BANCO CENTRAL DE COSTA RICA
DIVISIÓN ECONÓMICA
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS
DIE-02-2003-NT
NOTA TÉCNICA
JULIO DEL 2003

EL FILTRO DE KALMAN

Álvaro Solera Ramírez

TABLA DE CONTENIDO

EL FILTRO DE KALMAN

Resumen[1]

El filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva eficiente del método de mínimos cuadrados. Esta solución permite calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado de un proceso en cada momento del tiempo con base en la información disponible en el momento t-1, y actualizar, con la información adicional disponible en el momento t, dichas estimaciones. Este filtro es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos especificados en la forma de estado-espacio (State-space).

THE KALMAN FILTER

Abstract

The Kalman filter is a set of mathematical equations that provides an efficient computational (recursive) solution of the least-squares method. The goal is to find unbiased minimum variance lineal estimator of the state at time t with base in available information at time t-1 and update with the additional available information at time t that estimator. This filter is the principal algorithm to estimate dynamic systems specified in state-space form.

Clasificación JEL: C13,C32,C51

[1] Se agradecen los comentarios de Ana Cecilia Kikut, Róger Madrigal, Evilyn Muñoz, Manrique Sáenz y Claudio Ureña.

1. INTRODUCCIÓN

El propósito de este documento es proveer una introducción al filtro de Kalman y establecer la relación entre éste y la representación en la forma de estado-espacio. La importancia de estudiar el algoritmo de Kalman radica en que se constituye en el principal procedimiento para estimar sistemas dinámicos representados en la forma de estado-espacio (State-Space), los cuales tienen muchas aplicaciones econométricas de interés.

El filtro tiene su origen en el documento de Kalman (1960) donde describe una solución recursiva para el problema del filtrado lineal de datos discretos. La derivación de Kalman fue dentro de un amplio contexto de modelos estado-espacio, en donde el núcleo es la estimación por medio de mínimos cuadrados recursivos. Desde ese momento, debido en gran parte al avance en el cálculo digital, el filtro de Kalman ha sido objeto de una extensiva investigación y aplicación, particularmente en el área de la navegación autónoma y asistida, en rastreo de misiles y en economía.

La representación estado-espacio es esencialmente una notación conveniente para la estimación de modelos estocásticos donde se asumen errores en la medición del sistema, lo que permite abordar el manejo de un amplio rango de modelos de series de tiempo. Entre los usos particulares se encuentra la modelación de componentes no observables y parámetros que cambian en el tiempo, así como la representación de modelos ARIMA y de algunos otros que requieren ser aproximados por máxima verosimilitud.

El filtro es un procedimiento matemático que opera por medio de un mecanismo de predicción y corrección. En esencia este algoritmo pronostica el nuevo estado[2] a partir de su estimación previa añadiendo un término de corrección proporcional al error de predicción, de tal forma que este último es minimizado estadísticamente.

Dentro de la notación estado-espacio, la derivación del filtro de Kalman descansa en el supuesto de normalidad del vector de estado inicial y de las perturbaciones del sistema. De tal forma que es posible calcular la función de verosimilitud sobre el error de predicción con lo cual se lleva a cabo la estimación de los parámetros no conocidos del sistema.

El procedimiento de estimación completo es el siguiente: el modelo es formulado en estado-espacio y para un conjunto inicial de parámetros dados, los errores de predicción del modelo son generados por el filtro. Estos son utilizados para evaluar recursivamente la función de verosimilitud hasta maximizarla.

El documento consta de cinco secciones adicionales. La segunda sección especifica el algoritmo del filtro. La tercera se centra en la notación de los modelos en la forma estado-espacio. La cuarta presenta tanto ventajas como desventajas del filtro. En la quinta se desarrolla la aplicación en Eviews de la notación estado-espacio y el filtro. Por último, en la sexta sección se detallan aplicaciones econométricos en donde se aplica la notación estado-espacio incorporando el filtro de Kalman.

[2] El estado contiene toda la información relativa al sistema a un cierto punto en el tiempo.

2. EL ALGORITMO DISCRETO DEL FILTRO DE KALMAN

El filtro de Kalman consiste en un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva óptima, por el método de mínimos cuadrados. La meta de esta solución consiste en calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado[3] de un sistema en t con base en la información disponible en t-1, y actualizar, con la información adicional disponible en t, dichas estimaciones (Clar et al. 1998). El filtro se desempeña suponiendo que el sistema puede ser descrito a través de un modelo estocástico lineal, en donde el error asociado tanto al sistema como a la información adicional que se incorpora en el mismo tiene una distribución normal con media cero y varianza determinada.

La solución es óptima por cuanto el filtro combina toda la información observada y el conocimiento previo acerca del comportamiento del sistema para producir una estimación del estado de tal manera que el error es minimizado estadísticamente. El término recursivo significa que el filtro recalcula la solución cada vez que una nueva observación o medida es incorporada en el sistema[4].

El filtro de Kalman es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos representados en la forma de estado-espacio En esta representación el sistema es descrito por un conjunto de variables denominadas de estado. El estado contiene toda la información relativa al sistema a un cierto punto en el tiempo. Esta información debe permitir la inferencia del comportamiento pasado del sistema, con el objetivo de predecir su comportamiento futuro.

Lo que hace al filtro tan interesante es precisamente su habilidad para predecir el estado de un sistema en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida. En la práctica, las variables estado individuales de un sistema dinámico no pueden ser exactamente determinadas por una medición directa. Dado lo anterior, su medición se realiza por medio de procesos estocásticos que involucran algún grado de incertidumbre en la medición.

2.1 EL PROCESO A SER ESTIMADO

El filtro de Kalman tiene como objetivo resolver el problema general de estimar el estado $X \in \Re^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto, el cual es dominado por una ecuación lineal en diferencia estocástica de la siguiente forma:

$$X_t = AX_{t-1} + w_{t-1} \qquad (1)$$

con una medida $Z \in \Re^m$, que es

$$Z_t = HX_t + v_t \qquad (2)$$

[3] El estado debe contener la información más relevante del sistema en cada momento del tiempo, tratando de considerar el menor número de variables posible.
[4] En el recuadro No.1 se detalla la relación entre la estimación recursiva y el filtro de Kalman.

Las variables aleatorias w_t y v_t representan el error del proceso y de la medida respectivamente. Se asume que son independientes entre ellas, que son ruido blanco y con distribución de probabilidad normal:

$$p(w) \cong N(0,Q) \qquad (3)$$
$$p(v) \cong N(0,R) \qquad (4)$$

En la práctica las matrices de covarianza de la perturbación del proceso, Q ,y de la perturbación de la medida, R, podrían cambiar en el tiempo, por simplicidad en general se asumen que son constantes.

La matriz A se asume de una dimensión nxn y relaciona el estado en el periodo previo t-1 con el estado en el momento t. La matriz H de dimensión mxn relaciona el estado con la medición Z_t. Estas matrices pueden cambiar en el tiempo, pero en general se asumen como constantes.

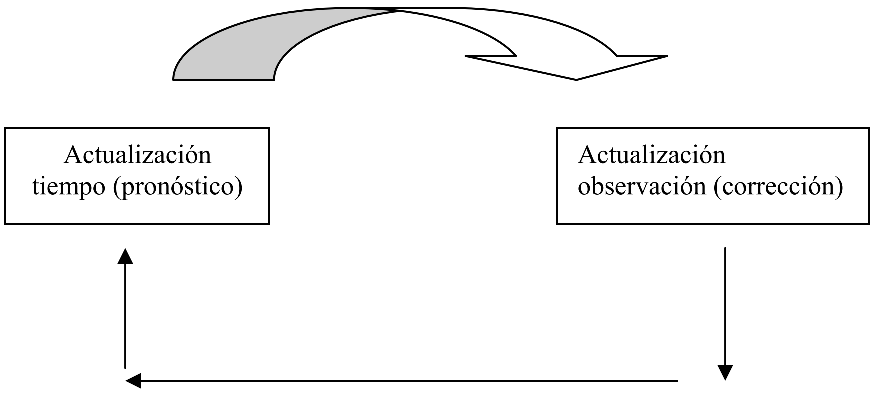
2.2 EL ALGORITMO

El filtro de Kalman estima el proceso anterior utilizando una especie de control de retroalimentación, esto es, estima el proceso a algún momento en el tiempo y entonces obtiene la retroalimentación por medio de los datos observados.

Desde este punto de vista las ecuaciones que se utilizan para derivar el filtro de Kalman se pueden dividir en dos grupos: las que actualizan el tiempo o ecuaciones de predicción y las que actualizan los datos observados o ecuaciones de actualización. Las del primer grupo son responsables de la proyección del estado al momento t tomando como referencia el estado en el momento t-1 y de la actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado. El segundo grupo de ecuaciones son responsables de la retroalimentación, es decir, incorporan nueva información dentro de la estimación anterior con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado.

