

Mecânica dos meios contínuos

Notas de aula

Nelson Achcar

Lucas Lopes de Cerqueira

Chapter 1

Cinemática dos Meios Contínuos

1.1 Elementos de Matemática

1.1.1 Pontos, vetores, tensores

Nestas notas \mathbb{E} indica o conjunto dos *pontos* do espaço da Geometria Euclidiana e \mathbb{V} o conjunto dos *vetores livres* associados a \mathbb{E} .

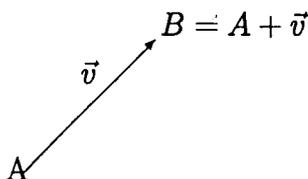
Cada par ordenado de pontos (A, B) determina um único vetor indicado por \vec{AB} de tal forma que: quaisquer que sejam os pontos A, B, C

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \quad (1.1)$$

e dados $A \in \mathbb{E}$ e $\vec{v} \in \mathbb{V}$ existe um único ponto B tal que $\vec{AB} = \vec{v}$

Exercício 1. Verifique que $\vec{AA} = \vec{0}$ e que $\vec{BA} = -\vec{AB}$

Sendo $\vec{v} = \vec{AB}$ então, por definição, o ponto B é a soma do ponto A com o vetor \vec{v} .



Uma *base* b de \mathbb{V} é uma tripla ordenada $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tal que cada $\vec{v} \in \mathbb{V}$ se escreve de modo único como combinação linear dos \vec{e}_i :

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \quad (1.2)$$

Cada número real v_i é chamado de *coordenada* de \vec{v} na base b . Indicaremos por $[\vec{v}]_b$ a matriz coluna constituída pelas coordenadas de \vec{v} na base b :

$$[\vec{v}]_b = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

A base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é *ortonormal* se cada \vec{e}_i for unitário (comprimento igual a 1) e os \vec{e}_i forem mutuamente ortogonais.

O *produto escalar* do vetor \vec{u} pelo vetor \vec{v} é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \quad (1.4)$$

onde $\|\vec{u}\|$ indica a *norma* (ou *comprimento*) de \vec{u} e $\theta \in [0, \pi]$ o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} . Se a base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ for *ortonormal* então

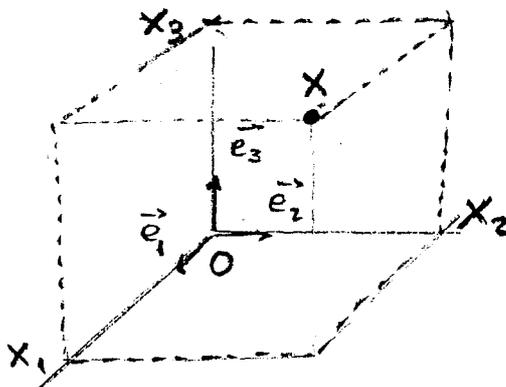
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (1.5)$$

Fazendo $\vec{u} = \vec{v}$ em (3) e (4) segue-se que

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2} = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

Um *sistema cartesiano ortogonal de coordenadas em \mathbb{E}* é um par (O, b) onde O é um ponto de \mathbb{E} e b é uma base ortonormal de \mathbb{V} . Dado um ponto $X \in \mathbb{E}$, $O\vec{X} \in \mathbb{V}$ e, portanto, $O\vec{X}$ se escreve como combinação linear dos \vec{e}_i :

$$O\vec{X} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$$



Os escalares X_1, X_2, X_3 são chamados *coordenadas* de X no sistema (O, b) . Uma vez fixado um sistema de coordenadas, podemos identificar cada ponto $X \in \mathbb{E}$ com a tripla (X_1, X_2, X_3) e pensar \mathbb{E} como o espaço \mathbb{R}^3 . Neste caso escrevemos

$$X = (X_1, X_2, X_3)$$

Exercício 2. Mostre que se $X = (X_1, X_2, X_3)$ e $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ então $X\vec{Y} = (Y_1 - X_1)\vec{e}_1 + (Y_2 - X_2)\vec{e}_2 + (Y_3 - X_3)\vec{e}_3$.

Por causa do resultado enunciado no exercício acima também se usa a notação $Y - X$ para indicar o vetor $X\vec{Y}$, ou seja, por definição tem-se

$$Y - X = X\vec{Y} \quad (1.7)$$

Exercício 3. Sejam $A = (X_1, X_2, X_3)$, $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ e $B = A + \vec{v}$. Mostre que $B = (X_1 + a, X_2 + b, X_3 + c)$.

Um *operador linear* em \mathbb{V} é uma aplicação $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ que é linear, ou seja,

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$$

quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Em Mecânica do Contínuo os operadores lineares de \mathbb{V} são chamados de *tensores* (de segunda ordem)

A *matriz de T na base b* , indicada por $[T]_b$, é definida do seguinte modo: sendo

$$\begin{aligned} T(\vec{e}_1) &= T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2 + T_{31}\vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_2) &= T_{12}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 + T_{32}\vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_3) &= T_{13}\vec{e}_1 + T_{23}\vec{e}_2 + T_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

então

$$[T]_b = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

A utilidade da matriz de T na base b está na seguinte fórmula:

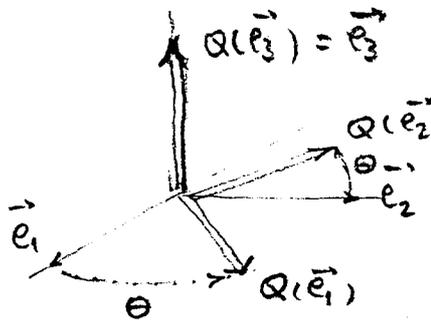
$$[T(\vec{v})]_b = [T]_b[\vec{v}]_b \quad (1.10)$$

Exemplo 1. Os operadores $\mathbf{1} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ e $\mathbf{0} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definidos por $\mathbf{1}(\vec{v}) = \vec{v}$ e $\mathbf{0}(\vec{v}) = \vec{0}$ são lineares e suas matrizes em relação a qualquer base b são:

$$[\mathbf{1}]_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{0}]_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2. Seja $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal orientada segundo a regra da mão direita. *A rotação vetorial* de θ radianos em torno de \vec{e}_3 no sentido anti-horário é o tensor \mathbf{Q} tal que

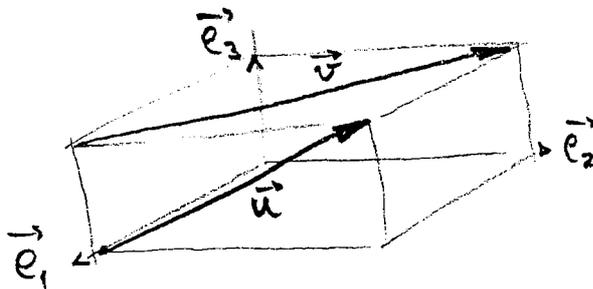
$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\vec{e}_1) &= \cos\theta \vec{e}_1 + \text{sen}\theta \vec{e}_2 \\ \mathbf{Q}(\vec{e}_2) &= -\text{sen}\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2 \\ \mathbf{Q}(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 \end{aligned}$$



Portanto a matriz de \mathbf{Q} na base b é

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4. $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal



- a) escreva $\vec{u}, \vec{v}, u + v$ na base b
 b) calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}, \|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{u} + \vec{v}\|, \angle(\vec{u}, \vec{v}), \angle(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v})$.
 c) determine as coordenadas de $B = A + (\vec{u} + \vec{v})$

Exercício 5. Seja $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de \mathbb{V} e seja $\vec{v} \in \mathbb{V}$. Mostre que $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 (\vec{v} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$

Exercício 6. Quais das seguintes aplicações $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ são lineares? Para as que forem, escreva $[T]_b$. $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base de \mathbb{V} e $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$.

- a) $T(\vec{v}) = v_2 \vec{e}_1 + v_1 \vec{e}_1 - (v_1 + v_3) \vec{e}_3$
 b) $T(\vec{v}) = v_1 v_2 \vec{e}_1 + v_3 \vec{e}_3$
 c) $T(\vec{v}) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
 d) $T(\vec{v}) = 2v_1 \vec{e}_1 + v_3 \vec{e}_2 + (v_1 + v_2 + v_3) \vec{e}_3$

Exercício 7. Mostre que se dois operadores lineares coincidem numa base de \mathbb{V} , elas coincidem em todo \mathbb{V} . Ou seja, verifique que sendo S e T tensores e $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de \mathbb{V} , se $S(\vec{e}_i) = T(\vec{e}_i)$ para $i = 1, 2, 3$, então $S(\vec{v}) = T(\vec{v})$ para todo \vec{v}

Exercício 8. Sejam \vec{a} e $\vec{b} \in \mathbb{V}$. O *produto tensorial* de \vec{a} por \vec{b} , indicado por $\vec{a} \otimes \vec{b}$ é o operador definido por

$$\vec{a} \otimes \vec{b}(\vec{v}) = (\vec{b} \cdot \vec{v}) \vec{a}$$

1. mostre que $\vec{a} \otimes \vec{b}$ é linear

Seja $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de \mathbb{V} .

2. sendo $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$ e $\vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i$, determine $[\vec{a} \otimes \vec{b}]_b$.
 3. seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ linear e seja $T_{ij} = \vec{e}_i \cdot T(\vec{e}_j)$. Mostre que $T = \sum_{i,j} T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.

1.1.2 Mudança de base

Sejam $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $b^* = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases de \mathbb{V} . Cada \vec{f}_j se escreve como combinação linear dos \vec{e}_i :

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^3 m_{ij} \vec{e}_i$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

é chamada *matriz de mudança da base b para a base b^** e é indicada por M_{bb^*}

Seja $M = M_{bb^*}$, M é invertível e

$$[\vec{v}]_b = M[\vec{v}]_{b^*} \quad [T]_{b^*} = M^{-1}[T]_b M \quad (1.11)$$

Exercício 9. Verifique as fórmulas (11) acima.

Exercício 10. Sejam $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal e $b^* = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ onde

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

1. verifique que b^* é ortonormal
2. determine $M = M_{bb^*}$ e M^{-1}
3. escreva as matrizes da rotação $R_{\theta}^{\vec{f}_3}$ nas bases b^* e b .

Exercício 11. Sejam b e b^* bases de \mathbb{V} e seja T um operador linear de \mathbb{V} . Mostre que

$$\det[T]_b = \det[T]_{b^*} \quad (1.12)$$

$$\text{tr}[T]_b = \text{tr}[T]_{b^*} \quad (1.13)$$

1.1.3 Análise Vetorial. Curvas

Consideremos uma função definida num intervalo de números reais com valores em \mathbb{V}

$$\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{V}$$

$$u \mapsto \vec{r}(u)$$

Fixada uma base b em \mathbb{V} tem-se

$$\vec{r}(u) = x(u)\vec{e}_1 + y(u)\vec{e}_2 + z(u)\vec{e}_3$$

Por exemplo, $\vec{r}(u) = \cos(u)\vec{e}_1 + \sin(u)\vec{e}_2 + u\vec{e}_3$

Definição 1. 1. $\lim_{u \rightarrow u_0} \vec{r}(u) = \lim_{u \rightarrow u_0} x(u)\vec{e}_1 + \lim_{u \rightarrow u_0} y(u)\vec{e}_2 + \lim_{u \rightarrow u_0} z(u)\vec{e}_3$

2. $\frac{d\vec{r}}{du}|_{u_0} = \frac{dx}{du}|_{u_0} \vec{e}_1 + \frac{dy}{du}|_{u_0} \vec{e}_2 + \frac{dz}{du}|_{u_0} \vec{e}_3$

O limite e a derivada acima não dependem da base b usada para defini-los.

Proposição 1. $\frac{d\vec{r}}{du}|_{u_0} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\vec{r}(u) - \vec{r}(u_0)}{u - u_0}$

Proof. A demonstração fica como exercício. □

Uma *curva em \mathbb{E}* é uma função definida num intervalo de números reais com valores em \mathbb{E} :

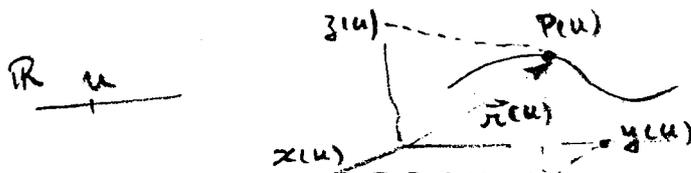
$$u \in I \mapsto P(u) \in \mathbb{E}$$

O conjunto dos pontos $P(u), u \in I$, é o *traço* da curva. Fixado O em \mathbb{E} , a cada curva está associada uma função vetorial

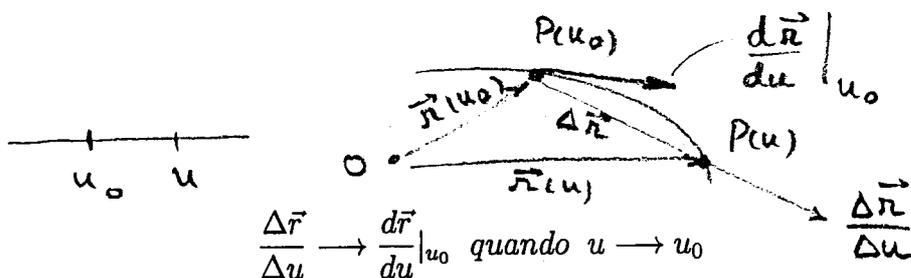
$$u \in I \mapsto \vec{r}(u) = \vec{OP}(u)$$

Fixado um sistema de coordenadas em \mathbb{E} , $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$P(u) = (x(u), y(u), z(u)) \Leftrightarrow \vec{r}(u) = x(u)\vec{e}_1 + y(u)\vec{e}_2 + z(u)\vec{e}_3$$



Usando a proposição anterior, podemos interpretar $\frac{d\vec{r}}{du}|_{u_0}$



Quando o parâmetro u é o tempo, $u = t$, a curva $t \mapsto P(t)$ é o movimento de um ponto e $\frac{d\vec{r}}{du}|_{t_0}$ é a sua velocidade no instante t_0 .

Exercício 12. Desenhe o traço do movimento $t \mapsto P(t) = (\cos t, \sin t, t)$ e calcule a sua velocidade quando $t = \pi/2$.

Exercício 13. A cicloide é a curva descrita por um ponto de uma circunferência que rola sem escorregar sobre uma reta fixa. Parametrize a cicloide, ou seja, determine uma função $u \mapsto P(u)$ cujo traço seja a cicloide. (Sugestão: use como parâmetro u o ângulo que a circunferência rolou a partir da posição original).

1.1.4 Regra da Cadeia

Em uma variável

Se $y = y(x)$ e $x = x(t)$, ($t \mapsto x \mapsto y$), então

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x_0} \frac{dx}{dt}\Big|_{t_0}; \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.14)$$

desde que:

a composição $y = y(x(t))$ seja possível e

$\frac{dx}{dt}\Big|_{t_0}$ e $\frac{dy}{dx}\Big|_{x_0}$ existam.

Em várias variáveis

Se $y = y(x_1, \dots, x_n)$ e $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, ($t \mapsto (x_1, \dots, x_n) \mapsto y$) então

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^0, \dots, x_n^0)} \frac{dx_1}{dt}\Big|_{t_0} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\Big|_{(x_1^0, \dots, x_n^0)} \frac{dx_n}{dt}\Big|_{t_0} \quad (1.15)$$

onde $x_i^0 = x_i(t_0)$, desde que:

a composição $y = y(x_1(t), \dots, x_n(t))$ seja possível

as derivadas $\frac{dx_i}{dt}\Big|_{t_0}$ existam, $i = 1, \dots, n$.

$y = y(x_1, \dots, x_n)$ seja diferenciável em (x_1^0, \dots, x_n^0) . (Isso ocorre se as derivadas parciais $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ forem contínuas em (x_1^0, \dots, x_n^0)).

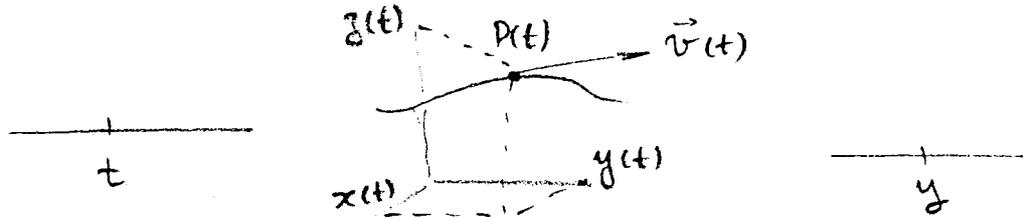
A fórmula (1.15) pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t_0} = \nabla y(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \vec{v}(t_0)$$

onde

$$\nabla y(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Big|_{(x_1^0, \dots, x_n^0)} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Big|_{(x_1^0, \dots, x_n^0)} \vec{e}_n$$

$$\vec{v}(t_0) = \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t_0} \vec{e}_1 + \dots + \frac{dx_n}{dt} \Big|_{t_0} \vec{e}_n$$



Exercício 14. A temperatura num ponto (x, y, z) é dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Num certo instante, um inseto passa pelo ponto $(1, 1, 2)$ com velocidade $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Determine a taxa de variação da temperatura do inseto no instante considerado.

Exercício 15. A partir da Regra da Cadeia formulada acima, escreva a fórmula para calcular $\frac{\partial y}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial v}$ sendo $y = y(x_1, \dots, x_n)$, $x_i = x_i(u, v)$, $i = 1, \dots, n$. Em que pontos são calculadas cada derivada parcial que ocorre na fórmula?

Exercício 16.

$$Y(X_1, X_2, X_3) = y(x_1, x_2, x_3)$$

onde $x_1 = X_1 + \gamma X_2$, $x_2 = X_2 + \gamma X_3$, $x_3 = X_3$. Mostre que

$$\nabla Y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \left(\gamma \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) \vec{e}_2 + \gamma \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_3} \right) \vec{e}_3$$

Em que pontos estão calculados o primeiro membro e cada derivada parcial da igualdade acima?

Exercício 17. $y = y(x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$. Mostre que

$$\nabla y = \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial y}{\partial z} \vec{e}_z$$

onde

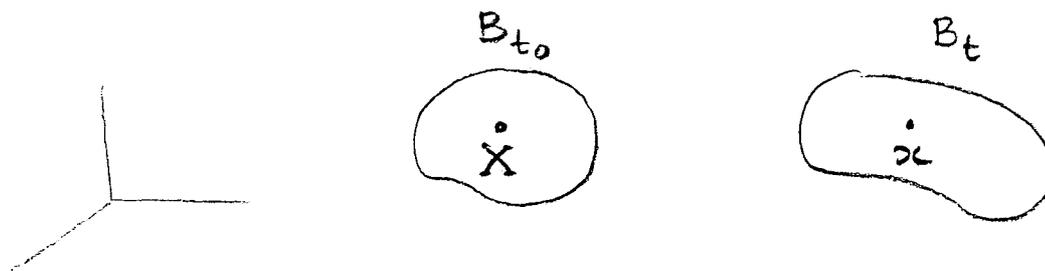
$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_3$$

1.2 Descrição do movimento de um corpo

Consideremos um corpo em movimento e indiquemos por B_t sua configuração no instante t .



Um ponto que ocupa a posição X no instante t_0 passa a ocupar a posição x no instante t . Descreve-se matematicamente o movimento dando a função que permite calcular x em função de X e de t :

$$x = f(X, t) \quad (1.16)$$

É habitual em Mecânica também se escrever

$$x = x(X, t) \quad (1.17)$$

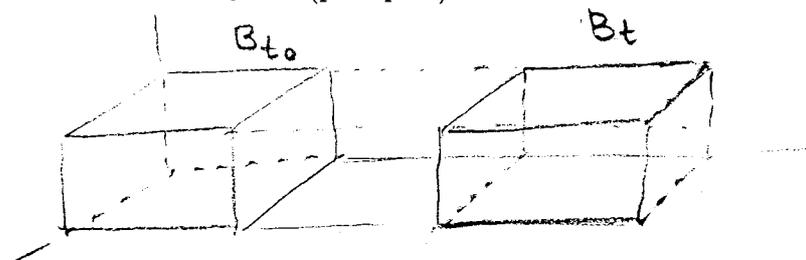
É à função f que se dá o nome de *movimento*. B_{t_0} é a chamada *configuração de referência* do movimento e passará a ser indicada nestas notas por B , sem índice. t_0 é chamado *instante de referência*. Fixado um sistema cartesiano de coordenadas em \mathbb{E} e sendo $X = (X_1, X_2, X_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, (1.17) se escreve:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Exemplo 3. Dado o movimento

$$x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 + kt \quad x_3 = X_3 \quad (t \geq 0, k > 0)$$

sendo B o cubo unitário $0 \leq X_1 \leq 1$, $0 \leq X_2 \leq 1$, $0 \leq X_3 \leq 1$. A configuração B_t é o cubo $0 \leq x_1 \leq 1$, $kt \leq x_2 \leq 1+kt$, $0 \leq x_3 \leq 1$. O instante de referência é $t_0 = 0$ (por quê?)



O deslocamento do ponto X é, por definição, o vetor

$$\vec{u} = x - X.$$

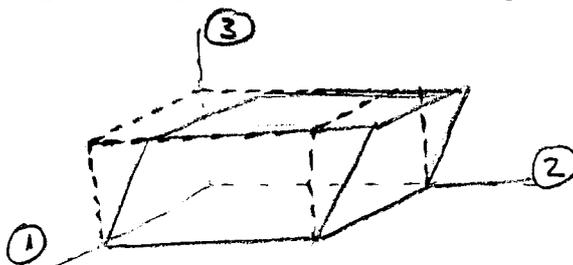
Neste exemplo,

$$\vec{u} = kt \vec{e}_2$$

Exemplo 4. Dado o movimento

$$x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 + ktX_3 \quad x_3 = X_3 \quad (k > 0, t \geq 0)$$

sendo B o cubo unitário como no exemplo 1, desenhando com traço pontilhado, B_t é o paralelepípedo desenhado com traço contínuo.



O desenho anterior se justifica com o cálculo do deslocamento

$$\vec{u} = x - X = ktX_3 \vec{e}_2$$



Exercício 18. Dado o movimento

$$x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 + ktX_3^2 \quad x_3 = X_3 \quad (k > 0; t \geq 0)$$

e sendo B ocubo unitário dos exemplos 1 e 2, desenhe B_t .

Exercício 19. Seja (O, b) um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas em \mathbb{E} . Considere o movimento

$$x = O + Q(t)(X - O)$$

, onde Q é o operador de \mathbb{V} cuja matriz na base b é

$$[Q(t)]_b = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Descreva o movimento de um corpo cuja configuração de referência é um cilindro de eixo no eixo3
2. Qual é o instante de referência?
3. Escreva o movimento em coordenadas.

Considere agora $x = q(t) + Q(t)(X - O)$ onde $q(t) = (t, t, 0)$. Refaça para este movimento os itens 1) a 3) acima.

1.3 Gradiente de Deformação

Consideremos um movimento descrito num sistema cartesiano (O, b) por (1.18). Fixado um instante t , a função

$$X \mapsto x$$

é chamada *deformação no instante t* . B_t passa a ser chamada *configuração deformada no instante t* .

Definição 2. O tensor $F(X, t) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ cuja matriz na base b é

$$[F(X, t)]_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

é chamado *gradiente de deformação no ponto X no instante t* . O determinante $J(X, t) = \det[F(X, t)]_b$ é chamado *Jacobiano* da deformação no instante t

Exemplo 5. O gradiente de deformação no instante t do movimento $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + ktX_3$, $x_3 = X_3$ é dado por

$$[F(X, t)]_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & kt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad J(X, t) = 1$$

Exercício 20. Calcule os gradientes e os jacobianos dos movimentos do exemplo e dos exercícios da seção anterior.

Consideremos uma curva

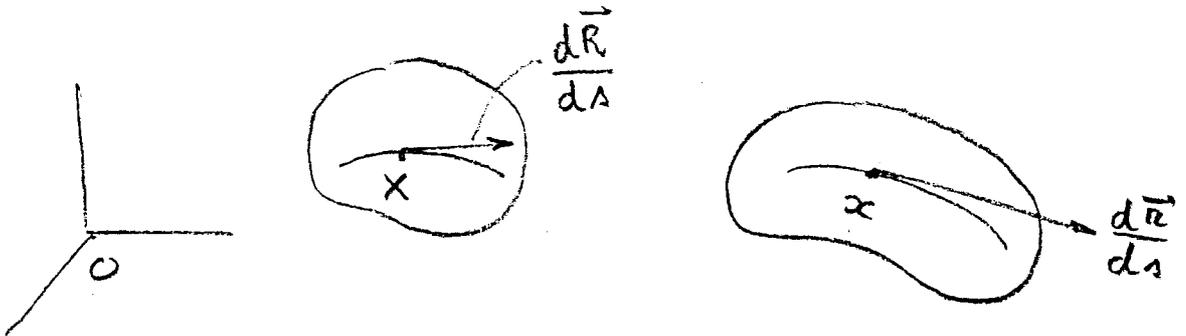
$$X(s) = (X_1(s), X_2(s), X_3(s)), \quad s \in I \text{ (} I \text{ intervalo de } \mathbf{R} \text{)}$$

cujo traço está contido em B . Na configuração B_t a deformada dessa curva é dada por

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \quad s \in I$$

onde

$$x_i(s) = x_i(X_1(s), X_2(s), X_3(s), t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.19)$$



Sejam $\vec{R} = \vec{O}X$ e $\vec{r} = \vec{O}x$. Então:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{R}}{ds} &= \frac{dX_1}{ds}\vec{e}_1 + \frac{dX_2}{ds}\vec{e}_2 + \frac{dX_3}{ds}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{r}}{ds} &= \frac{dx_1}{ds}\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{ds}\vec{e}_2 + \frac{dx_3}{ds}\vec{e}_3\end{aligned}$$

são os vetores tangentes à primeira curva em X e à segunda em x , respectivamente. (Mais precisamente, sendo $X_0 = X(s_0)$ e $x_0 = x(s_0)$, então os vetores tangentes às curvas nesses pontos são $\frac{d\vec{R}}{ds}|_{s_0}$ e $\frac{d\vec{r}}{ds}|_{s_0}$, ou seja, todas as derivadas são calculadas em s_0). Usando a regra da cadeia em (1.19) temos:

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{dX_1}{ds} + \frac{\partial x_i}{\partial X_2} \frac{dX_2}{ds} + \frac{\partial x_i}{\partial X_3} \frac{dX_3}{ds} \quad i = 1, 2, 3$$

onde as derivadas ordinárias são calculadas em s_0 e as parciais em (X_0, t) .

Logo

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{ds} \\ \frac{dx_2}{ds} \\ \frac{dx_3}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX_1}{ds} \\ \frac{dX_2}{ds} \\ \frac{dX_3}{ds} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds} \right]_b = \left[F(X_0, t) \right]_b \left[\frac{d\vec{R}}{ds} \right]_b$$

Portanto

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = F(X_0, t) \frac{d\vec{R}}{ds}$$

Em palavras: enquanto a deformação transforma ponto em ponto (X em x), o gradiente transforma vetor tangente em vetor tangente ($\frac{d\vec{R}}{ds}$ em $\frac{d\vec{r}}{ds}$).

Exercício 21. Dado o movimento

$$x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 + tX_3^2 \quad x_3 = X_3$$

considere uma curva com traço na configuração de referência e que passa por $X_0 = (1, 2, 3)$ tendo nesse ponto vetor tangente $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{e}_2$. Considere a deformada dessa curva no instante $t = 2$, e calcule seu vetor tangente em $x_0 = x(X_0, 2)$.

1.4 Estiramento e distorção

Sejam X em B e \vec{V} o vetor tangente em X a uma curva cujo traço está contido em B . Como sabemos, o vetor tangente à curva deformada no ponto $x = x(X, t)$ é $F(X, t)(\vec{V})$. Definimos o *estiramento* em X na direção de \vec{V} no instante t por

$$\lambda_{\vec{V}}(X, t) = \frac{\|F(X, t)(\vec{V})\|}{\|\vec{V}\|}$$

É fácil verificar que se $\vec{V}_1 = \alpha\vec{V}_2$, então

$$\lambda_{\vec{V}_1}(X, t) = \lambda_{\vec{V}_2}(X, t)$$

(verifique como exercício), ou seja, num dado instante, o estiramento só depende do ponto e da direção escolhida, não do particular \vec{V} que a representa.

