ÜBER EINE ANWENDUNG DER MENGENLEHRE AUF DIE THEORIE DES SCHACHSPIELS

VON E. ZERMELO.

Die folgenden Betrachtungen sind unabhängig von den besonderen Regeln des Schachspiels und gelten prinzipiell ebensogut für alle ähnlichen Verstandesspiele, in denen zwei Gegener unter Ausschluss des Zufalls gegeneinander spielen; es soll aber der Bestimmtheit wegen hier jeweilig auf das Schach als das bekannteste aller derartigen Spiele exemplifiziert werden. Auch handelt es sich nicht um irgend eine Methode des praktischen Spiels, sondern lediglich um die Beantwortung der Frage: kann der Wert einer beliebigen während des Spiels möglichen Position für eine der spielenden Parteien sowie der bestmögliche Zug mathematisch-objektiv bestimmt oder wenigstens definiert werden, ohne dass auf solche mehr subjektiv-psychologischen wie die des "vollkommenen Spielers" und dergleichen Bezug genommen zu werden brauchte? Dass dies wenigstens in einzelnen besonderen Fällen möglich ist, beweisen die sogenannten "Schachprobleme," d. h. Beispiele von Positionen, in denen der Anziehende *nachweislich* in einer vorgeschriebenen Anzahl von Zügen das Matt erzwingen kann. Ob aber eine solche Beurteilung der Position auch in anderen Fällen, wo die genaue Durchführung der Analyse in der unübersehbaren Komplikation der möglichen Fortsetzungen ein praktisch unüberwindliches Hindernis findet, wenigstens theoretisch denkbar ist und überhaupt einen Sinn hat, scheint mir doch der Untersuchung wert zu sein, und erst diese Feststellung dürfte für die praktische Theorie der "Endspiele" und der "Eröffnungen," wie wir sie in den Lehrbüchern des Schachspiels finden, die sichere Grundlage bilden. Die im folgenden zur Lösung des Problems verwendeten Methode ist der "Mengenlehre" und dem "logischen Kalkül" entnommen und erweist die Fruchtbarkeit dieser mathematischen Disziplinen in einem Falle, wo es sich fast ausschliesslich um *endliche* Gesamtheiten handelt.

Da die Anzahl der Felder, sowie die der ziehenden Steine endlich ist, so ist es auch die Menge P der möglichen Positionen $p_0, p_1, p_2 \cdots p_t$, wobei immer Positionen als verschieden aufzufassen sind, je nachdem Weiss oder Schwarz am Zuge ist, eine der Parteien schon rochiert hat, ein gegebener Bauer bereits verwandelt ist u. s. w. Es sei nun q eine dieser Positionen, dann sind von q aus "Endspiele" möglich $\mathfrak{q} = (q, q_1, q_2 \ldots)$, nämlich Folgen von Positionen, die mit q beginnen und im Einklang mit den Spielregeln auf einander folgen, sodass jede Position q_λ aus der vorhergehenden $q_{\lambda-1}$ abwechselnd durch einen zulässigen Zug von Weiss oder Schwarz hervorgeht. Solch ein mögliches Endspiel $\mathfrak{q}$ kann entweder in einer "Matt" oder

"Patt" Stellung sein natürliches Ende finden, oder aber auch—theoretisch wenigstens—unbegrenzt verlaufen, in welchem Falle die Partie zweifellos als unentschieden oder "remis" zu gelten hätte. Die Gesamtheit Q aller dieser zu q gehörenden "Endspiele" $\mathfrak{q}$ ist stets eine wohldefinierte, endliche oder unendliche Untermenge der Menge P^{α}, welche alle möglichen abzählbaren Folgen gebildet aus Elementen p von P umfasst.

Unter diesen Endspielen $\mathfrak{q}$ können einige in r oder weniger "Zügen" (d. h. einfachen Positionswechseln $p_{\lambda-1} \longrightarrow p_\lambda$, nicht etwa Doppelzügen) zum Gewinn von Weiss führen, doch wird dies in der Regel auch noch vom Spiel des Gegners abhängen. Wie muss aber eine Position q beschaffen sein, damit Weiss, wie Schwarz auch spielt, in höchstens r Zügen den Gewinn *erzwingen* kann? Ich behaupte, die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist die Existenz einer nicht verschwindenden Untermenge $U_r(q)$ der Menge Q von folgender Beschaffenheit:

1. Alle Elemente $\mathfrak{q}$ von $U_r(q)$ enden in höchstens r Zügen mit dem Gewinn von Weiss, sodass keine dieser Folgen mehr als $r+1$ Glieder enthält und daher $U_r(q)$ jedenfalls endlich ist.

