Appunti per il corsi di Modelli di impresa e forme di mercato
La funzione di costo translogaritmica.

Piero Tedeschi

September 29, 2006

1 Teorema dell'inviluppo e Lemma di Shephard

Sia dato il seguente problema:

$$\begin{aligned} & \max_{x} \quad f(\mathbf{x}, \alpha) \\ c.v. \quad g_j(\mathbf{x}, \alpha) \quad & \geq \quad 0, \quad j = 1, ..., m, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

dove: $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{R}^n$, f e g_j sono $m+1$ funzioni a valori reali e differenziabili in modo continuo in $\mathcal{R}^{n+1}$. Noi sappiamo che condizioni necessarie per un massimo sono:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) + \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) &\leq \mathbf{0}, \quad \left[f_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) + \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\alpha)\right] \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) &= \mathbf{0} \quad \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$ è un vettore di moltiplicatori di Lagrange.

Per agevolare l'esposizione si assuma che $\hat{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ e $\hat{\boldsymbol{\lambda}} > \mathbf{0}$. In questo caso le condizioni qui sopra si semplificano nelle seguenti:

$$f_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) + \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) = \mathbf{0} \tag{1a}$$

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}},\alpha) = \mathbf{0} \tag{1b}$$

Ora si definiscano le seguenti funzioni. La funzione di valore massimo:

$$F(\alpha) = f(\hat{\mathbf{x}}(\alpha), \alpha)$$

Il Lagrangiano:

$$\ell(\mathbf{x},\alpha,\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x},\alpha) + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}(\mathbf{x},\alpha)$$

e la funzione:

$$\mathcal{L}(\alpha) = f(\hat{\mathbf{x}}(\alpha),\alpha) + \hat{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(\alpha),\alpha)$$

che quindi rappresenta il lagrangiano nel punto di massimo. Fra queste tre funzioni vale il seguente:

Teorema dell'inviluppo. *Si assuma che F e L siano differenziabili in modo continuo. Allora $F_\alpha = \ell_\alpha = L_\alpha$.*
Proof. Innanzi tutto si osservi che:

$$\mathcal{L}_\alpha = \ell_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}_\alpha + \ell_{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \boldsymbol{\lambda}_\alpha + \ell_\alpha = [f_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}_{\mathbf{x}}] \cdot \mathbf{x}_\alpha + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\lambda}_\alpha + \ell_\alpha = \ell_\alpha$$

dove abbiamo utilizzato (1) per ottenere l'ultima uguaglianza. Si osservi inoltre che:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= f_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_\alpha + f_\alpha = \\ &= -\boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_\alpha + f_\alpha \, [\text{per } (1a)] \\ &= \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}_\alpha + f_\alpha \, [\text{per differenziazione totale di } (1b): \mathbf{g}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{g}_\alpha = 0] \\ &= \ell_\alpha \end{aligned}$$

■

Il teorema dell'inviluppo ha numerose applicazioni in economia. In particolare ricordiamo il Lema di Shephard applica il teorema dell'inviluppo alla funzione di costo. Si ricordi che la funzione di costo è definita nel modo seguente:

$$C(\mathbf{w}, y) = \begin{array}{cc} \min\limits_{\mathbf{x}} & \mathbf{wx} \\ c.v & f(\mathbf{x}) \geq y \end{array}$$

dove $\mathbf{w}$ è il vettore dei prezzi dei fattori, $\mathbf{x}$ è il vettore delle quantità di fottori utilizzate, y è il prodotto f è una funzione di produzione. La domanda derivata dei fattori è invece definita come:

$$\mathbf{x}(\mathbf{w}, y) = \begin{array}{cc} \arg\min\limits_{\mathbf{x}} & \mathbf{wx} \\ c.v & f(\mathbf{x}) \geq y \end{array}$$

Con queste definizioni possiamo enunicare il:
Lemma di Shephard. *La derivata della funzione di costo per il prezzo di un fattore è pari alla domanda derivata di quel fattore:*

$$\frac{\partial}{\partial w_i} C(\mathbf{w}, y) = x_i$$

Proof. Ovviamente possiamo definire la funzione di costo in modo equivalente come:

$$-C(\mathbf{w}, y) = \begin{array}{cc} \max\limits_{\mathbf{x}} & -\mathbf{wx} \\ c.v & f(\mathbf{x}) \geq y \end{array}$$