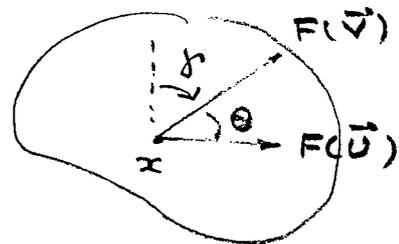
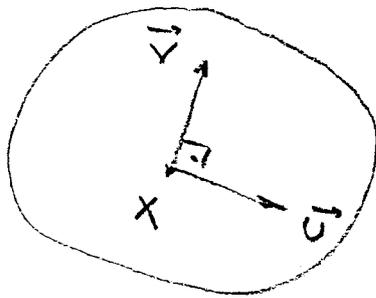
Exercício 22. Dado o movimento

$$x_1 = (1+t)X_1^2 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3$$

calcule o estiramento no instante $t = 4$, no ponto $X = (1, 1, 1)$, na direção $\vec{V} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. (Resposta: $\lambda \simeq 7.1$)

Sejam \vec{U} e \vec{V} ortogonais e seja θ a medida em radianos do ângulo entre $F(X, t)(\vec{U})$ e $F(X, t)(\vec{V})$. Chama-se *distorção* em X , no instante t , relativa a \vec{U} e \vec{V} ao número

$$\gamma_{\vec{U}, \vec{V}} = \frac{\pi}{2} - \theta$$



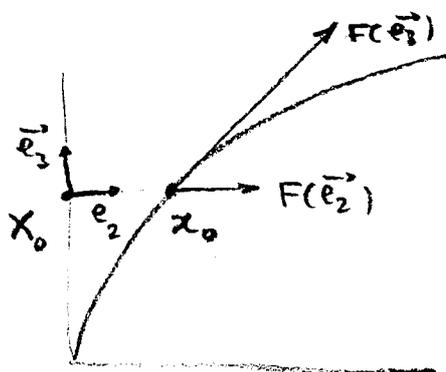
$$\text{sen } \gamma = \text{cos } \theta = \frac{F(X, t)\vec{U} \cdot F(X, t)\vec{V}}{\|F(X, t)\vec{U}\| \|F(X, t)\vec{V}\|}$$

Exemplo 6. Seja $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + (1+t)X_3^2$, $x_3 = X_3$ o movimento do cubo $0 \leq X_1 \leq 1$, $0 \leq X_2 \leq 1$, $0 \leq X_3 \leq 1$. Vamos calcular a distorção no ponto $X_0 = (0, 0, 1)$ no instante $t = 1$ relativa às direções \vec{e}_2 e \vec{e}_3 .

$$[F(X, t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(1+t)X_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [F(X_0, 1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $F = F(X_0, 1)$, temos $F(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$ e $F(\vec{e}_3) = 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, logo

$$\text{sen} \gamma = \frac{\vec{e}_2 \cdot (4\vec{e}_2 + \vec{e}_3)}{\|\vec{e}_2\| \cdot \|4\vec{e}_2 + \vec{e}_3\|} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$



Exercício 23. Calcule a distorção no ponto $X_0 = (1, 1, 1)$ no instante $t = 4$ relativa a $\vec{U} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{V} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ causada pelo movimento

$$x_1 = (1+t)X_1^2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

Interprete graficamente. (Resp.: $\gamma \simeq -78.6^\circ$)

1.5 O Jacobiano como quociente de volumes

Lembremos as definições e algumas propriedades do produto vetorial e do produto misto.

Definição 3. O produto vetorial de \vec{u} por \vec{v} é indicado por $\vec{u} \times \vec{v}$ e definido por:

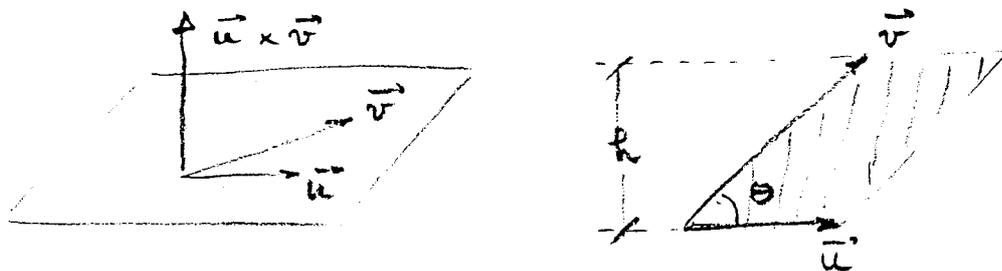
1. Se \vec{u} é paralelo a \vec{v} , $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

2. Se \vec{u} não é paralelo a \vec{v} ,

- a direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a \vec{u} e ortogonal a \vec{v}
- o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela "regra da mão direita"
- a norma de $\vec{u} \times \vec{v}$ é $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$ sendo θ o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .

Observação 1. A área do paralelogramo de lados \vec{u} e \vec{v} é

$$\|\vec{u}\| \cdot h = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$



Definição 4. O produto

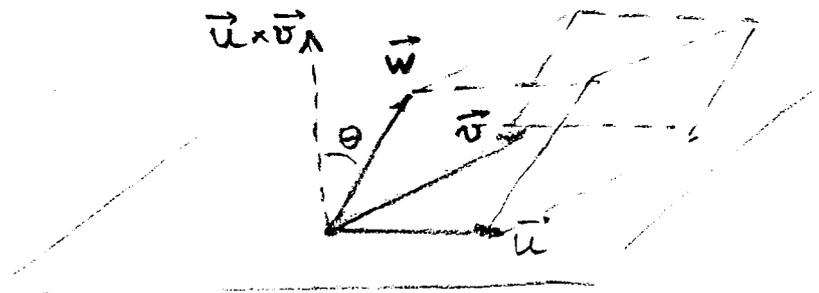
$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$$

é chamado *produto misto de \vec{u} , \vec{v} , \vec{w}* (nesta ordem).

Observação 2. Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ for uma base positiva, ou seja, $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} > 0$, então

o volume do paralelepípedo pontilhado = área da base . altura

$$= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\theta = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$$



Proposição 2. Seja $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal positiva e sejam $\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i$ e $\vec{w} = \sum_{i=1}^3 w_i \vec{e}_i$. Então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \vec{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \vec{e}_3 & u_3 & v_3 \end{bmatrix} \quad \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Sejam $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ linear, $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ linearmente independentes e $\vec{u} = T(\vec{U})$, $\vec{v} = T(\vec{V})$, $\vec{w} = T(\vec{W})$. Seja $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal positiva e consideremos a matriz cujas colunas são $[\vec{v}]_b, [\vec{u}]_b, [\vec{w}]_b$:

$$[[\vec{u}]_b, [\vec{v}]_b, [\vec{w}]_b] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

É fácil ver que

$$[[\vec{u}]_b, [\vec{v}]_b, [\vec{w}]_b] = [T]_b [[\vec{U}]_b, [\vec{V}]_b, [\vec{W}]_b]$$

logo,

$$\det [[\vec{u}]_b, [\vec{v}]_b, [\vec{w}]_b] = \det [T]_b \det [[\vec{U}]_b, [\vec{V}]_b, [\vec{W}]_b]$$

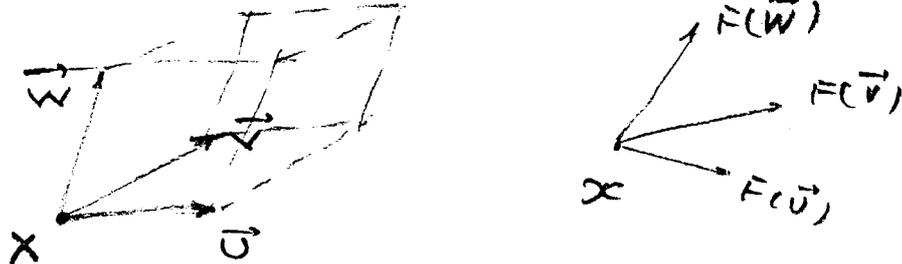
O primeiro e o terceiro determinantes acima são os produtos mistos

$$T(\vec{U}) \times T(\vec{V}) \cdot T(\vec{W}) \quad \text{e} \quad \vec{U} \times \vec{V} \cdot \vec{W}$$

respectivamente. Portanto,

$$\det [T]_b = \frac{T(\vec{U}) \times T(\vec{V}) \cdot T(\vec{W})}{\vec{U} \times \vec{V} \cdot \vec{W}} \quad (1.21)$$

Consideremos agora um movimento $x = x(X, t)$ e apliquemos (1.21) ao gradiente de deformação $F = F(X, t)$. Consideremos o paralelepípedo de vértices $X, X + \vec{U}, X + \vec{V}, X + \vec{W}$. Então $F(\vec{U}), F(\vec{V}), F(\vec{W})$ são tangentes, em x , às curvas deformadas dessas arestas no instante t .



Um dos axiomas da Mecânica do Contínuo é que

$$J(X, t) > 0 \quad (1.22)$$

Logo, de acordo com (1.21), se $\vec{U} \times \vec{V} \cdot \vec{W} > 0$, então $F(\vec{U}) \times F(\vec{V}) \cdot F(\vec{W}) > 0$ e $J(X, t)$ é o quociente de volumes

$$J(X, t) = \frac{F(\vec{U}) \times F(\vec{V}) \cdot F(\vec{W})}{\vec{U} \times \vec{V} \cdot \vec{W}}$$

Diz-se que um movimento é *isocórico* ou que *preserva volumes*

$$J(X, t) = 1 \quad (1.23)$$

para todo X e todo t .¹

Uma outra condição postulada sobre os movimentos é que não haja interpenetração do corpo, ou seja, sendo $x = f(X, t)$ o movimento, então

$$X \neq Y \Rightarrow f(X, t) \neq f(Y, t)$$

Portanto, para cada t fixo, a deformação $X \in B \mapsto x \in B_t$ tem inversa $X = X(x, t)$.

Exercício 24. Para t fixo, determine a inversa da deformação determinada pelo movimento

$$1. \ x_1 = X_1 \cos t - X_2 \sin t, \ x_2 = X_1 \sin t + X_2 \cos t, \ x_3 = X_3$$

$$2. \ x_1 = X_1 + tX_2, \ x_2 = X_2 + tX_1, \ x_3 = X_3$$

Qual movimento é isocórico? Em que intervalo de tempo está definido o segundo movimento? Quais são as trajetórias de cada ponto X , em cada um dos movimentos?

¹A partir da fórmula de mudança de variável para a integral tripla, demonstra-se que esta propriedade implica que cada parte do corpo mantém seu volume durante o movimento. Faremos isso adiante.

1.6 Velocidade e Aceleração

Seja $x = x(X, t)$ um movimento. A velocidade e a aceleração de um ponto X no instante t são definidos por

$$\vec{V}(X, t) = \frac{\partial x}{\partial t}(X, t) \quad \vec{A}(X, t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(X, t)$$

Exemplo 7. Consideremos o movimento

$$x_1 = e^{-t}X_1 \quad x_2 = e^{-t}X_2 \quad x_3 = X_3$$

então

$$\begin{aligned} \vec{V}(X_1, X_2, X_3, t) &= \frac{\partial x_1}{\partial t} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t} \vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial t} \vec{e}_3 = -e^{-t}X_1 \vec{e}_1 - e^{-t}X_2 \vec{e}_2 \\ \vec{A}(X_1, X_2, X_3, t) &= \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \vec{e}_1 + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} \vec{e}_3 = e^{-t}X_1 \vec{e}_1 + e^{-t}X_2 \vec{e}_2 \end{aligned}$$

\vec{V} e \vec{A} , para cada t fixo, são funções do ponto X da configuração de referência. Por isso são chamados *campos materiais*. Também podemos escrever a velocidade e a aceleração em função de t e da posição x ocupada pela partícula no instante t . Definimos

$$\vec{v}(x, t) = \vec{V}(X, t) \quad \vec{a}(x, t) = \vec{A}(X, t) \quad (1.24)$$

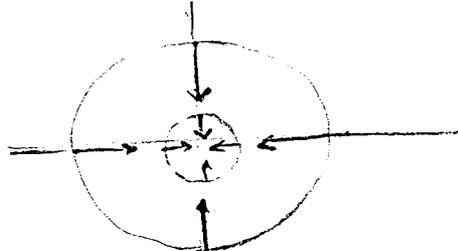
onde X é a partícula da configuração de referência que no instante t está na posição x , ou seja, $x = x(X, t)$. \vec{v} e \vec{a} são chamadas *descrição espacial* da velocidade e da aceleração, respectivamente.

No exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned} \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) &= -x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2 \\ \vec{a}(x_1, x_2, x_3, t) &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \end{aligned}$$

No exemplo acima, \vec{V} varia com o tempo enquanto \vec{v} não depende do tempo. Isso não deve espantar. Fixando X e variando t em $\vec{V}(X, t)$ obtemos as diferentes velocidades que uma mesma partícula assume ao longo do tempo enquanto que fixando x e variando t em $\vec{v}(x, t)$ obtemos as velocidades das diferentes partículas quando passam pela posição x (No caso, todas as partículas, ao passarem por x , estão com a mesma velocidade).

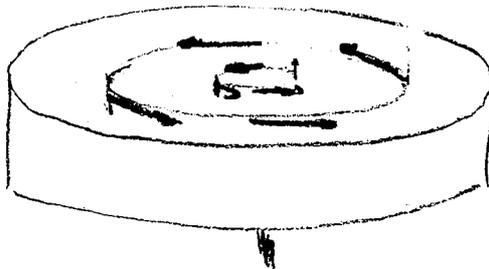
Para cada t fixo, $\vec{v}(\cdot, t)$ é um campo vetorial definido em B_t , ou seja, a cada $x \in B_t$ associa o vetor $\vec{v}(x, t)$ (representado como um vetor aplicado em x).



No exemplo anterior, $\vec{v} = -x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2$, temos:

- $\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ou seja, $\|\vec{v}\|$ é constante nas circunferências de centro na origem
- $\vec{v} = -\vec{r}$ onde $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$.

O campo de velocidades de um fluido escoando pelo ralo tem o aspecto



Exercício 25. Determine as expressões espaciais da velocidade e da aceleração:

1. $x_1 = X_1 \cos \omega t - X_2 \sin \omega t$ $x_2 = X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t$ $x_3 = X_3$
Que movimento é esse? (resp: $\vec{v} = -\omega(x_2\vec{e}_1 - x_1\vec{e}_2)$; $\vec{a} = -\omega^2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$)
2. $x_1 = X_1 + atX_2^2$; $x_2 = (1+bt)X_2$; $x_3 = X_3$ (a, b constantes) (resposta: $\vec{v} = \frac{ax_2^2}{(1+bt)^2}\vec{e}_1 + \frac{bx_2}{1+bt}\vec{e}_2$, $\vec{a} = \vec{0}$)

Exercício 26. Represente graficamente os campos vetoriais $\vec{v}(x, t)$ num instante t fixo

1. \vec{v} do exercício 25.1
2. $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = tx_1\vec{e}_1$
3. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{Ox}$ onde $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$, $O = (0, 0, 0)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

1.7 Descrição material e descrição espacial. Derivada material

Grandezas associadas a um corpo em movimento, $x = x(X, t)$, podem ser descritas por funções que dependem de (X, t) ou de (x, t) . No primeiro caso fala-se em *campo material* ou *lagrangiano* e no segundo, *campo espacial* ou *euleriano*. Já fizemos uso dessa nomenclatura ao definir velocidade e aceleração. $\vec{V}(X, t)$ é um campo material e $\vec{v}(x, t)$ é sua descrição espacial.

Dado um campo material $G = G(X, t)$ (com valores escalares, vetoriais ou tensoriais), sua *descrição espacial* é o campo $G_s = G_s(x, t)$ definido por

$$G_s(x, t) = G(X, t)$$

onde $X = X(x, t)$. E dado um campo espacial $g = g(x, t)$ (com valores escalares, vetoriais ou tensoriais), sua *descrição material* é a função $g_m = g_m(X, t)$ definida por

$$g_m(X, t) = g(x, t)$$

onde $x = x(X, t)$. Logo

$$G_s(x, t) = G(X(x, t), t) \quad \text{e} \quad g_m(X, t) = g(x(X, t), t) \quad (1.25)$$

Exemplo 8. Consideremos o movimento

$$x_1 = X_1; \quad x_2 = X_2 + kt; \quad x_3 = X_3$$

e seja

$$\Theta(X_1, X_2, X_3, t) = X_2 + kt$$

a descrição material da temperatura. Então sua descrição espacial é

$$\Theta_s(x_1, x_2, x_3, t) = x_2$$

Temos:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}(X, t) = k$$

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial t}(x, t) = 0$$

Como interpretar esses resultados? Na primeira derivada, mantivemos X fixo e variamos t . Portanto, calculamos a taxa de variação da temperatura de uma mesma partícula X . Na segunda derivada, mantivemos x fixo e variamos t , ou seja, calculamos a taxa de variação da temperatura das diferentes partículas ao passarem pela posição x . Um termômetro que acompanhe a partícula X mede uma variação de temperatura de taxa k . Um termômetro parado na posição x indica temperatura constante.

Seja $G = G(X, t)$ um campo material, chamamos de *derivada material* de G à derivada

$$\frac{DG}{Dt}(X, t) = \frac{\partial G}{\partial t}(X, t) \quad (1.26)$$

Também definimos a *derivada material do campo espacial* $g = g(x, t)$ por

$$\frac{Dg}{Dt}(x, t) = \left(\frac{\partial g_m(X, t)}{\partial t} \right)_s \quad (1.27)$$

onde $x = x(X, t)$ ou seja, a derivada material é a derivada no tempo mantendo a partícula X fixa, quer o campo seja material, quer seja espacial.

Assim

$$\vec{V} = \frac{Dx}{Dt} \quad \vec{A} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Exemplo 9.

$$x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 + tX_3 \quad x_3 = X_3$$

Vamos calcular a derivada material do campo espacial $\theta = tx_2$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial t} \right)_s$$

- $\theta_m = t(X_2 + tX_3)$

- $\frac{\partial \theta_m}{\partial t} = X_2 + tX_3 + tX_3$

Como $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2 - tx_3$, $X_3 = x_3$, então

- $(\frac{\partial \theta_m}{\partial t})_s = x_2 + tx_3$

Portanto

$$\frac{D\theta}{Dt} = x_2 + tx_3$$

Exercício 27. $x_1 = X_1 + kX_2^2 t^2$, $x_2 = X_2 + kX_2 t$, $x_3 = X_3$, $g(x, t) = x_1 + x_2$. Calcule $\frac{Dg}{Dt}$

Exercício 28. $x_1 = X_1 \cos \omega t - X_2 \sin \omega t$, $x_2 = X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t$, $x_3 = X_3$ $\vec{u}(x, t) = (x_1^2 + x_2^2)\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. Calcule $\frac{D\vec{u}}{Dt}$

Proposição 3. *Seja $\varphi = \varphi(x, t)$ um campo espacial escalar. Então*

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad } \varphi \cdot \vec{v} \quad (1.28)$$

onde

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{e}_3$$

2

Proof. $\frac{D\varphi(x,t)}{Dt} \stackrel{(1.23)}{=} (\frac{\partial \varphi_m(x,t)}{\partial t})_s \stackrel{(1.20)1.21}{=} (\frac{\partial \varphi(x(X,t),t)}{\partial t})_s = (\frac{\partial \varphi(x_1(X,t),x_2(X,t),x_3(X,t),t)}{\partial t})_s =$

$$= (\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(X,t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(X,t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3(X,t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t})_s =$$

$$= (\text{grad } \varphi(x, t) \cdot \vec{V}(X, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t})_s = \text{grad } \varphi(x, t) \cdot \vec{v}(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \quad \square$$

Exemplo 10. Vamos refazer o exemplo anterior usando a fórmula 1.24

$$x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 + tX_3 \quad x_3 = X_3 \quad \theta = tx_2$$

- $\text{grad } \theta(x, t) = t \vec{e}_2$

- $\vec{V}(X, t) = X_3 \vec{e}_3 \quad \therefore \vec{v}(x, t) = x_3 \vec{e}_2$

- $\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = x_2$

²todas as funções acima são calculadas em $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$

Logo

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \text{grad } \theta \cdot \vec{v} = x_2 + t x_3.$$

Exercício 29. Calcule $\frac{D\varphi}{Dt}$ pela definição e usando a fórmula 1.24:

$$1. \quad x_1 = X_1 + atX_2^2 \quad x_2 = (1 + bt)X_2 \quad x_3 = X_3 \quad \varphi(x, t) = x_1 + t x_2$$

$$2. \quad x_1 = X_1 \cos t - X_2 \sin t, \quad x_2 = X_1 \sin t + X_2 \cos t, \quad x_3 = e^t X_3 \\ \varphi(x, t) = x_1 + x_2 + x_3$$

Exercício 30. $x_1 = X_1$ $x_2 = X_2 + t X_3^2$ $x_3 = X_3$ $\theta = (x_1 + x_2 + x_3)(t + 1)^2$ é a descrição espacial da temperatura. Determine:

1. A temperatura, no instante $t = 1$, do ponto que nesse instante está em $(0, 1, 1)$.
2. A temperatura, no instante $t = 1$, da partícula que no instante inicial está em $(0, 1, 1)$.
3. A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo, no instante $t = 1$, da partícula que no instante inicial está em $(0, 1, 1)$.
4. A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo, no instante $t = 1$, de um termômetro fixado em $(0, 1, 1)$.

Consideremos agora um campo vetorial espacial $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$. Vamos estabelecer a relação entre $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ e $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$. Para isso, precisamos introduzir o gradiente de \vec{u} . Seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema cartesiano ortogonal em \mathbb{E} . Então

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u_1(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_3$$

O gradiente de \vec{u} em (x, t) é o tensor indicado por $\text{grad } \vec{u}(x, t)$ cuja matriz na base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é:

$$[\text{grad } \vec{u}(x, t)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}^3$$

³as derivadas calculadas em (x, t)

Proposição 4. *Seja $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$ um campo espacial vetorial. Então*

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \text{grad } \vec{u}(\vec{v}) \quad (1.29)$$

Proof.

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{Du_1}{Dt}\vec{e}_1 + \frac{Du_2}{Dt}\vec{e}_2 + \frac{Du_3}{Dt}\vec{e}_3$$

Por (1.29),

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \text{grad } u_i \cdot \vec{v}$$

logo,

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \vec{e}_i + \sum_{i=1}^3 (\text{grad } u_i \cdot \vec{v}) \vec{e}_i$$

Desta igualdade decorre a tese pois,

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \vec{e}_i = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \quad e$$

$$\sum_{i=1}^3 (\text{grad } u_i \cdot \vec{v}) \vec{e}_i = \text{grad } \vec{u}(\vec{v}) \quad ^4$$

□

Portanto, fazendo $\vec{u} = \vec{v}$ em (1.29) obtemos:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}(\vec{v}) \quad (1.30)$$

Consideremos o campo de velocidades

$$\vec{v} = -x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2$$

Então

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad e \quad [\text{grad } \vec{v}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\vec{v}] = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⁴veja o exercício 36

Logo

$$\left[\frac{D\vec{v}}{Dt} \right] = [\text{grad } \vec{v}] \cdot [\vec{v}] = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = -x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2$$

Exercício 31. $\vec{v} = x_1\vec{e}_2 + x_1x_3\vec{e}_1 + t\vec{e}_3$. Calcule \vec{a}

Exercício 32. Refaça o exercício 28 usando a fórmula (1.30).

Exercício 33. $\vec{v} = \frac{-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2}{x_1^2 + x_2^2}$ é a velocidade e $\theta = k(x_1^2 + x_2^2)$ a temperatura. Calcule $\frac{D\theta}{Dt}$, desenhe o campo de velocidades e os isotermas. Interprete.

1.8 Gradiente de um campo escalar e gradiente de um campo vetorial

Um *campo escalar* em \mathbb{E} é uma função $\varphi : D \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ e um *campo vetorial* em \mathbb{E} é uma função $\vec{v} : D \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{V}$.

Seja φ um campo escalar. Fixado um sistema cartesiano de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, φ pode ser entendido como uma função real de três variáveis reais $\varphi(p) = \varphi(p_1, p_2, p_3)$ onde p_1, p_2, p_3 são as coordenadas de p . O *gradiente* de φ , indicado por $\nabla\varphi$, é o campo vetorial definido por

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\vec{e}_3$$

Exemplo 11. $\varphi(p_1, p_2, p_3) = p_1 + p_3 p_2^2$

$$\nabla\varphi = \vec{e}_1 + 2p_3p_2\vec{e}_2 + p_2^2\vec{e}_3$$

Exercício 34. $\varphi(p_1, p_2, p_3) = \arctan\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. Calcule $\nabla\varphi$.

Proposição 5. Seja $\varphi : D \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ (D aberto em \mathbb{E}) um campo escalar de classe C^1 numa vizinhança de um ponto $p \in D$. Então

$$\varphi(p + \vec{h}) - \varphi(p) = \nabla\varphi(p) \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

ou seja,

$$\varphi(p + \vec{h}) - \varphi(p) = \nabla\varphi(p) \cdot \vec{h} + r(\vec{h})$$

onde $\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{r(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$

Seja $\varphi = \varphi(x, t)$ um campo espacial escalar associado a um movimento $x = x(X, t)$. Para cada t fixo, o gradiente da função $x \mapsto \varphi(x, t)$ é indicado por $\text{grad } \varphi$. Se o campo for material, $\varphi = \varphi(X, t)$, para cada t fixo, o gradiente da função $X \mapsto \varphi(X, t)$ é indicado por $\text{Grad } \varphi$, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{e}_3 \\ \text{Grad } \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Exemplo 12. $\theta(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 e^{x_2 x_3}$ é a descrição espacial da temperatura. Calcule, aproximadamente, a variação da temperatura entre os pontos $(1, 0, 1)$ e $(1.1, 0.1, 0.9)$.

Pela proposição anterior temos

$$\Delta\theta = \theta(1.1, 0.1, 0.9) - \theta(1, 0, 1) \simeq \text{grad } \theta(1, 0, 1) \cdot \vec{h},$$

onde $\vec{h} = 0.1 \vec{e}_1 + 0.1 \vec{e}_2 - 0.1 \vec{e}_3$.

Mas

$$\text{grad } \theta = (2x_1 e^{x_2 x_3} \vec{e}_1 + x_1^2 x_3 e^{x_2 x_3} \vec{e}_2 + x_1^2 x_2 e^{x_2 x_3} \vec{e}_3) \Big|_{(x_1=1, x_2=0, x_3=1)} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Logo

$$\Delta\theta \simeq 2 \cdot 0.1 + 0.1 = 0.3$$

Seja $\vec{u} : D \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{V}$ um campo vetorial e seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema cartesiano de coordenadas de \mathbb{E}

$$\vec{u}(p_1, p_2, p_3) = u_1(p_1, p_2, p_3) \vec{e}_1 + u_2(p_1, p_2, p_3) \vec{e}_2 + u_3(p_1, p_2, p_3) \vec{e}_3$$

O *gradiente de \vec{u}* , indicado por $\nabla\vec{u}$, é o campo tensorial definido por

$$[\nabla\vec{u}(p)]_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & \frac{\partial u_1}{\partial p_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & \frac{\partial u_2}{\partial p_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial p_1} & \frac{\partial u_3}{\partial p_2} & \frac{\partial u_3}{\partial p_3} \end{bmatrix} \quad \text{(As derivadas parciais são calculadas em } p = (p_1, p_2, p_3)\text{)}$$

Proposição 6. Se \vec{u} for de classe C^1 numa vizinhança de um ponto p , então

$$\vec{u}(p + \vec{h}) - \vec{u}(p) = \nabla \vec{u}(p)[\vec{h}] + \vec{o}(\vec{h})$$

ou seja,

$$\vec{u}(p + \vec{h}) - \vec{u}(p) = \nabla \vec{u}(p)[\vec{h}] + \vec{r}(\vec{h})$$

onde $\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\vec{r}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0$

Se $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$ for um campo vetorial espacial, então para cada t fixo, o gradiente da função $x \mapsto \vec{u}(x, t)$ é indicado por $grad \vec{u}$. Se o campo $\vec{u} = \vec{u}(X, t)$ for material, para cada t fixo, o gradiente da função $X \mapsto \vec{u}(X, t)$ é indicado por $Grad \vec{u}$. Assim

$$grad \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad e \quad Grad \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$\vec{v} = \vec{v}(x, t)$ é um campo espacial. De acordo com a proposição anterior, $grad \vec{v}(x, t)[\vec{h}]$ aproxima a diferença $\vec{v}(x + \vec{h}, t) - \vec{v}(x, t)$ para $\|\vec{h}\|$ próxima de zero.

$$\vec{v}(x + \vec{h}, t) \simeq \vec{v}(x, t) + grad \vec{v}(x, t)[\vec{h}]$$

Exemplo 13. Consideremos o campo de velocidades

$$\vec{v}(x, t) = (x_1^2 - x_2)\vec{e}_1 + (x_1 + x_2^3)\vec{e}_2$$

Vamos desenhar uma aproximação linear deste campo em torno da origem

$$\vec{v}(0 + \vec{h}) \simeq \vec{v}(0) + grad \vec{v}(0)[\vec{h}]$$

(omitimos o t já que \vec{v} não depende do tempo).

