acabámos de demonstrar.

3.2 As coordenadas de um acontecimento

A negação da hipótese da existência de velocidades infinitas limita fortemente o processo de observação, tal como ele é tradicionalmente entendido. Com efeito, o instante da ocorrência de um acontecimento não é, em geral, uma grandeza directamente mensurável por um observador arbitrário, pois entre o acontecimento e a sua observação há sempre um intervalo de tempo não nulo, que é o gasto pela informação na viagem entre os dois. Pelo contrário, as coordenadas espaciais dos acontecimentos podem ser medidas usando réguas graduadas, da forma habitual. Voltando ao problema do tempo, só não surgem dificuldades nos casos em que o acontecimento e o observador estão suficientemente próximos um do outro.

Podemos pois resolver este problema colocando, em cada ponto do espaço, um observador em repouso (no sistema inercial em questão, evidentemente), munido de um relógio sincronizado com os demais. Quando se dá um acontecimento num dado ponto, o observador aí colocado toma nota do tempo, e só esta leitura será usada para indicar o instante da sua ocorrência.

Mas este método levanta uma nova dificuldade, que é a de sicronizar vários relógios, situados em pontos diferentes. Isto pode ser conseguido da seguinte forma. Num certo instante, ao qual podemos fazer corresponder $t = 0$, um *flash* é disparado na origem do referencial escolhido. No mesmo instante, o observador colocado na origem acerta o seu relógio de tal forma que indique $t = 0$. Os restantes observadores, acertam os seus relógios no instante em que observarem a luz, mas fazem-no de tal forma que indiquem, não $t = 0$, mas sim o tempo necessário para luz chegue até eles, vinda da origem. Assim, um observador situado a uma distância d da origem acertará o seu relógio por forma a que ele indique $t = d/c$ no instante em que o *flash* luminoso o atingir. É evidente que, desta forma, todos os relógios indicarão simultaneamente a mesma leitura, no sentido de simultaneidade definido anteriormente.

3.3 A duração de intervalos de tempo

A noção de tempo absoluto não resiste aos nossos postulados, o que não nos deve espantar, já que a noção de simultaneidade foi alterada. Vamos de seguida estudar uma experiência ideal que põe este facto em evidência. Imaginemos que o observador O' da experiência da secção anterior monta um espelho vertical numa das paredes da sua carruagem (ver a Figura 3). Em seguida, colocando-se na parede oposta,

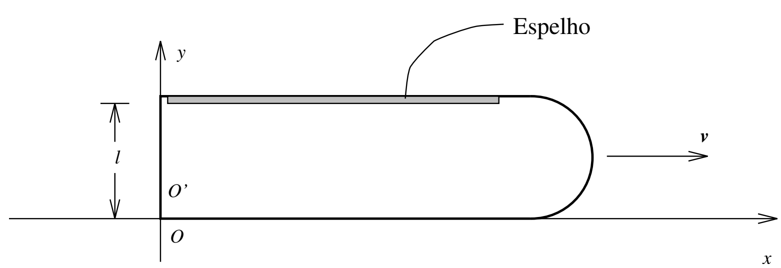

Figura 3: *Montagem experimental para a demonstração da relatividade da duração dos intervalos de tempo.*

envia um raio de luz, na direcção perpendicular ao movimento da carruagem, contra o espelho, e calcula o tempo necessário para que a luz faça a viagem de ida e volta, após a reflexão no espelho. Na Figura 4 está representada a situação. À esquerda, a

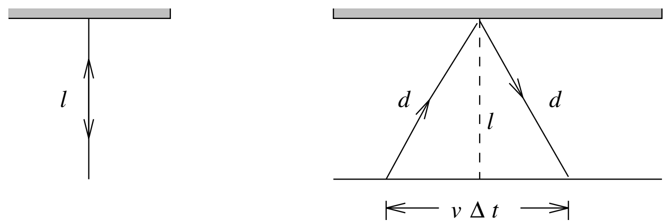

Figura 4: *O trajecto do raio de luz, como é visto pelo observador O' (à esquerda) e pelo observador O (à direita).*

trajectória do raio de luz tal como o observador O' o observa. Para este observador, o raio de luz percorre caminhos idênticos na ida e no regresso, segundo uma direcção que, para ele, é a direcção do eixo dos yy. Sendo l a largura da carruagem, a distância total percorrida pelo raio de luz é igual a $2l$ e portanto o tempo gasto na viagem é dado por

$$\Delta t' = \frac{2l}{c}. \tag{10}$$

Para o observador O, a situação é diferente. Para ele a emissão e a recepção do raio luminoso têm lugar em pontos diferentes, distanciados de $v\Delta t$ um do outro, onde Δt é o tempo de duração da viagem do raio luminoso, medido no seu relógio. A distância percorrida é agora

$$s = 2d = 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2},$$

e o tempo de necessário para a percorrer é

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}}{c}. \tag{11}$$

Note-se que este observador, tal como já o tinha feito O', usa o valor invariante da velocidade da luz, c, para calcular o valor de Δt, de acordo com o enunciado do segundo postulado. Resolvendo (11) em ordem a Δt obtemos