Las ecuaciones que actualizan el tiempo pueden también ser pensadas como ecuaciones de pronóstico, mientras que las ecuaciones que incorporan nueva información pueden considerarse como ecuaciones de corrección. Efectivamente, el algoritmo de estimación final puede definirse como un algoritmo de pronóstico-corrección para resolver numerosos problemas. Así el filtro de Kalman funciona por medio de un mecanismo de proyección y corrección al pronosticar el nuevo estado y su incertidumbre y corregir la proyección con la nueva medida. Este ciclo se muestra en la figura 1.

Figura 1. El ciclo del filtro de Kalman



El primer paso consiste en generar un pronóstico del estado hacia adelante en el tiempo tomando en cuenta toda la información disponible en ese momento y en un segundo paso, se genera un pronóstico mejorado del estado, de tal manera que el error es minimizado estadísticamente.

Las ecuaciones específicas para el pronóstico y la corrección del estado son detalladas en las tabla 1 y 2, respectivamente.

Tabla 1. Ecuaciones de pronóstico del Filtro de Kalman discreto	
$\hat{X}^{*}{}_{t} = A\hat{X}_{t-1}$	(5)
$P^{*}{}_{t} = AP_{t-1}A^{T} + \mathrm{Q}$	(6)

Note cómo las ecuaciones de la tabla 1 pronostican las estimaciones del estado y la covarianza hacia delante desde t-1 a t. La matriz A relaciona el estado en el momento previo t-1 con el estado al momento actual t, esta matriz podría cambiar para los diferentes momentos en el tiempo (t). Q representa la covarianza de la perturbación aleatoria del proceso que trata de estimar el estado.

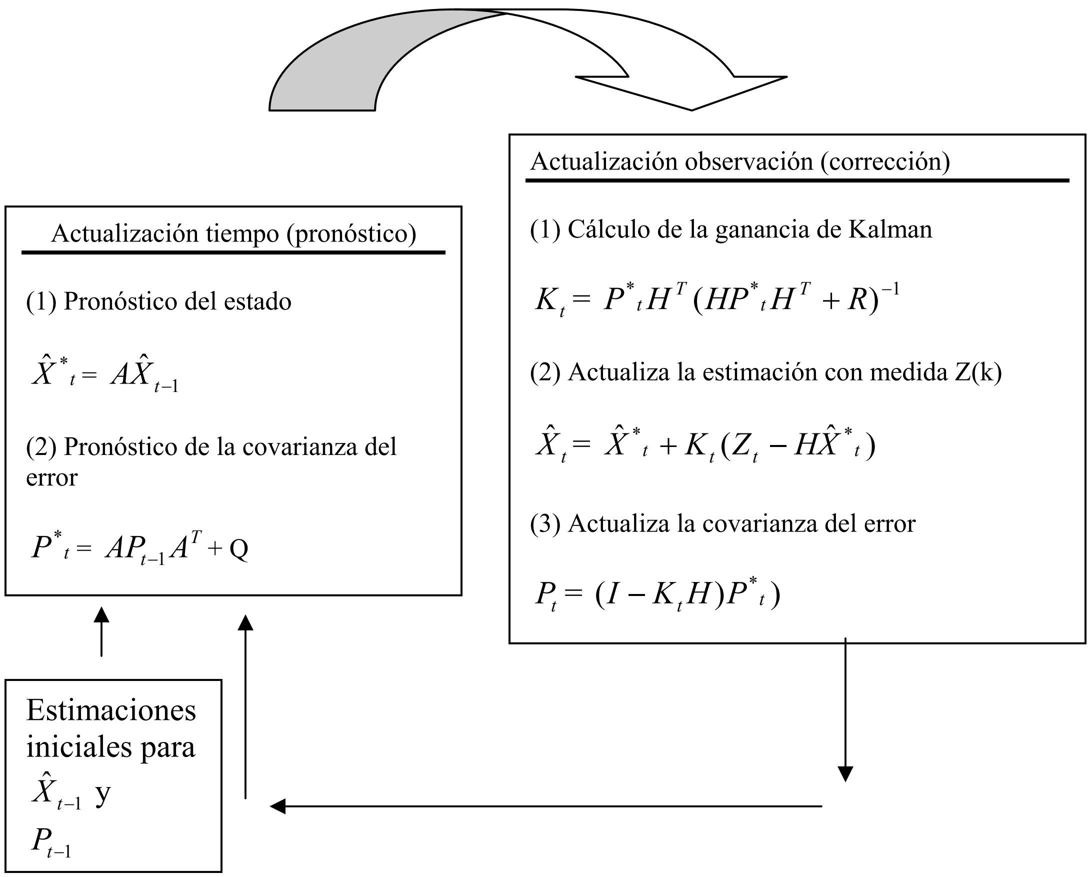
Tabla 2. Ecuaciones de corrección del Filtro de Kalman discreto	
$K_{t} = P^{*}{}_{t} H^{T} (HP^{*}{}_{t} H^{T} + R)^{-1}$	(7)
$\hat{X}_{t} = \hat{X}^{*}{}_{t} + K_{t}(Z_{t} - H\hat{X}^{*}{}_{t})$	(8)
$P_{t} = (I - K_{t}H)P^{*}{}_{t})$	(9)

La primera tarea durante la corrección de la proyección del estado es el cálculo de la ganancia de Kalman, K_{t}, (ecuación 7). Este factor de ponderación o ganancia es seleccionado de tal forma que minimice la covarianza del error de la nueva estimación del estado. El siguiente paso es realmente medir el proceso para obtener Z_t y entonces generar una nueva estimación del estado que incorpora la nueva observación como en la ecuación (8). El paso final es obtener una nueva estimación de la covarianza del error mediante la ecuación (9).

Después de cada par de actualizaciones, tanto del tiempo como de la medida, el proceso es repetido tomando como punto de partida las nuevas estimaciones del estado y de la covarianza del error. Esta naturaleza recursiva es una de las características llamativas del filtro de Kalman.

La figura 2 ofrece un cuadro completo de la operación del filtro, combinando la figura 1 con las ecuaciones de la tabla 1 y 2.

Figura 2. Una visión completa del filtro de Kalman



2.3 EJEMPLO REFERIDO A LA ESTIMACIÓN DE UN ESCALAR[5]

En la sección anterior se presentó la forma básica del filtro de Kalman. Para ayudar a desarrollar un mejor entendimiento de la operación y capacidad del filtro, a continuación se presenta un ejemplo referido a la estimación de un escalar.

Con el objetivo de estimar una constante m se realizan muchas medidas de ella. Sea y una de esas medidas, con y definida como una variable aleatoria con media m y fluctuaciones v.

$$y = m + v \qquad (10)$$

El ruido v tiene media cero y varianza σ^2_v. En una estimación recursiva de m: se supone que se tiene un primera estimación insesgada de m en la forma de una variable aleatoria x_0:

$$x_0 = m + w \qquad (11)$$

El ruido w tiene media cero y varianza σ^2_w. Se realiza un nueva estimación de m, x_1, con la siguiente forma:

$$x_1 = x_0 + k(y - x_0) \qquad (12)$$

Las características específicas de esta corrección son: primero, la nueva estimación es una función lineal de la estimación previa y de la medida; segundo, el estimador anterior y el nuevo estimador son insesgados; y tercero, la nueva estimación es óptima, esto es, el error asociado a la estimación es minimizado estadísticamente. A continuación se desarrolla algebraicamente cuál debe ser el valor que asuma k (ganancia de Kalman) para garantizar que la varianza de la nueva estimación (σ^2_1) es mínima.

Note que el promedio de la nueva estimación es m: reemplazando x_0 y y por sus valores:

$$x_1 = m + w + k(m + v - m - w) \qquad (13)$$
$$x_1 = m + w + k(v - w) \qquad (14)$$
$$E(x_1) = m \qquad (15)$$

La estimación de la varianza del nuevo estimador asume que el ruido v es independiente de x_0, así que la varianza de x_1 es *:*

$$\sigma^2_1 = E(x_1 - m)^2 = E(w + k(v - w))^2 \qquad (16)$$
$$\sigma^2_1 = (1-k)^2 E(w)^2 + k^2 E(v)^2 \qquad (17)$$
$$\sigma^2_1 = (1-k)^2 \sigma^2_w + k^2 \sigma^2_v \qquad (18)$$

[5] Tomado de Le Roux (2003).