Mas $\vec{v}(0, 0, 0) = \vec{0}$

$$[grad \vec{v}(x)] = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 & 0 \\ 1 & 3x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore [grad \vec{v}(0, 0, 0)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

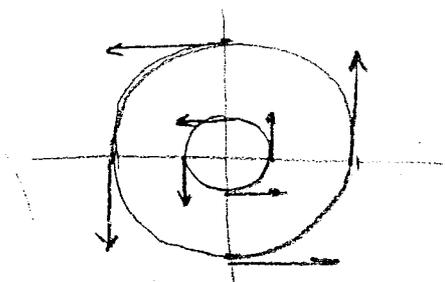
$$[grad \vec{v}(0, 0, 0)(\vec{h})] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_2 \\ h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\text{grad } \vec{v}(0, 0, 0)(\vec{h}) = -h_2 \vec{e}_1 + h_1 \vec{e}_2$$

Logo,

$$\vec{v}(\vec{h}) = -h_2 \vec{e}_1 + h_1 \vec{e}_2$$

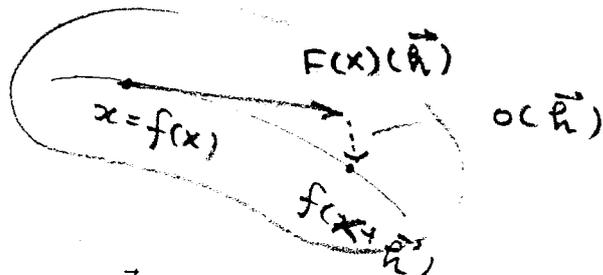
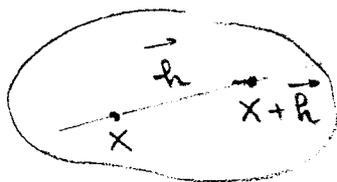


Exercício 35. $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2^3) \vec{e}_1 + x_3^2 \vec{e}_2 + x_2^3 \vec{e}_3$ Desenhe a aproximação linear de \vec{v} na origem.

Exercício 36. Mostre que $\text{grad } \vec{v}(\vec{h}) = \sum_{i=1}^3 (\text{grad } v_i \cdot \vec{h}) \vec{e}_i$

Uma deformação $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ pode ser estudada como uma função de \mathbb{E} em \mathbb{V} : $X \mapsto x - O$, O fixo em \mathbb{E} . Aplicando a proposição anterior temos

$$f(X + \vec{h}) - f(X) = F(X)(\vec{h}) + o(\vec{h})$$



Como

$$F(X)(s\vec{h}) = f(X + s\vec{h}) - f(X) - r(s\vec{h})$$

e como $F(X)$ é linear, então

$$F(X)(\vec{h}) = \frac{f(X + s\vec{h}) - f(X) - r(s\vec{h})}{s}$$

Fazendo $s \rightarrow 0$ concluímos que

$$F(X)(\vec{h}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(X + s\vec{h}) - f(X)}{s}$$

o que mostra que o operador linear $F(X)$ não depende do sistema de coordenadas cartesianas usado para defini-lo. Do mesmo modo se mostra que nem o gradiente de campo vetorial, nem gradiente de campo escalar, dependem do particular sistema de coordenadas usado para defini-los.

1.9 Elementos de Álgebra Linear

1.9.1 Multiplicação por escalar, adição e composição de operadores lineares

Definição 5. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares de \mathbb{V} . Definimos os operadores λT_1 , $T_1 + T_2$, $T_1 T_2$ por

$$\begin{aligned}(\lambda T_1)(\vec{v}) &= \lambda T_1(\vec{v}) \\(T_1 + T_2)(\vec{v}) &= T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v}) \\(T_1 T_2)(\vec{v}) &= T_1(T_2(\vec{v}))\end{aligned}$$

Exercício 37. Verifique que λT_1 , $T_1 + T_2$, $T_1 T_2$ são lineares e que

$$\begin{aligned}(\lambda T_1)_b &= \lambda(T_1)_b \\(T_1 + T_2)_b &= (T_1)_b + (T_2)_b \\(T_1 T_2)_b &= (T_1)_b (T_2)_b\end{aligned}$$

qualquer que seja a base b de \mathbb{V}

1.9.2 O transposto de um operador linear

Proposição 7. Seja T um operador linear de \mathbb{V} . Existe um único operador linear de \mathbb{V} , indicado por T^t e chamado transposto de T , tal que

$$T(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot T^t(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V} \quad (1.31)$$

Proposição 8. Se b é uma base ortonormal de \mathbb{V} então

$$[T^t]_b = [T]_b^t \quad (1.32)$$

onde o sobrescrito t do segundo membro indica transposta de matriz.

Exercício 38. Verifique que

1. $(T^t)^t = T$
2. $(\lambda T)^t = \lambda T^t$
3. $(T_1 + T_2)^t = T_1^t + T_2^t$
4. $(T_1 T_2)^t = T_2^t T_1^t$

Exercício 39. Seja $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal e seja

$$T(\vec{v}) = v_1 \vec{e}_2 + (v_2 - v_3) \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_3, \quad \vec{v} = \sum v_i \vec{e}_i$$

Determine $T^t(\vec{v})$.

1.9.3 Operadores simétricos e anti-simétricos

Definição 6. Seja T um operador linear de \mathbb{V} . Dizemos que

$$\begin{aligned} T \text{ é simétrico se } T^t &= T \\ T \text{ é anti-simétrico se } T^t &= -T \end{aligned} \tag{1.33}$$

Segue da Proposição (8) que:

Proposição 9. • T é simétrico se e só se a matriz de T em qualquer base ortonormal é simétrica.

• T é anti-simétrico se e só se a matriz T em qualquer base ortonormal é anti-simétrica.

Exercício 40. Seja T anti-simétrico. Mostre que $T(\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

Exercício 41. Seja $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definido por $A(\vec{v}) = \vec{\omega} \times \vec{v}$ onde $\vec{\omega}$ é um vetor fixo de \mathbb{V} . Verifique que A é um operador linear anti-simétrico.

Seja T um operador linear de \mathbb{V} . Então:

$$T_s = \frac{1}{2}(T + T^t) \text{ é simétrico} \tag{1.34}$$

$$T_a = \frac{1}{2}(T - T^t) \text{ é anti-simétrico e}$$

$$T = T_s + T_a$$

Exercício 42. Verifique as três últimas afirmações.

T_s é chamada *parte simétrica* de T e T_a *parte anti-simétrica* de T .

Exemplo 14. Seja T o operador linear de \mathbb{V} cuja matriz numa base ortonormal é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$[T_s] = \left[\frac{1}{2}(T + T^t) \right] = \frac{1}{2}([T] + [T]^t) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_a] = \left[\frac{1}{2}(T - T^t) \right] = \frac{1}{2}([T] - [T]^t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja W um operador anti-simétrico de \mathbb{V} e seja $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal positiva (ou seja, $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$) de \mathbb{V} . A matriz de W nessa base é anti-simétrica

$$[W]_b = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $\vec{\omega} = -c\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - a\vec{e}_3$. Então

$$[\vec{\omega} \times \vec{v}]_b = \begin{bmatrix} av_2 + bv_3 \\ -av_1 + cv_3 \\ -cv_2 - bv_1 \end{bmatrix} = [W]_b [\vec{v}]_b.$$

Portanto

$$W(\vec{v}) = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (1.35)$$

O vetor $\vec{\omega}$ que verifica (1.35) é único e é chamado *vetor axial de W*.

Exercício 43. $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal positiva. $W(\vec{v}) = (-2v_3 - v_2)\vec{e}_1 + (v_1 + 3v_2)\vec{e}_2 - (2v_1 + 3v_2)\vec{e}_3$; $\vec{v} = \sum v_i \vec{e}_i$. Determine o vetor axial da parte anti-simétrica de W

1.10 Os tensores “velocidade de deformação” e “velocidade de rotação”

Definição 7. Dado um movimento $x = x(X, t)$, a parte simétrica do *grad* $\vec{v}(x, t)$, indicada por $D(x, t)$, é chamada *tensor velocidade de deformação* e a parte anti-simétrica do *grad* $\vec{v}(x, t)$, indicada por $W(x, t)$, é chamada *tensor velocidade de rotação*, ou seja,

$$D(x, t) = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v}(x, t) + \text{grad } \vec{v}(x, t)^t)$$

$$W(x, t) = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v}(x, t) - \text{grad } \vec{v}(x, t)^t)$$

Num sistema cartesiano ortogonal $(0, b)$ temos:

$$[D]_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$[W]_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Chama-se *rotacional de \vec{v}* o dobro do vetor axial de W

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3$$

Exemplo 15. Consideremos a descrição espacial da velocidade de um movimento rígido

$$\vec{v}(x, t) = \vec{v}(o, t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{o}\vec{x} \quad (1.36)$$

($\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ é chamado *vetor de rotação* do movimento).

Substituindo

$$\vec{o}\vec{x} = \sum_{i=1}^3 (x_i - o_i) \vec{e}_i; \quad \vec{\omega}(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \vec{e}_i; \quad \vec{v}(o, t) = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

em (1.36), chegamos a

$$[\text{grad } \vec{v}(x, t)] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$W = \text{grad } \vec{v}, \quad D = 0, \quad 2 \text{rot } \vec{v} = \vec{\omega}$$

Ou seja, no que concerne aos movimentos rígidos, os nomes “tensor velocidade de rotação”, “tensor velocidade de deformação” e “rotacional” estão plenamente justificados.

Seja $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$ o campo de velocidades de um movimento qualquer. Sabemos que

$$\vec{v}(x + \vec{h}, t) = \vec{v}(x, t) + \text{grad } v(x, t)(\vec{h}) + o(\vec{h}).$$

Lembrando que $\text{grad } \vec{v} = W + D$ e que $W(\vec{h}) = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \times \vec{h}$,

$$\vec{v}(x + \vec{h}, t) = \vec{v}(x, t) + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}(x, t) \times \vec{h} + D(x, t)(\vec{h}) + o(\vec{h})$$

ou seja, a menos da parcela $o(\vec{h})$, o campo de velocidades é aproximado numa vizinhança de x pela soma de

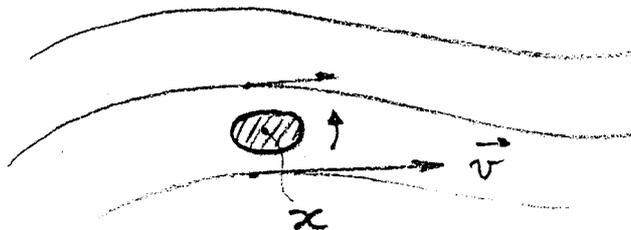
- uma parcela de velocidade de um movimento rígido

$$\vec{v}(x, t) + \vec{\omega}(x, t) \times \vec{h}$$

onde o vetor de rotação é $\vec{\omega}(x, t) = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}(x, t)$,

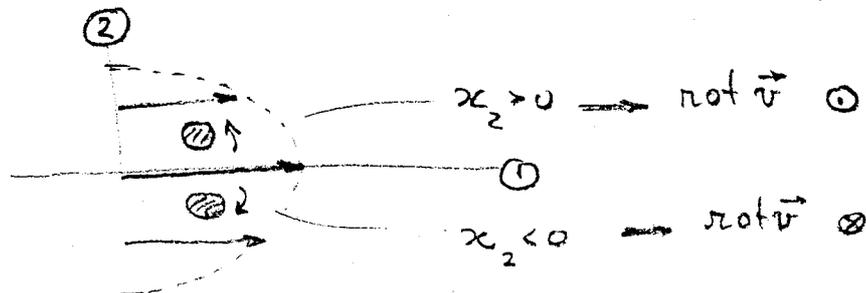
- uma parcela $D(x, t)(\vec{h})$ que é nula se o movimento for rígido.

Uma forma de visualizar a faceta do movimento captada pelo rotacional é a seguinte. Considere, num dado instante t , o campo de velocidades de um movimento plano e considere uma rolha colocada na posição x .



Se $\text{rot } \vec{v}(x, t) = \vec{0}$, a rolha não está girando no instante t e se $\text{rot } \vec{v}(x, t) \neq \vec{0}$, ela estará girando no sentido indicado por $\text{rot } \vec{v}(x, t)$ segundo a “regra da mão direita” (ou “regra do saca-rolhas”). Movimentos nos quais $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ são chamados *irrotacionais*

Exemplo 16. Sendo $\vec{v}(x, t) = (1 - x_2^2)\vec{e}_1$, $-1 \leq x_2 \leq 1$, então $\text{rot } \vec{v}(x, t) = 2x_2\vec{e}_3$. Observe o campo \vec{v} , o sentido do $\text{rot } \vec{v}$ e o movimento da rolha.



Exercício 44. $\vec{v} = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2)$. Calcule $rot \vec{v}$, desenhe o campo \vec{v} e interprete.

Exercício 45. Seja $\vec{v} = grad \varphi$ onde $\varphi = \varphi(x, t)$ é um campo escalar de classe C^2 . Mostre que $rot \vec{v} = \vec{0}$.

1.11 Justificação do nome "tensor velocidade de deformação"

Mostraremos nesta seção que todos os conceitos que expressam a idéia de "velocidade de deformação de um corpo" (velocidade de extensão, velocidade de cisalhamento, velocidade de expansão do volume) são calculados por meio do tensor D . Todos esses conceitos se apóiam na definição de "vetor transportado pelo movimento".

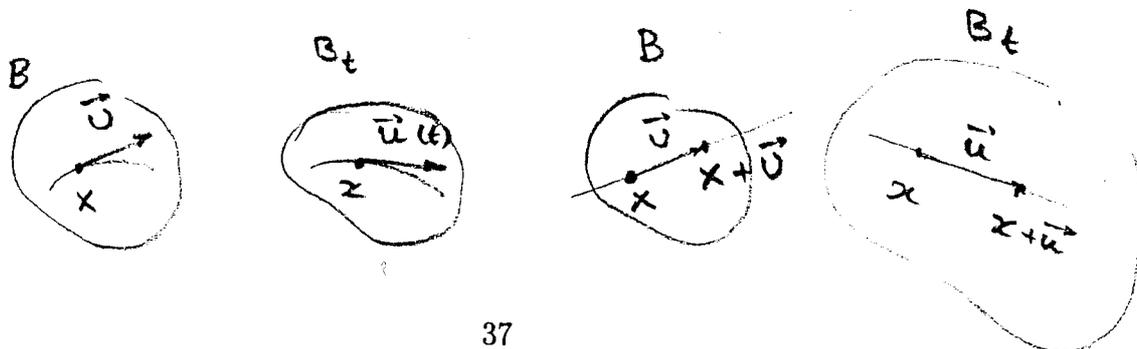
1.11.1 Derivada de um vetor transportado pelo movimento

Seja $x = x(X, t)$ um movimento. Dizemos que $\vec{u} = \vec{u}(t)$ é um *vetor transportado pelo movimento a partir de* $X \in B$ se

$$\vec{u}(t) = F(X, t)\vec{U} \quad (1.37)$$

onde \vec{U} é um vetor fixo.

O nome se justifica pois, como vimos na seção 1.3, se \vec{U} é tangente em X a uma curva de B , $\vec{u}(t)$ é tangente em $x = x(X, t)$ à curva deformada em B_t . Se o movimento for de deformação homogênea ($F(X, t)$ não depende de X), o segmento de extremos $X, X + \vec{U}$ se deforma no segmento de extremos $x, x + \vec{u}$.



Exercício 46. Num movimento de deformação homogênea tem-se

$$x(Y, t) - x(X, t) = F(t)(Y - X) \quad \forall X, Y$$

onde $F(t)$ é um operador linear. Usando este fato, demonstre que nesse tipo de movimento, o segmento de extremos $X, X + \vec{U}$ se transforma no instante t no segmento de extremos $x, x + \vec{u}$, \vec{u} dado por (1.37).

Passaremos a indicar com um ponto as derivadas materiais e as derivadas de funções que só dependem do tempo: $\dot{F} = \frac{DF}{Dt}$, $\dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt}$, etc.

De (1.37) obtemos

$$\dot{\vec{u}}(t) = \dot{F}(X, t)\vec{U} = \dot{F}(X, t)F^{-1}(X, t)\vec{u}(t)$$

Usando a fórmula

$$\dot{F}(X, t)F^{-1}(X, t) = \text{grad } \vec{v}(x, t),$$

que será demonstrada no final desta seção, chegamos a

$$\dot{\vec{u}}(t) = \text{grad } \vec{v}(x, t)\vec{u}(t) \quad (1.38)$$

que é a expressão euleriana para $\dot{\vec{u}}(t)$.

Exercício 47. Seja $\vec{u} = \vec{u}(t)$ um vetor transportado por um movimento rígido de vetor de rotação $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Mostre que

$$\dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

(Fórmula de Poisson).

1.11.2 Velocidade de extensão

Sejam $\vec{u} = \vec{u}(t)$ e $\vec{w} = \vec{w}(t)$ vetores transportados pelo movimento a partir de um mesmo X . Então

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{w})}{dt} &= \dot{\vec{u}} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \dot{\vec{w}} \\ &= \text{grad } \vec{v}(x, t)\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \text{grad } \vec{v}(x, t)\vec{w} \\ &= (\text{grad } \vec{v}(x, t) + \text{grad } \vec{v}(x, t)^t)\vec{u} \cdot \vec{w} \\ &= 2 D(x, t)\vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Lembrando que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

obtemos

$$\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{u} \cdot D(x, t)\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \quad (1.40)$$

O número $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ é chamado *velocidade de extensão* (ou *velocidade específica de extensão*) no ponto $x \in B_t$, na direção \vec{u} .

Exercício 48. Verifique (1.40)

Exercício 49. Verifique que a velocidade de extensão só depende da direção de \vec{u} , ou seja, se \vec{u}_1 e \vec{u} são transportados pelo movimento a partir do mesmo X e se num instante \bar{t} se tem $\vec{u}_1(\bar{t}) = \alpha \vec{u}(\bar{t})$, $\alpha \neq 0$, então

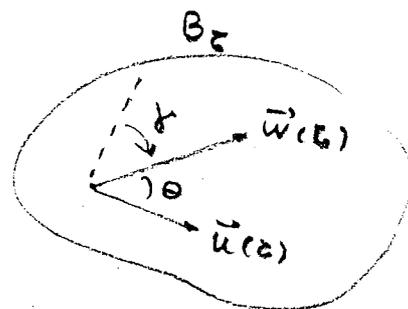
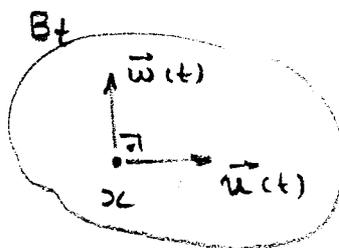
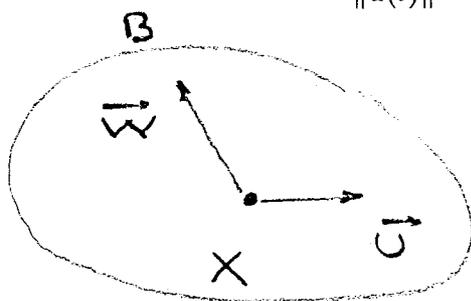
$$\left. \frac{\|\vec{u}_1\|}{\|\vec{u}_1\|} \right|_{t=\bar{t}} = \left. \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \right|_{t=\bar{t}}$$

Exercício 50. $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + \gamma t X_3$, $x_3 = X_3$. Calcule a velocidade de extensão num ponto $x \in B_t$ na direção de \vec{e}_2 .

1.11.3 Velocidade de cisalhamento

Sejam \vec{u} e \vec{w} transportados pelo movimento a partir de um certo X e tais que num certo instante t eles sejam unitários e ortogonais

$$\|\vec{u}(t)\| = \|\vec{w}(t)\| = 1, \quad \vec{u}(t) \cdot \vec{w}(t) = 0$$



Seja $\theta(\tau)$ a medida em radianos entre $\vec{u}(\tau)$ e $\vec{w}(\tau)$ e sendo $\gamma(\tau) = \frac{\pi}{2} - \theta(\tau)$ então

$$\sin \gamma(\tau) = \frac{\vec{u}(\tau) \cdot \vec{w}(\tau)}{\|\vec{u}(\tau)\| \|\vec{w}(\tau)\|}$$

Derivando a relação acima em relação a τ e calculando a derivada em $\tau = t$ obtemos

$$\dot{\gamma}(t) = 2 \vec{u} \cdot D(x, t) \vec{w}(t) \quad (1.41)$$

O número $\dot{\gamma}(t)$ é chamado velocidade de cisalhamento no ponto $x \in B_t$ segundo as direções $\vec{u}(t)$ e $\vec{W}(t)$.

Exercício 51. Complete a prova de (1.41).

Exemplo 17. O campo de velocidades de um movimento é dado num sistema ortogonal de coordenadas por

$$\vec{v}(x, t) = (1 - x_2^2) \vec{e}_1 \quad -1 \leq x_2 \leq 1$$

Vamos calcular a taxa de cisalhamento segundo as direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 num ponto $x \in B_t$. Temos

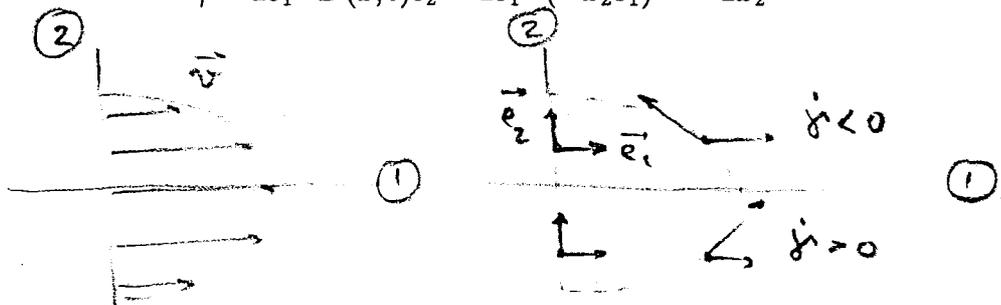
$$[\text{grad } \vec{v}(x, t)] = \begin{bmatrix} 0 & -2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo

$$[D(x, t)] = \begin{bmatrix} 0 & -x_2 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, usando (1.41), temos

$$\dot{\gamma} = 2 \vec{e}_1 \cdot D(x, t) \vec{e}_2 = 2 \vec{e}_1 \cdot (-x_2 \vec{e}_1) = -2x_2$$



Observe o campo \vec{v} , o movimento do fluido, e os sinais de $\dot{\gamma}$.

Exercício 52.

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = 2 t x_1^2 \vec{e}_2$$

Calcule as velocidades de cisalhamento em $x = (x_1, x_2, x_3)$ no instante t segundo as direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , \vec{e}_1 e \vec{e}_3 e \vec{e}_2 e \vec{e}_3 . Interprete.

Exercício 53. Seja $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema cartesiano ortogonal. Sendo $[D]_b = [D_{ij}]$, $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ortonormal, mostre que
 D_{ii} = velocidade de extensão na direção \vec{e}_i
 D_{ij} = velocidade de cisalhamento segundo \vec{e}_i e \vec{e}_j

1.11.4 Velocidade de expansão do volume por unidade de volume

Sejam $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ transportados pelo movimento a partir de uma mesma partícula X . O volume do paralelepípedo de vértices $x = x(X, t)$, $x + \vec{u}_1(t)$, $x + \vec{u}_2(t)$, $x + \vec{u}_3(t)$ é dado por

$$V(t) = J(X, t)V_0 \quad (1.42)$$

onde V_0 é o volume do paralelepípedo formado por $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ na configuração de referência (cf. seção 1.5). Logo

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)} = \frac{\dot{J}(X, t)}{J(X, t)} \quad (1.43)$$

Chamamos o quociente $\frac{\dot{V}}{V}$ de *velocidade de expansão do volume por unidade de volume* ou *velocidade específica de expansão do volume*. A fórmula (1.43) nos dá a expressão lagrangiana dessa velocidade. Para obtermos uma expressão euleriana, observamos que o segundo membro de (1.43) não depende de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Então tomemos \vec{u}_i de modo que, no instante t considerado, se tenha

$$\vec{u}_i(t) = \vec{e}_i \quad (1.44)$$

onde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal positiva. Sendo τ um instante genérico, de

$$V(\tau) = \vec{u}_1(\tau) \times \vec{u}_2(\tau) \cdot \vec{u}_3(\tau)$$

obtemos

$$\dot{V}(\tau) = \dot{\vec{u}}_1(\tau) \times \vec{u}_2(\tau) \cdot \vec{u}_3(\tau) + \vec{u}_1(\tau) \times \dot{\vec{u}}_2(\tau) \cdot \vec{u}_3(\tau) + \vec{u}_1(\tau) \times \vec{u}_2(\tau) \cdot \dot{\vec{u}}_3(\tau)$$

Calculando \dot{V} em $\tau = t$, e usando as fórmulas (1.38) e (1.44) obtemos
 $\dot{V}(t) = (\text{grad } \vec{v}(x, t) \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \times (\text{grad } \vec{v}(x, t) \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \cdot \text{grad } \vec{v}(x, t) \vec{e}_3$
 ou seja

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x, t) & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x, t) & 1 & 0 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x, t) & 0 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x, t) & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x, t) & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x, t) & 1 \end{bmatrix} + \\ &\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x, t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x, t) \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x, t) \end{bmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x, t) \\ &+ \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x, t) = \text{tr} D(x, t) \end{aligned} \tag{1.45}$$

Observação 3. Lembre-se que o traço é um invariante do operador, ou seja, $\text{tr}[D]_b = \text{tr}[D]_{b^*}$, quaisquer que sejam as bases b e b^* (exercício 11). Portanto, podemos nos referir ao $\text{tr}(D)$ sem fazer menção à base.

Definição 8. Chama-se *divergente de \vec{v}* ao campo escalar

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{tr } D$$

Como $V(t) = 1$, concluímos de (1.43) e (1.46) que

$$\text{div } \vec{v}(x, t) = \frac{\dot{J}(X, t)}{J(X, t)} \tag{1.46}$$

Substituindo (1.46) em (1.43), concluímos que qualquer que seja o paralelepípedo transportado pelo movimento:

$$\text{div } \vec{v}(x, t) = \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \tag{1.47}$$

Exercício 54. Mostre que um movimento é isocórico se, e somente se, $\text{div } \vec{v} = 0$.

1.11.5 A fórmula $\dot{F}F^{-1} = grad \vec{v}$

Precisamente, a fórmula que vamos demonstrar é

$$\dot{F}(X, t)F^{-1}(X, t) = grad \vec{v}(x, t) \quad (1.48)$$

onde $x = x(X, t)$.

Seja $(0, b)$ um sistema cartesiano de coordenadas. O elemento de posição i, j da matriz $[\dot{F}(X, t)]_b$ é $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial X_j}(X, t)$, ou seja,

$$[\dot{F}(X, t)]_b = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)_{ij} \right] \quad (1.49)$$

Mas, admitindo-se as funções $x_i = x_i(X, t)$ de classe C^2 ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial X_j}(X, t) = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial x_i}{\partial t}(X, t) = \frac{\partial}{\partial X_j} V_i(X, t) \quad (1.50)$$

onde $\vec{V}(X, t) = V_1(X, t)\vec{e}_1 + V_2(X, t)\vec{e}_2 + V_3(X, t)\vec{e}_3$ é a expressão material da velocidade. Como

$$V_i(X, t) = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_i = x_i(X, t)$$

então

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \mathcal{V}_i(x, t) = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_j} \quad (1.51)$$

Observação 4. As derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_l}$ são calculadas em (x, t) e as derivadas $\frac{\partial x_l}{\partial X_j}$ são calculadas em (X, t) .

O segundo membro de (1.51) é o produto escalar da i -ésima linha da matriz $[grad \vec{v}(x, t)]_b$ pela coluna j -ésima da matriz $[F(X, t)]_b$. Portanto, de (1.51), (1.50) e (1.49) concluímos que

$$[\dot{F}(X, t)]_b = [grad \vec{v}(x, t)]_b [F(X, t)]_b$$

Logo

$$\dot{F}(X, t) = grad \vec{v}(x, t) F(X, t)$$

Como $F(X, t)$ tem inversa, concluímos (1.48)

P
M
R
2
3
5
0

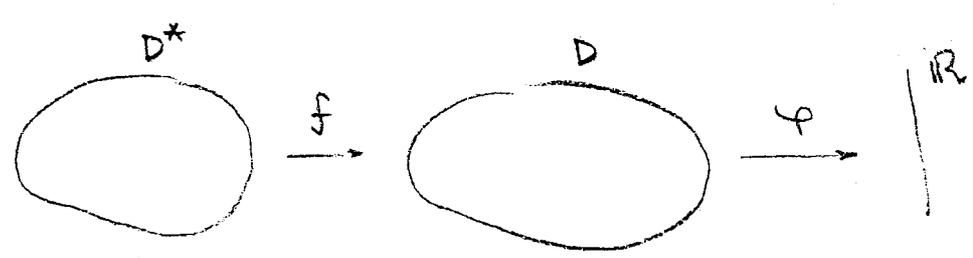
Chapter 2

Massa

2.1 O teorema de mudança de variável na integral de volume

Sejam

- D^* um subconjunto de \mathbb{E} , fechado, limitado e com volume.
- $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ de classe C^1 , injetora no interior de D^* e com $Jf(X) \neq 0$ para X no interior de D^* .
- $D = f(D^*)$
- $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.