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{2l}{c} \\ &= \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{12}$$

Mas então, os dois observadores não concordam quanto à duração do intervalo de tempo que decorre entre a emissão e a recepção do raio luminoso! De facto, verifica-se que a diferença temporal entre dois acontecimentos que num certo referencial ocorrem no mesmo ponto é medida, nesse referencial, como sendo menor que noutro referencial que se mova relativamente ao primeiro, e no qual, consequentemente, os dois acontecimentos ocorrem em pontos distintos. A este efeito chama-se dilatação do tempo. Ao intervalo de tempo entre dois acontecimentos, medido num referencial em que os dois ocorrem no mesmo ponto, chama-se *tempo próprio.*

Por muito disparatado que possa parecer, este efeito é rotineiramente observado nos aceleradores de partículas em todo o mundo, como um prolongamento do tempo de vida de partículas instáveis, quando estão animadas de velocidades próximas da da luz.

3.4 O comprimento

O comprimento de um objecto pode ser definido como a distância entre dois pontos desse objecto, escolhidos convencionalmente. Para medirmos essa distância, colocamos uma régua graduada, alinhada segundo a direcção definida pelos dois pontos e tomamos nota de *duas leituras simultâneas,* que correspondem aos valores na escala da régua mais próximos de cada um desses pontos. Porque as duas leituras devem ser simultâneas e o nosso conceito de simultaneidade não é absoluto, pode acontecer que também o comprimento dos objectos perca, relativamente ao senso comum, o seu carácter absoluto.

Para verificarmos esta possibilidade, imaginemos que o observador O (aquele que temos considerado em repouso) coloca uma régua com um certo comprimento alinhada com a direcção do movimento do observador O' (ver a Figura 5). O comprimento da

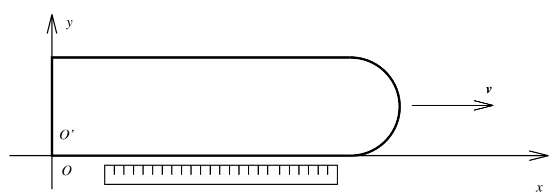

Figura 5: *A relatividade do valor do comprimento de um objecto.*

régua pode ser determinado pelo observador O a partir da definição de velocidade, isto é, multiplicando o módulo da velocidade v do observador O' pelo tempo Δt (medido no relógio do observador O) necessário para que que O' percorra o comprimento da régua. O observador O deduz assim que o comprimento da régua é dado por

$$l = v\Delta t. \tag{13}$$

Por seu lado, o observador O' vê uma régua com um certo comprimento l', em movimento uniforme com velocidade $-v$. Este observador pode usar o mesmo método para calcular o comprimento da régua, multiplicando o módulo da velocidade a que ela viaja (relativamente a ele, claro) pelo tempo (medido no seu relógio) que decorre entre a passagem de uma das extremidades da régua e a passagem da outra, obtendo

$$l' = v\Delta t'. \tag{14}$$

Dividindo a equação (14) pela equação (13) e usando a expressão (12) da dilatação do tempo, resulta

$$l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, l. \tag{15}$$

Assim, verificamos que os dois observadores também não concordam quanto às distâncias entre pontos, medidas na direcção do movimento. A este efeito dá-se o nome de contracção de Lorentz-Fitzgerald. Ao comprimento de uma régua, medido no referencial em que essa régua está em repouso, dá-se o nome de *comprimento próprio da régua.*

4 A transformação de Lorentz

Nesta secção, vamos determinar a lei de transformação de coordenadas entre referenciais inerciais que deixa invariante a velocidade da luz, ou seja, que faz o electromagnetismo compatível com o princípio da relatividade.

4.1 A transformação das coordenadas

Analisemos de novo a situação representada na Figura 1. Consideramos dois referenciais inerciais S e S' em movimento uniforme relativo, com os eixos das coordenadas x (e x') escolhidos segundo a direcção do movimento e os restantes são escolhidos por forma a que eixos homónimos fiquem paralelos. Num certo instante, as duas origens O e O' coincidem e, nesse instante, os relógios de dois observadores situados sobre as origens de cada um dos referenciais são acertados por forma a indicarem $t = 0$ e $t' = 0$. Suponhamos que neste instante, uma lâmpada situada na origem do referencial S emite um flash luminoso em todas as direcções. O observador em O observa a luz propagar-se em todas as direcções com velocidade constante c, de tal forma que, ao fim de um certo tempo t a região iluminada é uma superfície esférica de raio ct centrada na origem O do referencial, ou seja, os pontos iluminados são dados pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{16}$$

Da mesma maneira, e porque a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais, o observador em O' vê também uma frente luminosa propagar-se em todas as direcções com velocidade c. Assim, ao fim de um certo tempo t' ele nota que as coordenadas dos pontos iluminados satisfazem a condição

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{17}$$

Suponhamos que t e t' são os tempos que cada observador mede, como tendo decorrido desde que as duas origens se cruzaram até um outro acontecimento de referência. A lei de transformação que procuramos deve ser tal que (16) e (17) sejam compatíveis, ou seja, que a quantidade

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{18}$$

tenha o mesmo valor em todos os referenciais.

