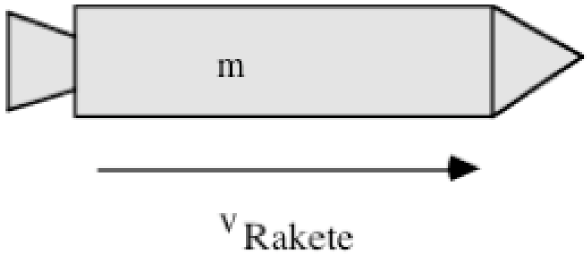
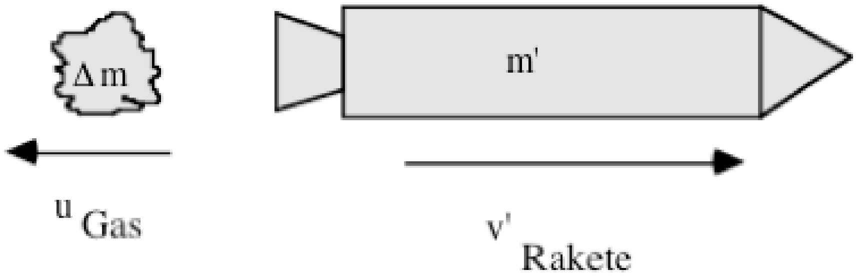
Die Raketengleichung (eine Anwendung zum Impulssatz)





Impuls vor dem Ausstoß: $p = m_R v_R$

Impuls nach dem Ausstoß: $p' = m'_R v'_R + \Delta\mathrm{m}\left(v'_R - u_G\right)$

Impulserhaltungssatz: $p = p'$

Impulse einsetzen ergibt:

$$m_R v_R = m'_R v'_R + \Delta\mathrm{m}\left(-u_G + v'_R\right)$$

Für die Massenänderung gilt: $m'_R = m_R - \Delta\mathrm{m}$

Dies oben einsetzen,

$$m_R v_R = v'_R\left(m_R - \Delta\mathrm{m}\right) + \Delta\mathrm{m}\left(-u_G + v'_R\right)$$

die Klammern ausmultiplizieren

$$m_R v_R = \left(v'_R m_R - \Delta\mathrm{m}\, v'_R\right) + \left(\Delta\mathrm{m}\, v'_R - \Delta\mathrm{m}\, u_G\right)$$

und vereinfachen:

$$m_R v_R = v'_R m_R - \Delta\mathrm{m}\, u_G$$

Von dieser Gleichung hat man aber noch nicht sehr viel. Da uns die Raketengeschwindigkeit interessiert, lösen wir danach auf:

$$-v'_R m_R + m_R v_R = -\Delta\mathrm{m}\, u_G$$

$$\left(v_R - v'_R\right) m_R = -\Delta\mathrm{m}\, u_G$$

$$v_R - v'_R = -\frac{\Delta\mathrm{m}\, u_G}{m_R}$$

$$v'_R - v_R = \frac{\Delta\mathrm{m}\, u_G}{m_R}$$

Nun steht auf der linken Seite die Änderung der Raketengeschwindigkeit

$$\Delta\mathrm{v} = v'_R - v_R$$

Also:

$$\Delta v = \frac{\Delta m\, u_G}{m_R}$$

für Δt gegen 0 geht Δv in dv und Δm in dm über. Es gilt an dieser STelle noch einen wichtigen Punkt zu beachten! Auf der rechten Seite der Gleichung muss die Masse im Zähler, wie auch im Nenner auf die Rakete bezogen werden. Da die Raketenmasse *abnimmt*, muss Δm durch - dm_R ersetzt werden.

Damit erhält man schließlich die endgültige differentielle Form:

$$dv = -\frac{dm_R\, u_G}{m_R}$$

Um auf die tatsächliche Geschwindigkeit zu kommen, müssen auf beiden Seiten der Gleichung alle diese winzigen Anteile vom Anfangswert bis zum Endwert "gesammelt" werden. Diesen Vorgang nennt man *Integrieren*. Man schreibt das dann so hin:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{m_0}^{m} -\frac{u_G}{m_R}\, dm_R$$

Genaueres lernt ihr in der Klasse 12, ebenso wie man das dann wirklich rechnet. Man erhält schliesslich folgende Lösung:

$$v - v_0 = u_G \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

bzw.