Es razonable buscar la estimación de x_1 con baja varianza y calcular el correspondiente k. Para este propósito se escribe:

$$\sigma^2_1 = (1-2k + k^2)\,\sigma^2_w + k^2\sigma^2_v \tag{19}$$
$$\sigma^2_1 = \sigma^2_w - 2\,k\sigma^2_w + k^2(\sigma^2_w + \sigma^2_v) \tag{20}$$

donde se muestra un término constante y una función cuadrática de k

$$\sigma^2_1 = \sigma^2_w - \beta^2 + (\beta - k\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_v^2}\,)^2 \tag{21}$$
$$\sigma^2_1 = \sigma^2_w - 2\beta k\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_v^2} + k^2(\sigma^2_w + \sigma^2_v) \tag{22}$$

consecuentemente

$$\beta = \frac{\sigma_w^2}{\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_v^2}} \tag{23}$$

$$\sigma^2_1 = \sigma^2_w - \frac{\sigma_w^4}{\sigma_w^2 + \sigma_v^2} + \left(\frac{\sigma_w^2}{\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_v^2}} - k\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_v^2}\,\right)^2 \tag{24}$$

El mínimo de σ^2_1 es obtenido para

$$k = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_w^2 + \sigma_v^2} \tag{25}$$

El valor de esta minimización es

$$\sigma^2_1 = \sigma^2_w - \frac{\sigma_w^4}{\sigma_w^2 + \sigma_v^2} \tag{26}$$

$$\sigma^2_1 = \frac{\sigma_w^2\sigma_v^2}{\sigma_w^2 + \sigma_v^2} \tag{27}$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1}{\sigma_w^2} + \frac{1}{\sigma_v^2} \tag{28}$$

Note que cuando la varianza σ^2_w de la estimación previa del estado es muy grande, la varianza de la nueva estimación del estado se reduce a la varianza de la nueva medida, esto es, σ^2_v.

RECUADRO No. 1 ESTIMACIÓN RECURSIVA Y EL FILTRO DE KALMAN[6]

El concepto de regresión de mínimos cuadrados se asocia por una parte con Legendre (1752-1833), quien fue el primero en publicar la teoría en 1805 y fue quien acuñó el término mínimos cuadrados[7]. Sin embargo, fue Gauss (1777-1855) quien desarrolló el método como un instrumento estadístico incorporando los mínimos cuadrados en un contexto en el que se da un tratamiento probabilístico a los errores de observación.

La primera exposición del método de mínimos cuadrados por Gauss[8], está ligada con la estimación de seis coeficientes para determinar la órbita elíptica de un cuerpo planetario, cuando las observaciones disponibles exceden el número de parámetros. La segunda exposición fue presentada en una serie de documentos publicados en 1821, 1823 y 1826, recogidos bajo el título Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae (1823), donde presenta el famoso teorema que afirma que entre todos los estimadores lineales insesgados, los estimadores de mínimos cuadrados tienen el menor error cuadrático medio. Lo anterior es conocido como el teorema de Gauss-Markov.

La relevancia de la segunda exposición de Gauss para la teoría de estimación de mínimos cuadrados recursivos y para el concepto del filtro de Kalman se encuentra en un breve párrafo donde Gauss muestra que es posible detectar los cambios más probables de un evento desconocido cuando una nueva ecuación es incorporada y determinar los pesos de estas nuevas determinaciones. En efecto, Gauss desarrolló el algoritmo de estimación de mínimos cuadrados recursivos.

El algoritmo[9] de Gauss fue ignorado por alrededor de siglo y medio antes de que fuera redescubierto en dos ocasiones separadas. El primer redescubridor fue Plackett[10] en 1950, lo cual fue antes de la gran revolución observada en la computación y también pasó inadvertido. El segundo redescubridor del algoritmo recursivo fue R.E. Kalman[11] en 1960 en el contexto de la teoría del control[12]. A partir del documento de Kalman (1960)y Kalman y R. Bucy (1961)[13], donde describen una solución recursiva para el problema de filtrado lineal de datos discretos, este algoritmo ha presentado una extensa investigación y aplicación.

La exposición de Plackett del algoritmo de mínimos cuadrados recursivos se desarrolla en un esquema algebraico que involucra solamente los conceptos estadísticos de los modelos de regresión lineal clásicos. La derivación de Kalman fue dentro de un amplio contexto de modelo estado-espacio con parámetros que cambian en el tiempo. Así, el núcleo del filtro de Kalman es todavía el algoritmo de Gauss-Plackett de estimación de mínimos cuadrados recursivos, pero en un contexto donde la extensión y la complejidad del

---

[6] Tomado de D.S.G. Pollock, The Kalman Filter.
[7] Legendre, A.M., Nouvelles Méthodes pour la Determination des Orbites des Cométes, 1805.
[8] Gauss, K.F., Theoria Motus Corporum Celestium, 1809.
[9] Se entiende por algoritmo un conjunto específico de instrucciones para resolver un procedimiento o problema, usualmente con el requerimiento de que el procedimiento termina en algún punto. Algoritmos específicos algunas veces son denominados como método, procedimiento o técnica. La palabra algoritmo es una deformación de "al-Khwarizmi", un matemático persa quien escribió un tratado importante acerca de métodos algebraicos.
[10] Plackett, R. L., Some Theoremas in Least Squares, Biometrika, 37, pp 149-157, 1950
[11] Kalman, R.E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME,J. Basic Engineering, vol 82, March 1960, pp 94-35.
[12] Es el estudio matemático de cómo la manipulación de parámetros afectan el comportamiento de un sistema para producir el resultado óptimo o deseado.
[13] Kalman,R.E., and R:S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME, J. Basic Engineering, vol 83, pp 95-107, 1961.

álgebra es más amplio. Kalman basó la construcción del filtro sobre la base de la teoría de probabilidad, y más específicamente, sobre las propiedades de condicionalidad Gaussiana de variables aleatorias. El criterio que propuso fue minimizar la norma de la matriz de covarianza del vector estado, generando la clásica recursión: la estimación del nuevo estado es deducido desde la estimación previa añadiendo un término de corrección proporcional al error de predicción.

A partir del documento original de Kalman, muchas otras derivaciones han surgido. La mayoría de éstas intentan reducir la terminología a alguna cosa cercana a la teoría ordinaria de regresión de mínimos cuadrados. Otras han surgido desde una función de máxima verosimilitud o desde un punto de vista Bayesiano. Lo cierto es que el filtro de Kalman es un tema complejo. Su derivación, por cualquier método, es extensa y sus ecuaciones difíciles. No obstante, es esta complejidad lo que le da al filtro de Kalman su enorme poder, para resolver un amplio rango de problemas en inferencia estadística.

3. EL FILTRO DE KALMAN Y LA NOTACIÓN ESTADO-ESPACIO

El filtro de Kalman es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos especificados en la forma de estado-espacio (State-Space). Tanto es así que modelos estado-espacio y modelos del filtro de Kalman son frecuentemente utilizados como sinónimos. Los modelos estado-espacio son esencialmente una notación conveniente para abordar el manejo de un amplio rango de modelos de series de tiempo. En la estimación y control de problemas esta metodología se basa en modelos estocásticos, dado el supuesto de la naturaleza errónea de las mediciones.

La representación estado-espacio de un sistema lineal captura la dinámica de un vector Z_t de orden nx1 en términos de un posible vector no observado X_t de orden *mx1* conocido como vector de estado.

Los modelos estado-espacio tienen muchas aplicaciones econométricas y algunas veces son denominados modelos de series de tiempo estructurales, dado que pueden ser constituidos de una forma particular imponiendo restricciones en alguno de sus parámetros naturales.

Entre los usos particulares de los modelos estado-espacio se encuentra la modelación de componentes no observables, que pueden incluir variables latentes tales como el ciclo económico, la tasa natural de crecimiento de la población o expectativas inflacionarias. También permiten organizar o fijar modelos con parámetros que cambian en el tiempo, los cuales son muy útiles cuando se analizan cambios estructurales, por ejemplo realizar estimaciones de la persistencia inflacionaria.

Aparte de lo anterior, estos modelos son usados para estimar modelos ARIMA y algunos otros modelos que requieren ser aproximados por máxima verosimilitud. En estos modelos la estimación de la magnitud y conducta de las variables en el tiempo se realiza por medio del algoritmo de Kalman.

En la formalización de la notación estado-espacio un modelo puede reescribirse en términos de una ecuación de proceso o estado[14] y de una ecuación de medida u observación.

La ecuación de proceso asume la siguiente forma:

$$X_{t+1} = \Phi_t X_t + w_t \qquad (29)$$

donde:
X_{t+1} representa el vector de estado en t+1. El vector de estado debe contener la información más relevante del sistema en cada momento del tiempo, tratando de considerar el menor número de variables. En general los elementos del vector de estado no son observables.

Φ_t es la matriz de transición del vector de estado en t, la cual determina los vectores de estado siguientes. Esta matriz podría cambiar en el tiempo con lo que en t+1 se tendría otra matriz y así sucesivamente.

[14] También llamada ecuación de transición o del sistema.

X_t representa el vector de estado al momento t

w_t representa el error en la ecuación de proceso al momento t. Usualmente se asume que es independiente y distribuido normalmente con media cero.

Así, en el problema de estimar modelos representados en estado-espacio utilizando el algoritmo del filtro de Kalman, las ecuaciones de pronóstico de éste (tabla 1) se transforman en la ecuación de proceso o estado.