Porque consideramos o espaço homogéneo (isto é, todos os pontos do espaço são equivalentes), a transformação em questão tem que ser linear. Podemos pois, em geral, escrever

$$\begin{array}{ccccccccc} t' & = & a_{00}t & + & a_{01}x & + & a_{02}y & + & a_{03}z \\ x' & = & a_{10}t & + & a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z \\ y' & = & a_{20}t & + & a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z \\ z' & = & a_{30}t & + & a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z \end{array} \tag{19}$$

Evidentemente, os 16 coeficientes a_{ik} são funções da velocidade v relativa dos dois observadores. Em particular, se $v = 0$, os dois referenciais são coincidentes, e esperamos pois que $a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ e todos os restantes sejam nulos.

Os eixos das coordenadas x e x' são sempre coincidentes. Isso só pode ser se os coeficientes a_{ik} forem tais que quando $y = z = 0$ (a condição para que um ponto esteja situado no eixo dos x) se verifique $y' = z' = 0$. As fórmulas de transformação para x e y devem pois ser da forma

$$y' = a_{22}y + a_{23}z \tag{20}$$

$$z' = a_{32}y + a_{33}z \tag{21}$$

e portanto $a_{20} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = 0$. Por uma questão de simetria, também se deve ter $a_{02} = a_{12} = a_{03} = a_{13} = 0$. Por outro lado, o plano xOy e o plano $x'O'y'$ são comuns, e portanto devemos ter que sempre que $z = 0$ também $z' = 0$. Assim, a lei de transformação para z fica

$$z' = a_{33}z. \tag{22}$$

Da mesma maneira obtemos que

$$y' = a_{22}y \tag{23}$$

e, por razões de simetria, somos levados a crer que $a_{22} = a_{33}$. Sendo assim, a transformação (19) reduz-se à forma, mais simples, seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} t' & = & a_{00}t & + & a_{01}x \\ x' & = & a_{10}t & + & a_{11}x \\ y' & = & a_{22}y & & \\ z' & = & a_{22}z & & \end{array} \tag{24}$$

Mas consideremos a origem O' do referencial S'. No referencial S ela move-se com velocidade v, de acordo com a expressão

$$x = vt,$$

ou

$$x - vt = 0. \tag{25}$$

A transformação de coordenadas tem que ser tal que a x e t nestas condições façam corresponder $x' = 0$, e portanto tem que ser da forma $x' = \alpha(x - vt)$, que, comparando com a segunda das equações (24), implica

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha \\ a_{10} &= -\alpha v. \end{aligned}$$

A lei de transformação é pois a seguinte

$$\begin{aligned} t' &= a_{00}t + a_{01}x \\ x' &= a_{11}(x - vt) \\ y' &= a_{22}y \\ z' &= a_{22}z \end{aligned} \tag{26}$$

Imponhamos agora a invariância da quantidade s^2 definida em (18), isto é,

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{27}$$

Usando a lei de transformação (24) e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} c^2t^2\left(a_{00}^2 - a_{11}^2\frac{v^2}{c^2} - 1\right) + x^2\left(c^2a_{01}^2 - a_{11}^2 + 1\right)^2 - \\ - \left(y^2 + z^2\right)\left(1 - a_{22}^2\right) + 2\left(a_{00}a_{01} + a_{11}^2 v\right)tx &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Mas t, x, y e z são completamente arbitrários, de forma que esta equação só pode ser satisfeita se

$$a_{00}^2 - a_{11}^2\frac{v^2}{c^2} = 1 \tag{29}$$

$$a_{11}^2 - c^2a_{01}^2 = 1 \tag{30}$$

$$a_{00}a_{01} + a_{11}^2 v = 0 \tag{31}$$

$$a_{22}^2 = 1. \tag{32}$$

As três pimeiras condições formam um sistema de três equações com três incógnitas. A solução deste sistema é

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{33}$$

$$a_{01} = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{34}$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{35}$$

A lei de transformação de coordenadas entre referenciais inerciais é pois, finalmente

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - v/c^2\, x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{36}$$

A estas relações entre as coordenadas de um acontecimento em dois referenciais inerciais dá-se o nome de *transformação de Lorentz*. A transformação de Lorentz inversa, que nos permite determinar os valores de t, x, y e z conhecidos os de t', x', y' e z' pode ser determinada resolvendo as equações (36) em ordem a t, x, y e z, ou então notando que, se o referencial S' se move com velocidade $v\hat{\boldsymbol{e}}_x$ relativamente ao referencial S, então este se move com velocidade $-v\hat{\boldsymbol{e}}_x$ relativamente àquele, bastando então trocar em (36) as coordenadas acentuadas pelas não acentuadas e mudar o sinal a v:

$$\begin{aligned} t &= \frac{t' + v/c^2\, x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{37}$$

Tomando o limite $c \to \infty$, a transformação de Lorentz reduz-se à de Galileu. Isto não nos deve espantar, já que o mesmo se passava com os conceitos de simultaneidade, de tempo e de espaço que analisámos acima. De facto, a transformação de Galileu e toda a física nela baseada são aproximações, válidas apenas para velocidades baixas em comparação com a da luz.