Applicando direttamente il teorema dell'inviluppo otteniamo:

$$-\frac{\partial}{\partial w_i} C(\mathbf{w}, y) = -x_i$$

Moltiplicando per -1 entrambi i lati, otteniamo l'enunciato. ■

2 Proprietà della funzione di costo

Andiamo a studiare le altre proprietà della funzione di costo.
Proposizione 1. *Le proprietà della funzione di costo sono:*
(a) *C è omogena di grado 1 nei prezzi e non decrescente nella produzione*
(b) *C è una funzione concava nei prezzi*
(c) *le domande derivate sono omogenee di grado 0 nei prezzi*
(d) *gli effetti incrociati sulle domande derivate sono identici:* $\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j}{\partial w_i}$
(e) *se f è omogenea di grado 1 allora C è omogena di grado 1 in y. Lo sono anche tutte le domande compensate.*
(f) *Se f è concava allora C è una funzione convessa di y.*
(g) *Se f è omotetica, cioè $f(\mathbf{x}) = h(g(\mathbf{x}))$ dove g è omogena di grado 1 e h è monotona crescente, allora la funzione di costo è moltiplicativamente separabile: $C(\mathbf{w}, y) = c(\mathbf{w}) \cdot q(y)$*
Proof. Cominciamo da (c). Le domande derivare sono definite da

$$\mathbf{x}(\mathbf{w}, y) = \begin{array}{cc} \arg\min\limits_{\mathbf{x}} & \mathbf{wx} \\ c.v & f(\mathbf{x}) \geq y \end{array}$$

Se moltiplico tutti i prezzi per una costante ottengo

$$\mathbf{x}(a\mathbf{w}, y) = \begin{array}{cc} \arg\min\limits_{\mathbf{x}} & a\mathbf{wx} \\ c.v & f(\mathbf{x}) \geq y \end{array}$$

ma è evidente che: $\mathbf{x}(a\mathbf{w}, y) = \mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$, da qui l'asserto. È evidente che la (c) implica la (a), essendo la funzione di costo: $C(a\mathbf{w}, y) = a\mathbf{wx}(a\mathbf{w}, y) = a\mathbf{wx}(\mathbf{w}, y) = aC(\mathbf{w}, y)$.
Per quanto riguarda la concavità nei prezzi, innanzi tutto si ricordi la definizione:

$$aC(\mathbf{w}', y) + (1-a)C(\mathbf{w}'', y) \leq C(a\mathbf{w}' + (1-a)\mathbf{w}'', y)$$

con $\mathbf{w}'$ e $\mathbf{w}''$ due vettori di prezzi e a un parametro compreso fra 0 e 1, $a \in [1, 1]$.
Si noti infatti che:

$$\begin{aligned} & C(a\mathbf{w}' + (1-a)\mathbf{w}'', y) = \\ & \quad a\mathbf{w}'\mathbf{x}(a\mathbf{w}' + (1-a)\mathbf{w}'', y) + (1-a)\mathbf{w}''\mathbf{x}(a\mathbf{w}' + (1-a)\mathbf{w}'', y) \geq \\ & \quad\quad a\mathbf{w}'\mathbf{x}(\mathbf{w}', y) + (1-a)\mathbf{w}''\mathbf{x}(\mathbf{w}'', y) = \\ & \quad\quad\quad aC(\mathbf{w}', y) + (1-a)C(\mathbf{w}'', y) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la (d), si osservi che per il Lemma di Shephard abbiamo:

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = \frac{\partial C}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{\partial C}{\partial w_j \partial w_i} = \frac{\partial x_j}{\partial w_i}$$

Per quanto riguarda (e), si noti che le domande derivate sono omogenee di grado 1 in y se e solo se: $\mathbf{x}(\mathbf{w}, y) = y\mathbf{x}(\mathbf{w}, 1)$. Dato che la funzione di produzione è

omogena di grado 1, si noti che $f(y\mathbf{x}(\mathbf{w},1)) \geq y$. Si supponga che $\mathbf{x}(\mathbf{w},y) \neq y\mathbf{x}(\mathbf{w},1)$. Allora $\mathbf{wx}(\mathbf{w},y) < \mathbf{w}y\mathbf{x}(\mathbf{w},1)$. Quindi: $\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)/y < \mathbf{wx}(\mathbf{w},1)$. Notate che $f(\mathbf{x}(\mathbf{w},y)/y) \geq 1$ per l'omogeneità della funzione di produzione. Ma questo contraddice il fatto che $\mathbf{x}(\mathbf{w},1)$ sia il vettore di input che minimizza i costi per produrre una unità di bene. L'omogeità di grado 1 delle domande derivate implica anche quella della funzione di costo.
(f) e (g) li lasciamo come esercizi. ■

3 Forme funzionali flessibili

Dal punto di vista empirco sarebbe utile avere forme funzionali flessibili che mi permettano di controllare empiricamente le predizioni della teoria. La forma funzionale più popolare è la cosiddetta funzione di produzione o di costo translogaritmica. Per quanto riguarda la funzione di produzione ha la seguente forma:

$$\ln y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln x_i \ln x_j$$

La funzione di costo translogaritmica ha invece la seguente forma:

$$\begin{aligned} \ln C(\mathbf{w},y) &= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ln w_i \ln w_j + \\ & \sum_{i=1}^{n} b_i \ln w_i \ln y + c_1 \ln y + \frac{1}{2} c_2 \ln^2 y \end{aligned}$$

Notate che si tratta di approssimazioni di una trasformata logaritmica terminata al secondo ordine.