Por su parte las ecuaciones de corrección (tabla 2) se transforman en la ecuación de medida u observación en la notación estado-espacio, que asume la siguiente forma en t:

$$Z_t = M_t X_t + v_t \qquad (30)$$

o en t+1

$$Z_{t+1} = M_{t+1} X_{t+1} + v_{t+1} \qquad (31)$$

donde

Z_{t+1} es la medida del proceso u observación derivada desde el vector de estado interno en t+1

M_{t+1} es la matriz que relaciona los vectores de estado del sistema con las medidas

X_{t+1} representa el vector de estado en t+1

v_{t+1} es el error asociado a la medida, se asume independiente y con distribución normal con media cero.

La ecuación (29) indica que el nuevo vector de estado es modelado como una combinación lineal del vector de estado anterior y de algún proceso de error. Por su parte, la ecuación (30) describe cómo las medidas u observaciones son derivadas desde los vectores de estado internos. Estas ecuaciones sirven de base para la mayoría de métodos de estimación lineal, tales como el filtro de Kalman, descrito arriba.

La representación estado-espacio requiere de dos supuestos adicionales: el vector de estado inicial posee un media y varianza conocida y además, las perturbaciones w_t y v_{t+1} no están correlacionadas entre ellas ni con el estado inicial.

El sistema conformado por la ecuación (29) y (31) es lineal, en cada momento t y Z_{t+1} puede ser expresado como una combinación lineal de los valores presentes y pasados de w_t y v_{t+1} y del vector de estado inicial.

En la representación estado-espacio, por medio del filtro de Kalman, se calcula, a través de un procedimiento recursivo, el estimador óptimo del vector de estado en cada momento t basado en la información disponible hasta dicho momento. Este estimador es óptimo en el sentido que minimiza el error cuadrático medio.

La derivación del filtro de Kalman descansa en el supuesto de normalidad del vector de estado inicial y de las perturbaciones. De tal forma que es posible calcular la función de verosimilitud sobre el error de predicción, lo que permite llevar a cabo la estimación de los parámetros no conocidos del sistema. La violación del supuesto de normalidad conlleva a no poder garantizar que el filtro produzca la media condicional del vector de estado. Sin embargo, el estimador sigue siendo óptimo dentro de los estimadores lineales.

Entre las ventajas de la modelación estado-espacio se apuntan que permite un completo control sobre la dinámica del modelo y no lleva a una pérdida de generalidad dado que las variables pueden ser definidas con rezagos o adelantos. Por otra parte, realiza una separación de las fuentes de errores y por ello permite que la parte estocástica del modelo tenga diferentes efectos. La interpretación de w_t y v_t son importantes. El último es esencialmente el error de medida, mientras que w_t es descrito como la señal y define el comportamiento estocástico de la parte del modelo que cambia a través del tiempo.

Un modelo dinámico lineal puede tener muchas representaciones equivalentes, considere la siguiente:

$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (32)$$

El modelo de la ecuación (32) bajo el método de estado-espacio puede escribirse así:

$$X_t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix},\ \Phi_t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ W_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix},\ M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ V_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otro puede ser derivado desde

$$T_t = T_{t-1} + \varepsilon_t\ ,\ Y_t = y_{t-1} + T_t \qquad (33)$$

$$X_t = \begin{bmatrix} y_t \\ T_t \end{bmatrix},\ \Phi_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ W_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix},\ M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ V_t = 0$$

Ejemplo para un proceso de medias móviles de primer orden:

$$y_t = \varepsilon_t + \Theta\varepsilon_{t-1} \qquad (34)$$

$$X_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix},\ \Phi_t = \begin{bmatrix} 0 & \Theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ W_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix},\ M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ V_t = 0$$

4. EL FILTRO DE KALMAN: VENTAJAS Y DESVENTAJAS

En este punto es relevante realizar la diferencia de este filtro en relación con el filtro de Hodrick-Prescott y el de Baxter-King. Estos últimos constituyen una herramienta útil para el análisis de los ciclos económicos y de extracción de tendencia. En Flores (1998) y Muñoz et al (1994) se expone la técnica del filtro de Baxter-King y la de Hodrick-Prescott, respectivamente. Por su parte, el filtro de Kalman consiste en un conjunto de ecuaciones que proveen una solución recursiva óptima, por el método de mínimos cuadrados, para un sistema dinámico lineal.

4.1 VENTAJAS

Evita la influencia de posibles cambios estructurales en la estimación. La estimación recursiva parte de una muestra inicial y actualiza las estimaciones incorporando sucesivamente una nueva observación hasta cubrir la totalidad de los datos. Lo anterior lleva a que la estimación más reciente de los coeficientes esté afectada por la historia lejana de la serie, lo cual en presencia de cambios estructurales podría sesgarla. Este sesgo se puede corregir con las estimaciones secuenciales[15] pero al costo de un mayor error estándar. Así el filtro de Kalman, como los métodos recursivos, utiliza toda la historia de la serie pero con la ventaja de que intenta estimar una trayectoria estocástica de los coeficientes en lugar de una determinística[16], con lo cual soluciona el posible sesgo de la estimación ante la presencia de cambios estructurales.

El filtro de Kalman utiliza el método de mínimos cuadrados para generar recursivamente un estimador del estado al momento k , que es lineal, insesgado y de varianza mínima. El filtro está en línea con el teorema de Gauss-Markov y esto le da al filtro de Kalman su enorme poder, para resolver un amplio rango de problemas en inferencia estadística.

El filtro se distingue por su habilidad para predecir el estado de un modelo en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida.
La modelación dinámica de un sistema es una de las características claves que distingue el método de Kalman. Los modelos lineales dinámicos son modelos con una transición lineal desde un periodo al próximo, los cuales pueden describir la mayoría de los modelos comúnmente utilizados en trabajos de series de tiempo.

---

[15] Dada una serie de tiempo para la cual se dispone de T observaciones, la estimación secuencial de un modelo es simplemente una sucesión de estimaciones para el conjunto de muestras de tamaño n, tal que la primera muestra contiene las observaciones desde la 1 hasta la n, la siguiente desde la 2 hasta la n+1, y así sucesivamente hasta la última muestra desde la observación T-n+1 hasta T (con n<T). Esto implica una secuencia de T-n+1 estimadores asociados al modelo en estudio. Lo anterior permite un análisis exploratorio de la evolución de cualquier estadístico asociado al modelo. Por ejemplo, si T=50 y n=20 se construirán un total de 31 estimaciones secuenciales. La estimación secuencial mantiene constante el tamaño de la muestra.

[16] Las estimaciones secuenciales realizan las estimaciones para ventanas de tamaño n. Cuando se requiere comparar estas estimaciones con las obtenidas por el filtro de Kalman, la estimación de una ventana se asigna al último mes del periodo correspondiente, dado que el filtro de Kalman ubica el coeficiente estimado en el mes de la última observación incorporada en la muestra.

4.2 DESVENTAJAS

Entre las desventajas del filtro se menciona que requiere condiciones iniciales de la media y varianza del vector estado para iniciar el algoritmo recursivo. Sobre la forma de determinar estas condiciones iniciales no existe consenso. Por ejemplo, en un enfoque bayesiano este filtro requiere que se especifiquen a priori valores de los coeficientes iniciales y de sus respectivas varianzas. Una forma puede ser obtener esa información a partir de la estimación de un modelo similar al deseado pero con coeficientes fijos para un subperiodo muestral. Por otra parte, es necesario especificar las varianzas para lo cual Doan, Litterman y Sims (1984) sugieren varianzas muy pequeñas y proporcionales en relación con las obtenidas para los coeficientes iniciales.

El desarrollo del filtro de Kalman, tal como se encuentra en el documento original, supone un conocimiento amplio en teoría de probabilidades, específicamente con el tema de la condicionalidad gaussina en las variables aleatorias, lo cual puede originar una limitante para su estudio y aplicación.

Cuando se desarrolla para modelos autorregresivos los resultados están condicionados a la información pasada de la variable en cuestión. En este sentido el pronóstico con series de tiempo representa la fuerza o inercia que actualmente presenta el sistema y son eficientes únicamente en el corto plazo.

5. MODELOS ESTADO-ESPACIO Y EL FILTRO DE KALMAN: APLICACIÓN EN EVIEWS

En Eviews 4.1 el primer paso en la especificación y estimación de modelos estado-espacio es la creación del objeto estado-espacio. Se selecciona Objects/New Object/Sspace desde la barra principal de herramientas. Eviews crea un objeto estado-espacio y abre una ventana vacía para la especificación del modelo estado-espacio.

Existen dos formas para especificar el modelo. La primera es utilizando “auto-specificacion” que se caracteriza por suministrar ventanas para la creación de formas estándar de estos modelos. Simplemente se presiona Autospec sobre la barra de herramientas del Sspace, un diálogo especializado guiará la especificación del preceso. [17]

El método más general en la especificación de estos modelos utiliza palabras claves y texto para describir la ecuaciones de observación o medida, las ecuaciones de estado o proceso, la estructura de los errores, las condiciones iniciales y también, cuando se desee, los valores iniciales de los parámetros de la estimación.