Na dedução da forma da transformação de Lorentz usámos apenas a invariância do valor da velocidade da luz e as propriedades de homogeneidade do espaço e do tempo e de isotropia do espaço. Podíamos agora voltar atrás e demonstrar de uma forma mais formal os efeitos já descritos de dilatação do tempo e da contracção de Lorentz-Fitzgerald.

4.2 A transformação das velocidades

Consideremos um corpo que tem, relativamente ao referencial S' uma velocidade $\boldsymbol{u}'$, com componentes u'_x, u'_y e u'_z. Pretende-se agora determinar a velocidade deste corpo relativamente ao referencial S. Naturalmente, esta velocidade é dada por

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \tag{38}$$

onde $\boldsymbol{r}$ é o vector posição do corpo no referencial S. Explicitando as componentes da velocidade, reescrevemos esta igualdade como

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{dx}{dt} && (39)\\
u_y &= \frac{dy}{dt} && (40)\\
u_z &= \frac{dz}{dt}. && (41)
\end{aligned}
$$

Mas, de acordo com as equações da transformação de Lorentz inversa (37),

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} && (42)\\
dy &= dy' && (43)\\
dz &= dz'. && (44)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, tendo em atenção que

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dt'}{dt}\frac{d\alpha}{dt'},$$

onde α representa qualquer das coordenadas x, y ou z, e que de acordo com a transformação de Lorentz (36) para o tempo,

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - v/c^2\,u_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{45}$$

resultam as leis de transformação da velocidade:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} && (46)\\
u_y &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}\,u'_y && (47)\\
u_z &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}\,u'_z && (48)
\end{aligned}
$$

Estas equações são a receita para calcular as componentes u_α da velocidade de um corpo relativamente a um observador ligado a um referencial inercial, conhecidadas as componentes u'_α da velocidade desse corpo relativamente a outro referencial inercial. Esta receita tem resultados interessantes, porque inesperados. Consideremos um comboio que se move com velocidade uniforme igual a dois terços da velocidade da luz. Imaginemos que, sobre o comboio, um canhão dispara uma bala na direcção e sentido do movimento, com uma velocidade igual também a dois terços da velocidade da luz, relativamente ao comboio. Qual a velocidade da bala relativamente ao solo? De acordo com a transformação de Galileu, o resultado deveria ser quatro terços da velocidade da luz. Mas, se escolhermos o eixo dos xx com a direcção do movimento, e usarmos a equação (46) com $v = 2c/3$ e $u'_x = 2c/3$, obtemos $u_x = 12c/13$, que ainda é inferior à velocidade da luz! De facto, a composição de duas velocidades menores que a da luz resulta sempre também inferior à velocidade da luz. A velocidade da luz aparece assim como um limite intransponível.

5 A dinâmica relativística

Como já vimos, a dinâmica de Newton é invariante sob transformações de Galileu e portanto satisfaz o princípio da relatividade, tal como este princípio era entendido antes de Einstein. Como tal não é invariante sob transformações de Lorentz, e portanto não verifica o princípio da relatividade na sua forma actual. Nesta secção vamos actualizar a física de Newton, começando pela definição de momento linear.

5.1 O momento linear e a massa relativística

Consideremos um choque elástico entre duas partículas idênticas A e B, observado em dois referenciais diferentes. Num referencial S' um observador monta uma experiência de colisão tal que as duas partículas se aproximam uma da outra seguindo linhas paralelas e com velocidades identicas mas opostas (ver a Figura 6) Neste referencial,

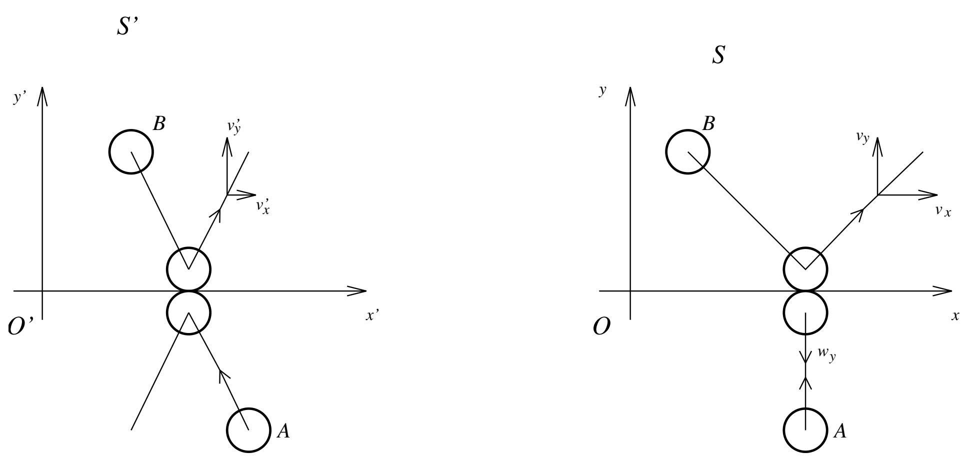

Figura 6: *Colisão elástica entre dois corpos, observada em dois referenciais inerciais diferentes*