$$v = v_0 + u_G \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Dies ist die **1. Raketengleichung.** Sie gibt die Geschwindigkeit einer Rakete im Vakuum ohne Gravitationseinfluss in Abhängigkeit von der Zeit an. Dabei ist v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und m_0 ist die Anfangs*gesamt*masse der Rakete, also:

$$m_0 = m_{\text{leer}} + m_{\text{brenn}}$$

Sei im Folgenden die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, also: $v_0 = 0$

Dann vereinfacht sich die obige Raketengleichung zu:

$$v = u_G \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

So...mit dieser netten Gleichung spielen wir jetzt ein wenig herum, um deren Bedeutung zu erfahren.

•Erste Idee:

v hängt ja von der Zeit ab. Also zeichnen wir erst einmal die Geschwindigkeit *v* in Abhä ngigkeit von der Zeit in ein Diagramm. Allerdings müssen wir uns zuvor noch kurz Gedanken über die Masse *m* in der Gleichung machen. Diese hängt natürlich von der Zeit ab, da ja immer weiter Gas ausgestoßen wird. Bei einem konstanten Gasausstoss μ ist die zum Zeitput *t* ausgestoßene Masse gleich $\mu\, t$ und damit gilt für die Masse *m*:

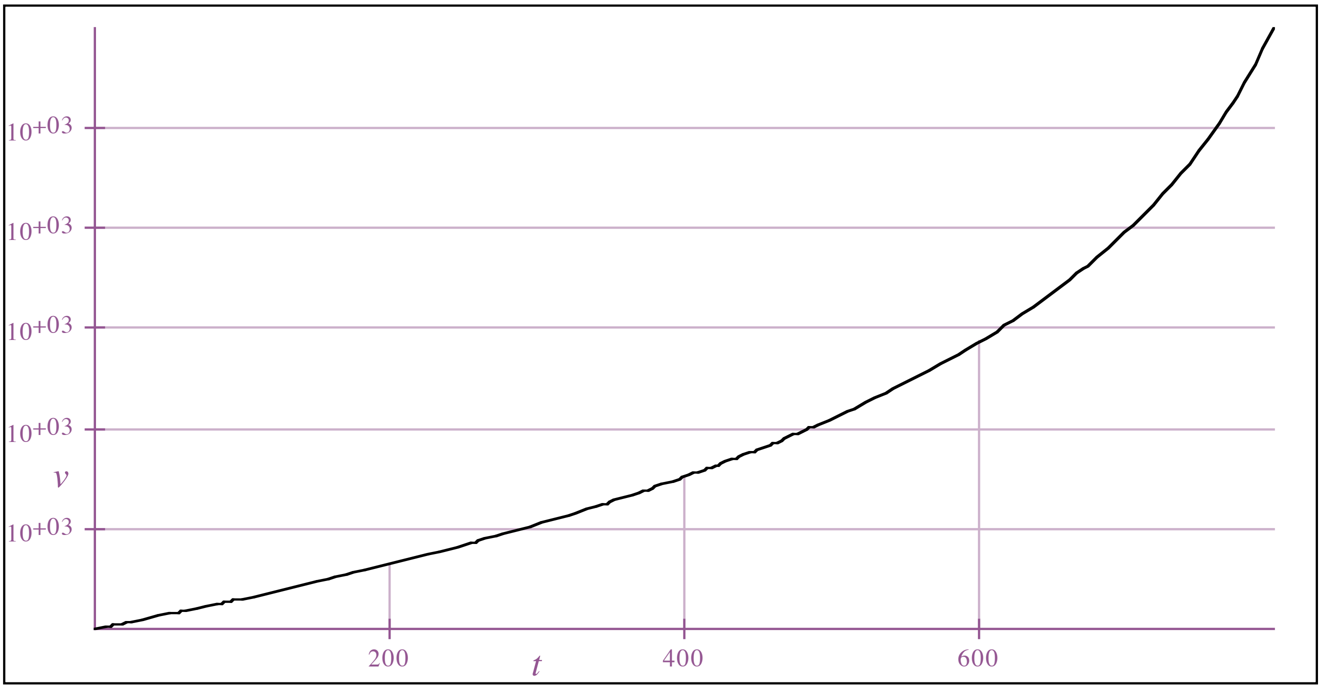
$$m = m_0 - \mu\, t$$

Setzen wir das und die Definition von m_0 (s.o.) ein, so ergibt sich:

$$v = u_G \ln\left(\frac{m_{\text{brenn}} + m_{\text{leer}}}{m_{\text{brenn}} + m_{\text{leer}} - \mu\, t}\right)$$