Então

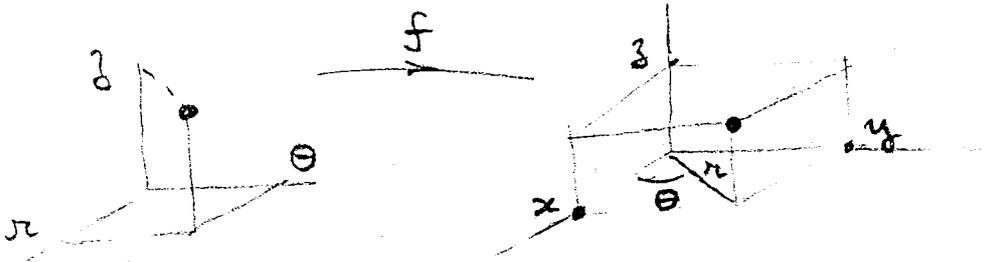
$$\int_D \varphi \, dv = \int_{D^*} (\varphi \circ f) |Jf| \, dV$$

Nos cursos de Cálculo f é chamada “mudança de variável” e as ocorrências mais frequentes são as seguintes:

1. mudança de coordenadas cartesianas para cilíndricas

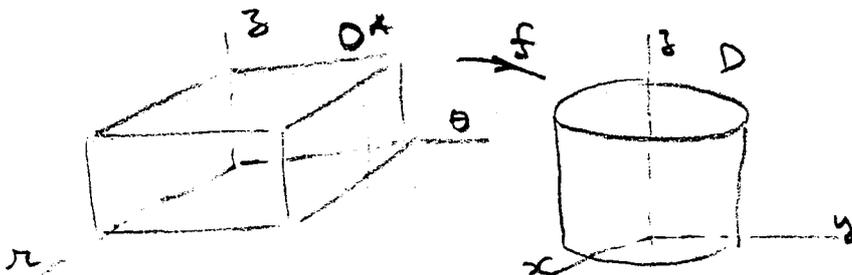
$$f : (r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$



$$|Jf(r, \theta, z)| = r$$

Um caso típico é aquele em que se quer calcular $\int_D \varphi(x, y, z) dx dy dz$ onde D é o cilindro $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq h$. Neste caso, D^* é o paralelepípedo $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$



$$\text{Então } \int_D \varphi(x, y, z) dx dy dz = \int_{D^*} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

2. mudança de coordenadas cartesianas para esféricas

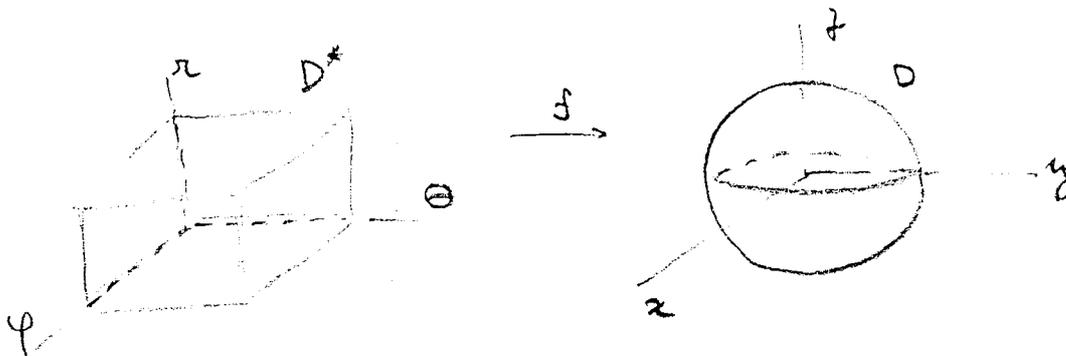
$$f : (\varphi, \theta, r) \mapsto (x, y, z)$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r > 0$$

$$|Jf(\varphi, \theta, r)| = r^2 \sin \theta$$

O paralelepípedo $D^* : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R$ se transforma na esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$



$$\int_D \varphi(x, y, z) dx dy dz = \int_{D^*} \varphi(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

Dado um movimento $x = x(X, t)$ e fixado um instante t a deformação

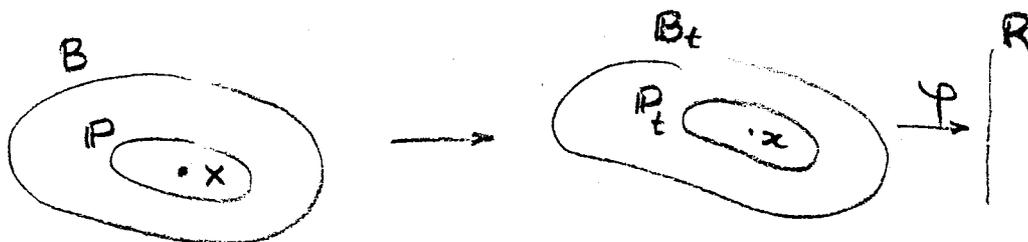
$$X \mapsto x(X, t)$$

satisfaz as hipóteses sobre a função f do teorema da mudança de variável. Então, dado um campo escalar espacial $\varphi = \varphi(x, t)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{P}_t} \varphi(x, t) dv = \int_{\mathbb{P}} \varphi(x(X, t), t) J(X, t) dV$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{P}_t} \varphi(x, t) dv = \int_{\mathbb{P}} \varphi_m(X, t) J(X, t) dV$$



onde \mathbb{P} é uma parte de B , ou seja, é um subconjunto do corpo B que também é um corpo. Fazendo $\varphi = 1$ temos

$$\text{volume de } \mathbb{P}_t = \int_{\mathbb{P}_t} dv = \int_{\mathbb{P}} J(X, t) dV$$

Muitas vezes vamos precisar do seguinte

Teorema 10. *Teorema da localização.* Seja $\varphi = \varphi(x)$ um campo escalar contínuo sobre Ω , um conjunto aberto de \mathbb{E} . Se $\int_{\Omega} \varphi dv = 0$ para toda esfera contida no domínio de φ então $\varphi = 0$.

Exercício 55. Mostre que são equivalentes:

1. o movimento é isocórico, ou seja, $J(X, t) = 1, \forall X, \forall t$.
2. $\frac{d}{dt} vol(\mathbb{P}_t) = 0$ qualquer que seja a parte \mathbb{P} do corpo.
3. $div \vec{v} = 0$

2.2 O teorema da divergência para campos vetoriais

Uma *região aberta* é um subconjunto de \mathbb{E} que é aberto e conexo, e uma *região fechada* é uma região aberta unida com sua fronteira. Chamaremos de *região regular* uma região fechada com “fronteira lisa por partes” [veja Kellog...].

Teorema 11. *Teorema da divergência para campos vetoriais* Seja \mathbb{R} uma região regular e limitada e seja $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ um campo vetorial de classe C^1 . Então

$$\int_{\partial \mathbb{R}} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \int_{\mathbb{R}} div \vec{u} dV$$

onde \vec{n} é o campo de vetores unitários normais exteriores em $\partial \mathbb{R}$.

Exercício 56. Mostre que

$$\int_{\mathbb{P}_t} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

para toda parte \mathbb{P} do corpo B , se e somente se o movimento é isocórico.

2.3 Conservação da massa. Equação da continuidade

A noção de massa num meio contínuo é dada através da *densidade volumétrica de massa*, ou seja, é dado um campo espacial escalar contínuo

$$\rho = \rho(x, t)$$

A massa de uma parte \mathbb{P} do corpo B no instante t é, por definição,

$$m(\mathbb{P}_t) = \int_{\mathbb{P}_t} \rho(x, t) dv$$

O princípio da conservação da massa postula que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \rho dv = 0$$

para toda parte \mathbb{P} do corpo B .

Observação 5. Se \mathbb{R} é uma região fixa de \mathbb{E} e $\varphi = \varphi(x, t)$ é de classe C^1 em \mathbb{R} , então

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) dV = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) dV$$

entretanto

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \varphi(x, t) dV \neq \int_{\mathbb{P}_t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) dV$$

porque o domínio de integração, \mathbb{P}_t , varia com o tempo.

Uma outra forma de se afirmar a conservação da massa consiste na igualdade

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho dV = - \int_{\partial \mathbb{R}} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

onde \mathbb{R} é uma região fixa de \mathbb{E} - chamada *volume de controle* em Mecânica dos Fluidos. Observe que o primeiro membro dá a variação da massa em \mathbb{R} por unidade de tempo e é positiva se a massa estiver aumentando em \mathbb{R} , e a integral $\int_{\partial \mathbb{R}} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$ é o fluxo de massa (massa por unidade de tempo) que atravessa a fronteira $\partial \mathbb{R}$ sendo positiva se a massa estiver saindo de \mathbb{R} (\vec{n} é a normal exterior em $\partial \mathbb{R}$).

Teorema 12. *Seja B a configuração de referência de um corpo em movimento. São equivalentes:*

1. $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \rho dv = 0$ para toda parte \mathbb{P} de B .
2. $\frac{D\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$
3. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$

4. $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho dV = - \int_{\partial \mathbb{R}} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$ para toda região \mathbb{R} contida em B_t para t variando num certo intervalo de tempo.

Proof. 1 \Leftrightarrow 2

Do teorema de mudança de variáveis e da observação anterior segue-se que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}} \rho_m J dV = \int_{\mathbb{P}} \frac{\partial}{\partial t} \rho_m J dV \quad (i)$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m J) = \frac{D\rho_m}{Dt} J + \rho_m \dot{J}$$

Como $\dot{J} = \text{div } \vec{v} J$ então

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m J) = \left(\frac{D\rho_m}{Dt} + \rho_m \text{div } \vec{v} \right) J \quad (ii)$$

De (i) e (ii) obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \rho dv = \int_{\mathbb{P}} \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \rho_m \text{div } \vec{v} \right) J dV$$

Novamente usando o teorema da mudança de variável vemos que a intergral do segundo membro é igual a

$$\int_{\mathbb{P}_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{v} \right) dv$$

Assim

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \rho dv = 0 \quad \forall \mathbb{P}$$

é equivalente a

$$\int_{\mathbb{P}_t} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{v} dv = 0 \quad \forall \mathbb{P}$$

que, de acordo com o princípio de localização, é equivalente a

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0$$

2 \Leftrightarrow 3

Segue-se das fórmulas

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad } \rho \cdot \vec{v}$$

e

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v}$$

3 \Leftrightarrow 4

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = 0$$

para toda região \mathbb{R} que, usando o teorema da divergência, é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial \mathbb{R}} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

para toda região \mathbb{R} . □

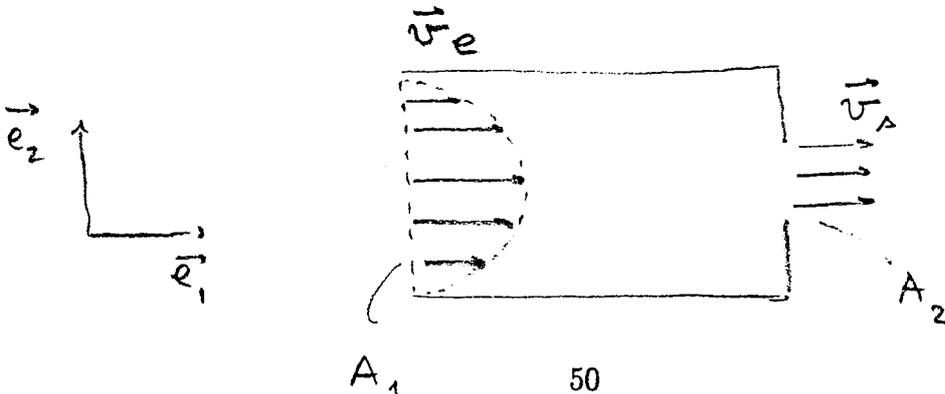
Exercício 57. Complete a dedução da equivalência 2 \Leftrightarrow 3.

As equações (2) e (3) do último teorema são chamadas *equações da continuidade*. Os textos de Mecânica dos Fluidos em geral usam (4) como expressão da conservação de massa. Nos casos em que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (regime estacionário, fluidos incompressíveis, homogêneos, por exemplo), a aplicação da fórmula (4) se resume ao cálculo de vazão de massa através da fronteira de \mathbb{R} .

Exemplo 18. Na figura, a água flui em regime estacionário através do tubo. O campo de velocidade na entrada circular de raio R é

$$\vec{v}_e = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_1$$

e a velocidade de saída é uniforme $\vec{v}_s = v \vec{e}_1$. A área da seção de saída é A_2 . Determine v .



Como o regime é estacionário, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, então pelo item (4) do Teorema 11,

$$\int_{\partial R} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = 0.$$

Nas faces laterais o fluxo é nulo, logo

$$\int_{A_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \int_{A_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = 0$$

A normal exterior em A_1 é $\vec{n} = -\vec{e}_1$ e em A_2 é $\vec{n} = \vec{e}_2$. Logo,

$$\vec{v}_e \cdot \vec{n} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ em } A_1$$

e

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n} = v \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = v \text{ em } A_2.$$

Então, como $\rho = 1$ para a água, o fluxo de massa por A_1 é

$$\int_{A_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = - \int_{A_1} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dA \quad (i)$$

Em coordenadas polares A_1 é descrito por $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$- \int_{A_1} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dA = - \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \, dr \, d\theta = \frac{-\pi R^2}{4} \quad (ii)$$

e o fluxo por A_2 é

$$\int_{A_2} v \, dA = v A_2 \quad (iii)$$

De (i), (ii) e (iii) segue-se que

$$v = \frac{\pi R^2}{4A_2}$$

Exemplo 19. Conhecida a densidade no instante de referência $t_0 = 0$, $\rho_0(X) = \rho_0$ constante, e dada a descrição espacial da velocidade,

$$\vec{v} = x \vec{e}_1$$

vamos determinar $\rho = \rho(x, t)$.

Substituindo os dados em

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

obtemos a equação

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho = 0$$

que integrada resulta

$$\rho = Ae^{-t}$$

Como $\rho = \rho_0$ no instante $t = 0$, $A = \rho_0$. Logo

$$\rho = \rho_0 e^{-t}$$

Exercício 58. Refaça o exemplo acima supondo

$$\vec{v} = \frac{1}{1+t}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)$$

(resposta : $\rho = \frac{\rho_0}{(1+t)^3}$)

Exercício 59. $\vec{v} = x_1\vec{e}_1$. Sabendo que ρ só depende da coordenada x_1 , $\rho(x, t) = f(x_1)$, determine $\rho = \rho(x, t)$.

Exercício 60. $\vec{v} = t(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$ e a descrição espacial da densidade só depende do tempo, $\rho = \rho(t)$. Determine $\rho(t)$. No instante de referência $t_0 = 0$, $\rho = \rho_0$. (Resposta: $\rho = \rho_0 e^{-t^2}$).

Exercício 61. Mostre que:

(a) $\int_{\mathbb{P}} \rho dv = \int_{\mathbb{P}} \rho_m J dV$ para toda parte \mathbb{P} do corpo B .

(b) Conclua de (a) e do princípio da conservação da massa que

$$\rho_0(X) = \rho_m(X, t)J(X, t)$$

onde ρ_0 é a densidade na configuração de referência.

(c) Dado o movimento

$$x_1 = (1+t)X_1 \quad x_2 = (1+t^2)X_2 \quad x_3 = X_3$$

e a densidade de referência

$$\rho_0(X_1, X_2, X_3) = kX_2^2$$

calcule a densidade $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$. (Resposta: $\rho = \frac{kx_2^2}{(1+t)(1+t^2)^3}$)

Chapter 3

Forças

3.1 Forças de corpo e forças de contato. A hipótese de Cauchy

Num corpo B em movimento há interações mecânicas entre suas partes assim como ações de outros corpos sobre ele. A Mecânica dos Meios Contínuos modela essas ações e interações por meio de dois tipos de forças:

1. As *forças de corpo*, ou *de volume*, que são exercidas por outros corpos sobre B . Esse tipo de força é dado por uma “densidade volumétrica de força” que é um campo espacial vetorial contínuo $\vec{b} = \vec{b}(x, t)$ tal que, sendo \mathbb{P} uma parte de B , a *força de corpo que age em \mathbb{P}_t* é dada por

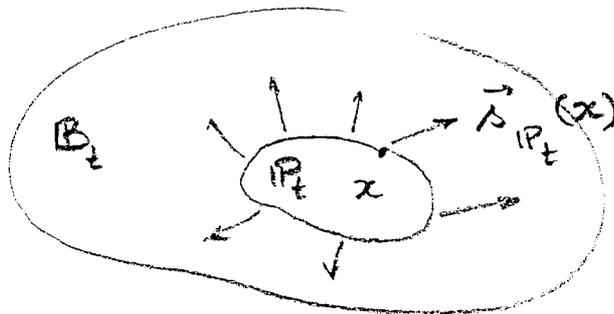
$$\int_{\mathbb{P}_t} \vec{b}(x, t) dv$$

Um exemplo de força de corpo é a gravitacional cuja densidade volumétrica é $\vec{g} \rho$ onde \vec{g} é a aceleração da gravidade e $\rho = \rho(x, t)$ é a densidade de massa. Então

$$\text{peso de } \mathbb{P} = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{g} \rho(x, t) dv = \vec{g} \int_{\mathbb{P}_t} \rho dv = \vec{g} m(\mathbb{P})$$

2. As *forças de contato*, ou *de superfície*, que são exercidas sobre as fronteiras de cada parte \mathbb{P}_t de B_t . Elas são dadas por uma *densidade superficial de força* que, para cada parte \mathbb{P}_t de B_t , é uma função

$$\vec{s}_{\mathbb{P}_t} : \partial\mathbb{P}_t \longrightarrow \mathbb{V}$$



de modo que a *força de superfície* que age em \mathbb{P}_t é dada por

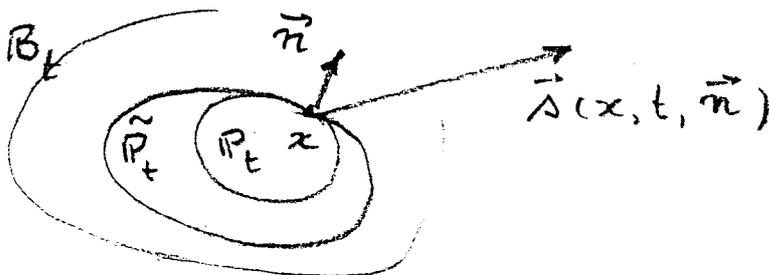
$$\int_{\partial\mathbb{P}_t} \vec{s}_{\mathbb{P}_t}(x) da$$

A *Hipótese de Cauchy* diz que se $\partial\mathbb{P}_t$ e $\partial\tilde{\mathbb{P}}_t$ são tangentes em x com a mesma normal unitária exterior \vec{n} então

$$\vec{s}_{\mathbb{P}_t}(x) = \vec{s}_{\tilde{\mathbb{P}}_t}(x)$$

Portanto, de acordo com essa hipótese, \vec{s} só depende de t , x e \vec{n} :

$$\vec{s}(x, t, \vec{n}) = \vec{s}_{\mathbb{P}_t}(x) = \vec{s}_{\tilde{\mathbb{P}}_t}(x)$$



Portanto, a *força de superfície* que age em \mathbb{P}_t é dada por

$$\int_{\partial\mathbb{P}_t} \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da$$

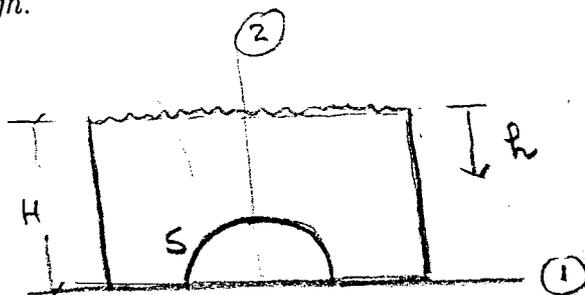
onde \vec{n}_x é a normal unitária exterior a $\partial\mathbb{P}$ no ponto x . Se S é a superfície de contato entre duas partes \mathbb{P}_{1_t} e \mathbb{P}_{2_t} de B_t então a força que \mathbb{P}_{2_t} exerce sobre \mathbb{P}_{1_t} é

$$\int_S \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da$$

onde \vec{n}_x é a normal unitária exterior a $\partial\mathbb{P}_{1t}$.

Se x pertence à fronteira de B_t então $\vec{s}(x, t, n_x)$ é a densidade superficial de força decorrente da ação do ambiente sobre B_t .

Exemplo 20. Vamos calcular a resultante \vec{F} da ação do fluido em repouso sobre a semi-esfera de raio R da figura. Sabe-se que $\vec{s}(x, \vec{n}) = -p \vec{n}$ onde $p = p_0 + \rho gh$.



$$\vec{F} = \int_S -p \vec{n} dA = \int_S -(p_0 + \rho g(H - x_2)) \vec{n} dA$$

Uma parametrização de S é:

$$\sigma = \begin{cases} x_1 = R \sin\varphi \cos\theta \\ x_2 = R \cos\varphi \\ x_3 = R \sin\varphi \sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Então

$$\vec{n} dA = \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} d\varphi d\theta = R^2 \sin^2\varphi \sin\theta d\varphi d\theta \vec{e}_1 + R^2 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi d\theta \vec{e}_2 + R^2 \sin^2\varphi \cos\theta d\varphi d\theta \vec{e}_3$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_S -(p_0 + \rho g(H - x_2)) \vec{n} dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} -(p_0 + \rho g(H - R\cos\varphi)) R^2 \sin^2\varphi \cos\theta d\theta d\varphi \vec{e}_1 \\ &+ \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} -(p_0 + \rho g(H - R\cos\varphi)) R^2 \sin\varphi \cos\varphi d\theta d\varphi \vec{e}_2 \\ &+ \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} -(p_0 + \rho g(H - R\cos\varphi)) R^2 \sin^2\varphi \cos\theta d\theta d\varphi \vec{e}_3 \end{aligned}$$

As integrais nas direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 têm a forma

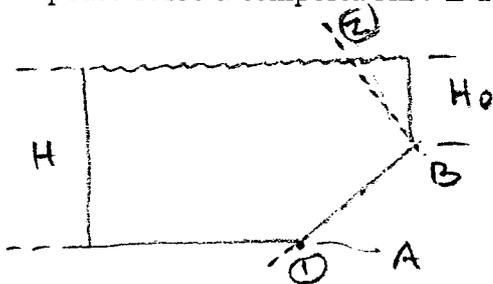
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta &= 0 \\ \int_0^{\pi/2} g(\varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta &= 0 \end{aligned}$$

e um cálculo simples da integral na direção \vec{e}_2 resulta

$$\vec{F} = \left(-p_0 R^2 \pi - \rho g H \pi R^2 + \rho g \frac{2\pi R^3}{3}\right) \vec{e}_2$$

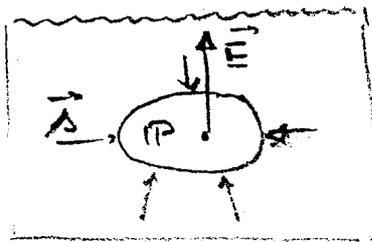
Exercício 62. Interprete as 3 parcelas da expressão de \vec{F} acima

Exercício 63. Calcule a força resultante da ação exercida pelo fluido em repouso sobre a comporta AB . É dado que $\vec{s}(x, \vec{n}) = -p \vec{n}$, $p = p_0 + \rho g h$



(Resposta: $-(p_0 l d + \rho g H_0 d l + \rho g \frac{d^2}{4} l) \vec{e}_2$ onde d e l são os lados da comporta retangular e $H_0 = H - \frac{d}{2}$)

Exemplo 21. (O empuxo) Um sólido está imerso num fluido em repouso: $\vec{s}(x, \vec{n}) = -p \vec{n}$, $p = p_0 + \rho g h$. Vamos mostrar que a força resultante da ação do fluido sobre o sólido é igual ao oposto do peso do fluido deslocado pelo sólido.



Sejam \vec{E} a força procurada e \vec{u} um vetor fixo e arbitrário. Então:

$$\vec{E} \cdot \vec{u} = \int_{\partial P} -p \vec{n} dA \cdot \vec{u} = \int_{\partial P} -p \vec{u} \cdot \vec{n} dA \quad (i)$$

Pelo Teorema da Divergência:

$$\int_{\partial P} -p \vec{u} \cdot \vec{n} dA = - \int_P \text{div} (p\vec{u}) dV \quad (ii)$$

Mas

$$\text{div} (p\vec{u}) = \text{grad } p \cdot \vec{u} + p \text{div} (\vec{u}) = \text{grad } p \cdot \vec{u} \quad (iii)$$

Como $p = p_0 + \rho g x_2$ então

$$\text{grad } p = \rho g \vec{e}_2 \quad (\text{iv})$$

Substituindo (iv) em (iii) obtemos

$$-\int_{\mathbf{P}} \text{div}(p\vec{u}) dV = -\int_{\mathbf{P}} \rho g \vec{e}_2 \cdot \vec{u} dV = -\int_{\mathbf{P}} \rho g dV \vec{e}_2 \cdot \vec{u} \quad (\text{v})$$

De (i), (ii) e (v) concluímos que

$$\vec{E} \cdot \vec{u} = -\int_{\mathbf{P}} \rho g dV \vec{e}_2 \cdot \vec{u}$$

Como \vec{u} é arbitrário, então

$$\vec{E} = -\int_{\mathbf{P}} \rho g dV \vec{e}_2 = -\text{peso do líquido deslocado}$$

3.2 As equações do movimento de um sistema material discreto

As equações do movimento de um meio contínuo serão apresentadas como axiomas. Para motivá-los vamos deduzir as equações de movimento de um sistema material discreto.

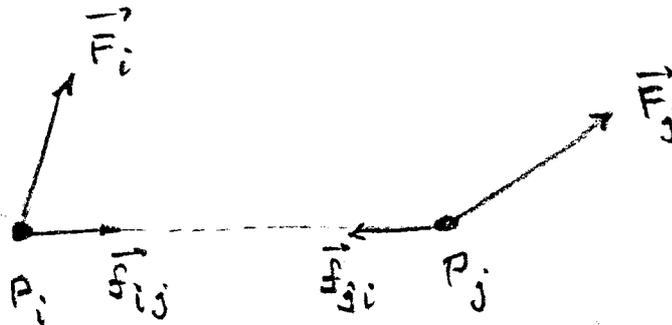
Consideremos um sistema material S constituído por um número finito de pontos P_1, \dots, P_n de massas m_1, \dots, m_n , respectivamente. As ações mecânicas *externas* são dadas por forças $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ aplicadas em P_1, \dots, P_n respectivamente, e as *internas* são dadas por forças \vec{f}_{ij} que representam a ação de P_j sobre P_i .

Sobre as forças internas é feita a hipótese de que

$$\vec{f}_{ij} // \overrightarrow{P_i P_j}$$

(forças centrais). Decorre do princípio da ação e reação que

$$\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$$



Daí tiramos duas conclusões:

- a soma de todas as forças internas é nula

$$\sum_{i,j} \vec{f}_{ij} = \vec{0} \quad (3.1)$$

pois elas se anulam aos pares,

- a soma dos momentos de todas as forças internas em relação a um ponto \$O\$ arbitrário é nula

$$\sum_i (\vec{OP}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = \vec{0} \quad (3.2)$$

porque os momentos também se anulam aos pares, pois

$$\vec{OP}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{OP}_j \times \vec{f}_{ji} = (\vec{OP}_i - \vec{OP}_j) \times \vec{f}_{ij} = \vec{P}_j \vec{P}_i \times \vec{f}_{ij} = \vec{0}$$

Podemos agora deduzir as equações do movimento a partir da segunda lei de Newton que sabemos ser válida para referenciais inerciais (por definição, referenciais inerciais são aqueles onde vale a segunda lei de Newton) .