o choque é totalmente simétrico. Sejam respectivamente $(-u'_x, u'_y)$ e $(u'_x, -u'_y)$ as componentes das velocidades das partículas A e B antes da colisão. Como as duas partículas são idênticas, o choque, sendo elástico, limita-se a trocar o sinal das componentes das velocidades na direcção do eixo $O'y'$. Então as velocidades finais das duas partículas têm componentes respectivamente iguais a $(-u'_x, -u'_y)$ e (u'_x, u'_y).

Consideremos agora que o referencial S' está animado de movimento uniforme com velocidade $v = u'_x$ relativamente a um referencial S. Neste referencial, a velocidade da partícula A tem uma componente nula na direcção do eixo Ox. Seja w_y a componente, segundo Oy, da sua velocidade. Usando as relações (46–48) podemos verificar que, no referencial S, a colisão limita-se também a trocar o sinal às componentes segundo Oy das velocidades de ambas as partículas. Assim, a soma algébrica destas componentes também troca o sinal, e portanto, se pretendemos que a quantidade de movimento, tal como a definimos usualmente, se conserve, aquela soma tem que ser zero. Mas, usando as relações inversas das definidas em (46–48)[2], obtemos

$$u'_y = w_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad \text{para a partícula } A \tag{49}$$

$$u'_y = u_y\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}, \qquad \text{para a partícula } B \tag{50}$$

Destas duas equações torna-se evidente que $u_y \neq w_y$. Logo, a soma algébrica destas velocidades é diferente de zero e portanto a quantidade de movimento, tal como é usualmente definida, não satisfaz uma lei de conservação no referencial S, apesar de a satisfazer no referencial S'. De acordo então com o princípio da relatividade, a conservação da quantidade de movimento não é, aparentemente, uma lei da natureza...

Em vez de seguirmos esta possibilidade, vamos antes tentar redefinir o momento linear, por forma a manter a validade desta lei de conservação no domínio relativístico. Suponha-se então que o momento linear é um vector com a direcção do movimento, mas que a sua dependência na velocidade não é apenas linear. Fica então definido como

$$\boldsymbol{p} = m_0\xi(v^2)\boldsymbol{v}, \tag{51}$$

onde m_0 é a massa das partículas e a função ξ é uma função que depende apenas do módulo da velocidade, e que será determinada por forma a verificar-se a conservação de $\boldsymbol{p}$ também em S, que agora se traduz por

$$m_0\xi(w_y^2)w_y = m_0\xi(u^2)u_y. \tag{52}$$

Dividindo membro a membro as equações (49) e (50) e elevando ao quadrado o resultado, obtemos

$$u_y^2 = \left(1 - 2\frac{vu_x}{c^2} + \frac{v^2u_x^2}{c^4}\right)w_y^2. \tag{53}$$

Mas v, a velocidade com que o referencial S' se move relativamente ao referencial S, é, por construcção, igual a u'_x, a componente segundo $O'y'$ da velocidade da partícula B no referencial S'. Se usarmos de novo as regras (inversas) da transformação relativística de velocidades, resulta

$$v = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}. \tag{54}$$

[2] Esta inversão pode, como para a transformação de Lorentz, ser obtida substituindo as velocidades acentuadas pelas não acentuadas e trocando o sinal de v.

Se multiplicarmos ambos os membros desta expressão por $-u_x(1 - vu_x/c^2)/c^2$, vem

$$-2\frac{vu_x}{c^2} + \frac{v^2 u_x^2}{c^4} = -\frac{u_x^2}{c^2}. \tag{55}$$

Substituindo este resultado em (53) e somando $-v_y^2 w_y^2/c^2$ obtemos

$$u_y^2 \left(1 - \frac{w_y^2}{c^2}\right) = w_y^2 \left(1 - \frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2}\right), \tag{56}$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{w_y^2}{c^2}\right)^{-1/2} w_y = \left(1 - \frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2}\right)^{-1/2} u_y, \tag{57}$$

e comparando com (52) resulta, finalmente,

$$\xi(u^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{58}$$

O momento linear de uma partícula de massa m_0 que se move com velocidade $\boldsymbol{v}$ é pois, relativisticamente, dado por

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}. \tag{59}$$

Assim como redefinimos a quantidade de movimento, poderíamos ter mantido a expressão usual $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, mas introduzir uma *massa relativística,* dependente da velocidade, através de

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{60}$$

onde m_0 é a chamada *massa em repouso* do corpo, que é a medida num referencial onde ele se encontra parado. Daqui em diante, o símbolo m será usado sempre no sentido definido em (60); quando nos referirmos à massa própria, usaremos antes o símbolo m_0.