So jetzt geht's aber endgültig ans Zeichnen. Wir brauchen noch ein paar Werte:

$u_G = 2500$ $\quad m_{\text{leer}} = 200$ $\quad m_{\text{brenn}} = 2000$ $\quad \mu = 2.5$



Man sieht an der steiler werdenden Kurve, dass die Rakete immer stärker beschleunigt, bis der Brennstoff verbraucht ist. Dieser Zeitpunkt ist gekommen, wenn die Menge des ausgestoßenen Gases $\mu\, t$ gleich m_{brenn} geworden ist. Also gilt:

$$m_{\text{brenn}} = \mu\, t'$$

Dies muss man nur nach t' aufzulösen und man erhält:

$$t' = \frac{m_{\text{brenn}}}{\mu}$$

Mit den obigen Werten ergibt sich eine Brenndauer von

$t' = 800$ Sekunden.

• Zweitens: Brennschlussgeschwindigkeit

Was kann man über die Endgeschwindigkeit der Rakete aussagen (bei $v_0 = 0$) ?

Am Ende der Brenndauer (Zeitpunkt t') ist $\mu\, t'$ gleich der gesamten Brennstoffmasse m_{brenn} und es bleibt die Leermasse m_{leer} der Rakete übrig.

Damit berechnet sich die Brennschlussgeschwindigkeit mittels:

$$v_e = u_G \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}}\right)$$

Mit den oben eingegeben Werten ergibt sich: $\quad v_e = 5994.7$ m / s.

Was bedeutet das Ergebnis?

Also zunächst kann man an der Gleichung erkennen, dass die Endgeschwindigkeit proportional zur Gasgeschwindigkeit u_G ist. Des Weiteren hängt v_e nur noch von den Massen ab, und zwar auf logarithmische Weise. Die Endgeschwindigkeit ist also unab-hä ngig von der Ausströmgeschwindigkeit µ. Die angesprochene logarithmische Abhä ngigkeit der Endgeschwindigkeit macht den Raketenbauern große Probleme. Das wollen wir uns jetzt noch einmal etwas genauer anschauen.

Dazu stellen wir das Verhältnis von Endgeschwindigkeit zur Ausströmgeschwindigkeit in Abhängigkeit von den Massen dar. Das erreichen wir durch Umstellen der Gleichung:

$$\frac{v_e}{u_G} = \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}}\right)$$

Für die Gesamtmasse gilt (s.o.) : $m_0 = m_{\text{leer}} + m_{\text{brenn}}$

es folgt also:

$$\frac{v_e}{u_G} = \ln\left(\frac{m_{\text{brenn}} + m_{\text{leer}}}{m_{\text{leer}}}\right)$$

und man erhält durch kürzen:

$$\frac{v_e}{u_G} = \ln\left(1 + \frac{m_{\text{brenn}}}{m_{\text{leer}}}\right)$$

Jetzt haben wir die Gleichung so umgestellt, dass das Verhältnis der Geschwindigkeiten eine Funktion des Verhältnisses von Brennstoffmasse zur Leermasse der Rakete ist.