2. Ist $\mathfrak{q}=(q, q_1, q_2 \ldots)$ ein beliebiges Element von $U_r(q)$, q_λ ein beliebiges Glied dieser Reihe, welches einem ausgeführten Zuge von Schwarz entspricht, also entweder immer ein solches gerader oder eines ungerader Ordnung, je nachdem bei q Weiss oder Schwarz am Zuge ist, sowie endlich q'_λ eine mögliche Variante, sodass Schwarz von $q_{\lambda-1}$ aus ebensogut nach q'_λ wie nach q_λ hätte ziehen können, so enthält $U_r(q)$ noch mindestens ein Element der Form $\mathfrak{q}'_\lambda=(q, q_1, \ldots q_{\lambda-1}, q'_\lambda, \ldots)$, welches mit $\mathfrak{q}$ die ersten λ Glieder gemein hat. In der Tat kann in diesem und nur in diesem Falle Weiss mit einem beliebigen Elemente $\mathfrak{q}$ von $U_r(q)$ beginnen und jedesmal, wo Schwarz q'_λ statt q_λ spielt, mit einem entsprechenden $\mathfrak{q}'_\lambda$ weiterspielen, also unter allen Umständen in höchstens r Zügen gewinnen.

Solcher Untermengen $U_r(q)$ kann es freilich mehrere geben, aber die Summe je zweier ist stets von derselben Beschaffenheit, und ebenso auch die Vereinigung $\overline{U}_r(q)$ aller solchen $U_r(q)$, welche durch q und r eindeutig bestimmt ist und jedenfalls von O verschieden sein, d. h. mindestens ein Element enthalten muss, sofern überhaupt solche $U_r(q)$ existieren. Somit ist $\overline{U}_r(q) \neq 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass Weiss den Gewinn in höchstens r Zügen erzwingen kann. Ist $r<r'$ so ist stets $\overline{U}_r(q)$ Untermenge von $\overline{U}_{r'}(q)$, weil dann jede Menge $U_r(q)$ sicher auch die an $U_{r'}(q)$ gestellten Anforderungen erfüllt, also in $\overline{U}_{r'}(q)$ enthalten sein muss, und dem kleinsten $r=\rho$, für welches noch $\overline{U}_r(q) \neq 0$ ist, entspricht der gemeinsame Bestandteil $U^*(q)=\overline{U}_\rho(q)$ aller solchen $\overline{U}_r(q)$; dieser umfasst alle solche Fortsetzungen, mit denen Weiss in der kürzesten Zeit gewinnen muss. Nun besitzen aber diese Minimalwerte $\rho=\rho_q$ ihrerseits ein von q unabhängiges Maximum $\tau \leqq t$, wo $t+1$ die Anzahl der möglichen Positionen ist, sodass $U(q)=\overline{U}_\tau(q) \neq 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass in der Position q irgend ein $\overline{U}_r(q)$ nicht verschwindet und Weiss überhaupt "auf Gewinn steht." Ist nämlich in einer Position q der Gewinn überhaupt zu erzwingen, so ist er es auch, wie wir zeigen wollen, in höchsten t

Zügen. In der Tat müsste jedes Endspiel $\mathfrak{q} = (q, q_1, q_2 \dots q_n)$ mit $n > t$ mindestens eine Position $q_\alpha = q_\beta$ doppelt enthalten, und Weiss hätte beim ersten Erscheinen derselben ebenso weiter spielen können wie beim zweiten Male und jedenfalls schon früher als beim n ten Zuge gewinnen, also $\rho \leqq t$.