5.2 A segunda lei de Newton e a energia cinética

A segunda lei de Newton pode, para velocidades baixas, escrever-se na forma

$$\boldsymbol{F} = m_0\boldsymbol{a}. \tag{61}$$

No entanto, para velocidades próximas da da luz, esta expressão não pode ser válida. Para vermos que assim é, basta, por exemplo, pensar nas acelerações que os vários intervenientes numa colisão comunicam uns aos outros, através de forças de choque. Essas acelerações têm que ser tais que se verifique o princípio de conservação do momento que acabámos de redefinir. Em vez de (61), podemos antes usar a forma original, dada por Newton à sua segunda lei:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}. \tag{62}$$

Com esta forma, as nossas modificações no conceito de momento ficam automaticamente integradas no edifício da dinâmica. O princípio do trabalho-energia mantém-se (com a força dada por (62)), possibilitando a definição de energia cinética.

Consideremos uma partícula, com massa em repouso igual a m_0, que, sob a acção de uma força, atinge uma velocidade v, partindo do repouso. A energia cinética adquirida pela partícula é igual ao trabalho realizado pela força, ou seja

$$\begin{aligned} T &= \int_0^v F\,ds = \int_0^v \frac{dp}{dt}\,ds = \int_0^v \frac{dp}{dv'}\frac{ds}{dt}dv' = \frac{c^2}{2}\int_0^v \frac{dp}{dv'}d\left(\frac{v'^2}{c^2}\right) \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \end{aligned} \tag{63}$$

Note-se que à medida que a velocidade da partícula se aproxima da da luz, a sua energia cinética cresce indefinidamente. Assim, é necessário que a força realize um trabalho infinito para que este limite seja atingido.

O limite clássico da relação entre energia cinética e velocidade pode ser recuperado desenvolvendo (63) em série de McLaurin de potências de v^2/c^2 e mantendo apenas os termos de ordem mais baixa, obtendo-se a definição usual da energia cinética.

A relação (63) entre velocidade e energia cinética foi alvo de (pelo menos) uma experiência desenhada explicitamente para a testar, usando electrões num acelerador de partículas[3], tendo-se verificado um acordo notável entre os resultados experimentais e os previstos por (63).

5.3 A energia total relativística

A energia cinética de uma partícula pode reescrever-se, usando (60), na forma

$$T = mc^2 - m_0c^2. \tag{64}$$

Esta expressão sugere a interpretação dos termos no lado direito como sendo a energia total (o primeiro) e uma energia residual, existente mesmo quando a partícula está imóvel, que tem o nome de *energia própria,* ou *energia em repouso.*

Usando esta definição de energia total, podemos escrever

$$E^2 = m^2c^4 = \frac{m_0^2c^4}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}, \tag{65}$$

de onde se obtém

$$E^2 = \frac{E^2v^2}{c^2} + m_o^2c^4.$$

[3]Ver W. Bertozzi, *Am. J. Phys.* **32**, 551 (1964)

Por outro lado, da definição de momento resulta $Ev/c^2 = p$ e substituindo em cima, resulta

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4. \tag{66}$$

Estas relações sugerem que a massa própria contribui para o conteúdo energético dos corpos, mesmo quando se encontram em repouso e não estão sujeitos a interacções. Assim, os princípios da conservação da energia e da massa devem ser integrados num único. Note-se que esta não é apenas uma questão de formalismo teórico. Há fenómenos que são proibidos por duas leis de conservação separadas, mas não o são por uma única que integre as duas. Por exemplo, a síntese nuclear não seria possível num universo que funcionasse com as leis da física clássica, já que a massa dos núcleos é, em geral, inferior à soma das massas dos protões e neutrões seus constituintes. Nos termos da teoria da relatividade, esta diferença de massas surge na forma de energia, que é libertada aquando da ligação dos elementos que constituem o núcleo.

5.4 Leis de transformação para a força

Vamos de seguida achar as expressões que nos permitem determinar as componentes de uma força num referencial inercial, a partir do seu valor noutro referencial. Evidentemente, como a força é, por definição, igual à taxa temporal de variação do momento, devemos primeiro obter a lei de transformação desta quantidade.

Consideremos então dois referenciais inerciais S e S' que se relacionam da forma simples que temos considerado. Os eixos $O'x'$ e Ox têm ambos a direcção do movimento relativo dos dois referenciais, descrito com uma velocidade com módulo v. Os outros eixos são escolhidos por forma a eixos homónimos ficarem paralelos. Uma partícula move-se com velocidade $\boldsymbol{u'}$ no referencial S'. Para um observador em repouso no referencial S, a mesma partícula move-se com uma velocidade $\boldsymbol{u}$. Seja m_0 a massa em repouso desta partícula.