La sintaxis de la ecuación de estado contiene la palabra clave “@STATE” seguida por una especificación válida. La especificación debe tener en cuenta lo siguiente:

---

[17] Para más detalles de la instrucción AutoSpec ver capítulo 22, State Space Models and the Kalman Filter del manual de Eviews.

1) Cada ecuación debe tener sólo el nombre de una variable dependiente, expresiones algebraicas no son permitidas.
2) No pueden contener variables dependientes de la ecuación de observación ni adelantos ni rezagos de esas variables.
3) Cada ecuación debe ser lineal en los rezagos de un periodo de los estados. La no linealidad en los estados o la presencia de estados contemporáneos, adelantados o rezagados en varios periodos genera mensajes de error. La restricción de rezagos de un periodo sobre los estados no es restrictiva dado que un mayor orden de rezagos pueden ser escritos como nuevas variables estado.
4) Pueden contener variables exógenas o coeficientes desconocidos y pueden ser no lineales en esos elementos.

También, las ecuaciones de estado pueden contener una especificación para la varianza del error o para el error. Si no existe varianza del error o error, la ecuación de estado es asumida como determinística. Las siguientes dos ecuaciones de estado (SV1 y SV2) definen un error no observable con un proceso AR(2):

```
@state sv1 = c(2) *sv1(-1) + c(3) *sv2(-1) + [var = exp(c(1))]
@state sv2 = sv1(-1)
```

La primera ecuación parametriza el AR(2) por medio de SV1 en términos de un coeficiente AR(1), C(2), y un coeficiente AR(2), C(3). La especificación de la varianza del error es dada en paréntesis cuadrados. Note que la ecuación de estado para SV2 se define como el rezago de SV1, así que SV2(-1) es el rezago de dos periodos de SV1.[18]

Cuando una ecuación no es identificada expresamente como de estado por medio de "@STATE", Eviews la considera como ecuación de observación. Estas ecuaciones pueden también identificarse explícitamente por medio de "@SIGNAL". Los siguientes aspectos deben tomarse en cuenta en su especificación:

1) Las variables dependientes pueden contener expresiones algebraicas.
2) No pueden contener valores actuales o adelantos de las variables observables.
3) Deben ser lineales en los estados contemporáneos. La no linealidad en los estados o la presencia de adelantos o rezagos de los estados genera un mensaje de error.
4) Pueden tener variables exógenas o coeficientes desconocidos y pueden ser no lineales en esos elementos.

Las ecuaciones de observación pueden contener también un error o una especificación de la varianza del error. Si estos últimos no existen, la ecuación es asumida como determinística.

Algunas expresiones válidas para esta ecuación se detallan a continuación:

```
@signal log(passenger) = c(1) + c(3) X + sv1+c(4) *sv2
@signal y = sv1+ sv2*X1+sv3*y(-1)+ c(1)+ [var=exp(c(1))]
```

[18] Otras expresiones válidas y no válidas se pueden observar en el capítulo 22, pag. 565, Specifying a State Space Model in Eviews, Manual de Eviews.

La especificación de las ecuaciones en el objeto estado-espacio maneja de una forma particular los términos de error. Mientras que Eviews siempre adiciona un término de error para cada ecuación o sistema de objetos, las ecuaciones de estado o de observación en estado-espacio no contienen un término de error al menos que se especifique explícitamente. El término de error debe ser añadido, entre paréntesis cuadrados, al final de la especificación de la ecuación.

La forma más fácil de añadir un error en las ecuaciones de estado-espacio es especificando la varianza del término de error. Se añade una expresión de error con la expresión “VAR” seguida de una expresión que define la varianza. Esta última expresión puede ser un valor constante conocido o puede ser una expresión conteniendo parámetros desconocidos que deben ser estimados. Este método directo de especificar la varianza no permite la correlación entre los errores de las diferentes ecuaciones. Eviews asume que la covarianza entre los términos de error es cero.[19]

Por defecto Eviews inicializará todos los parámetros con los valores actuales en el correspondiente vector de coeficientes o vectores. Sin embargo, esto puede cambiarse especificando explícitamente los valores deseados de los parámetros usando la expresión PARAM o @PARAM.

También, por defecto Eviews maneja las condiciones iniciales de los estados. Para algunos modelos estacionarios, las condiciones de largo plazo permiten resolver para la media y la varianza del estado. Para los casos donde no es posible lo anterior, Eviews trata los valores iniciales como difusos, fijando la media en cero y la varianza como un número arbitrariamente alto que refleje la incertidumbre acerca del valor.

6. MODELOS ESTADO-ESPACIO Y EL FILTRO DE KALMAN: APLICACIONES ECONOMÉTRICAS

Como se mencionó en secciones anteriores los modelos estado-espacio tienen muchas aplicaciones econométricas. Entre los usos más particulares se encuentran la estimación de modelos ARIMA, la modelación con parámetros que cambian en el tiempo y la modelación de componentes no observables.

[19] Cuando se tiene una especificación que permite la correlación entre los errores se requiere utilizar la metolología denominada “named error” para especificar la relación. Ver Capítulo 22, pag. 567, Specifying a State Space Model in Eviews, Manual de Eviews.

A continuación se describen un conjunto de aplicaciones identificadas dentro de la bibliografía revisada. La descripción se limita a plantear el problema económico a resolver, su representación en la notación estado-espacio y cómo plantear la ecuación de estado y medida en Eviews para realizar la estimación. La presentación de los resultados particulares de cada aplicación sobrepasan los alcances de este documento[20]. Sin embargo, se hace una excepción en el modelo AR(2) para la tasa interanual del IMAE y en la estimación de la persistencia inflacionaria en Venezuela en donde de detallan algunos resultados.

6.1 MODELOS AUTORREGRESIVOS DE SERIES DE TIEMPO

Una manera simple de ilustrar los modelos estado-espacio y su estimación por medio del algoritmo de Kalman, es partir de un modelo autorregresivo de series de tiempo del tipo ARIMA.

Un modelo AR(2) para la tasa interanual de crecimiento del IMAE se puede escribir de la siguiente forma[21]:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0;\sigma_\varepsilon^2) \qquad (35)$$

La estimación por medio de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) se presenta en la tabla 3.

Tabla 3: AR(2) estimación por MCO

Dependent Variable: IMAEIN
Method: Least Squares
Date: 04/15/03 Time: 08:22
Sample(adjusted): 1991:03 2003:02
Included observations: 144 after adjusting endpoints
IMAEIN=C(1)+C(2)*IMAEIN(-1)+C(3)*IMAEIN(-2)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.989355	0.357957	2.763896	0.0065
C(2)	0.584264	0.082216	7.106453	0.0000
C(3)	0.203306	0.082223	2.472628	0.0146

R-squared	0.557919	Mean dependent var	4.608695
Adjusted R-squared	0.551648	S.D. dependent var	4.081712
S.E. of regression	2.733077	Akaike info criterion	4.869347
Sum squared resid	1053.229	Schwarz criterion	4.931218
Log likelihood	-347.5930	Durbin-Watson stat	2.072629

Alternativamente (35) puede escribirse en la forma estado-espacio como sigue:

$$X_t = \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \alpha_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t-1} \\ \alpha_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_t \qquad (36)$$

[20] En cada aplicación se hace referencia al documento respectivo para que el lector interesado pueda profundizar en el tema.

[21] Esta aplicación es tomada de Blake(2002) y adaptada para la variación interanual de la tasa de crecimiento del IMAE del periodo 1991:01-2002:03.

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \alpha_{t-1} \end{bmatrix} \tag{37}$$

Las ecuaciones del modelo estado-espacio son:

$$\alpha_t = \phi_1\alpha_{t-1} + \phi_2\alpha_{t-2} + \varepsilon_t \tag{38}$$
$$\alpha_{t-1} = \alpha_{t-1} \tag{39}$$
$$y_t = \alpha_t \tag{40}$$

La ecuación (38) es el modelo AR(2) pero definido en términos de las variables estado. La ecuación (39) es una "dummy", la cual es requerida para organizar los valores rezagados del estado. La ecuación (40) es la de observación y es la que iguala a la variable dependiente a uno de los estados.

El modelo estado-espacio de la ecuación (38) y (39) se puede escribir en Eviews de esta forma:

```
param c(1) -1.0 c(2) 0.0 c(3) 0.0 c(4) 0.0
@signal imaein = sv1
@state sv1 = c(4)+c(2)*sv1(-1) + c(3)*sv2(-1) + [var = exp(c(1))]
@state sv2 = sv1(-1)
```

De las dos ecuaciones de estado (sv1 y sv2), la segunda es la ecuación dummy, y la primera incluye una constante como en el modelo AR(2) de la tabla 3. El término asociado con la varianza es el exponencial de un parámetro, c(1). Lo anterior para asegurarse una varianza positiva del término de error, pero esto tiene el costo de introducirle una substancial no linealidad al modelo. Los parámetros son inicializados en cero, excepto para la varianza, el cual es arbitrariamente fijada en menos de la unidad.