Ist andererseits $U(q) = 0$, so kann Weiss, wenn der Gegner richtig spielt, höchstens remis machen, er kann aber auch "auf Verlust stehen" und wird dann versuchen, dass "Matt" möglichst hinauszuschieben. Soll er sich noch bis zum s^{ten} Zuge halten können, so muss eine Untermenge $V_s(q)$ von Q existieren von folgender Beschaffenheit:

1. In keinen der in $V_s(q)$ enthalten Endspiele verliert Weiss vor dem s^{ten} Zuge.

2. Ist $\mathfrak{q}$ ein beliebiges Element von $V_s(q)$ und in $\mathfrak{q}$ durch einen erlaubten Zug von Schwarz q_λ ersetzbar durch q'_λ, so enthält $V_s(q)$ noch mindestens ein Element der Form

$$\mathfrak{q}'_\lambda = (q, q_1, q_2, \dots q_{\lambda-1}, q'_\lambda \dots),$$

welches mit q bis zum λ^{ten} Gliede übereinstimmt und dann mit q'_λ weitergeht. Auch diese Mengen $V_s(q)$ sind sämtlich Untermengen ihrer Vereinigung $\overline{V}_s(q)$, welche durch q und s eindeutig bestimmt ist und die gleiche Eigenschaft besitzt wie V_s selbst, und für $s > s'$ wird jetzt $\overline{V}_s(q)$ Untermenge von $\overline{V}_{s'}(q)$. Die Zahlen s, für welche $\overline{V}_s(q)$ von O verschieden ausfällt, sind entweder unbegrenzt oder $\leqq \sigma \leqq \tau \leqq t$, da der Gegner, wenn überhaupt, den Gewinn in höchstens τ Zügen müsste erzwingen können. Somit kann Weiss dann und nur dann mindestens remis machen, wenn $V(q) = \overline{V}_{\tau+1}(q) \neq 0$ ist, und im anderen Falle kann er vermöge $V^*(q) = \overline{V}_\sigma(q)$ den Verlust noch mindestens $\sigma \leqq \tau$ Züge hinausschieben. Da jedes $U_r(q)$ gewiss auch den an $V_s(q)$ gestellten Anforderungen genügt, so ist jedes $\overline{U}_r(q)$ Untermenge jeder Menge $\overline{V}_s(q)$, und $U(q)$ Untermenge von $V(q)$. Das Ergebnis unserer Betrachtung ist also das folgende:

Jeder während des Spiels möglichen Position q entsprechen zwei wohldefinierte Untermengen $U(q)$ und $V(q)$ aus der Gesamtheit Q der mit q beginnenden Endspiele, deren zweite die erste umschliesst. Ist $U(q)$ von O verschieden, so kann Weiss, wie Schwarz auch spielt, den Gewinn erzwingen und zwar in höchstens ρ Zügen vermöge einer gewissen Untermenge $U^*(q)$ von $U(q)$, aber nicht mit Sicherheit in weniger Zügen. Ist $U(q) = 0$ aber $V(q) \neq 0$, so kann Weiss wenigstens remis machen vermöge der in $V(q)$ enthaltenen Endspiele. Verschwindet aber auch $V(q)$, so kann Weiss, wenn der Gegner richtig spielt, den Verlust höchstens bis zum σ^{ten} Zuge hinausschieben vermöge einer wohldefinierten Menge $V^*(q)$ von Fortsetzungen. Auf alle Fälle sind nur die in U^*, bezw. V^* enthaltenen Partieen im Interesse von Weiss als "korrekt" zu betrachten, mit jeder anderen Fortsetzung würde er, wenn in Gewinnstellung, bei richtigem Gegenspiel den gesicherten Gewinn verscherzen oder verzögern, sonst aber den Verlust der Partie ermöglichen oder beschleunigen. Ganz analoge Betrachtungen gelten natürlich auch für Schwarz, und als "korrekt" zu Ende geführte Partieen hätten diejenigen zu gelten, welche *gleichzeitig* den beiderseitigen Bedingungen entsprechen, sie bilden also in jedem Falle wieder eine wohldefinierte Untermenge $W(q)$ von Q.

Die Zahlen t und τ sind von der Position unabhängig und lediglich durch die Spielregeln bestimmt. Jeder möglichen Position entspricht eine τ nicht überschreitende Zahl $\rho = \rho_q$ oder $\sigma = \sigma_q$, je nachdem Weiss oder Schwarz in ρ bezw. σ Zügen, aber nicht in weniger, den Gewinn erzwingen kann. Die spezielle Theorie des Spiels hätte diese Zahlen, soweit dies möglich ist, zu bestimmen oder wenigstens in Grenzen einzuschliessen, was bisher allerdings nur in besonderen Fällen, wie bei den "Problemen" oder den eigentlichen "Endspielen" gelungen ist. Die Frage, ob die Anfangsposition p_0 bereits für eine der spielenden Parteien ein "Gewinnstellung" ist, steht noch offen. Mit ihrer exacten Beantwortung würde freilich das Schach den Charakter eines Spieles überhaupt verlieren.