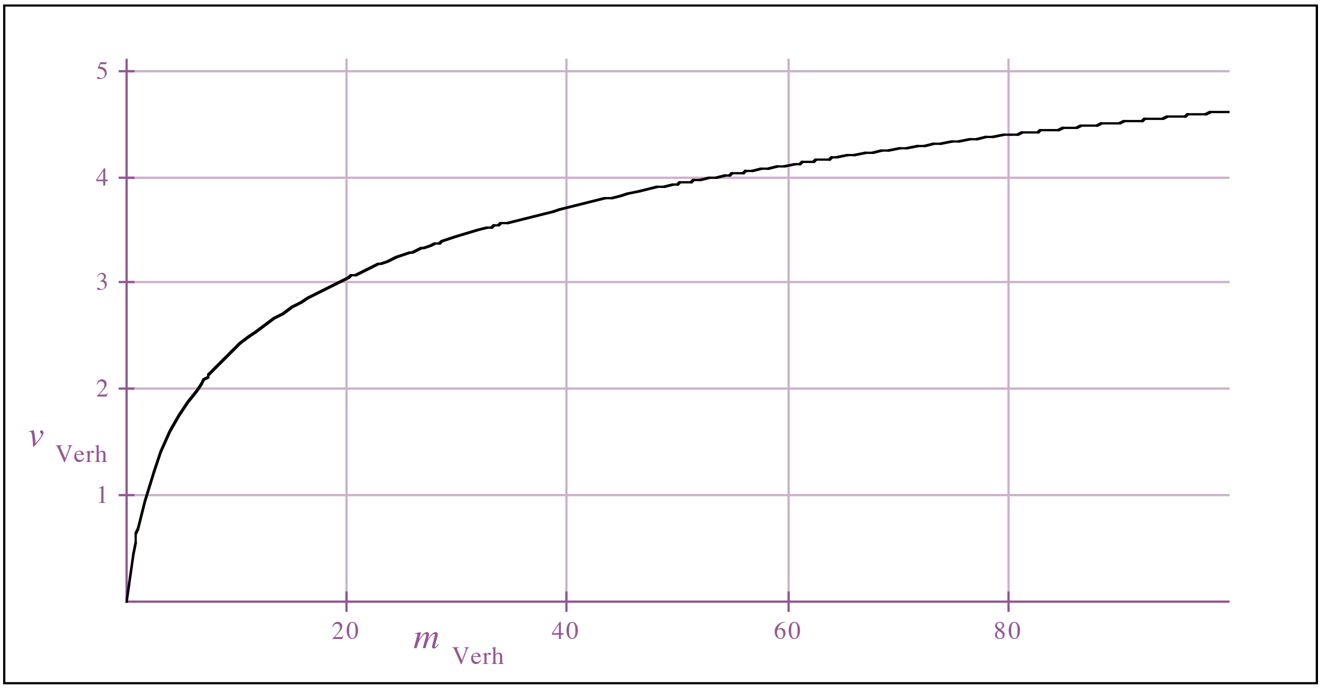
Zum Zeichnen dieser Beziehung geben wir den Verhältnissen neue Bezeichnungen:

$$v_{\text{Verh}} = \frac{v_e}{u_G} \qquad m_{\text{Verh}} = \frac{m_{\text{brenn}}}{m_{\text{leer}}}$$

und erhalten:

$$v_{\text{Verh}} = \ln\left(1 + m_{\text{Verh}}\right)$$

Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



Man erkennt, dass selbst bei einem großen Verhältnis der Brennstoffmasse zur Leermasse von 60 nur eine ca. vierfach höhere Geschwindigkeit, als die Austrittgeschwindigkeit des Gases erreicht werden kann. Zu beachten ist hierbei, dass zum Leegewicht ja auch die Nutzlast gehört. Es ist also sehr problematisch große Nutzlasten auf hohe Endgeschwindigkeiten zu bringen.

Hier einige Werte der Ausströmgeschwindigkeiten, die heute erreicht werden:

Feststoffraketen:	1700 bis 2450 m/s
Flüssigkeitsraketen:	2600 bis 3850 m/s
Hybrid-Antriebe:	2500 bis 4350 m/s

Bem: Um den Einflussbereich der Erde zu verlassen, muss eine Rakete eine Geschwindigkeit von 11,2 km/s erreichen. Diese Geschwindigkeit nennt man auch *Fluchtgeschwindigkeit* oder *2. kosmische Geschwindigkeit*. (Wie man die errechnet, kommt später.)

Die konstruktive Obergrenze für einstufige Raketen liegt bei ca. 15:1, womit sofort deutlich wird, dass man mit einstufigen Raketen die Fluchtgeschwindigkeit nicht erreichen kann. Erst recht nicht, wenn man bedenkt, dass unsere Berechnungen bis lang **ohne** Schwerkrafteinfluss und ohne Berücksichtigung von Reibungseffekten gemacht wurden!