Indiquemos por \$\vec{F}\$ a soma das forças externas

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad (3.3)$$

e por \$\vec{M}_0\$ a soma dos momentos em relação a \$O\$ das forças externas

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{OP}_i \times \vec{F}_i \quad (3.4)$$

Teorema 13. (1ª equação do movimento) Suponhamos S em movimento em relação a um referencial inercial. Então

$$\vec{F} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

onde \vec{a}_i é a aceleração de P_i .

Proof. Decorre da 2ª lei de Newton que

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$

logo,

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij}$$

levando em conta 3.1 e 3.3 concluimos a tese. \square

Teorema 14. (2ª equação do movimento) Suponhamos S em movimento em relação a um referencial inercial. Então

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{OP}_i \times m_i \vec{a}_i$$

Proof. Decorre da 2ª lei de Newton que

$$\vec{OP}_i \times m_i \vec{a}_i = \vec{OP}_i \times \vec{F}_i + \vec{OP}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}$$

logo

$$\sum_i \vec{OP}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{OP}_i \times \vec{F}_i + \sum_i (\vec{OP}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij})$$

levando-se em conta 3.4 e 3.2 concluimos a tese. \square

Observação 6. A primeira equação do movimento afirma que num referencial inercial vale

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{l}$$

onde $\vec{l} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ é a quantidade de movimento de S (ou momento linear de S). A segunda equação do movimento afirma que num referencial inercial vale

$$\vec{M}_0 = \frac{d}{dt} \vec{K}_0$$

onde $\vec{K}_0 = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \times m_i \vec{v}_i$ é o *momento angular* de S em relação a um ponto fixo O .

Exercício 64. Verifique que $\vec{M}_0 = \frac{d}{dt} \vec{K}_0$ é equivalente à segunda equação do movimento. (O sendo um ponto fixo do espaço \mathbb{E})

Exercício 65. O *centro de massa* do sistema discreto S é o ponto G definido por

$$G = O + \frac{1}{M} (m_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OP_n}) \quad (i)$$

ou, equivalentemente, dado por

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} (m_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OP_n}) \quad (ii)$$

onde $M = m_1 + \dots + m_n$ e O é um ponto arbitrário. (G não depende do ponto O usado para defini-lo, ou seja, se G' for dado por

$$G' = O' + \frac{1}{M} (m_1 \overrightarrow{O'P_1} + \dots + m_n \overrightarrow{O'P_n})$$

então

$$G' = G$$

(verifique isso)

Observe que como P_1, \dots, P_n estão em movimento, G também está em movimento: $G = G(t)$.

1. Mostre que

$$M \vec{v}_G = m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

ou seja, a quantidade de movimento linear de S é igual à de uma partícula de massa M que se movimenta como G (sugestão: tome O fixo e derive (ii) em relação ao tempo)

2. Mostre que num referencial inercial vale

$$\vec{F} = M \vec{a}_G$$

(sugestão: derive a igualdade do item (1) acima e use a 1ª equação do movimento)

3. Seja \vec{K}_G o momento cinético (ou momento angular) de S em relação a G , ou seja,

$$\vec{K}_G = \sum_i \overrightarrow{GP_i} \times m_i \vec{v}_i \quad (iii)$$

Mostre que num referencial inercial vale

$$\vec{M}_G = \dot{\vec{K}}_G$$

(sugestão: derive (iii) em relação ao tempo, use o item (1) deste exercício e a 2ª equação do movimento).

3.3 As equações do movimento de um meio contínuo

A primeira e a segunda equações do movimento, que no caso discreto foram deduzidas da segunda lei de Newton, têm suas versões para um meio contínuo apresentadas como postulados.

3.3.1 Primeira equação do movimento ou Princípio do Momento linear

Num referencial inercial vale

$$\int_{\partial \mathbb{P}_t} \vec{s}(\vec{n}) da + \int_{\mathbb{P}_t} \vec{b} dv = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{a} \rho dv$$

qualquer que seja a parte \mathbb{P} do corpo B em movimento ou, escrevendo de modo mais preciso,

$$\int_{\partial \mathbb{P}_t} \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da + \int_{\mathbb{P}_t} \vec{b}(x) dv = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{a}(x, t) \rho(x, t) dv$$

onde \vec{n}_x é a normal unitária exterior a $\partial \mathbb{P}_t$ em x .

Observação 7. O momento linear ou quantidade de movimento da parte \mathbb{P} de B no instante t é definida por

$$\vec{l}(\mathbb{P}_t) = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{v}(x, t) \rho(x, t) dv$$

Verifica-se que

$$\frac{d}{dt} \vec{l}(\mathbb{P}_t) = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{a}(x, t) \rho(x, t) dv$$

Portanto, a primeira equação pode ser escrita como

$$\int_{\partial \mathbb{P}_t} \vec{s}(\vec{n}) da + \int_{\mathbb{P}_t} \vec{b}(x) dv = \frac{d}{dt} \vec{l}(\mathbb{P}_t)$$

Exercício 66. Justifique cada passagem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{l}(\mathbb{P}_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \vec{v} \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}} \vec{v}_m \rho_m J dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}} \vec{v}_m \rho_0 dV = \int_{\mathbb{P}} \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t} \rho_0 dV \\ &= \int_{\mathbb{P}} \vec{A} \rho_m J dV = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{a} \rho dv \end{aligned}$$

Exercício 67. Seja $\varphi = \varphi(x, t)$ um campo espacial. Verifique que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{P}_t} \varphi \rho dv = \int_{\mathbb{P}_t} \frac{D\varphi}{Dt} \rho dv$$

3.3.2 Segunda equação do movimento ou Princípio do momento angular

Seja $O \in \mathbb{E}$. Num referencial inercial vale

$$\int_{\partial \mathbb{P}_t} \vec{r} \times \vec{s}(\vec{n}) da + \int_{\mathbb{P}_t} \vec{r} \times \vec{b} dv = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{r} \times \vec{a} \rho dv$$

para qualquer parte \mathbb{P} de B , onde $\vec{r} = x - O$. Escrevendo mais precisamente:

$$\int_{\partial \mathbb{P}_t} (x - O) \times \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da + \int_{\mathbb{P}_t} (x - O) \times \vec{b}(x, t) dv = \int_{\mathbb{P}_t} (x - O) \times \vec{a}(x, t) \rho(x, t) dv$$

Exercício 68. Seja S uma superfície que é parte da fronteira de uma parte \mathbb{P}_t de B_t . Seja

$$\vec{M}_O = \int_S (x - O) \times \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da$$

o momento em relação a O das forças de superfície que agem em S .

1. Mostre que

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \times \vec{F}_s$$

onde

$$\vec{F}_s = \int_S \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da$$

é a resultante das forças de superfície que agem em S .

2. Calcule \vec{M}_B das forças de superfície que agem na comporta AB do exercício 62.

Exercício 69. O centro de massa de \mathbb{P}_t é o ponto G definido por

$$G = O + \frac{1}{m(\mathbb{P})} \int_{\mathbb{P}_t} (x - O) \rho(x, t) dv$$

(a) verifique que G não depende do ponto O usado para defini-lo.

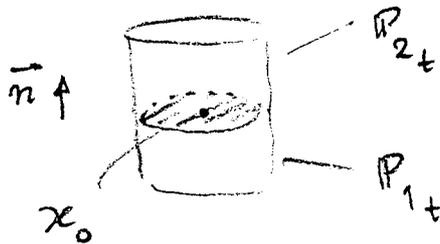
(b) seja $\vec{b} = \rho \vec{g}$ a densidade volumétrica de peso em \mathbb{P}_t . Mostre que \vec{b} é equivalente a uma única força, o peso de \mathbb{P}_t , aplicada em G , ou seja, verifique que

- a resultante de $\vec{b} = \text{peso de } \mathbb{P}_t (= \vec{P})$.
- momento de \vec{b} em relação a um ponto $O = \text{momento do peso } \vec{P} \text{ aplicado em } G \text{ em relação a } O$.

3.4 Conseqüências do princípio do momento linear

3.4.1 Lei da ação e reação para forças de superfície

Teorema 15. $\vec{s}(x_0, t, -\vec{n}) = \vec{s}(x_0, t, \vec{n})$



Na figura, \mathbb{P}_t é um cilindro, \mathbb{P}_{2t} é o cilindro superior ao plano S e \mathbb{P}_{1t} o inferior. $x_0 \in S$ e \vec{n} é normal a S .

Proof. Aplicando o princípio do momento linear a \mathbb{P}_t , \mathbb{P}_{1t} e \mathbb{P}_{2t} obtemos:

$$\int_{\partial\mathbb{P}_t} \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da + \int_{\mathbb{P}_t} \vec{b}(x, t) dv = \int_{\mathbb{P}_t} \vec{a}(x, t) \rho(x, t) dv \quad (i)$$

$$\int_{\partial\mathbb{P}_{1t}} \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da + \int_{\mathbb{P}_{1t}} \vec{b}(x, t) dv = \int_{\mathbb{P}_{1t}} \vec{a}(x, t) \rho(x, t) dv \quad (ii)$$

$$\int_{\partial\mathbb{P}_{2t}} \vec{s}(x, t, \vec{n}_x) da + \int_{\mathbb{P}_{2t}} \vec{b}(x, t) dv = \int_{\mathbb{P}_{2t}} \vec{a}(x, t) \rho(x, t) dv \quad (iii)$$

Fazendo (i) - (ii) - (iii) chegamos a

$$\int_S \vec{s}(x, t, \vec{n}) da + \int_S \vec{s}(x, t, -\vec{n}) da = \vec{0}$$

Multiplicando escalarmente por um vetor fixo \vec{u} :

$$\int_S (\vec{s}(x, t, \vec{n}) + \vec{s}(x, t, -\vec{n})) \cdot \vec{u} da = 0$$

Pelo teorema da média para integrais ¹ existe $\bar{x} \in S$ tal que

$$(\vec{s}(\bar{x}, t, \vec{n}) + \vec{s}(\bar{x}, t, -\vec{n})) \cdot \vec{u} \cdot \text{área de } S = 0$$

Logo

$$(\vec{s}(\bar{x}, t, \vec{n}) + \vec{s}(\bar{x}, t, -\vec{n})) \cdot \vec{u} = 0$$

Fazendo S tender a x_0 , portanto $\bar{x} \rightarrow x_0$, segue

$$(\vec{s}(x_0, t, \vec{n}) + \vec{s}(x_0, t, -\vec{n})) \cdot \vec{u} = 0$$

Como \vec{u} é genérico, concluímos a tese □

¹Admitida a continuidade do integrando, $\int_S \varphi dA = \varphi(\bar{x}) \cdot \text{área de } S$

3.4.2 Existência do tensor de Cauchy

Teorema 16. *Para cada (x, t) existe um tensor*

$$T(x, t) : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

tal que

$$\vec{s}(x, t, \vec{n}) = T(x, t)(\vec{n}) \quad (3.5)$$

para todo \vec{n} unitário. $T(x, t)$ é o chamado tensor de Cauchy em (x, t) ou tensor de tensões de Cauchy e o campo espacial $(x, t) \mapsto T(x, t)$ é chamado campo tensorial de Cauchy ou campo tensão de Cauchy.

Proof. Seja $x_0 \in B_t$ e seja $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de \mathbb{V} . Para definir $T(x_0, t)$ basta fazê-lo na base dada. Para satisfazer 3.5, isto só pode ser feito assim

$$T(x_0, t)(\vec{e}_i) = \vec{s}(x_0, t, \vec{e}_i) \quad (i)$$

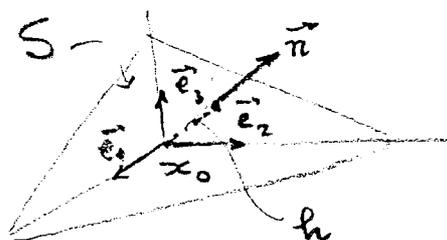
Para que valha 3.5 para todo \vec{n} unitário é necessário e suficiente que $\vec{s}(x_0, t, \vec{n})$ seja uma função linear de \vec{n} , isto é,

$$\vec{s}(x_0, t, \sum_{i=1}^3 n_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i \vec{s}(x_0, t, \vec{e}_i) \quad (ii)$$

sempre que $\vec{n} = \sum_i n_i \vec{e}_i$ for unitário. É isso que demonstraremos a seguir.

Consideremos x_0 no interior de B_t e consideremos inicialmente $n_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ (\vec{n} está no primeiro oitante).

Para cada $h > 0$, pequeno o suficiente para que isto seja possível, construamos o tetraedro \mathbb{P}_t contido em B_t como na figura



(S é a face oblíqua cuja normal exterior unitária é \vec{n} , S_i tem normal exterior $-\vec{e}_i$, h é a distância de x_0 a S)

Aplicamos a \mathbb{P}_t o princípio do momento linear:

$$\int_S \vec{s}(x, t, \vec{n}) da + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \vec{s}(x, t, -\vec{e}_i) da + \int_{\mathbb{P}_t} \vec{b}(x, t) - \rho(x, t) \vec{a}(x, t) dv = \vec{0}$$

Indiquemos por $\vec{b}^*(x, t)$ a diferença $\vec{b}(x, t) - \rho(x, t) \vec{a}(x, t)$. Para transformar os integrandos em funções reais e poder aplicar o teorema da média para integrais reais, multipliquemos todos os membros por $\vec{W} \in \mathbb{V}$.

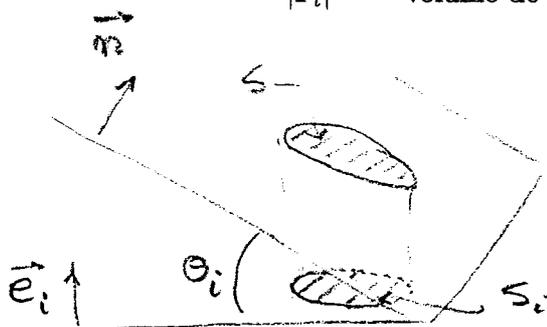
$$\int_S \vec{s}(x, t, \vec{n}) \cdot \vec{W} da + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \vec{s}(x, t, -\vec{e}_i) \cdot \vec{W} da + \int_{\mathbb{P}_t} \vec{b}^*(x, t) \cdot \vec{W} dv = 0$$

Aplicando a cada integral o referido teorema da média, existem $\bar{x} \in S$, $\bar{x}_i \in S_i$ e $\bar{x} \in \mathbb{P}_t$ tais que:

$$\vec{s}(\bar{x}, t, \vec{n}) \cdot \vec{W} |S| + \sum_{i=1}^3 \vec{s}(\bar{x}_i, t, -\vec{e}_i) \cdot \vec{W} |S_i| + \vec{b}^*(\bar{x}, t) \cdot \vec{W} |\mathbb{P}_t| = C \quad (iii)$$

onde (vide figura abaixo)

$$\begin{aligned} |S| &= \text{área de } S \\ |S_i| &= \text{área de } S_i = |S| n_i \\ |\mathbb{P}_t| &= \text{volume de } \mathbb{P}_t = \frac{1}{6} h |S| \end{aligned}$$



$\theta_i = \angle(\pi_i, \pi) = \angle(\vec{e}_i, \vec{n})$.
Como \vec{e}_i e \vec{n} são unitários,
 $\cos\theta_i = \vec{e}_i \cdot \vec{n} = n_i$. Sendo
 S_i a projeção ortogonal de
 S em π_i , então $|S_i| =$
 $|S| \cos\theta_i = |S| n_i$

Substituindo em (iii) e dividindo por $|S|$ obtemos

$$\left(\vec{s}(\bar{x}, t, \vec{n}) + \sum_{i=1}^3 \vec{s}(\bar{x}_i, t, -\vec{e}_i) n_i + \vec{b}^*(\bar{x}, t) \frac{h}{6} \right) \cdot \vec{W} = 0$$

Fazendo $h \rightarrow 0$ então $\bar{x} \rightarrow x_0$, $\bar{x}_i \rightarrow x_0$ e $\bar{\bar{x}} \rightarrow x_0$ obtemos, admitindo a continuidade dos integrandos,

$$\left(\bar{s}(x_0, t, \bar{n}) + \sum_{i=1}^3 \bar{s}(x_0, t, -\bar{e}_i) n_i \right) \cdot \bar{W} = 0$$

Como isto vale para todo \bar{W} , concluímos que o termo entre parênteses é nulo. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{s}(x_0, t, \bar{n}) &= - \sum_{i=1}^3 n_i \bar{s}(x_0, t, -\bar{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 n_i \bar{s}(x_0, t, \bar{e}_i) \end{aligned}$$

onde, na última igualdade usamos a lei de ação e reação. Portanto, vale (ii) se $n_i > 0$, $i = 1, 2, 3$

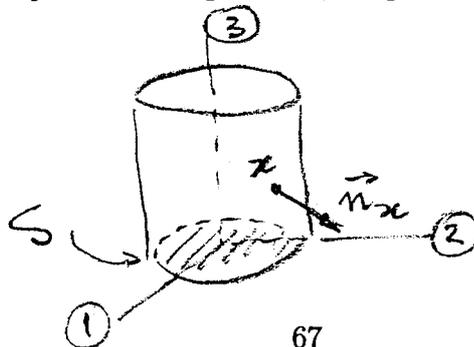
O caso em que algum n_i é estritamente negativo é demonstrado de modo análogo. Por continuidade da função $\bar{n} \mapsto \bar{s}(x, t, \bar{n})$ conclui-se os outros casos e por continuidade da função $x \mapsto \bar{s}(x, t, \bar{n})$ conclui-se que o mesmo vale se x_0 está na fronteira de B_t . \square

Exemplo 22. Vamos supor que o campo tensorial de Cauchy num corpo em movimento seja dado por

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha x_2 \\ 0 & 0 & \alpha x_1 \\ -\alpha x_2 & \alpha x_1 & \beta + \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix}$$

(é suposto fixado um sistema cartesiano ortogonal $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ e a matriz de $T(x, t)$ está dada na base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$) onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes.

Seja \mathbb{P}_t o cilindro circular reto de raio a e altura L da figura. Vamos calcular a densidade superficial de força na superfície curva e na tampa $x_3 = 0$ assim como a força total de superfície que age em $x_3 = 0$.



A normal unitária exterior à face curva no ponto $x = (x_1, x_2, x_3)$ é

$$\vec{n}_x = \frac{1}{a}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$$

Logo

$$[\vec{s}(x, t, \vec{n}_x)] = [T(x, t)][\vec{n}_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha x_2 \\ 0 & 0 & \alpha x_1 \\ -\alpha x_2 & \alpha x_1 & \beta + \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{a} \\ \frac{x_2}{a} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, na superfície curva

$$\vec{s} = \vec{0}$$

Na tampa, S dada por $x_3 = 0$, a normal unitária exterior é

$$\vec{n} = -\vec{e}_3$$

logo

$$[\vec{s}(x, t, -\vec{e}_3)] = [T(x, t)][-\vec{e}_3] = \begin{bmatrix} \alpha x_2 \\ -\alpha x_1 \\ -(\beta + \gamma x_1 + \delta x_2) \end{bmatrix}$$

ou seja, na tampa $x_3 = 0$ temos

$$\vec{s} = \alpha x_2 \vec{e}_1 - \alpha x_1 \vec{e}_2 - (\beta + \gamma x_1 + \delta x_2) \vec{e}_3$$

A força total de superfície que age em S é

$$\vec{F}_s = \int_S \vec{s} da = \int_S \alpha x_2 da \vec{e}_1 - \int_S \alpha x_1 da \vec{e}_2 - \int_S (\beta + \gamma x_1 + \delta x_2) da \vec{e}_3 = -\beta \pi a^2 \vec{e}_3$$

Exercício 70. Em relação ao exemplo acima calcule: a densidade superficial de força na tampa $x_3 = L$, sua resultante, o momento em relação à origem das forças que agem na tampa $x_3 = 0$. (respostas: $\vec{s} = -\alpha x_2 \vec{e}_1 + \alpha x_1 \vec{e}_2 + (\beta + \gamma x_1 + \delta x_2) \vec{e}_3$, $\vec{F} = \beta \pi a^2 \vec{e}_3$, $\vec{M}_0 = \frac{1}{4} \pi a^4 \delta \vec{e}_1 - \frac{1}{4} \pi a^4 \gamma \vec{e}_2 - \frac{1}{2} \pi a^4 \alpha \vec{e}_3$)

Exercício 71. Suponha que no movimento de cisalhamento

$$x_1 = X_1 + ktX_2; \quad x_2 = X_2; \quad x_3 = X_3$$

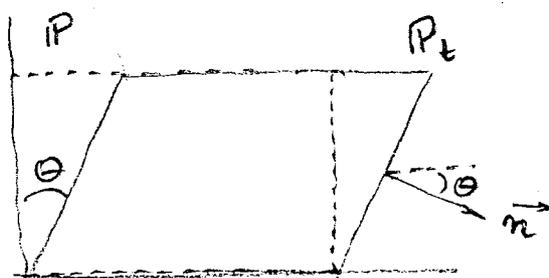
o campo tensorial de Cauchy seja dado por

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} 2\gamma^2 + \gamma^4 & \gamma^3 & 0 \\ \gamma^3 & 2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma^2 \end{bmatrix}$$

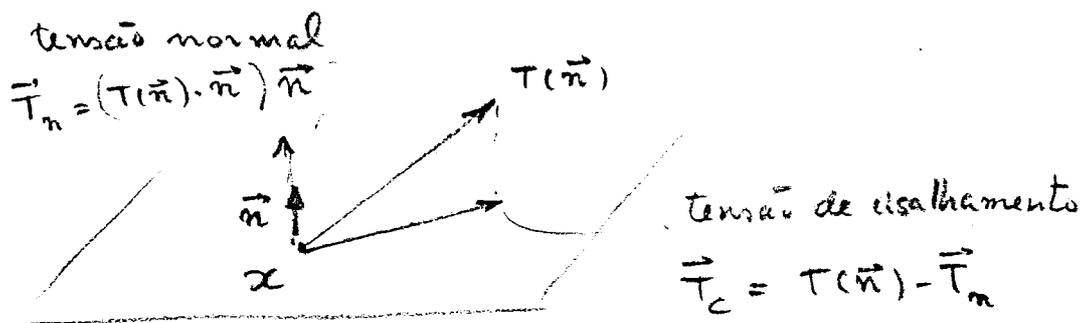
onde $\gamma = kt$. Considere, na configuração de referência, o cubo \mathbb{P} dado por $0 \leq X_i \leq 1; i = 1, 2, 3$. Calcule a densidade superficial de força na face de \mathbb{P}_t que proveio da face $X_1 = 1$ de \mathbb{P} . Calcule a resultante das forças de superfície nesta face.

(Observe que $\gamma = \tan \theta$ onde o traço contínuo indica \mathbb{P}_t e o pontilhado \mathbb{P} .)

Resposta: $\vec{s} = \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma^2)^{1/2}} \vec{e}_1 - \frac{\gamma^3}{(1+\gamma^2)^{1/2}} \vec{e}_3; \vec{F} = 2\gamma^2 \vec{e}_1 - \gamma^3 \vec{e}_2$.



A componente de $T(x, t)(\vec{n})$ na direção de \vec{n} é chamada *tensão normal* (no ponto x , no instante t , segundo \vec{n}) e a componente perpendicular a \vec{n} é chamada *tensão de cisalhamento* (no ponto x , no instante t , segundo \vec{n})



Exercício 72. No exercício anterior, calcule a norma da tensão normal e a norma da tensão de cisalhamento quando $\gamma = 1$. (Resposta: $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$)

Exercício 73. Num movimento, a tensão de Cauchy é dada por

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} \alpha x_2 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde α e β são constantes. Seja \mathbb{P}_t o cubo de vértices $(0, 1, 1)$ $(0, -1, -1)$ $(0, 1, -1)$ $(0, -1, 1)$ $(-2, 1, 1)$ $(-2, -1, -1)$ $(-2, 1, -1)$ $(-2, -1, 1)$

1. desenhe o campo densidade superficial de força na face $x_1 = 0$ do cubo.
2. ache a resultante e o momento em relação à origem do campo do item (1). (Resposta: $\vec{F} = 4\beta\vec{e}_2$; $\vec{M}_0 = \frac{-4\alpha}{3}\vec{e}_3$)

(todos os dados estão referidos a um sistema ortogonal de coordenadas: $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$)

Exercício 74. O tensor de Cauchy num dado ponto, num certo instante, é dado por

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} MPa$$

Sabendo que o ponto pertence ao plano $x_3 + 2x_1 + 2x_2 = 0$, determine a norma da tensão normal e a norma da tensão de cisalhamento nesse ponto decorrente da ação sobre o plano da parte do corpo que fica "acima" do plano.

Todos os dados estão referidos a um sistema ortogonal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ onde \vec{e}_3 tem a direção e sentido a vertical ascendente, ou seja, um ponto está acima do outro se a coordenada x_3 do primeiro for maior do que a coordenada x_3 do segundo. (Resposta: $T_n = 3MPa$; $T_c = \frac{\sqrt{5}}{3}MPa$)

Exercício 75. Num movimento, o tensor de Cauchy é dado por

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbb{P}_t é o cilindro $x_2^2 + x_3^2 \leq 4$; $0 \leq x_1 \leq 1$

1. ache a densidade superficial de força na superfície curva e nas tampas do cilindro (resposta: $\vec{0}$, $\alpha x_3 \vec{e}_2 - \alpha x_2 \vec{e}_3$, $-\alpha x_3 \vec{e}_2 + \alpha x_2 \vec{e}_3$, respectivamente)
2. ache a força resultante na face $x_1 = 1$ (resposta: $\vec{0}$)
3. ache o momento em relação à origem das forças que agem em $x_1 = 1$ ($8\pi\alpha\vec{e}_1$)

3.4.3 Equação local do movimento

Dado um movimento, seja $T = T(x, t)$ um campo tensorial espacial dado num sistema cartesiano ortogonal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ por

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

onde

$$T_{ij} = T_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$$

O *divergente do campo tensorial* T é, por definição, o campo vetorial dado por ²

$$\operatorname{div} T = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3} \right) \vec{e}_i \quad (3.6)$$

ou seja, pensando em cada linha i da matriz de T como um campo vetorial

$$\vec{F}_i = T_{i1}\vec{e}_1 + T_{i2}\vec{e}_2 + T_{i3}\vec{e}_3 \quad (3.7)$$

então

$$\operatorname{div} T = (\operatorname{div} \vec{F}_1)\vec{e}_1 + (\operatorname{div} \vec{F}_2)\vec{e}_2 + (\operatorname{div} \vec{F}_3)\vec{e}_3$$

Exemplo 23. Seja

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_3 \\ x_1 x_2 & 2x_3^2 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

então

$$\operatorname{div} T(x, t) = (2x_1 + x_1 + 1)\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Teorema 17. (*da divergência para campos tensoriais*) Seja $T = T(x, t)$ um campo tensorial espacial e seja \mathbb{P} uma parte do corpo em movimento. Então

$$\int_{\partial\mathbb{P}_t} T(\vec{n}) da = \int_{\mathbb{P}_t} \operatorname{div} T dv$$

onde \vec{n} é o campo de vetores unitários exteriores a $\partial\mathbb{P}_t$, isto é,

$$\int_{\partial\mathbb{P}_t} T(x, t)(\vec{n}_x) da = \int_{\mathbb{P}_t} \operatorname{div} T(x, t) dv$$

²Pode-se demonstrar que o campo vetorial $\operatorname{div} T$ independe do sistema cartesiano de coordenadas usado para defini-lo. Veja exercício 82.

Proof. É fácil ver que

$$T(\vec{n}) = \sum_{i=1}^3 (\vec{F}_i \cdot \vec{n}) \vec{e}_i$$

sendo \vec{F}_i definido em 3.7. Logo

$$\int_{\partial P_t} T(\vec{n}) da = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial P_t} \vec{F}_i \cdot \vec{n} da \vec{e}_i$$

Aplicando o teorema da divergência para campos vetoriais,

$$\int_{\partial P_t} \vec{F}_i \cdot \vec{n} da = \int_{P_t} \text{div } \vec{F}_i dv,$$

chegamos a

$$\int_{\partial P_t} T(\vec{n}) da = \sum_{i=1}^3 \left(\int_{P_t} \text{div } \vec{F}_i dv \right) \vec{e}_i = \int_{P_t} \left(\sum_{i=1}^3 \text{div } \vec{F}_i \vec{e}_i \right) dv = \int \text{div } T dv$$

□

Teorema 18. (Equação local do movimento) Seja $T = T(x, t)$ o campo tensorial de Cauchy num movimento. Então

$$\text{div } T + \vec{b} = \rho \vec{a}$$

ou seja

$$\text{div } T(x, t) + \vec{b}(x, t) = \rho(x, t) \vec{a}(x, t)$$

qualquer que seja (x, t) .