La forma funzionale flessibile permette di controllare empiricamente alcune proprietà. Ad esempio se nella funzione di produzione imponiamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 0, \forall i$$

imponiamo rendimenti di s ala costanti. Se invece imponiamo che tuuti gli $\alpha_{ij} = 0$, allora stiamo imponendo la restrizione che si tratti di una funzione di produzione Cobb-Douglas. Se voglio imporre la concavità della funzione di produzione, allora devo imporre che la matrice $[\alpha_{ij}]$ abbia minori principali di segno alternato a partire dal negativo.

Analogamente per la funzione di costo. Devo imporre che sia omogenea di grado 1 nei prezzi e quindi devo imporre che:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

Devo imporre che l'Hessiano sia simmetrico e quindi: $a_{ij} = a_{ji}$. Come vedete queste sono tutte ipotesi in linea di principio sottoponibili a test statistico mediante tecniche annidate.

Notate infine che applicando il Lemma di Shephard possiamo ricavare la seguente espressione per la quota di spesa in ciascun input:

$$\theta_i(\mathbf{w}, y) = \frac{w_i x_i(\mathbf{w}, y)}{C(\mathbf{w}, y)} = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ln w_j + b_i \ln y, \quad i = 1, ..., n$$

Notate che questa equazione è lineare nei parametri ignoti e quindi è relativamente facile da stimare. Tenete presente che ci sono $n-1$ equazioni indipendenti delle quote di mercato poiché $\sum \theta_i = 1$. Inoltre se assumiamo l'omoteticità della funzione di produzione sottostante dobbiamo imporre: $b_i = 0$ per tutti gli i. In questo caso la formula delle quote di mercato si semplifica ulteriormente:

$$\theta_i(\mathbf{w}, y) = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ln w_j$$

Se oltre all'omoteticità si assume omegeneità di grado 1, allora la funzione di costo diventa $C(\mathbf{w}, y) = c(\mathbf{w})\, y$, ovvero nel nostro caso dobbiamo imporre: $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Rammentiamo infine cosa è l'elasticità di sostituzione:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j} \frac{w_j}{x_i}$$

Il difetto di questa misura è quello di non essere simmetrica, cioé $\varepsilon_{ij} \neq \varepsilon_{ji}$. Per ottenere una misura simmetrica di solito si impiega una versione modificata detta elasticità di sostituzione parziale di Allen:

$$\sigma_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\theta_j} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j} \frac{w_j}{x_i} \frac{\mathbf{wx}}{w_j x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j} \frac{\mathbf{wx}}{x_i x_j} = \frac{C \cdot C_{ij}}{C_i \cdot C_j}$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta applicando ripetutamente il Lemma di Shephard. Possiamo trovare la formula esatta dell'elasticità di sostiuzione nel caso della translogaritmica? La risposta è affermativa:

$$\sigma_{ij} = \frac{a_{ij} + \theta_i \theta_j}{\theta_i \theta_j}$$

Vediamo perché:

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{\partial^2 \ln C(\mathbf{w}, y)}{\partial \ln w_i \partial \ln w_j} = \frac{\partial}{\partial \ln w_i} \frac{\partial \ln C}{\partial \ln w_j} = \frac{\partial}{\partial \ln w_i} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \ln w_j} \right) = \\
w_j \frac{\partial}{\partial \ln w_i} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial w_j} \right) &= w_i w_j \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial w_j} \right) = w_i w_j \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\frac{x_j}{C} \right) = \\
w_i w_j \frac{\frac{\partial x_j}{\partial w_i} C - \frac{\partial C}{\partial w_i} x_j}{C^2} &= \frac{w_i w_j x_i x_j}{C^2} \frac{\partial x_j}{\partial w_i} \frac{C}{x_i x_j} - w_i w_j \frac{x_j x_j}{C^2} = \theta_i \theta_j \sigma_{ij} - \theta_i \theta_j
\end{aligned}$$

da cui deriva la formula.