Los resultados están dados en la tabla 4. El error estándar estimado de la regresión es $\sqrt{e^{1.9852}}$ el cual es 2.698, menor al obtenido por MCO. Como se trata de un proceso de máxima verosimilitud no se tiene los estadísticos "t" para los coeficientes, en vez de eso se reporta el estadístico "Z", el coeficiente dividido entre el error estándar asintótico.

En el modelo anterior (ecuaciones 38 y 39) los estados pueden ser interpretados como variables del sistema, por ejemplo $y_t = \alpha_t$ y $y_{t-1} = \alpha_{t-1}$ y así sucesivamente para sistemas de un orden mayor.

El ejercicio desarrollado, aunque sencillo, sirve para introducir las ideas de estado-espacio en varias formas. Primero, el ejercicio ilustra cómo un sistema de ecuaciones de primer orden describe adecuadamente la dinámica de un sistema de orden mayor. Lo anterior es esencial para la noción completa de estado, el cual se define aproximadamente como la cantidad de información requerida para determinar completamente la dinámica del comportamiento del sistema. Segundo, el ejercicio muestra cómo la analogía entre la estimación estado-espacio y un modelo de regresión necesita ser cuidadosamente calificada, por cuanto para un modelo estático el término de error es esencialmente un ruido, mientras que para un modelo dinámico es una señal.

Tabla 4: AR(2) estimación modelando con state space

Sspace: KALMAN3
Method: Maximum likelihood (BHHH)
Date: 04/16/03 Time: 13:05
Sample: 1990:01 2003:02
Included observations: 158
Valid observations: 146
Estimation settings: tol= 0.00010, derivs=accurate numeric
Initial Values: C(1)=-1.00000, C(2)=0.00000, C(3)=0.00000, C(4)=0.00000
Failure to improve Likelihood after 96 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	1.985211	0.115882	17.13133	0.0000
C(2)	0.561178	0.071903	7.804649	0.0000
C(3)	0.215691	0.081771	2.637735	0.0083
C(4)	1.047700	0.370904	2.824724	0.0047
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	4.578879	2.698255	1.696978	0.0897
SV2	4.183302	0.000000	NA	0.0000

Log likelihood	-352.3602	Akaike info criterion	4.881646
Parameters	4	Schwarz criterion	4.963389
Diffuse priors	0	Hannan-Quinn criter.	4.914860

Para el caso de un ARMA(1,1) de la forma:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \qquad (41)$$

podría ser representado en estado-espacio como:

$$X_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi & \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon_t \qquad (42)$$

$$y_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ y_t \end{bmatrix} \qquad (43)$$

En Eviews este modelo se escribe como:

```
@signal imaein = sv1+C(3)*sv2
@state sv1 = c(2)*sv1(-1)+ [var = exp(c(5))]
@state sv2 = sv1(-1)
```

El coeficiente AR es parametrizado en términos del coeficientes C(2), mientras que el coeficiente MA está dado por C(3).

6.2 MODELOS CON PARÁMETROS QUE CAMBIAN EN EL TIEMPO

Este tipo de aplicación es muy útil cuando se supone que las series pueden estar influidas por la presencia de cambios estructurales.

Un ejemplo de estimación con parámetros que cambian en el tiempo es el propuesto por Haldane y Hall(1991). Ellos deseaban investigar la polarización de la tasa de cambio dentro de la Comunidad Europea previo al comienzo de la Unión Monetaria. La relación se planteó de la siguiente forma:

$$(\$/Ł)_t = \phi_t + \Theta_t(DM/\$)_t + \eta_t \qquad (44)$$

donde la tasa de cambio del dólar por la libra y la del marco por dólar se asume determinada por una relación lineal que cambia en el tiempo. Haldane y Hall definieron el siguiente sistema de ecuaciones para los parámetros:

$$\begin{bmatrix} \phi_t \\ \Theta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{t-1} \\ \Theta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \qquad (45)$$

$$(\$/£)_t = \begin{bmatrix} 1 & DM/\$t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_t \\ \Theta_t \end{bmatrix} + \eta_t \qquad (46)$$

donde tanto ϕ como Θ pueden variar. Además, ambos coeficientes se supone son caminos aleatorios. En este modelo los coeficientes que cambian en el tiempo son las variables estado.

En Eviews este modelo estado-espacio puede escribirse de la siguiente forma:

```
@signal dollib= sv1+sv2*mardol+[var = exp(c(5))]
@state sv1 = c(1)*sv1(-1)+ [var = exp(c(2))]
@state sv2 = c(3)*sv2(-1)+ [var = exp(c(4))]
```

donde ϕ = sv1 y Θ =sv2, dollib es la tasa de cambio dólares-libra y mardol es la tasa de cambio marcos-dólares.

Otro ejemplo de modelación con parámetros que varían en el tiempo se encuentra en Alvarez et al. (2000), donde el objetivo es realizar una estimación de la persistencia inflacionaria para

Venezuela[22]. En este estudio la persistencia se infiere de un modelo dinámico de estado-espacio, empleando el filtro de Kalman. Para ello especifican un modelo que permite inferir la evolución de la persistencia inflacionaria mediante un proceso autorregresivo de primer orden con coeficientes variables en el tiempo y que pueden, a su vez, estar relacionados a otras variables, de la siguiente forma:

$$\Delta p_t = \alpha_t + \beta_t \Delta p_{t-1} + \delta \Delta m_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (47)$$

donde p es el logaritmo del IPC y m es el logaritmo de la liquidez monetaria.

La representación de estado-espacio compatible con la ecuación (47) toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \delta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_t \\ \upsilon_t \\ \omega_t \end{bmatrix} \qquad (48)$$

$$\Delta \mathrm{p}_t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta p_{t-1} & \Delta m_{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t \qquad (49)$$

El proceso estocástico que describe a los coeficientes (α, β, δ), los vectores de estado, se ha restringido a un camino aleatorio, implicando que las perturbaciones a los coeficientes se mantienen indefinidamente y se suponen no correlacionados serialmente ni contemporáneamente.

En Eviews este modelo estado-espacio podría escribirse de la siguiente forma:

@signal IPC= sv1+sv2*IPC$_{t-1}$+sv3*Mon$_{t-1}$+[var = exp(c(4))]
@state sv1 = sv1(-1)+ [var = exp(c(1))]
@state sv2 = sv2(-1)+ [var = exp(c(2))]
@state sv3 = sv2(-1)+ [var = exp(c(3))]

[22] En el recuadro No.2 se resumen los resultados de este estudio.

RECUADRO No. 2: PERSISTENCIA INFLACIONARIA EN VENEZUELA: ESTIMACIÓN MEDIANTE EL FILTRO DE KALMAN [23]

Un método que permite inferir la evolución de la persistencia inflacionaria es la estimación de un modelo dinámico de estado-espacio empleando el filtro de Kalman. Entre otras ventajas, esta técnica permite incluir y estimar variables no observables en el modelo (Hamilton, 1994). La representación de estado-espacio compatible con la ecuación (47) de la sección 6.2 para bienes, servicios o general, toma la siguiente forma:

$$\Delta p_t = \alpha_t + \beta_t \Delta p_{t-1} + \delta \Delta m_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \delta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_t \\ \upsilon_t \\ \omega_t \end{bmatrix}$$

donde p es el logaritmo del IPC y, m es el logaritmo de la liquidez monetaria.

Como puede observarse, el proceso estocástico que describe a los coeficientes (α_t, β_t, δ_t) vector de estado se ha restringido a un camino aleatorio, implicando que las perturbaciones a los coeficientes se mantienen indefinidamente. La incorporación de la liquidez monetaria rezagada un periodo, permite controlar que la estimación del coeficiente variable que mide la persistencia inflacionaria no se vea afectado por la posible influencia que la liquidez pudiera tener sobre el comportamiento de la inflación. Los términos de perturbación ε_t, ν_t, υ_t y ω_t se suponen no correlacionados serialmente ni contemporáneamente.

En un enfoque bayesiano, el algoritmo de Kalman requiere que se especifiquen a priori valores de los coeficientes iniciales y de sus respectivas varianzas. En este caso, tal información fue obtenida mediante el ajuste de un modelo similar al (47) pero con coeficientes fijos correspondientes a un periodo muestral centrado. Por otra parte, se especifican varianzas muy pequeñas y proporcionales en relación con las obtenidas para los coeficientes iniciales ($\tau = 0.001$) para la varianza de ν_t, υ_t y ω_t. La estimación se realizó individualmente para el nivel general, de bienes y de servicios, obteniéndose los resultados reportados en el siguiente cuadro.

Estimación de la Persistencia Inflacionaria Mediante el Filtro de Kalman
para la Inflación General y sus Componentes de Bienes y Servicios
(enero de 1984 a diciembre de 1999)

	α(*)	β(*)	δ(*)	R^2 ajustado	DW
General	0.009 (5.37)	0.682 (10.98)	0.014 (0.62)	0.45	1.88
Bienes	0.010 (6.65)	0.630 (10.78)	0.005 (0.20)	0.34	1.88
Servicios	0.008 (6.07)	0.710 (13.77)	0.015 (0.97)	0.57	2.27

(*) coeficientes al final del periodo (diciembre 1999)
Valores entre paréntesis corresponden al estadístico t

[23] Tomado de la Sección II.4 de Álvarez et al.(2000).