Proof. Substituindo $\vec{s} = T(\vec{n})$ no princípio do momento linear temos

$$\int_{\partial P_t} T(\vec{n}) da + \int_{P_t} \vec{b} dv = \int_{P_t} \rho \vec{a} dv$$

Aplicando o teorema da divergência na 1ª integral e escrevendo todas as integrais sob o mesmo sinal de integração obtemos

$$\int_{P_t} \text{div } T + \vec{b} - \rho \vec{a} dv = \vec{0}$$

Como isto vale para toda parte \mathbb{P} do corpo em movimento, segue do teorema da localização que

$$\text{div } T + \vec{b} - \rho \vec{a} = \vec{0}$$

□

Num sistema cartesiano ortogonal a equação local do movimento se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= \rho a_1 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= \rho a_2 \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= \rho a_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3, \quad \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

Exemplo 24. Num corpo em equilíbrio estático, o tensor das tensões é

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha x_2 \\ 0 & 0 & \alpha x_1 \\ -\alpha x_2 & \alpha x_1 & \beta + \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular a força de corpo que age no corpo.

Como $\vec{a} = \vec{0}$, a equação de movimento fica

$$\operatorname{div} T + \vec{b} = \vec{0}$$

Logo,

$$\vec{b} = -\operatorname{div} T = \vec{0}.$$

Exercício 76. A única força de corpo que age num corpo é seu peso e a tensão de Cauchy é dada por

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{cy}{x^2+y^2} \\ 0 & 0 & \frac{cx}{x^2+y^2} \\ -\frac{cy}{x^2+y^2} & \frac{cx}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Determine o campo de acelerações. (Resposta: \vec{g})

Exercício 77. No movimento

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3, \quad \gamma = kt$$

o campo tensorial de Cauchy é dado por

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} 2\gamma^2 + \gamma^4 & \gamma^3 & 0 \\ \gamma^3 & 2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma^2 \end{bmatrix}$$

Calcule a força que age no corpo. (resposta: $\vec{b} = \vec{0}$)

Exercício 78. O corpo $-a \leq x_1 \leq a$, $-a \leq x_2 \leq a$, $-h \leq x_3 \leq h$ está em equilíbrio e o tensor das tensões é dado por

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} -p \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{a^2} & 2p \frac{x_1 x_2}{a^2} & 0 \\ 2p \frac{x_1 x_2}{a^2} & p \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. calcule a força de corpo. (resposta: $\vec{b} = \vec{0}$)
2. ache a força superficial na face $x_1 = a$. (resposta: $-\frac{8}{3}pah \vec{e}_1$)

Exercício 79. Num corpo em repouso, o tensor de Cauchy é dado por

$$[T(x, t)] = k \begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1 x_2 & 0 \\ 2x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

k constante.

1. Determine a força de corpo. (resposta: $\vec{b} = -4k(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2)$)
2. Supondo que o corpo é o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$, ache a força superficial que age na face inclinada (não contida nos planos coordenados)
(resposta: $\frac{k\sqrt{3}}{6}a^4(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$)

Exercício 80. Num corpo em repouso tem-se

$$T = -(p_0 + \rho g x_3)\mathbb{I}$$

onde \mathbb{I} é o tensor identidade, ou seja,

$$[T(x, t)] = \begin{bmatrix} -(p_0 + \rho g x_3) & 0 & 0 \\ 0 & -(p_0 + \rho g x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -(p_0 + \rho g x_3) \end{bmatrix}$$

p_0 e a densidade ρ são constantes e \vec{e}_3 tem o sentido da aceleração da gravidade \vec{g} . Determine a força de corpo. (resposta: $\rho\vec{g}$)

Exercício 81. $T = -p\mathbb{I}$ onde $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ e \mathbb{I} é o tensor identidade. Calcule $\text{div } T$. (resposta: $-\text{grad } p$)

Exercício 82. Um corpo na forma de um paralelepípedo de arestas paralelas aos eixos tem densidade constante (com x e com t) e $T = -p\mathbb{I}$, $p = p(x_1, x_2, x_3)$. O corpo está em repouso sob a ação do próprio peso e na face superior age a pressão atmosférica p_a . Determine T .

Exercício 83. 1. Verifique que para todo campo vetorial constante \vec{w} vale

$$\text{div } T \cdot \vec{w} = \text{div } (T^t(\vec{w}))$$

2. Mostre que se um campo vetorial \vec{u} verifica

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \text{div } (T^t(\vec{w}))$$

para todo campo constante \vec{w} , então $\text{div } T = \vec{u}$.

(Este exercício mostra que a definição de $\text{div } T$ dada nesta seção independe do sistema de coordenadas adotado)

3.5 Conseqüência do princípio do momento angular: a simetria do tensor de Cauchy

Teorema 19. O campo tensorial de Cauchy $T = T(x, t)$ é simétrico.

Proof. Substituindo $\vec{s} = T(\vec{n})$ no princípio do momento angular temos

$$\int_{\partial P_t} (x - O) \times T(\vec{n}) da + \int_{P_t} (x - O) \times \vec{b}^* dv = \vec{0} \quad (i)$$

Seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas. Então

$$\begin{aligned}x - O &= \sum_i x_i \vec{e}_i \\ \vec{b} - \rho \vec{a} = \vec{b}^* &= \sum_i b_i^* \vec{e}_i \\ T(\vec{n}) &= \sum_i (\vec{F}_i \cdot \vec{n}) \vec{e}_i\end{aligned}$$

onde \vec{F}_i está definida em 3.7. Substituindo em (i) e projetando todos os termos na direção \vec{e}_1 obtemos

$$\int_{\partial \mathbb{P}_t} (x_2 \vec{F}_3 - x_3 \vec{F}_2) \cdot n \, da + \int_{\mathbb{P}_t} x_2 b_3^* - x_3 b_2^* \, dv = 0$$

Aplicando o teorema da divergência na 2ª integral chegamos a

$$\int_{\mathbb{P}_t} \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + b_3^* \right) - x_3 \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + b_2^* \right) + (T_{32} - T_{23}) \, dv = 0$$

Pelas equações de movimento 3.8 vemos que o 1º e o 2º parênteses são nulos. Logo,

$$\int_{\mathbb{P}_t} T_{32} - T_{23} \, dv = 0$$

Como esta igualdade vale para toda parte \mathbb{P}_t , segue do teorema da localização que

$$T_{32} - T_{23} = 0$$

De modo análogo, projetando a equação (i) na direção \vec{e}_2 e na direção \vec{e}_3 obtemos

$$T_{31} - T_{13} = 0 \quad e \quad T_{12} - T_{21} = 0$$

Como a base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é ortonormal, concluímos que T é simétrico. \square

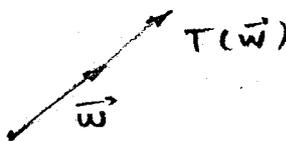
Exercício 84. Suponha que $\vec{s}(x, t, \vec{n}) = \vec{0}$ para todo $x \in \partial \mathbb{B}_t$ e \vec{n}_x normal exterior a $\partial \mathbb{B}_t$. Mostre que a tensão em qualquer ponto $x \in \partial \mathbb{B}_t$ em qualquer plano normal a $\partial \mathbb{B}_t$ é tangente à fronteira.

3.6 Autovalores e autovetores

Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ linear. Diz-se que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor* de T se existir um vetor *não nulo* \vec{w} tal que

$$T(\vec{w}) = \lambda \vec{w}.$$

Um tal $\vec{w} \neq \vec{0}$ é dito *autovetor* de T associado ao autovalor λ .



Exemplo 25. Seja $T = \alpha I$. Qualquer vetor $\vec{w} \neq \vec{0}$ é um autovetor associado ao autovalor α pois

$$T(\vec{w}) = \alpha I(\vec{w}) = \alpha \vec{w}$$

Exemplo 26. Seja T o operador linear cuja matriz na base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

cada \vec{e}_i é um autovetor de T pois $T(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

Exemplo 27. Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ dado por

$$T(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

onde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base de \mathbb{V} . (T é a projeção no plano \vec{e}_1, \vec{e}_2)

- todo vetor $\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2$, não nulo, é autovetor associado ao autovalor 1. De fato,

$$T(w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2) = 1(w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2)$$

- todo vetor não nulo da forma $\vec{w} = w_3 \vec{e}_3$ é autovetor associado ao autovalor 0. De fato,

$$T(w_3 \vec{e}_3) = \vec{0} = 0 w_3 \vec{e}_3$$

Seja λ um autovalor de T . Então existe um vetor $\vec{w} \neq \vec{0}$ tal que

$$(T - \lambda \mathbb{I})(\vec{w}) = \vec{0},$$

ou seja, o sistema linear

$$[T - \lambda \mathbb{I}]X = 0$$

tem solução não trivial (qual seja, $X = [\vec{w}]$). Mas isto é equivalente a dizer que

$$\det [T - \lambda \mathbb{I}] = 0$$

Em resumo, os autovalores de T são as raízes do *polinômio característico*

$$p(\lambda) = \det [T - \lambda \mathbb{I}]$$

Exercício 85. É dada a matriz de T numa base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Determine os autovalores e os correspondentes autovetores.

1.

$$[T] = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(resposta:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3, & \vec{v}_1 &= \alpha(2\vec{e}_2 - \vec{e}_1), \\ \lambda_2 &= 3, & \vec{v}_2 &= \alpha\vec{e}_3 \\ \lambda_3 &= 7, & \vec{v}_3 &= \alpha(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \end{aligned}$$

2.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(resposta:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \vec{v}_1 &= \alpha(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ \lambda_2 &= 2, & \vec{v}_2 &= \alpha\vec{e}_3 + \beta(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \end{aligned}$$

Teorema 20. (*espectral para operadores simétricos*) Seja T um operador simétrico de \mathbb{V} . Então existe uma base ortonormal de \mathbb{V} constituída por autovetores de T .

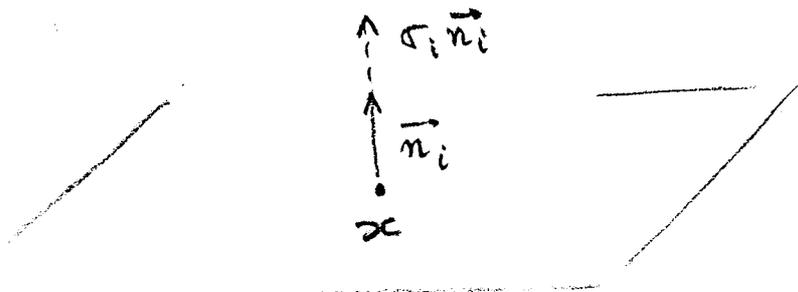
Exercício 86. Determine a base ortonormal referida no teorema espectral no caso dos dois operadores do exercício anterior. Escreva a matriz do operador na base encontrada.

3.7 Tensões e direções principais

Fixemos (x, t) . Já sabemos que o tensor de Cauchy $T = T(x, t)$ é simétrico. Portanto existe uma base ortonormal $b = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ tal que

$$T(\vec{n}_i) = \sigma_i \vec{n}_i$$

Os autovalores $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são chamados *tensões principais* em (x, t) e as direções de $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ são chamadas *direções principais* em (x, t) . Assim, no instante t , no ponto x , no plano de normal \vec{n}_i só há tensão normal e essa tensão é σ_i .



Na base b , a matriz de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Chapter 4

Fluidos

4.1 Hipóteses Constitutivas

Diferentes corpos, submetidos a esforços idênticos, reagem diferentemente. É o que se percebe quando se submete um fio de aço ou um fio de borracha a um mesmo esforço de tração. Essa constatação experimental se reflete na teoria através da indeterminação que ocorre quando se quer achar o campo de tensões num corpo em repouso, conhecidos \vec{b} e as condições de contorno sobre a fronteira, usando exclusivamente as equações

$$\operatorname{div} T + \vec{b} = \vec{0} \quad e \quad T^t = T.$$

Como temos um sistema de três equações escalares (as equações 3.8) e seis incógnitas (os T_{ij}), está aí a indeterminação. Para superá-la são necessárias mais informações: as *hipóteses constitutivas* do material, ou seja, afirmações que traduzem propriedades específicas do material que se estuda.

As hipóteses constitutivas podem se referir:

1. *aos movimentos que o corpo pode realizar.* Rigidez e incompressibilidade são exemplos desse tipo de hipótese. No primeiro caso admite-se que os únicos movimentos que o corpo pode realizar são os rígidos. No segundo, os únicos movimentos admissíveis são os isocóricos.
2. *ao Tensor de Cauchy.* Um exemplo é o dos fluidos invíscidos para os quais se admite que a tensão superficial em qualquer ponto, em qualquer plano, não tem componente de cisalhamento, ou seja, admite-se que o

tensor de Cauchy tem a forma

$$T = -p\mathbb{I}$$

Corpos elásticos é outra classe de exemplos. Para esses corpos a hipótese constitutiva consiste em dar o tensor das tensões como função do gradiente das deformações

$$T = f(F).$$

4.2 Fluido ideal

Um *fluido ideal* é um corpo caracterizado pelas seguintes hipóteses constitutivas

1. é *incompressível*, ou seja, os únicos movimentos admissíveis são os que preservam volume (movimentos isocóricos) o que equivale a dizer que

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

2. é *homogêneo*, isto é,

$$\rho_0 \text{ não depende da posição}$$

Logo, por ser incompressível e homogêneo,

$$\rho = \rho_0 = \text{constante}$$

3. a tensão de Cauchy é da forma

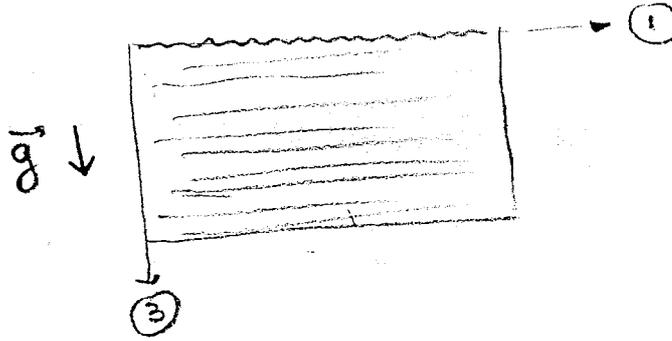
$$T = -p\mathbb{I}$$

onde $p = p(x, t)$.

A condição (3) informa que os fluidos ideais são *invícid*os (incapazes de exercer tensão de cisalhamento) e que a *pressão* p é função de (x, t) .

Exemplo 28. (Hidrostática) Consideremos um fluido ideal em repouso em relação à Terra e sujeito à ação do próprio peso. Vamos determinar a expressão da pressão p e concluir que as superfícies de igual pressão e, em particular, a superfície livre, são planos horizontais.

Seja $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema cartesiano ortogonal com \vec{e}_3 com o mesmo sentido que \vec{g} .



Substituindo $T = -p\mathbb{I}$, $\vec{a} = \vec{0}$ e $\vec{b} = \rho g \vec{e}_3$ na equação local do movimento, $\text{div } T + \vec{b} = \vec{0}$, chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \rho g\end{aligned}$$

Portanto,

$$p = \rho g x_3 + c$$

Admitindo-se que a origem do sistema de coordenadas esteja na superfície livre, ou seja, $p = p_a$ para $x_3 = 0$, concluímos que $c = p_a$. Logo

$$p = \rho g x_3 + p_a$$

Logo, a superfície de pressão constante p_0 é o plano horizontal

$$x_3 = \frac{p_0 - p_a}{\rho g}$$

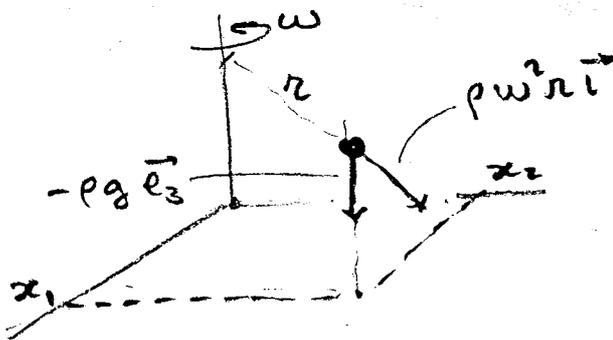
Em particular, a superfície livre é o plano $x_3 = 0$.

Exemplo 29. (Hidrostática num referencial não inercial) Um fluido ideal sujeito ao próprio peso está em repouso em relação a um balde que gira com velocidade angular ω constante em torno de um eixo vertical. Vamos determinar a fórmula da pressão e a equação da superfície livre.

Precisamos de uma equação de movimento para um referencial não inercial (o balde é não inercial se supusermos que a Terra o seja, como é comum nos problemas de engenharia). Esta equação é

$$\operatorname{div} T + \vec{b}^* = \rho \vec{a} \quad (4.1)$$

onde \vec{b}^* é a soma das forças de corpo oriundas da ação de outros corpos sobre o fluido (como o peso, por exemplo), com as *forças de inércia* (as forças de arrastamento e de Coriolis). No caso, usando um sistema cartesiano ortogonal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ com \vec{e}_3 no sentido oposto a \vec{g} ,



$$\vec{b}^* = -\rho g \vec{e}_3 + \rho \omega^2 r \vec{i}$$

onde

$$r \vec{i} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

ou seja

$$\vec{b}^* = -\rho g \vec{e}_3 + \rho \omega^2 x_1 \vec{e}_1 + \rho \omega^2 x_2 \vec{e}_2$$

Levando na equação 4.1 esta expressão de \vec{b}^* , $T = -p\mathbb{I}$, e $\vec{a} = \vec{0}$ (o fluido está em repouso em relação ao balde) temos

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho \omega^2 x_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho \omega^2 x_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Logo

$$p = \rho \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \rho g x_3 + c$$

Supondo a origem na superfície livre, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e $p = p_a$ concluímos que $c = p_a$. Logo,

$$p = p_a + \rho \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \rho g x_3$$

Portanto, a superfície livre, $p = p_a$, tem equação

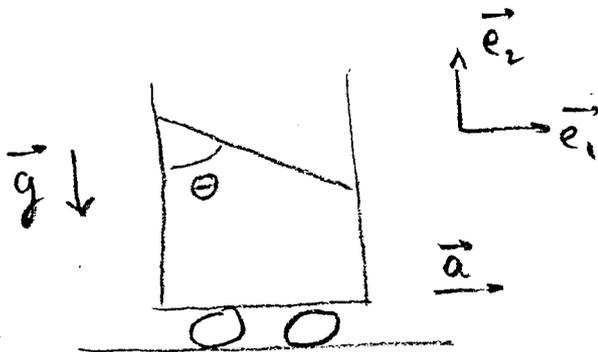
$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g}(x_1^2 + x_2^2)$$

que é um parabolóide de eixo vertical.

Observação 8. Os resultados dos dois últimos exemplos valem para qualquer fluido, conforme veremos adiante.

Exercício 87. Um tanque contendo um fluido ideal move-se horizontalmente com aceleração constante $\vec{a} = a\vec{e}_1$ que também é a aceleração de cada partícula do fluido.

Mostre que a superfície livre é um plano e calcule o ângulo θ que este plano forma com a vertical.



(resposta: $tg\theta = \frac{a}{g}$)

4.3 Equação de Bernoulli para fluidos ideais

Vamos introduzir alguma nomenclatura. O termo *escoamento* é comumente usado como sinônimo de movimento de um fluido. *Fluxo* designa a tripla (\vec{v}, ρ, T) . Diz-se que o escoamento ou o fluxo é *permanente* ou *estacionário* se

$$B_t = B \quad \text{para todo } t \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{4.3}$$

A condição (4.2) não significa que o fluido está em repouso, claro, mas que o escoamento se dá sempre na mesma região do espaço. Diz-se que o

escoamento é irrotacional no instante t se

$$\text{rot } \vec{v}(x, t) = \vec{0}$$

para todo x . Diz-se que ele é irrotacional (sempre) se

$$\text{rot } \vec{v}(x, t) = \vec{0}$$

para todo x e todo t .

Diz-se que a força de corpo \vec{b} é conservativa com potencial $\beta = \beta(x, t)$ se

$$\frac{\vec{b}}{\rho} = -\text{grad } \beta$$

Um exemplo é o peso

$$\frac{\vec{b}}{\rho} = -g\vec{e}_3 = -\text{grad } (gx_3)$$

(estamos supondo o sistema de coordenadas cartesianas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ com \vec{e}_3 de sentido oposto a \vec{g}).

Diz-se que o escoamento é potencial se

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi$$

para algum campo espacial φ . Se φ for de classe C^2 , o escoamento potencial é irrotacional.

Exercício 88. Verifique a última afirmação acima.

Consideremos agora um fluido ideal. Substituindo $\text{div } T = -\text{grad } p$ na equação local do movimento obtemos

$$-\text{grad } p + \vec{b} = \rho \vec{a} \quad (4.4)$$

Mas

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}(\vec{v}) \\ \text{grad } \vec{v}(\vec{v}) &= \text{grad } \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Exercício 89. Verifique a fórmula 4.5.

Assim temos as seguintes equações equivalentes para o movimento de um fluido ideal, todas chamadas *equação de Euler*

$$\begin{aligned} -grad\ p + \vec{b} &= \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ -grad\ p + \vec{b} &= \rho \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + grad\ \vec{v}(\vec{v}) \right) \\ -grad\ p + \vec{b} &= \rho \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + grad\ \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + rot\ \vec{v} \times \vec{v} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

que é uma equação vetorial (ou seja, três equações escalares) com quatro incógnitas escalares: p , v_1 , v_2 e v_3 . A quarta equação é dada pela equação da continuidade que, como o fluido é ideal, se reduz à condição de incompressibilidade

$$div\ \vec{v} = 0$$

Em escoamentos permanentes, irrotacionais e sob a ação de forças de corpo conservativas com potencial β

$$\frac{\vec{b}}{\rho} = -grad\ \beta$$

a equação de Euler se reduz a

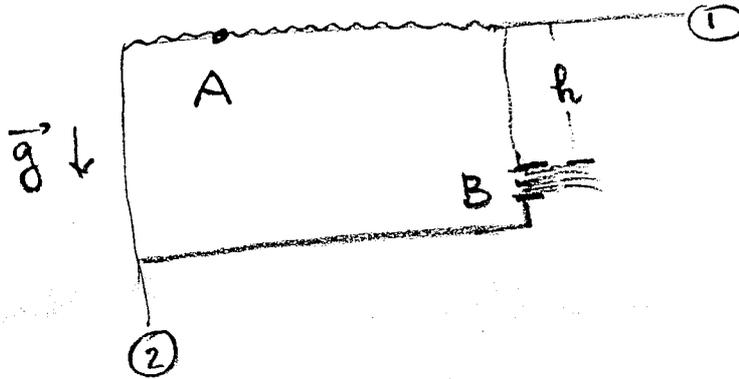
$$grad\ \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \beta \right) = 0$$

ou seja,

$$\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \beta = \text{constante com a posição}$$

(Por ser um escoamento permanente conclui-se que também é constante com o tempo). Esta é a *equação de Bernoulli* para fluidos ideais, em escoamento permanente, irrotacional e sob a ação de força de corpo conservativa.

Exemplo 30. (A fórmula de Torricelli) Um fluido ideal contido num reservatório escoar por um orifício de pequenas dimensões. Vamos calcular a velocidade de saída do fluido em função da altura h .



O escoamento não é rigorosamente estacionário, mas vamos considerá-lo assim supondo as dimensões do reservatório muito maiores do que a do orifício. Também admitiremos o escoamento irrotacional. Outra hipótese também devida à desproporção entre as dimensões do reservatório e do orifício, é que a velocidade na superfície livre é nula.

A força de corpo é o peso e é conservativa

$$\frac{\vec{b}}{\rho} = g\vec{e}_3 = -grad(-gx_3)$$

Então aplicando Bernoulli

$$\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + \frac{p}{\rho} - gx_3\right)_{\text{em A}} = \left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 + \frac{p}{\rho} - gx_3\right)_{\text{em B}}$$

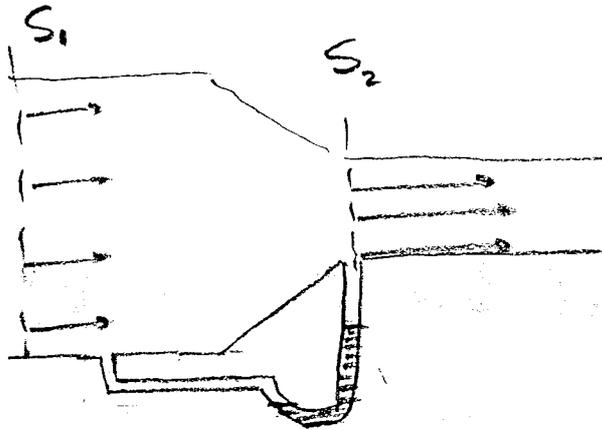
Mas em A : $\|\vec{v}\| = 0$, $p = p_a$ e $x_3 = 0$ e em B : $p = p_a$, $x_3 = h$. Logo

$$\frac{p_a}{\rho} = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{p_a}{\rho} - gh$$

Portanto,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2gh}$$

Exemplo 31. (O princípio de Venturi) Escoamento estacionário, irrotacional sob força de corpo desprezível de um fluido ideal num conduto esquematizado na figura.



Admitamos que em S_1 a pressão e velocidade não variam com a posição e o mesmo em S_2 . Pretendemos calcular v_1 e v_2 (as velocidades em S_1 e S_2 , respectivamente), conhecida a diferença de pressão $p_1 - p_2$ e as áreas S_1 e S_2 . Alicando o princípio da conservação da massa no volume de controle entre S_1 e S_2 temos

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

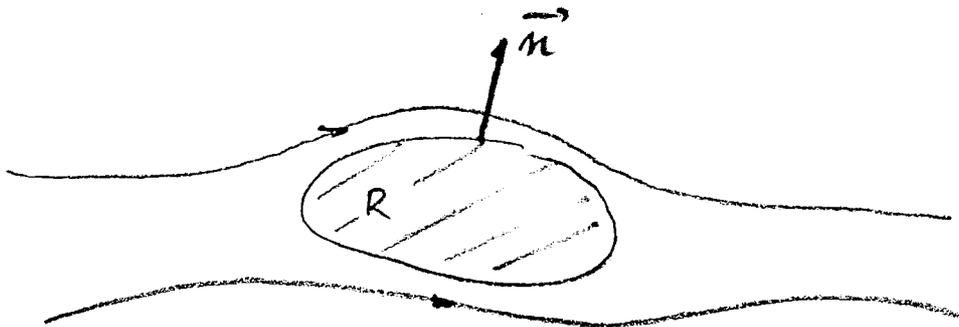
e da equação de Bernoulli temos

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Logo,

$$v_1 = \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Exercício 90. O escoamento permanente, irrotacional e sob força de corpo nula de um fluido ideal, tem em seu percurso um obstáculo representado por uma região R fixa no espaço.



Mostre que a força total exercida pelo fluido sobre R é

$$\frac{\rho_0}{2} \int_{\partial R} \|\vec{v}\|^2 \vec{n} \, da$$

Exercício 91. Mostre que se $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, φ de classe C^2 , então

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Exercício 92. Considere um escoamento de um fluido ideal sob força de corpo conservativa com potencial β ($\vec{b} = -\text{grad } \beta$)

1. Mostre que se o escoamento for potencial com $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, então

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \beta \right) = 0$$

2. Se o fluxo for permanente

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \beta \right) = 0$$

(Sugestão: Faça $\alpha = \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \beta$. Conclua da equação de Euler que $\text{grad } \alpha = \text{rot } \vec{v} \times \vec{v}$. Use $\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{grad } \alpha \cdot \vec{v}$.)

4.4 Escoamentos irrotacionais

Vamos mostrar que se o fluido for ideal, e for irrotacional em algum instante, será irrotacional sempre.

Teorema 21. (de Lagrange-Cauchy) *Um escoamento com aceleração gradiente de potencial é irrotacional se for irrotacional em algum instante.*

Proof. Indiquemos com um ponto a derivada material:

$$\dot{F} = \frac{DF}{Dt}$$

De

$$W = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad } \vec{v}^t)$$

e

$$\dot{F}F^{-1} = \text{grad } \vec{v}$$

concluimos que

$$F^t W_m F = \frac{1}{2}(F^t \dot{F} - \dot{F}^t F)$$

Logo

$$\frac{D}{Dt}(F^t W_m F) = \frac{1}{2}\dot{F}^t \dot{F} + F^t \ddot{F} - \ddot{F}^t F - \dot{F}^t \dot{F} = F^t \ddot{F} - \ddot{F}^t F$$

Mas

$$\ddot{F} = \text{grad } \vec{a} F$$

(a demonstração é análoga à de $\dot{F} = \text{grad } \vec{v} F$ e fica como *exercício*)

Logo

$$\frac{D}{Dt}(F^t W_m F) = F^t(\text{grad } \vec{a} - \text{grad } \vec{a}^t)F$$

Como $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ e

$$(\text{grad } (\text{grad } \varphi))^t = \text{grad } (\text{grad } \varphi)$$

então

$$\frac{D}{Dt}(F^t W_m F) = 0$$

Portanto, $F^t W_m F(X, t)$ é constante com o tempo para cada X .