Começamos por notar que, sendo $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ e $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$, se tem

$$c^2 - u^2 = \frac{c^2\left(c^2 - u'^2\right)\left(c^2 - v^2\right)}{\left(c^2 + u_x'v\right)^2}. \tag{67}$$

(Para verificar esta expressão basta usar-se a lei de transformação da velocidade (46-48) para se desenvolver o lado esquerdo.) Dividindo ambos os membros por c^2, invertendo e tomando a raiz quadrada, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1 + u_x'v/c^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{68}$$

Esta equação será muito útil em breve.

No referencial S', a energia e as componentes do momento são

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \\ p_x' &= \frac{m_0u_x'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p'_y &= \frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \\
p'_z &= \frac{m_0 u'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}.
\end{aligned}
$$

De forma semelhante, no referencial S,

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\
p_x &= \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\
p_y &= \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\
p_z &= \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.
\end{aligned}
$$

Usando a equação (68), a primeira destas expressões pode desenvolver-se da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \frac{1+u'_x v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} + \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} v \right\} \\
&= \frac{E' + v p'_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (69)
\end{aligned}
$$

Da mesma maneira obtêm-se as componentes do momento, resultando as relações de transformação para a energia e o momento:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{E' + v p'_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (70) \\
p_x &= \frac{p'_x + E' v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (71) \\
p_y &= p'_y \qquad (72) \\
p_z &= p'_z. \qquad (73)
\end{aligned}
$$

(Note-se a semelhança com a transformação de Lorentz.)

Estamos finalmente em condições de deduzir a expressão da transformação da força. No referencial S', tem-se

$$
F'_x = \frac{dp'_x}{dt'};\ F'_y = \frac{dp'_y}{dt'};\ F'_z = \frac{dp'_z}{dt'},
$$

ao passo que no referencial S, estas mesmas relações se escrevem

$$
F_x = \frac{dp_x}{dt};\ F_y = \frac{dp_y}{dt};\ F_z = \frac{dp_z}{dt}.
$$

Tomemos por exemplo a primeira destas igualdades. Usando as leis de transformação do momento e a regra da derivada da função composta, podemos reescrevê-la como

$$F_x = \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\left(\frac{p'_x + E'v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{74}$$

Se na equação (45) eliminarmos u_x usando (46), obtemos

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+vu'_x/c^2}, \tag{75}$$

e resulta então

$$F_x = \frac{1}{1+vu'_x/c^2}\left(\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{v}{c^2}\frac{dE'}{dt'}\right). \tag{76}$$

A primeira parcela é a primeira componente da força no referencial acentuado. A derivada dE'/dt' pode, facilmente, ser calculada notando que o princípio do trabalho energia ainda é válido no domínio relativístico, e, portanto, a variação de energia cinética é igual ao trabalho da força, $dE' = \boldsymbol{F}' \cdot d\boldsymbol{r}'$, logo

$$\begin{aligned} \frac{dE'}{dt'} &= \boldsymbol{F}' \cdot \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} = \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{u}' \\ &= F'_x u'_x + F'_y u'_y + F'_z u'_z. \end{aligned} \tag{77}$$

Substituindo em (76), obtém-se imediatamente

$$F_x = F'_x + \frac{vu'_y}{c^2+vu'_x}F'_y + \frac{vu'_z}{c^2+vu'_x}F'_z. \tag{78}$$

As relações de transformação para as restantes componentes da força podem ser obtidas de forma semelhante, resultando

$$F_y = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+vu'_x/c^2}F'_y \tag{79}$$

$$F_z = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+vu'_x/c^2}F'_z, \tag{80}$$

6 A força entre duas cargas pontuais

Voltamos agora à situação apresentada quando discutimos a não invariância do electromagnetismo sob transformações de Galileu. Nesta secção (que deveria ser uma subsecção numa secção dedicada ao electromagnetismo), mostraremos com um exemplo que o campo magnético usual, que satisfaz as equações de Maxwell para os corpos em repouso, ou as suas versões integrais (lei de Ampére e de Faraday) não é mais que o limite para velocidades baixas da transformação relativística do campo electrostático. A situação descrita na Secção 2.2 perde assim o seu carácter aparentemente paradoxal.

Consideremos, de novo, os habituais referenciais inerciais S e S', relacionados como de costume. Suponhamos que, na origem do referencial S' está situada uma carga pontual Q_a. Num ponto de coordenadas $(x', y', 0)$ (o valor da coordenada z' pode ser tomado nulo, através de uma escolha conveniente da orientação dos eixos $O'y'$ e $O'z'$) encontra-se uma outra carga Q_b, instantaneamente em repouso. A força eléctrica medida por um observador em repouso no referencial S é dada pela lei de Coulomb, sendo pois as suas componentes

$$F'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a Q_b}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} x' \tag{81}$$

$$F'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a Q_b}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} y' \tag{82}$$

$$F'_x = 0. \tag{83}$$

Podemos agora usar as equações (78-80) para determinar a força $\boldsymbol{F}$ exercida pela carga Q_a sobre a carga Q_b no referencial S, onde se movem com velocidade v. O resultado é, no instante $t = 0$,