Los resultados son muy similares para los tres niveles, destacando la alta significación estadística del coeficiente de persistencia inflacionaria al final del periodo (diciembre 1999).

También los interceptos al final del periodo resultaron altamente significativos. Sin embargo, el coeficiente final asociado a la liquidez monetaria no alcanza a ser significativo en ningún caso, produciéndose en servicios el estadístico t de mayor magnitud (0.96).

6.4 MODELOS DE COMPONENTES NO OBSERVABLES

Una aplicación econométrica muy interesante de la notación estado-espacio junto con el algoritmo de Kalman es cuando en la ecuación planteada para resolver un fenómeno económico, una o más de sus variables explicativas no pueden ser medidas o aproximadas de una manera directa.

En Misas et al. (2002) se realiza una estimación histórica de las expectativas de inflación en Colombia para el periodo comprendido entre 1980 y 2001 a partir de la información contenida en la dinámica conjunta de la tasa de interés nominal y de la inflación observada. Para tal propósito plantean una representación estado-espacio, la que permite la estimación de los parámetros estructurales y de la variable no observada de la tasa de inflación esperada, utilizando la técnica del filtro de Kalman y el procedimiento de estimación de máxima verosimilitud.

El modelo estructural parte de la ecuación de Fisher (1930) donde la tasa de interés en un determinado periodo es función de las expectativas de los retornos reales y de la inflación. Siguiendo a Hamilton (1985), es posible representar la dinámica de las expectativas de la tasa de interés real y de la inflación a partir de las ecuaciones (50) y (51), las cuales constituyen el punto de partida de la representación estado-espacio.

$$r_t = k_1 + \Phi(L)r_t + \psi_0\pi^e_t + \xi(L)\pi_t + \varepsilon_{1t} \tag{50}$$

$$\pi^e_t = k_2 + \alpha(L)r_t + \beta(L)\pi^e_t + \gamma(L)\pi_t + \varepsilon_{2t} \tag{51}$$

donde π_t es la inflación anual observada en el periodo (t), π^e_t expectativas de inflación en el periodo (t) basadas en la información hasta el periodo (t), $\varepsilon = \pi_t - \pi^e_t$ error de pronóstico del mercado en el periodo (t), i_t tasa de interés nominal de los certificados de depósito a 90 días en el periodo (t) y $r_t = i_t - \pi^e_t$ tasa de interés real exante en el periodo (t).

Dada la definición de la tasa de interés real ex-ante, la ecuación (50) puede ser reformulada en términos de la inflación esperada y de la tasa de interés nominal, así:

$$i_t - \pi^e_t = k_1 + \Phi(L)(i_t - r^e_t) + \psi_0\pi^e_t + \psi(L)\pi^e_t + \xi(L)\pi_t + \varepsilon_{1t} \tag{52}$$

resolviendo para i, se tiene:

$$i_t = k_1 + (1+\psi_0)r^e_t + (\psi(L) - \Phi(L))\pi^e_t + \Phi(L)i_t + \xi(L)\pi_t + \varepsilon_{1t} \tag{53}$$

de tal forma que el sistema de ecuaciones (51) y (53) permite expresar el modelo en términos de una representación estado-espacio.

La correspondiente representación estado-espacio en forma matricial compacta está conformada por las ecuaciones (54) y (55), las cuales constituyen las ecuaciones de medida y de transición respectivamente:

$$Y_t = \mathrm{HX}_{\mathrm{t}} + DZ_{\mathrm{t\text{-}1}} + v_{\mathrm{t}} \qquad (54)$$

$$X_{t-1} = FX_{\mathrm{t}} + GZ_{\mathrm{t}} + w_{\mathrm{t+1}} \qquad (55)$$

Las matrices consideradas en (54) y (55) se definen de la siguiente manera:

$X_t = (\pi^e_{t,} \pi^e_{t-1,\dots.} \pi^e_{t-p})$

$Z_t = (i_{t,}\ i_{t-1\ ,\dots,}\ i_{t-p+1,} \pi_{t.}\ \pi_{t-1,\dots}\ \pi_{t-p+1,} 1)$

$Y_t = (i_{t,}\ \pi_t)$

$w_t+1=(\varepsilon_{2,t+1},0,\dots 0)$

$v_t = (\varepsilon_{1,t},\ \varepsilon_t)$

$$\mathrm{F} = \begin{bmatrix} (\beta_1-\alpha_1) & (\beta_2-\alpha_2) & (\beta_p-\alpha_p) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_p & \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_p & \xi_1 & \xi_2 & \xi_p & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} (1+\gamma_0) & (\gamma_1-\Phi_1) & (\gamma_2-\Phi_2) & (\gamma_p-\Phi_p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector Y_t de dimensiones (2x1) está conformado por las variables dependientes. Las matrices de hiperparámetros F y H, y la de los parámetros G y D, están constituidas por los coeficientes a estimar. El vector de estado está conformado por las expectativas de la inflación contemporánea y rezagadas, que se constituye como variable no observables y requieren ser estimadas.

Una vez establecida la representación estado-espacio el trabajo econométrico se concentra en la estimación del vector estado y de los parámetros e hiperparámetros y de las distintas matrices de covarianza del sistema por medio del filtro de Kalman.

En Eviews este modelo estado-espacio para información trimestral (p=4) podría escribirse de la siguiente forma:

```
@param c(14) -1 c(28) -1

@signal bem6 =c(15)+ (16)*sv1+(17)*sv2+c(18)*sv3+c(19)*sv4+c(20)*bem6(-1)+
c(21)*bem6(-2)+c(22)*bem6(-3)+c(23)*bem6(-4)+c(24)*ipcin(-1)+c(25)*ipcin(-2)+
c(26)*ipcin(-3)+c(27)*ipcin(-4)+ [var=exp(c(28))]

@state sv1 = c(1)*sv1(-1)+c(2)*sv2(-1)+c(3)*sv3(-1)+c(4)*sv4(-1) +c(5)*bem6(-1)+
c(6)*bem6(-2)+c(7)*bem6(-3)+c(8)*bem6(-4)+c(9)*ipcin(-1)+c(10)*ipcin(-2)+
c(11)*ipcin(-3)+c(12)*ipcin(-4)+c(13)+ [var=exp(c(14))]

@state sv2 = sv1(-1)
@state sv3 = sv2(-1)
@state sv4 = sv3(-1)
```

En Mario de Zamaróczy et al. (2002) se plantea un modelo para estimar los dólares en circulación (variable no observable) fuera de los bancos para el caso de Camboya.

A partir de la ecuación de cambio:

$$M_tV_t=P_tT_t \qquad (56)$$

Donde M_t, V_t, P_t y T_t denota el dinero en circulación en la economía, la velocidad del dinero, el nivel de precios y el número de transacciones, respectivamente. Como resultado de la sustitución monetaria corriente (de la moneda local (riels) por dólares), el dinero en circulación tiene dos componentes: riels en circulación (${}^{R}M_{R,t}$) y dólares en circulación (${}^{D}M_{R,t}$). Entonces:

$$M_t = {}^{R}M_{R,t} + {}^{D}M_{R,t} = (1+ k_t)\,{}^{R}M_{R,t,} \text{ con } k_t > 0 \qquad (57)$$

Reemplazando (57) en (56) , asumiendo que la velocidad de dólares y riels son iguales, que P_tT_t es aproximado por el PIB, tomando logaritmos y reorganizando términos se llega a la siguiente ecuación para estimar los riels en circulación:

$$\log({}^{R}M_{R,T}) = \log(PIB_t) – \log(V_t) - \log(1+ k_t) \qquad (58)$$

El objetivo es determinar un valor para k_t para derivar una estimación de ${}^{D}M_{R,t}$

Sin embargo, hay dos parámetros desconocidos en la ecuación (58): la velocidad del dinero(V_t) y el coeficiente de proporcionalidad entre riels y dólares en circulación (k_t), estos parámetros no pueden ser medidos directamente.

El comportamiento de las dos variables no observables se asume de la siguiente manera: la velocidad del dinero se asume en función de cambios en la inflación, cambios en el nivel del tipo de cambio y shocks estocásticos. Por su parte, el coeficiente de proporcionalidad se asume en función del nivel del tipo de cambio y shocks estocásticos. Adicionalmente, se asume que las dos variables dependen de sus valores previos, para tomar en cuenta la persistencia.