Como $F^t W_m F(X, \bar{t}) = 0$ em algum instante \bar{t} , qualquer que seja X , então

$$F^t W_m F(X, t) = 0 \quad \forall X, \forall t$$

Como F tem inversa F^{-1} então

$$W_m = 0$$

ou seja,

$$W(x, t) = 0 \quad \forall x, \forall t$$

□

Consideremos um fluido ideal sob a ação de força de corpo conservativa. Então, a equação de movimento se escreve

$$-\text{grad} \frac{p}{\rho} - \text{grad} \beta = \vec{a}$$

ou seja,

$$\vec{a} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} + \beta \right)$$

Pelo Teorema de Lagrange-Cauchy concluímos o

Corollary 22. *Se o escoamento de um fluido ideal sob a ação de força de corpo conservativa é irrotacional num instante, é irrotacional sempre.*

Exercício 93. Demonstre a fórmula

$$\ddot{F} = \text{grad} \vec{a} F$$

(Sugestão: veja p. 41)

Exercício 94. Mostre que $(\text{grad} (\text{grad} \varphi))^t = \text{grad} (\text{grad} \varphi)$ se φ for de classe C^2 .

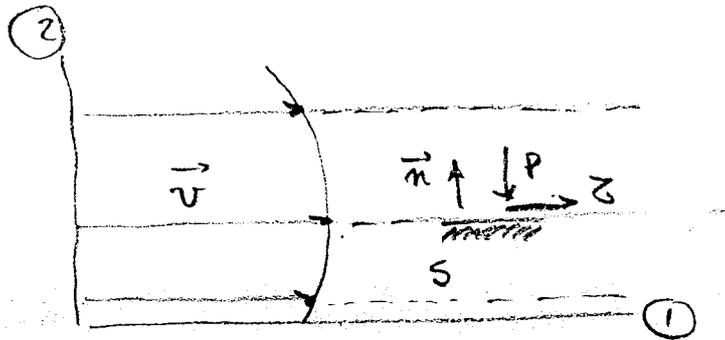
4.5 Fluidos Newtonianos

Consideraremos agora fluidos viscosos, ou seja, fluidos que exercem tensão de cisalhamento. A forma que se admite para o tensor de Cauchy parte das seguintes hipóteses:

1. A tensão de cisalhamento só ocorre quando o fluido está em movimento.
2. A tensão de cisalhamento depende das diferenças de velocidades entre as várias partículas.

Consideremos, por exemplo, um fluido onde

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1$$



A parte do fluido acima de S exerce sobre S uma pressão $-p\vec{n}$ e um cisalhamento $\tau\vec{T}$ (\vec{T} : tangente unitária a S). É razoável se supor que

$$\tau \text{ é função de } \frac{dv_1}{dx_2}$$

E se se pretende um modelo matemático simples, se admite que

$$\tau \text{ é função linear de } \frac{dv_1}{dx_2}$$

ou seja,

$$\tau = \mu \frac{dv_1}{dx_2}$$

Num escoamento genérico, o tensor que mede o movimento relativo das partículas é o $\text{grad } \vec{v}$. Então toma-se como hipótese constitutiva que

$$T = -p\mathbb{I} + f(\text{grad } \vec{v})$$

Para que " T não seja essencialmente afetada pela sobreposição de movimentos rígidos" (o conceito preciso é " T satisfaz o princípio da independência em relação a mudança de observador" ou T é objetiva) prova-se que f não pode depender de W (o tensor velocidade de rotação), mas só de D (o tensor velocidade de deformação)

$$T = -p\mathbb{I} + f(D)$$

Impondo-se que o fluido seja incompressível e que f seja linear, prova-se que f é determinada por um único coeficiente escalar:

$$f(D) = 2\mu D$$

Definição 9. Um *fluido newtoniano* é um corpo caracterizado pelas seguintes hipóteses constitutivas:

1. é incompressível e homogêneo.
2. o tensor de Cauchy é da forma

$$T = -p\mathbb{I} + 2\mu D$$

onde $D = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{v} + \text{grad } \vec{v}^t)$, $p = p(x, t)$ e μ é um escalar chamado *coeficiente de viscosidade*

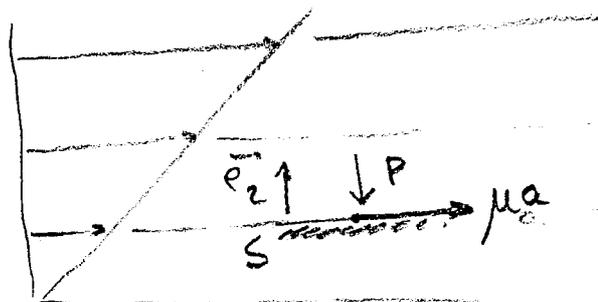
Consideremos o escoamento com

$$\vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_2$$

Façamos $v_1(x_2) = ax_2$.

Então

$$[T] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



donde,

$$T(x, t)(\vec{e}_2) = -p\vec{e}_2 + \mu a\vec{e}_1$$

$$T_{12} = \mu a = \mu \frac{dv_1}{dx_2}$$

4.6 A equação de Navier Stokes

Sendo

$$T = -p\mathbb{I} + 2\mu D = -p\mathbb{I} + \mu(\text{grad } \vec{v} + \text{grad } \vec{v}^t)$$

então

$$\text{div } T = -\text{grad } p + \mu \text{div} (\text{grad } \vec{v}) + \mu \text{div} (\text{grad } \vec{v}^t) \quad (4.7)$$

Mas

$$\text{div} (\text{grad } \vec{v}) = \Delta \vec{v} \quad (4.8)$$

onde $\Delta \vec{v}$ é o laplaciano de \vec{v} que num sistema cartesiano ortogonal de coordenadas é dado por

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_1 \vec{e}_1 + \Delta v_2 \vec{e}_2 + \Delta v_3 \vec{e}_3$$

sendo

$$\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}$$

Exercício 95. Prove a fórmula 4.8.

E, quando o fluido é incompressível,

$$\text{div} (\text{grad } \vec{v}^t) = 0 \quad (4.9)$$

Exercício 96. Prove 4.9.

Levando-se 4.9 e 4.8 em 4.7 e o resultado na equação local do movimento obtemos:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \vec{v}(\vec{v}) \right) = -\text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{b} \quad (4.10)$$

ou, equivalentemente,

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \|\vec{v}\|^2 + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{b} \quad (4.11)$$

Essas equações são chamadas *equações de Navier Stokes* e, junto com a condição de incompressibilidade

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

fornecem um sistema de quatro equações e quatro incógnitas escalares: p, v_1, v_2, v_3 .

4.7 Condições de Contorno

Retomemos as equações de Euler para um fluido ideal

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -grad p + \vec{b}$$

$$div \vec{v} = 0$$

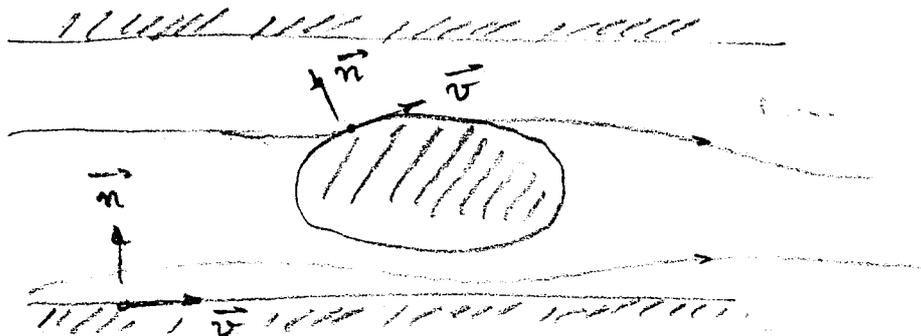
Essas equações são complementadas pelas condições de contorno

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

na fronteira do domínio D onde se dá o escoamento, se D estiver em repouso ou,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n}$$

se \vec{V} for a velocidade da fronteira de D . Essas condições exprimem o fato que o fluido não cruza a fronteira de D embora possa ter velocidade tangencial a ∂D



Já para um fluido viscoso Newtoniano, as equações de Navier Stokes

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -grad p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{b}$$

$$div \vec{v} = 0$$

são complementadas pela condição de contorno

$$\vec{v} = 0$$

na fronteira de D , se D estiver em repouso, ou

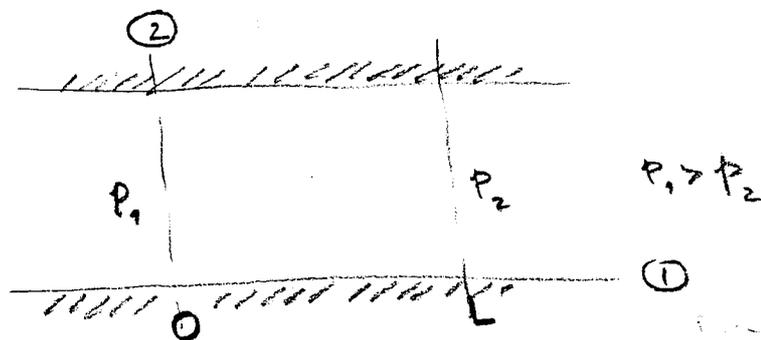
$$\vec{v} = \vec{V}$$

se D estiver em movimento e \vec{V} for a velocidade da fronteira. Essa condição exprime o fato observado experimentalmente que fluidos viscosos *não escorregam* no contato com D .

Exemplo 32. Consideremos um escoamento estacionário de um fluido newtoniano no canal $0 \leq x_2 \leq h$ na ausência de força de corpo, supondo $p = p(x_1)$ e $p(0) = p_1$, $p(L) = p_2$ e

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1$$

Vamos determinar \vec{v} e p .



Da incompressibilidade, $\text{div } \vec{v} = 0$, obtemos

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$$

Logo, $v_1 = v_1(x_2)$.

Levando-se em conta que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ e $\vec{b} = \vec{0}$, a equação de Navier Stokes fica

$$\text{grad } \vec{v}(\vec{v}) = -\text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} \quad (i)$$

Mas

$$\begin{aligned} [\text{grad } \vec{v}(\vec{v})] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{grad } \vec{v}(\vec{v}) &= \vec{0} \\ -\text{grad } p &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} \vec{e}_1 \\ \Delta \vec{v} &= \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \vec{e}_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \vec{e}_1 \end{aligned}$$

Substituindo em (i) obtemos:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0$$

Como $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$ é função só de x_2 e $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ é função só de x_1 , concluímos que ambos são constantes

$$\mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = c = \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (ii)$$

Logo, $p = cx_1 + b$. Das condições $p(0) = c_1$ e $p(L) = p_2$ concluímos que

$$\begin{aligned} c &= \frac{p_2 - p_1}{L} \\ p &= p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} x_1 \end{aligned}$$

Voltando a (ii) obtemos

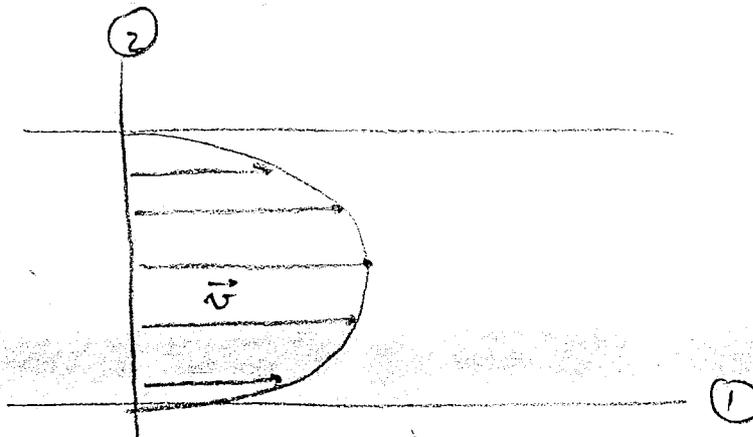
$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{c}{\mu}$$

donde

$$v_1 = \frac{c}{2\mu} x_2^2 + c_1 x_2 + c_2$$

Como $v_1(0) = 0$ e $v_1(h) = 0$ concluímos que

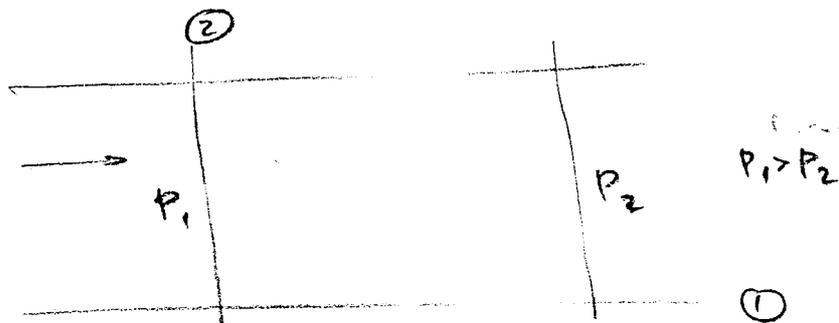
$$v_1 = -\frac{c}{2\mu} x_2 (h - x_2)$$



Logo, de $T = -p\mathbb{I} + 2\mu D$ concluímos que

$$[T] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{\mu}(\frac{h}{2} - x_2) & 0 \\ -\frac{c}{\mu}(\frac{h}{2} - x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

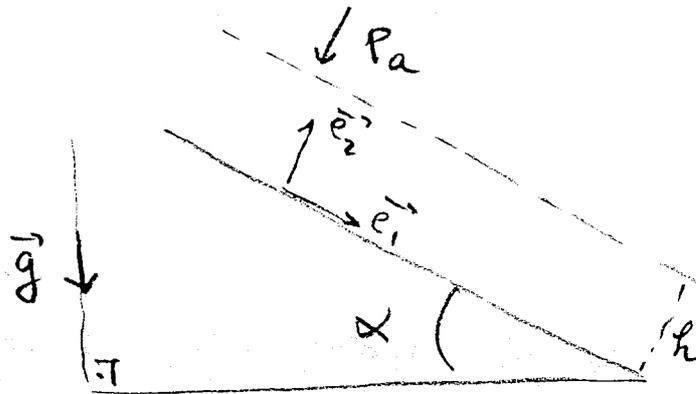
Exercício 97. Um fluido ideal percorre o canal da figura nas condições de pressão dadas



Supondo $\vec{v} = v_1(x_1, x_2, t)\vec{e}_1$ e $p = p(x_1)$, determine \vec{v} e p .

(resposta: $p(x) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{L} x_1$, $\vec{v} = (\frac{p_1 - p_2}{\rho_0 L} t + \text{constante})\vec{e}_1$)

Exercício 98. Um fluido newtoniano desce em escoamento permanente pelo canal inclinado da figura.

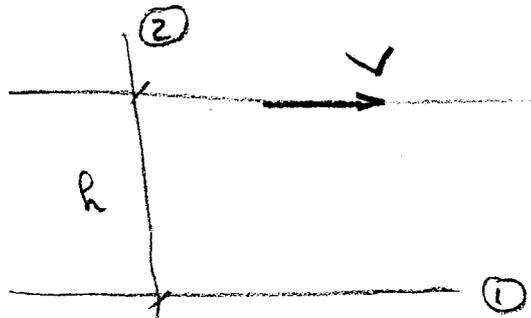


Tem-se $\vec{b} = \rho_0 g (\text{sen}\alpha \vec{e}_1 - \text{cos}\alpha \vec{e}_2)$ e $x_2 = h$ é a superfície livre, ou seja, sujeita à pressão atmosférica p_a . Supondo

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1$$

determine \vec{v} e T .

Exercício 99. Um fluido viscoso Newtoniano escoar em regime permanente pelo canal $0 \leq x_2 \leq h$. O plano $x_2 = 0$ é fixo e o plano $x_2 = h$ move-se com velocidade constante V



Sendo $\vec{v} = v_1(x_1, x_2) \vec{e}_1$ e $p = \text{constante}$, determine \vec{v} e a tensão de cisalhamento T_{12} .

(resposta: $\vec{v} = \frac{Vx_2}{h} \vec{e}_1$, $T_{12} = \frac{\mu V}{h}$)

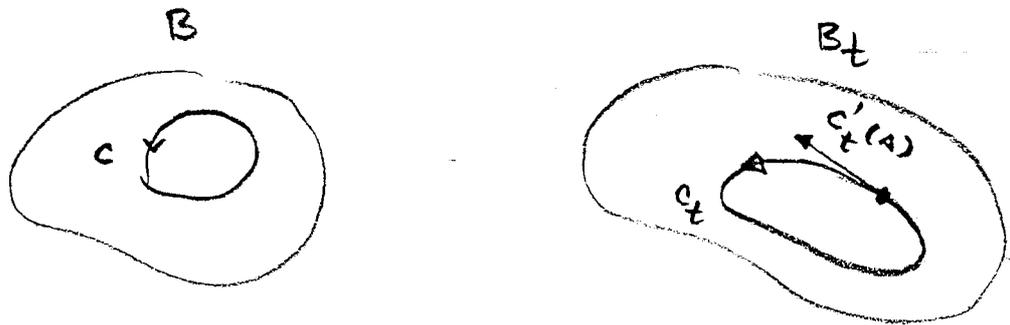
4.8 Circulação e rotacionalidade

Consideremos uma curva c na configuração de referência, chamada *curva material*, e c_t sua deformada no instante t

$$c : s \mapsto c(s) \quad a \leq s \leq b$$

$$c_t : s \mapsto c_t(s) = x(c(s), t)$$

A parametrização c (e, portanto, c_t) é suposta simples: não há autointersecções exceto $c(a) = c(b)$, no caso em que a curva é fechada



Se c for fechada, c_t também o é e, nesse caso, a integral de linha

$$\int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{v}(c_t(s), t) \cdot c'_t(s) ds \quad (4.12)$$

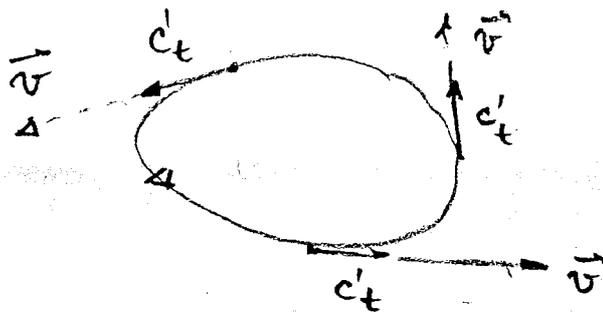
é chamada *circulação de \vec{v}* em torno de c_t .

Exercício 100. Calcule a circulação de \vec{v} em torno de c_t sendo c_t a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ orientada no sentido anti-horário e

- (a) $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$
- (b) $\vec{v} = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2$
- (c) $\vec{v} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2)$

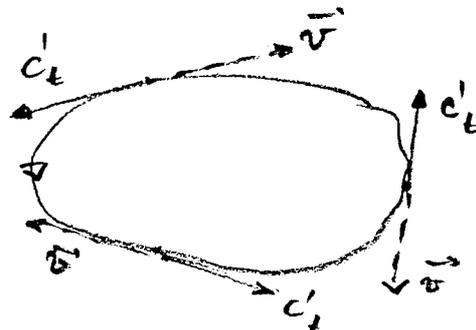
Para perceber o significado físico da circulação vamos considerar alguns casos

- $\vec{v}(c_t(s), t)$ com mesma direção e sentido de $c'_t(s)$



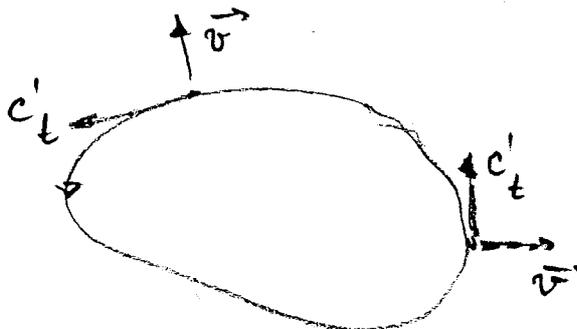
$$\int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} > 0$$

- $\vec{v}(c_t(s), t)$ com mesma direção e sentido oposto a $c'_t(s)$



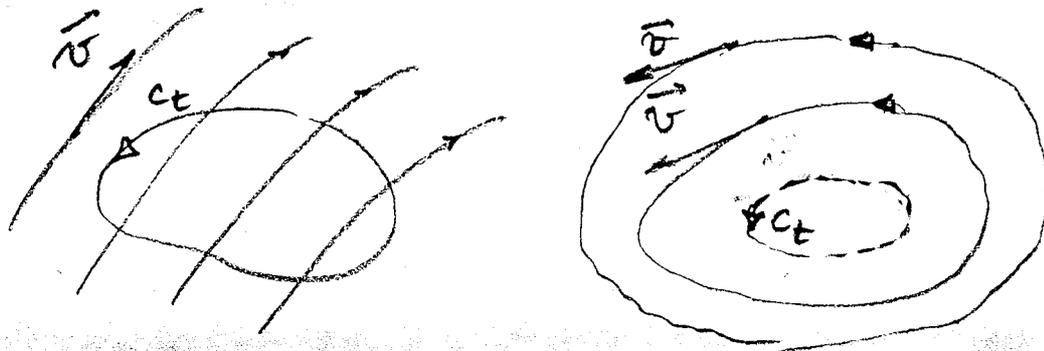
$$\int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} < 0$$

- $\vec{v}(c_t(s), t)$ ortogonal a $c'_t(s)$



$$\int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

Então, $\int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ é uma medida do giro do fluido em torno de c_t . Por exemplo, nos escoamentos da figura



a circulação em torno de c_t é nula no primeiro caso e positiva no segundo.

Exercício 101. Desenhe os campos \vec{v} e interprete os resultados obtidos no exercício anterior.

Quando \vec{v} é gradiente de um potencial, $\vec{v} = \text{grad } \varphi$,

$$\int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{c_t} \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) \quad (4.13)$$

onde $A = c_t(a)$ é o ponto inicial e $B = c_t(b)$ é o ponto final da curva. Se a curva for fechada ($A = B$), a circulação é nula. Portanto,

Teorema 23. *É nula a circulação de um escoamento potencial em torno de qualquer curva fechada.*

Teorema 24. *(transporte da circulação) Seja c uma curva material fechada. Então*

$$\frac{d}{dt} \int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{c_t} \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (4.14)$$

(Veja a demonstração em *Gurtin(1981), p. 82*)

Diz-se que um escoamento *preserva a circulação* se

$$\frac{d}{dt} \int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

para toda curva fechada c .

Consideremos um fluido ideal sob a ação de força de corpo conservativa. Então a equação de Euler fica

$$\vec{a} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} + \beta \right)$$

Logo

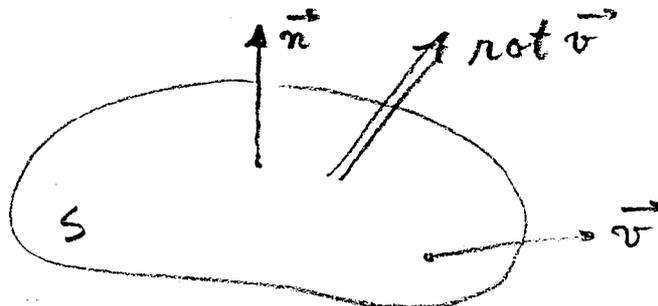
$$\int_{c_t} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{c_t} -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} + \beta \right) \cdot d\vec{r} = 0$$

porque c_t é fechada. Isto, junto com 4.14, nos permite concluir o seguinte

Teorema 25. *O escoamento de um fluido ideal sob a ação de força de corpo conservativa preserva a circulação*

Os conceitos de circulação e de rotacional são duas medidas do “quanto gira” um escoamento. Esses conceitos se relacionam no Teorema de Stokes:

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, da$$



Olhando para a fórmula de Stokes somos levados, precipitadamente, a afirmar que

a circulação é nula em torno de qualquer curva fechada

se, e somente se,

o rotacional é nulo sempre.

Acontece que nem sempre se pode aplicar essa fórmula. Ela não se aplica se, por exemplo, dada uma curva fechada, não existir uma superfície S contida no domínio de \vec{v} cuja fronteira seja a curva dada. Considere, por exemplo, os seguintes domínios D de \vec{v}



Figure 4.1: $D = \text{toro}$

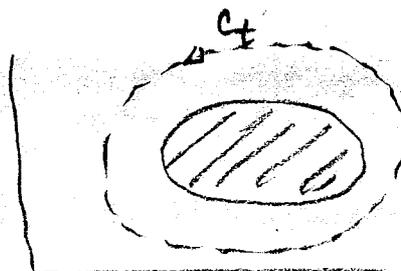


Figure 4.2: $D = \text{plano com buraco}$

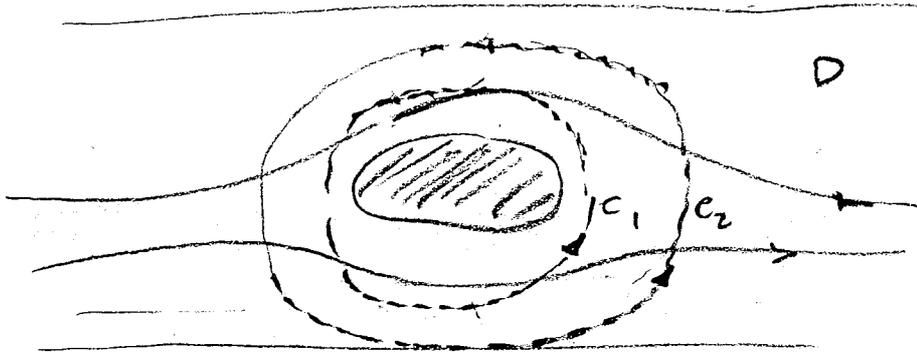
Nos dois exemplos não existe superfície contida em D (no toro ou no plano com buraco) que tenha c_t como fronteira. Esses domínios não são simplesmente conexos. Um conjunto é *simplesmente conexo* se toda curva fechada contida nele puder ser contraída a um ponto e essa contração ocorrer sempre dentro do conjunto. O espaço sem uma esfera, por exemplo, é simplesmente conexo.

Pois bem, se o domínio de \vec{v} for simplesmente conexo, vale o seguinte resultado

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} = \text{grad } \varphi \iff \int_{c_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall c_t \text{ fechada}$$

Exercício 102. Seja $\vec{v} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2)$. Verifique que $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ mas a circulação de \vec{v} em torno da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ não é nula. O que acontece?

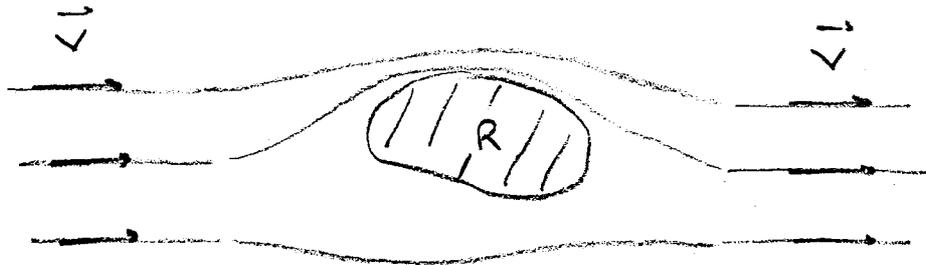
Exercício 103. Seja \vec{v} o campo de velocidades de um escoamento plano, irrotacional, num domínio D como o da figura (não simplesmente conexo)



Mostre que a circulação em torno de c_1 é igual à circulação em torno de c_2 .

4.9 Escoamento plano, permanente, irrotacional de um fluido perfeito em torno de um perfil

Um dos principais problemas da aerodinâmica consiste em estudar, em torno de um perfil, escoamentos estacionários e que longe do perfil são uniformes



Entendendo-se o perfil como uma seção R de um cilindro ortogonal ao plano da seção, um ponto importante é calcular a força exercida pelo fluido sobre o cilindro.

Vamos considerar um fluido ideal em escoamento permanente e irrota-

cional. Sendo c a fronteira de R , o vetor

$$\int_c -p \vec{n} dl$$

é a força por unidade de comprimento do eixo do cilindro, exercida pelo fluido.