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a Q_b}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \gamma x \tag{84}$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a Q_b}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \gamma \left(1 - v^2/c^2\right) y \tag{85}$$

$$F_z = 0, \tag{86}$$

onde se introduziu $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Podemos juntar estas expressões numa relação vectorial:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a Q_b}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \gamma \boldsymbol{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{Q_a Q_b}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} v^2 y \hat{\boldsymbol{e}}_2, \tag{87}$$

sendo $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ o versor da direcção Oy. Mas a velocidade do referencial S' relativamente a S é dada por $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e portanto $vy\hat{\boldsymbol{e}}_2 \equiv \boldsymbol{v} \times \hat{\boldsymbol{e}}_3$. Podemos pois reescrever $\boldsymbol{F}$ na forma

$$\boldsymbol{F} = Q_b \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \gamma \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{Q_a}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \gamma v y \hat{\boldsymbol{e}}_3 \right]. \tag{88}$$

Ou seja, a força sobre a carga Q_b assume uma forma semelhante à de Lorentz:

$$\boldsymbol{F} = Q_b \left(\boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_a \right), \tag{89}$$

com

$$\boldsymbol{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \gamma \boldsymbol{r} \tag{90}$$

$$\boldsymbol{B}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{Q_a}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2\right)^{3/2}} \gamma v y \hat{\boldsymbol{e}}_3. \tag{91}$$

Finalmente, notamos que $1/(\epsilon_0 c^2) = \mu_0$, que $vy\hat{\boldsymbol{e}}_3 \equiv \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$ e tomamos o limite não relativístico destas expressões, que, como normalmente, pode ser calculado fazendo

$\gamma \to 1$. Obtemos então

$$\boldsymbol{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_a}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{r} \tag{92}$$

$$\boldsymbol{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi}Q_a\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{93}$$

Que são as expressões usuais (não relativísticas) do campo eléctrico e do campo magnético. Assim, vemos que o campo magnético mais não é que o limite, para velocidades baixas, de uma manifestação relativística do campo electrostático, ou vice-versa.

7 Conclusão

Embora choque a nossa intuição em muitos aspectos e por isso seja usualmente acolhida com reservas numa primeira apresentação, a teoria da relatividade restrita (já com 90 anos!) está actualmente bem estabelecida e integrada de forma consistente no conjunto da física moderna. Há muitos fenómenos cuja interpretação só pode ser feita (ou pelo menos fica muito clarificada) no quadro da relatividade. Uma destas questões acabou de ser analisada. Outros exemplos são as enormes energias envolvidas nas reacções nucleares, a estrutura fina do espectro do átomo de hidrogénio, o significado físico do momento magnético intrínseco (spin) dos electrões, etc, etc, etc. Para além destas vantagens, conceptualmente atractivas, da teoria da relatividade, há também a massa enorme de resultados experimentais não enquadráveis pela física não relativística, descritos com rigor pela teoria de Einstein e pelas suas derivadas, como a Electrodinâmica Quântica (QED) de Feynman. Estas são algumas razões, mais que suficientes, da aceitação generalizada da teoria da relatividade.

*
* *

Estas notas poderiam intitular-se “A teoria da relatividade restrita de A a B” (se não fosse demasiado evidente o plágio a um livro sobre a teoria generalizada) por ser tão elementar o seu nível e tão grandes as suas lacunas. Não foi abordada a evidência experimental que apoia a teoria da relatividade (esta expressão é um eufemismo: a teoria está perfeitamente demonstrada por inúmeras experiências explicitamente realizadas para a testar, e por observações do dia-a-dia nos aceleradores de partículas). Também não foi discutido o efeito Doppler-Fizeau com as correcções introduzidas pela relatividade. A geometria pseudo-euclideana de Minkowski não foi sequer aflorada...

Estes são apenas alguns exemplos das muitas insuficiências destas notas e do seminário que apoiaram. Para os que queiram aprender mais sobre estes assuntos, e até sobre a teoria generalizada, deve dizer-se que a biblioteca da U.B.I., tem alguns textos interessantes, com diferentes níveis de profundidade, alguns dos quais foram utilizados na preparação destas notas.

Bibliografia

Para a elaboração destas notas foram consultadas (leia-se copiadas) as seguintes referências, todas presentes na biblioteca da U.B.I.:

- Resnick — *Introduction to Special Relativity,* John Wiley & Sons, Inc., 1968.
- Taylor e Wheeler — *Spacetime Physics,* Freeman and Company, 1966.
- Richtmyer, Kennard e Lauritsen — *Introduction to Modern Physics,* McGraw Hill, 1955.
- Kilmister — *Special Theory of Relativity,* Pergamon Press, 1970.
- Schröder — *Special Relativity,* World Scientific, 1990.
- Synge — *Relativity: The Special Theory,* North-Holland Publishing Company, 1972.
- Corson e Lorrain — *Electromagnetic Fields And Waves,* Freeman and Company, 1970. (Existe tradução em francês)