Drittens: Rakete unter Schwerkrafteinfluss (Näherung: *g=const*)

Beim senkrechten Wurf nach oben gilt:

$$v_y = v - g\,t \qquad \text{mit} \qquad g = 9.81$$

Für die Geschwindigkeit *v* nehmen wir die oben hergeleitetete Raketengleichung und erhalten die Geschwindigkeitsfunktion der Rakete während des Brennvorgangs *v(t)*. (Die Variable ist jetzt der übersichtlichkeit halber mit Schatten gedruckt)

$$v(t) = u_G \ln\left(\frac{m_{brenn} + m_{leer}}{m_{brenn} + m_{leer} - \mu\,t}\right) - g\,t$$

Hier noch einmal die Werte:

$$u_G = 1000 \qquad m_{leer} = 100 \qquad m_{brenn} = 1000 \qquad \mu = 10 \qquad g = 9.81$$

Berechnen der Brenndauer *t'*

$$m_{brenn} = \mu\,t'$$

$$t' = \frac{m_{brenn}}{\mu}$$

$$t' = 100$$

Wie sieht *v(t)* nach Brennschluß aus ?

Es handelt sich hier um einen Wurf nach oben, also:

$$v_{Wurf}(t) = v_0 - g\,t$$

*v*_0 ist die Brennschlussgeschwindigkeit, ist also: $v_0 = v(t')$

Jetzt ist noch zu beachten, dass diese Bewegungsart ja erst nach Brennschluss stattfindet, also die Zeit um *t*' verschoben werden muss.

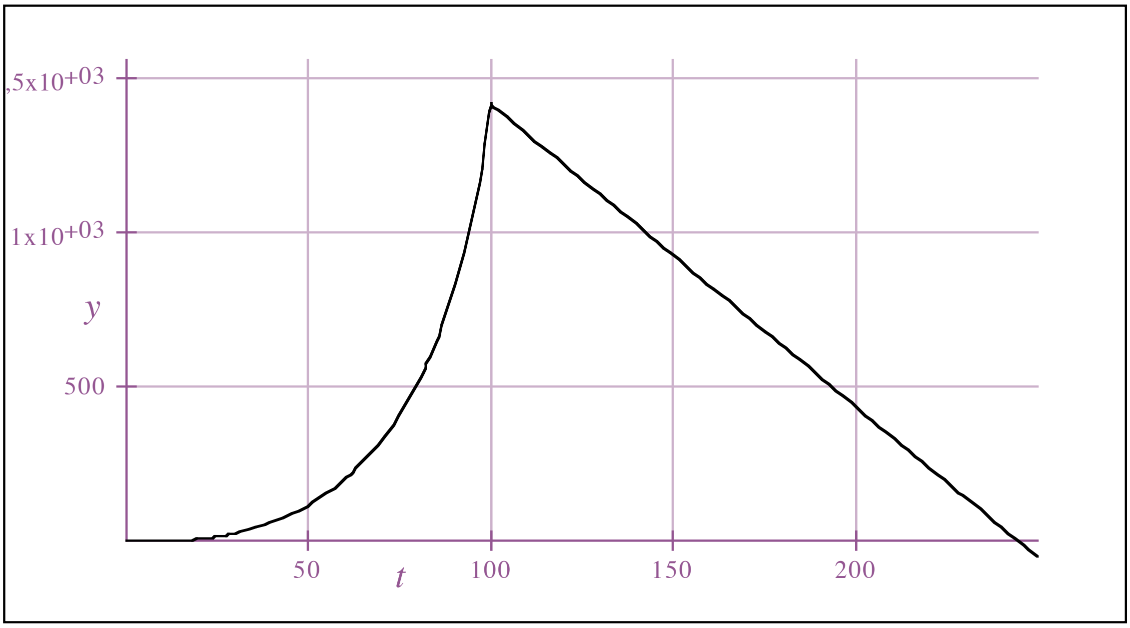
Es gilt also für die Geschwindigkeit nach Brennschluss:

$$v_{nach}(t) = v(t') - g\,(t - t')$$

Insgesamt erhalten wir folgende zusammengesetzte Funktion für die Geschwindigkeit:

$$v'(t) = \begin{cases} v(t) & (t < t') \\ v_{nach}(t) & (t \ge t') \end{cases}$$

Diese Funktion sieht folgendermaßen aus:

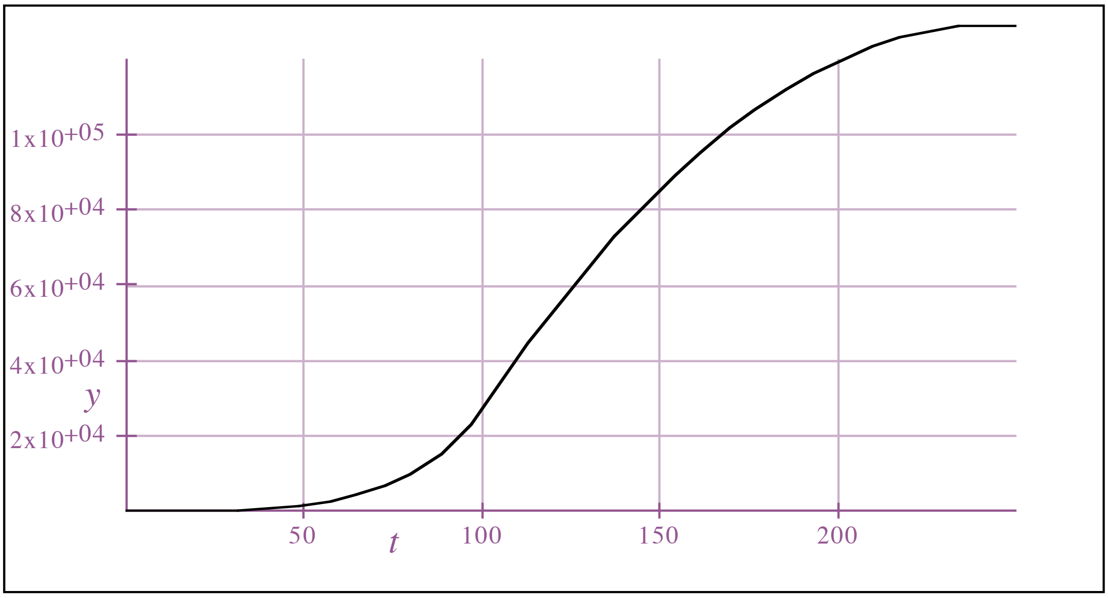


Man erkennt sehr schön die beiden unterschiedlichen Fälle. Zunächst die Beschleunigung der Rakete während des Brennens der Triebwerke und anschlie ßend der Geschwindigkeitsabfall nach Brennschluss.

Jetzt stellt sich noch die Frage, wie es sich mit der Steighöhe der Rakete verhält. Um das zu klären, müssen wir den allgemeinen Zusammenhang der Mechanik zu Hilfe nehmen, dass die zurückgelegte Strecke die " Sammelgröße" all der kleinen Streckenabschnitte ist, die im laufe der Zeit zurück gelegt werden. Mathematisch ausgedrückt sieht das so aus:

$$s(t) = \int_0^t v'(\tau)\, d\tau$$

Den Funktionsverlauf (sprich das "Aufsammeln") können wir ohne die Funktion extra anzugeben vom Computer berechnen lassen. Das schaut dann so aus:



Nach Brennschluß ist ein parabelförmiger Verlauf zu erkennen, den wir ja schon von der senkrechten Wurfbewegung kennen. Ist ja auch klar...nach Brennschluss verhält sich die Rakete wie ein hochgeworfener Stein.

Jetzt berechnen wir noch die maximale Höhe der Rakete. Wenn die Rakete ihren höchsten Punkt erreicht hat, ist die Geschwindigkeit gerade wieder auf Null abgesunken (vergl. Diagramm oben). Den Zeitpunkt, an dem dies geschieht nennen wir mal *t''*. Er berechnet sich durch Nullsetzten von *v*_nachher.

$$v_{\text{nach}}(t'') = 0$$

und damit (s.o.)

$$-g(-t' + t'') + v(t') = 0$$

Diese Gleichung nach *t''* auflösen

$$t'' = \frac{v(t')}{g} + t'$$

und ausrechnen.

$$t'' = 244.43$$

So, die maximale Höhe *y*_max ist der Funktionswert der Höhenfunktion *s(t)* an der Stelle *t''*. Also:

$$y_{\text{max}} = s(t'')$$

und damit

$$y_{\text{max}} = s(244.43)$$

$$y_{\text{max}} = 1.2929 \times 10^5$$

Geschafft :-)

Ein LIVEMATH Dokument von St. Lück (Kontakt: livemath@slueck.de)