Supondo a força de corpo nula, decorre da fórmula de Bernoulli (veja exercício 89) que

$$\int_c -p \vec{n} dl = \frac{\rho_0}{2} \int_c \|\vec{v}\|^2 \vec{n} dl$$

Vamos calcular esta força num exemplo muito significativo, o do fluxo dado em coordenadas polares por

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$$

sendo

$$v_r = V \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$v_\theta = -V \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Este fluxo tem as seguintes propriedades:

- é irrotacional pois

$$\vec{v} = \text{grad } \phi$$

$$\text{sendo } \phi = Vr \cos\theta + V \frac{a^2}{r^2} \cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

- $\text{div } \vec{v} = 0$
- quando $r \rightarrow \infty$, $v_r \rightarrow V \cos\theta$, $v_\theta \rightarrow -V \sin\theta$ Logo

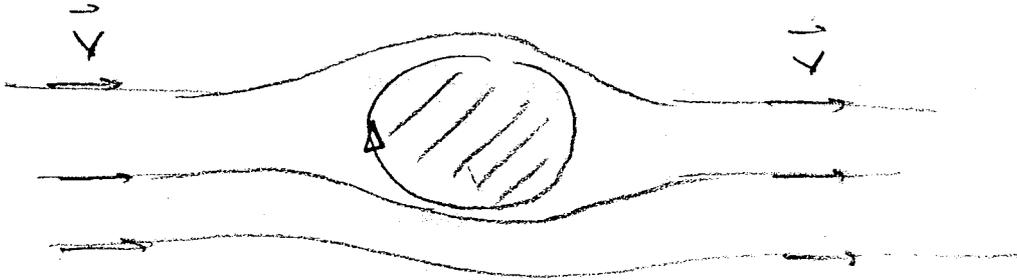
$$\vec{v} \rightarrow V \cos\theta \vec{e}_r - V \sin\theta \vec{e}_\theta = V \vec{e}_1$$

- quando $r = a$, $v_r = 0$.
Logo, \vec{v} satisfaz a condição

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

na circunferência $r = a$.

Exercício 104. Complete a verificação das quatro propriedades de \vec{v} citadas acima.



Seja c a circunferência de raio a :

$$\begin{aligned} c(\theta) &= (a\cos\theta, a\sin\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ c'(\theta) &= -a\sin\theta\vec{e}_1 + a\cos\theta\vec{e}_2 = a\vec{e}_\theta \\ \vec{n}(\theta) &= \vec{e}_r \end{aligned}$$

Na circunferência $r = a$ temos:

•

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|^2 &= (v_r^2 + v_\theta^2)|_{r=a} = v_\theta^2|_{r=a} = \left(-V\sin\theta \cdot 2 + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2 \\ &= 4V^2\sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} - 2V\sin\theta \frac{\Gamma}{\pi a} \end{aligned}$$

- $\vec{n} = \vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$,
- $dl = \|c'(\theta)\| d\theta = a d\theta$,

logo, após cálculos simples (todas as integrais, exceto uma, são nulas), obtemos:

$$\frac{\rho_0}{2} \int_c \|\vec{v}\|^2 \vec{n} dl = -\rho_0 V \Gamma \vec{e}_2$$

Portanto, a componente da força na direção de \vec{V} (direção \vec{e}_1), chamada *força de arrasto*, é nula! (paradoxo de D'Alembert) e a componente na direção ortogonal a \vec{V} , chamada *força de sustentação* é $\rho_0 \Gamma V$.

Vamos verificar que Γ é a circulação de \vec{v} em torno de c . De fato

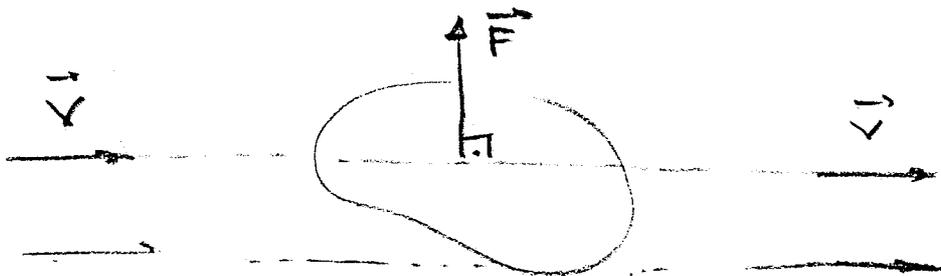
$$\begin{aligned} \int_c \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta) \cdot c'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta) \cdot a \vec{e}_\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a v_\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-V \operatorname{sen} \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) a + \frac{\Gamma}{2\pi} \right) d\theta \\ &= \Gamma \end{aligned}$$

O que acabamos de verificar para este particular escoamento vale mais geralmente:

Teorema 26. (*Blasius - Kutta - Joukowski*) Consideremos um fluido ideal em escoamento plano, permanente e irrotacional num domínio exterior a uma região limitada R com fronteira c . Se

$$\vec{v} \rightarrow \vec{V} \quad \text{quando} \quad \|x - O\| \rightarrow \infty$$

então a força de arrasto é nula e a força de sustentação tem norma $|\rho_0 \vec{V} \Gamma|$ onde Γ é a circulação em torno de c



A demonstração deste teorema depende de conhecimentos de função de variável complexa e pode ser vista em (*Gurbin, 1981, p.124*).

Chapter 5

Elasticidade Linear

5.1 O tensor das deformações infinitesimais

Embora a Cinemática (mais geralmente, a Mecânica) dos Meios Contínuos seja uma teoria única tanto para fluidos quanto para sólidos, seus conceitos desempenham papéis de diferente importância num ou noutro caso. Nos fluidos, os protagonistas são os campos de velocidades e os tensores velocidade de deformação e velocidade de rotação. Já nos sólidos, o foco está no campo de deslocamentos e nos tensores de deformação.

Na Elasticidade Linear, que estuda o comportamento mecânico de sólidos sujeitos a “pequenas deformações” (as barras e as placas da Engenharia Civil, por exemplo), o tensor usado para caracterizá-las é o “tensor das deformações infinitesimais”.

Dado um movimento $x = x(X, t)$, o *deslocamento* é o campo material vetorial

$$\vec{u}(X, t) = x - X \quad (5.1)$$



Fixado t , ele é omitido da notação e se escreve $\vec{u}(X)$ em lugar de $\vec{u}(X, t)$.

Num sistema cartesiano ortogonal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

O gradiente de \vec{u} será indicado por $\nabla \vec{u}$. Como sabemos, sua matriz na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é

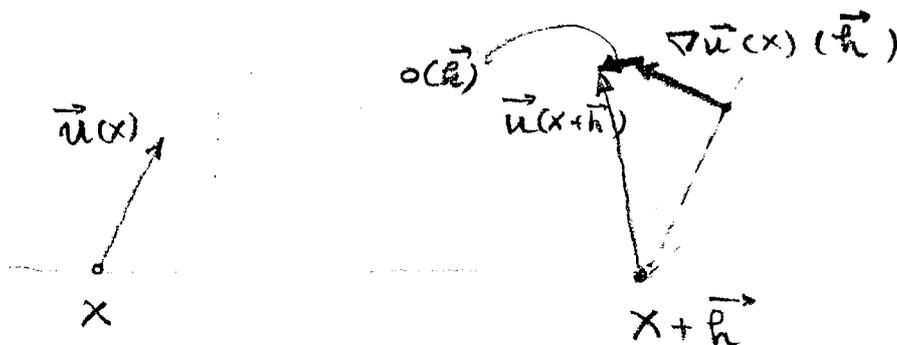
$$[\nabla \vec{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

De 5.1 concluímos que

$$\nabla \vec{u} = F - \mathbb{I} \quad (5.2)$$

O gradiente dá uma aproximação linear em \vec{h} da diferença $\vec{u}(X + \vec{h}) - \vec{u}(X)$:

$$\vec{u}(X + \vec{h}) - \vec{u}(X) = \nabla \vec{u}(X)(\vec{h}) + o(\vec{h})$$

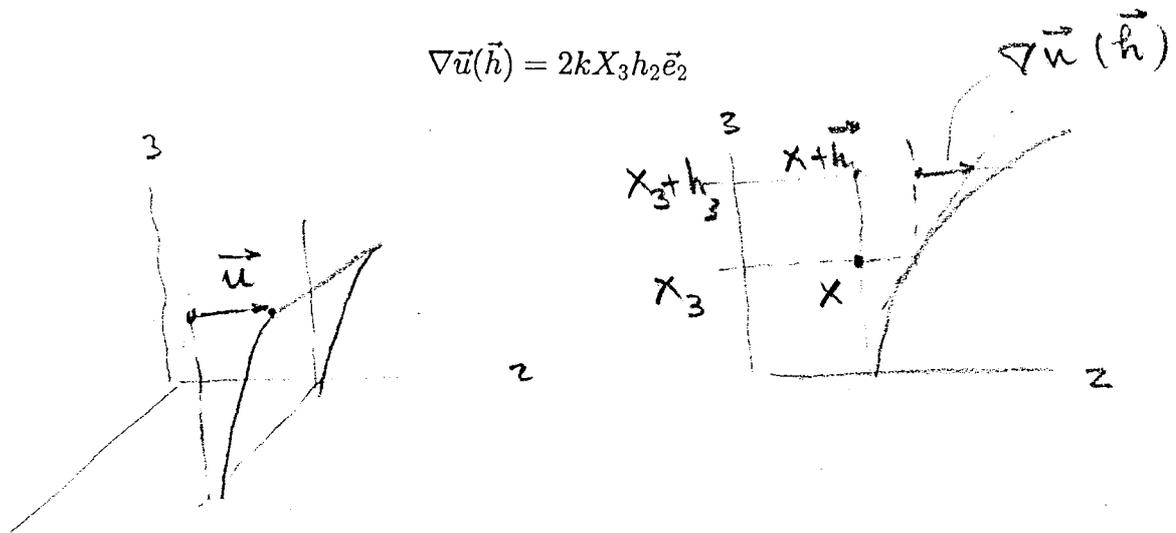


Exemplo 33.

$$\vec{u} = kX_3^2 \vec{e}_2$$

$$[\nabla \vec{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2kX_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\nabla \vec{u}(\vec{h})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2kX_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2kX_3 h_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\nabla \vec{u}(\vec{h}) = 2kX_3 h_2 \vec{e}_2$$

A parte simétrica do $\nabla \vec{u}$ é indicada por E e chamada *tensor das deformações infinitesimais*:

$$E \cong \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t) \quad (5.3)$$

5.2 Interpretação geométrica de E

Vamos mostrar que para deslocamentos \vec{u} de “pequeno gradiente”, isto é,

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j}(X) \right| \simeq 0$$

os elementos de $E(X)$ são boas aproximações dos números que expressam as deformações sofridas pelo corpo em X : os alongamentos, as distorções e as variações de volume.

Sejam $F = F(X)$, $\vec{v} = F(\vec{V})$ e $\vec{w} = F(\vec{W})$, então

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= F(\vec{V}) \cdot F(\vec{W}) = (\nabla \vec{u} + \mathbb{I})(\vec{V}) \cdot (\nabla \vec{u} + \mathbb{I})(\vec{W}) \\ &= \vec{V} \cdot \vec{W} + (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t)(\vec{V}) \cdot \vec{W} + \nabla \vec{u}^t \nabla \vec{u}(\vec{V}) \cdot \vec{W} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{V} \cdot \vec{W} + (2E + \nabla \vec{u}^t \nabla \vec{u})(\vec{V}) \cdot \vec{W}$$

Como estamos admitindo $\nabla \vec{u}$ “pequeno”, desprezamos $\nabla \vec{u}^t \nabla \vec{u}$ que contém termos

$$\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

que são $o(\epsilon^2)$ se $\frac{\partial x_k}{\partial X_i}$ for $o(\epsilon)$. Logo,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \simeq \vec{V} \cdot \vec{W} + 2E(\vec{V}) \cdot W \quad (5.4)$$

O alongamento em X na direção de W é o número

$$\epsilon_{\vec{W}}(X) = \frac{\|\vec{w}\| - \|\vec{W}\|}{\|\vec{W}\|}$$

Omitindo o X e o W da notação, temos $\epsilon = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{W}\|} - 1$. Então

$$\frac{\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{W}\|^2}{\|\vec{W}\|^2} = \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{W}\|} - 1 \right) \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{W}\|} + 1 \right) = \epsilon(\epsilon + 2) \quad (5.5)$$

Por outro lado, usando 5.4, temos

$$\frac{\|\vec{w}\| - \|\vec{W}\|}{\|\vec{W}\|^2} \simeq \frac{2E(\vec{W}) \cdot \vec{W}}{\|\vec{W}\| \|\vec{W}\|} = 2E(\vec{N}) \cdot \vec{N} \quad (5.6)$$

onde $\vec{N} = \frac{\vec{W}}{\|\vec{W}\|}$. De 5.5 e 5.6:

$$\frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon \simeq E(\vec{N}) \cdot \vec{N}$$

Sendo $\nabla \vec{u}$ "pequeno", $\vec{w} = (\nabla \vec{u} + \mathbb{I})(\vec{W}) \simeq \vec{W}$ e portanto, $\epsilon \simeq 0$. Desprezamos então a parcela $\epsilon^2/2$ ($\epsilon^2/2 \ll \epsilon$ para $\epsilon \simeq 0$). Donde

$$\epsilon \simeq E(\vec{N}) \cdot \vec{N}$$

ou seja,

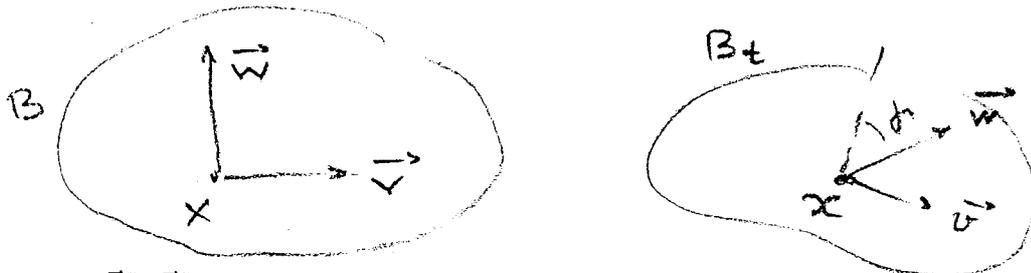
$$\epsilon_{\vec{N}}(X) \simeq E(X)(\vec{N}) \cdot \vec{N} \quad (5.7)$$

onde \vec{N} é unitário.

Sejam \vec{V} e \vec{W} ortogonais, o número γ tal que

$$\text{sen } \gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \quad (5.8)$$

é a distorção em X segundo \vec{V} e \vec{W} . Se necessário, usamos a notação $\gamma_{\vec{V}, \vec{W}}(X)$.



Como $\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$, de 5.4 obtemos

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \simeq 2E(\vec{V}) \cdot \vec{W}$$

sendo $\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{N}_1$ e $\vec{W} = \|\vec{W}\|\vec{N}_2$, então

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \simeq 2\|\vec{V}\|\|\vec{W}\|E(\vec{N}_1) \cdot \vec{N}_2$$

Logo, levando esta última aproximação em 5.8,

$$\text{sen } \gamma \simeq 2E(\vec{N}_1) \cdot \vec{N}_2 \frac{\|\vec{V}\| \|\vec{W}\|}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

Novamente usando que $\nabla \vec{u}$ é pequeno, temos $\frac{\|\vec{V}\|}{\|\vec{v}\|} \simeq 1$, $\frac{\|\vec{W}\|}{\|\vec{w}\|} \simeq 1$, e, portanto,

$$\frac{\text{sen } \gamma}{2} \simeq E(\vec{N}_1) \cdot \vec{N}_2 \quad (5.9)$$

Exercício 105.

$$\vec{u} = kX_2^2 \vec{e}_1; \quad k = 10^{-4}; \quad X_0 = (0, 1, 0)$$

1. Calcule exatamente, e usando o tensor E , os alongamentos em X_0 nas direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 . (Resposta: $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{22} = (1 + 4k^2)^{1/2} - 1$, $E_{11} = 0$, $E_{22} = 0$)
2. Calcule exatamente, e usando o tensor E , a distorção em X_0 segundo as direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 (Resposta: $\text{sen } \gamma = \frac{2k}{(1+4k^2)^{1/2}}$, $2E_{12} = 2k$)

Sejam $\vec{w}_i = F(\vec{W}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Sendo V_0 o volume do paralelepípedo de vértices

$$X_0, X_0 + \vec{W}_1, X_0 + \vec{W}_2, X_0 + \vec{W}_3$$

e V o volume do paralelepípedo de vértices

$$x_0 = x(X_0, t), x_0 + \vec{w}_1, x_0 + \vec{w}_2, x_0 + \vec{w}_3$$

então

$$\frac{V - V_0}{V_0} = J - 1$$

(veja(1.42)) não depende dos particulares vetores linearmente independentes $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3$ e é chamado *variação específica de volume* em X_0 .

$$\begin{aligned} J &= \det(\nabla \vec{u} + \mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + 1 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \dots \end{aligned}$$

onde as parcelas subsumidas pelos três pontos são todas $o(\epsilon^2)$ se $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ for $o(\epsilon)$. Desprezando essas parcelas obtemos

$$J - 1 \simeq \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \text{div } \vec{u} \quad (5.10)$$

Observação 9. Pode-se perguntar por uma avaliação das aproximações feitas nesta seção. Demonstra-se que se

$$\left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j}(X) \right|^2 \right)^{1/2} < \delta \quad \forall i, j$$

então

- $|\varepsilon_{\vec{N}}(X)| < \delta$
- $|\varepsilon_{\vec{N}}(X) - E(X)\vec{N} \cdot \vec{N}| < \delta^2$

$$\bullet \cdot |\operatorname{sen} \gamma_{\vec{N}_1, \vec{N}_2}(X) - 2E(X)\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2| < \frac{\delta^2(2\delta^2+2\delta+5)}{(1-\delta)^2}$$

onde $\delta < 1$ e $\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ são unitários. (P. Boulos - Introdução à Mecânica dos Sólidos Deformáveis - notas de aula de 1989).

Exercício 106.

$$[E] = \begin{bmatrix} k_1 X_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 X_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 X_2 \end{bmatrix}$$

- (a) Quais são os pontos onde não há variação de volume?
 (b) Qual deve ser a relação entre k_1 e k_2 para que não haja variação de volume em nenhum ponto?

Exercício 107. Sendo $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema cartesiano ortogonal, interprete em termos de alongamento e distorções, os elementos E_{ij} .

Exercício 108. Os alongamentos num dado ponto nas direções \vec{e}_1 , $\frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \sqrt{3}\vec{e}_2)$, e $\frac{1}{2}(-\vec{e}_1 + \sqrt{3}\vec{e}_2)$ são a, b, c , respectivamente. Determine E_{11} , E_{22} , E_{12} . (Resposta: $E_{11} = a$, $E_{22} = \frac{1}{2}(2b + 2c - a)$, $E_{12} = \frac{b-c}{\sqrt{3}}$).

Exercício 109. Justifique a aproximação

$$\rho \simeq \rho_0(1 - E_{11} - E_{22} - E_{33})$$

para deformações de “pequeno” gradiente.

5.3 Sólido elástico-linear isotrópico

Em Elasticidade Linear consideram-se movimentos cujos deslocamentos

1. são pequenos,

$$\|\vec{u}(X, t)\| \simeq 0 \quad \forall X, \forall t$$

ou seja, $x \simeq X$.

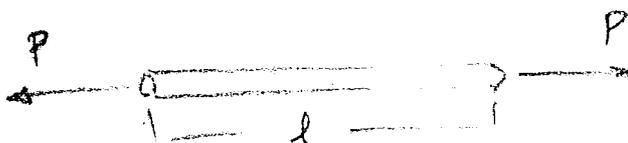
2. têm gradientes pequenos

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j}(X) \right| \simeq 0 \quad \forall X, \forall i, j$$

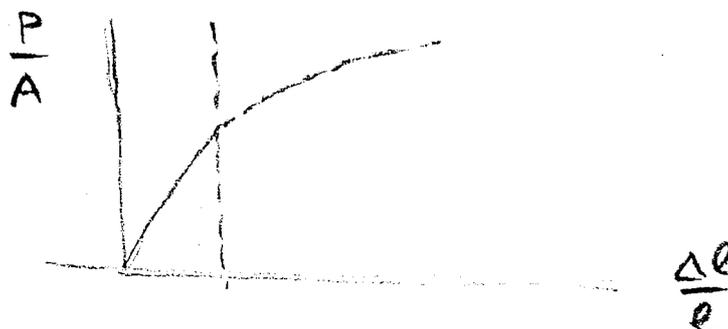
Assim, confunde-se a configuração deformada com a de referência, toma-se $T(X)$ em lugar de $T(x)$, $\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k}$ em lugar de $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$, etc.

A fim de motivar a hipótese constitutiva que caracteriza os sólidos elástico-lineares, lembremos da lei de Hooke.

Consideremos uma barra cilíndrica de seção A constante e comprimento l , sujeita à força P nas extremidades



Sendo Δl o aumento no comprimento, a experiência mostra que para “pequeno” Δl a relação entre $\frac{P}{A}$ e $\frac{\Delta l}{l}$ é linear



ou seja,

$$\frac{P}{A} = E_Y \frac{\Delta l}{l} \quad \text{para “}\Delta l \text{ pequeno”}$$

onde E_Y é chamado *módulo de Young*. No aço, por exemplo, $E_Y = 207 \text{ GPa}$ ($\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$, $\text{Giga} = 10^9$). Sendo $\sigma = \frac{P}{A}$ e $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, então

$$\sigma = E_Y \varepsilon$$

A *lei de Hooke generalizada*, hipótese constitutiva que caracteriza os chamados *sólidos elástico-lineares*, estabelece que

T é função linear de E

Em um sistema cartesiano ortogonal,

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} E_{kl} \quad (5.11)$$

Portanto, a princípio são necessárias 81 constantes (os $c_{ijkl} = c_{ijkl}(X)$, chamadas *elasticidades* em X) para caracterizar um sólido elástico-linear. Como E e T são simétricos, o número de elasticidades cai para $6 \times 6 = 36$. Admitindo-se a existência de uma função “energia armazenada”, demonstra-se que

$$c_{ijkl} = c_{klij}$$

o que reduz o número de elasticidades a 21.

O sólido se diz *homogêneo* se ρ_0 for constante e as elasticidades c_{ijkl} não dependerem de X .

A relação entre σ e ε pode variar conforme muda a direção. Por exemplo, a madeira tem rigidez (módulo de Young) na direção das fibras diferente da que tem na direção ortogonal a elas. Sólidos assim são ditos *anisotrópicos*. Se a relação $\varepsilon - \sigma$ não muda com a direção, diz-se que o sólido é isotrópico.

Precisamente: o sólido é *isotrópico* em X se dadas duas bases ortonormais quaisquer $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ e sendo

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \sum_{k,l} c_{ijkl} E_{kl} \\ T'_{ij} &= \sum_{k,l} c'_{ijkl} E'_{kl} \end{aligned}$$

então

$$c_{ijkl} = c'_{ijkl}$$

Teorema 27. *Um corpo elástico-linear é isotrópico em X se e somente se*

$$T = 2\mu E + \lambda \operatorname{tr}(E)\mathbb{I} \quad (5.12)$$

onde $T = T(X)$, $E = E(X)$. Os números $\lambda = \lambda(X)$ e $\mu = \mu(X)$ são chamados *coeficientes de Lamé* em X .

Como E é adimensional, λ e μ têm a dimensão de T .

Exemplo 34. Num corpo de aço ($\lambda = 119.2 \text{ GPa}$, $\mu = 79.2 \text{ GPa}$), num certo ponto, num certo instante,

$$[E] = k \begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 10 & 20 & 0 \\ 5 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Então, nesse ponto e nesse instante,

$$\begin{aligned} [T] &= \lambda \operatorname{tr}(E)[\mathbb{I}] + 2\mu[E] \\ &= 60\lambda k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu k \begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 10 & 20 & 0 \\ 5 & 0 & 30 \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} 8836 & 1584 & 792 \\ 1584 & 10320 & 0 \\ 792 & 0 & 11904 \end{bmatrix} \text{ GPa} \end{aligned}$$

Exercício 110. Mostre que num material elástico-linear isotrópico, as direções principais de tensão (autovetores de T) coincidem com as *direções principais de deformação* (os autovetores de E). Encontre a relação entre as tensões e os *alongamentos principais* (autovalores de T e de E , respectivamente).

5.4 Os módulos de Young, de rigidez à compressão (bulk modulus) e o quociente de Poisson

A relação 5.12 que caracteriza um corpo elástico-linear isotrópico pode ser invertida para se obter E em função de T . Inicialmente tomamos o traço dos dois membros de 5.12

$$\operatorname{tr}T = (2\mu + 3\lambda)\operatorname{tr}E$$

ou seja,

$$\operatorname{tr}E = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\operatorname{tr}T$$

Substituindo esta última expressão em 5.12 e isolando E obtemos a relação desejada

$$E = \frac{1}{2\mu} \left(T - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \text{tr} T \mathbb{I} \right) \quad (5.13)$$

A fim de introduzir os coeficientes do título desta seção e conhecer seus significados físicos vamos estudar as relações 5.12 e 5.13 em alguns casos particulares.

1. *Tensão uniaxial.* T é dado numa base ortonormal por

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, por (5.13),

$$[E] = T_{11} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_Y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu}{E_Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu}{E_Y} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

onde E_Y e ν são definidos por

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_Y} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Exercício 111. Verifique 5.14

Portanto,

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

$$E_{11} = \frac{1}{E_Y} T_{11} \quad (5.16)$$

$$E_{22} = E_{33} = -\nu E_{11} \quad (5.17)$$

Como se espera que havendo tração ($T_{11} > 0$) deve haver alongamento positivo na direção 1 ($E_{11} > 0$), 5.16 nos diz que

$$E_Y > 0$$

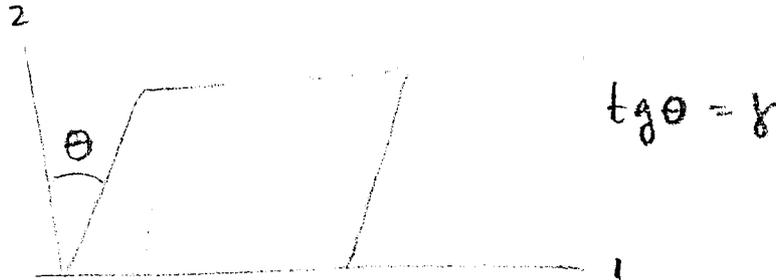
Também se espera que havendo aumento de comprimento na direção 1 ($E_{11} > 0$) deve haver contração nas direções 2 e 3, concluímos de 5.17 que

$$\nu > 0$$

E_Y é chamado *módulo de Young* e ν *quociente de Poisson*.

2. *Cisalhamento puro* É dado o campo

$$\vec{u} = \gamma X_2 \vec{e}_1$$



$$[E] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando 5.12 obtemos

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$\tau = \mu \gamma$$

O coeficiente de Lamé μ é chamado *módulo de cisalhamento*.

3. *Tensão puramente normal.* T é dado por

$$T = \Pi \mathbb{I}$$

Usando 5.13 obtemos

$$E = \varepsilon \mathbb{I}$$

onde

$$\Pi = 3\kappa\varepsilon$$

sendo

$$\kappa = \frac{2}{3}\mu + \lambda$$

chamado *módulo de rigidez à compressão* (bulk modulus) porque para um dado valor de Π , ε é tão menor quanto maior for κ .

Os coeficientes E_Y , ν , κ estão relacionados por

$$3\kappa = \frac{E_Y}{1 - 2\nu}$$

Como $\kappa > 0$ (devemos esperar $\varepsilon > 0$ para $\Pi > 0$) e $E_Y > 0$ então

$$\nu < \frac{1}{2}$$

Alguns valores para E_Y e ν :

ferro: $E_Y = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ $\nu = 0.29$

cobre: $E_Y = 10^{11} \text{ N/m}^2$ $\nu = 0.33$

vidro: $E_Y = 0.55 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ $\nu = 0.25$

(Gurtin p.204)

Exercício 112. Verifique que

$$E = \frac{1}{E_Y} [(1 + \nu)T - \nu(\text{tr}T)\mathbb{I}]$$

Exercício 113. Mostre que

$$\kappa = \frac{E_Y}{3(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E_Y}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E_Y}{(1+\nu)(1-\nu)}$$

Exercício 114. Num corpo homogêneo e isotrópico com $E_Y = 207 \text{ GPa}$, $\nu = 0,30$, o tensor T é constante

$$[T] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- Determine E
- Suponha que o corpo é uma esfera de 5 cm de raio. Qual é sua variação de volume? (resposta $E_{11} = 3,33 \cdot 10^{-5}$, $E_{12} = 1,26 \cdot 10^{-5}$, $E_{13} = 0$, $E_{22} = -1,97 \cdot 10^{-5}$, $E_{23} = 0$, $E_{33} = -0,43 \cdot 10^{-5}$ $\Delta V = 4,8710^{-3} \text{ cm}^3$)