De acuerdo con los supuestos anteriores se derivan las siguientes dos ecuaciones:

$$\log(V_{t+1}) = a_1 \log(V_t) + a_2 \, d\log(IPC_{t+1}) + a_3 \, d\log(TC_{t+1}) + u_{t+1} \quad (59)$$

$$\log(1+ K_{t+1}) = b_1 \log(1+K_t) + b_2 \log(TC_{t+1}) + v_{t+1} \quad (60)$$

donde dlog indica la diferencia $\log_t - \log_{t-1}$; IPC denota el índice de precios al consumidor; TC es el tipo de cambio (riels por dólares) y u_t y v_t son dos términos estocásticos.

Agregando a la ecuación (58) las dos últimas ecuaciones (59 y 60) se tiene un sistema de tres ecuaciones, el cual se puede visualizar como una notación estado-espacio, cuyos parámetros pueden ser estimados por medio del filtro de Kalman. La primera ecuación es la ecuación de observación o medida y es determinística. Las otras dos ecuaciones pueden tomarse como ecuaciones de estado o proceso y son estocásticas.

El método de estimación del sistema anterior combina: i) dos ecuaciones que describen las variables no observadas a estimar y ii) una ecuación que liga esas dos variables no observadas con la variable observada. Este sistema en forma matricial se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\log({}^{R}M_{R,T}) = 1 \log(PIB_t) + (-1 \; -1) \begin{bmatrix} \log(V_t) \\ \log(1+k_t) \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\begin{bmatrix} \log(V_{t+1}) \\ \log(1+k_{t+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(V_t) \\ \log(1+k_t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\log(IPC_{t+1}) \\ d\log(TC_{t+1}) \\ \log(TC_{t+1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} \quad (62)$$

En Eviews este modelo estado-espacio podría escribirse de la siguiente forma:

```
@param c(5) -1 c(8) -1

@signal log( RMR,T ) = c(1) log(PIBt) - sv1 - sv2

@state sv1 = c(2)*sv1(-1) + c(3)* dlog(IPCt+1) + c(4)* dlog(TC t+1) + [var=exp(c(5))]
@state sv2 = c(6)*sv2(-1) +c(7)* log(TC t+1) + [var=exp(c(8))]
```

En Greenslade et al.(2003) el método del filtro de Kalman es aplicado para la estimación conjunta de un modelo de curva de Phillips para el Reino Unido y de la tasa de desempleo no aceleradora de la inflación (variable no observable y en adelante denominada NAIRU por sus siglas en inglés). Esta última variable es tratada como un proceso estocástico no observable. La principal razón para preferir una metodología multivariable es que utiliza más información, incluyendo teoría, para estimar la NAIRU y no solamente las propiedades univariables de la tasa de desempleo.

El modelo básico utilizado consiste en dos ecuaciones:

$$\pi_t = \alpha(L)\pi_{t-1} - \beta(L)(u_t - u_t^*) + \gamma(L)'Z_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \approx N(0;\sigma_\varepsilon^2 \qquad (63)$$

$$u_t^* = u_{t-1}^* + \eta_t \qquad \eta_t \approx N(0;\sigma_n^2) \text{ y } Cov(\varepsilon_t, \eta_t) = 0 \qquad (64)$$

La ecuación (63) es una versión de la curva de Phillips denominada el modelo triangular de Phillips en donde la tasa de inflación depende de tres factores: la inercia, demanda y oferta. La inercia es representada por la inflación rezagada. Valores actuales y rezagados de la brecha de desempleo son usados como aproximaciones de excesos de demanda y Z_t captura presiones inflacionarias originadas por el lado de la oferta, como por ejemplo aumentos en el precio del petróleo. De acuerdo con la ecuación tan pronto como el desempleo caiga por debajo de NAIRU se generan presiones inflacionarias.

Por su parte, la ecuación (64) especifica el proceso de series de tiempo que genera la variable no observable (NAIRU). La ecuación indica que la NAIRU es un proceso no observable o estocástico que sigue un camino aleatorio.

En este modelo la inflación cambia por dos razones. Primero, el evento exógeno aleatorio (o ruido de la medida), ε_t, podría chocar la inflación. Segundo, la NAIRU por ella misma podría cambiar. El modelo permite identificar la fuente de cambios en la inflación en cada periodo. Al asumir que los errores se distribuyen normalmente, el algoritmo de Kalman permite el cálculo de la función logarítmica de verosimilitud del modelo que facilita la estimación de los parámetros usando métodos de máxima verosimilitud. La resultados estimados incluye a la NAIRU (u_t^*) y la curva de Phillips, esta última abarca los parámetros $\alpha(L)$, $\beta(L)$ y $\gamma(L)$.

En Eviews la ecuación (63) se puede interpretar como la ecuación de medida u observación de la notación estado-espacio, mientras que la ecuación (64) representa a la de estado o proceso. Asumiendo un rezago de dos periodos, el modelo en Eviews podría denotarse como sigue:

@param c(6) -1 c(7) –1 c(8) -1

@signal $\pi_t = c(1)*\pi_{t-1} + c(2)*\pi_{t-2} - c(3)*(u_{t-1} - sv1) - c(4)*(u_{t-2} - sv2) + c(4)*Z_{t-1} +$
$c(5)*Z_{t-2} + [\text{var} = \exp(c(6))]$

@state sv1 = sv1(-1)+ [var=exp(c(7))]
@state sv2 = sv1(-1)+ [var=exp(c(8))]

7. BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Fernando; Dorta, Miguel y Guerra, José (2000) *"Persistencia Inflacionaria en Venezuela: Evolución, causas e implicaciones"*. Documentos de Trabajo No.26, Banco Central de Venezuela, Gerencia de Investigación Económica.

Blake, Andrew (2002) *"State-Space Models and the Kalman Filter: Application, Formulation and Estimation"*, Bank of England.

Clar, M., Ramos and J. Suriñach (1998), "*A Latent Variable Model to Measure Regional Manufacturing Production in Spain*", Worshop on Regional Economic Indicators, University of Minho, Braga.

Cuché, Nicolásy Hess, Martin (1999) *"Estimating Monthly GDP in a General Kalman Filter Framework: Evidence from Switzerland".*

De Zamaróczy, Mario and Sa, Sopanha (2002) *"Macroeconomic Adjustment in a Highly Dollarized Economy: The case of Cambodia"*, WP/02/92, Apéndice 1.

Doan T.,R.B. Litterman and C.A. Sims. (1984) *"Forecasting and Conditional Proyection Using Realistic Prior distributions",* Econometric Reviews,3.

Elwood, S.K. (1998) *"Is the Persistence of Shocks to Output Asymmetric?"*, Journal of Monetary Economics 41, págs. 411-426. Apéndice A: The modified Kalman Filter.

Flores, P. Melania, "*El Filtro de Baxter-King, Metodología y Aplicaciones*", Revista Economía y Sociedad, no. 16, Mayo/Agosto, 2001

Greenslade, Jennifer and Jumana Saleheenn, "*A Kalman filter Approach to estimating the UK NAIRU*", Working Paper No 179, Bank of England, 2003.

Haldane, A. G. And S.G. (1991) "*Sterling's Relationship with the Dollar and de Deutschemark: 1976-89*", Economic Journal, 101(406), 436-443.

Harvey, A.C. (1989) "*Forecasting, structural Time Series Models and the Kalman Filter*", Cambridge University Press, Cambridge.

Kalman, R.E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME,J. Basic Engineering, vol 82, March 1960, pp 94-35.

Kichian, Maral y Luger, Richard (2001) *"On Inflation and the Persistence of Shocks to output"*, WP 2001-22. Bank of Canada (Apéndice A, pág 18).

Hamilton, J.D. (1985) *"Uncovering Financial Market Expectations of Inflation"*, Journal of Political Economy, Vol. 93, No 61.

Hamilton, J.D. (1994) *"Time Series Analysis"*, Princeton University Press.

Hansen, Bruce (1996) *"Inference when a Nuisance Parameter is not Identified under the Null Hhypothesis"*, Econometrica, Vol. 64, No.2, Marzo.

Le Roux, Joel (2003) "*An Introduction to Kalman filter*", University of Nice.

Mario de Zamaróczy and sopanha Sa, "*Macroeconomic Adjustment in a Highly Dollarized Economy: The Case of Cambodia*", Working Paper, FMI, mayo, 2002.

Maybech, Peter S. (1979) "*Stochastic Models, Estimation and Control*", Volumen 1, Academic Press, INC.

Muñoz, E. y Kikut A.(1994) "*El Filtro de Hodrick y Precott: Una técnica para la Extracción de la Tendencia de la Serie*". DIE-NT-03-94/R. Banco Central de Costa Rica.

Misas A., Martha; Posada, Carlos y Vásquez, Diego (2001) *"Está Determinado el Nivel de Precios por las Expectativas de Dinero y Producto en Colombia"*. Borrador de Economía No.191. Banco de la República (Colombia).

Misas A. y Diego Vásquez, (2002) *"Expectativas de Inflación en Colombia: Un Ejercicio Econométrico"*. Subgerencia de Estudios Económicos, Banco de la República, Colombia.

Quantitative Micro Software (2000), Eviews 4, User's Guide, *"State Space Models and Kalman Filter*", Chapter 22, págs. 559-582.

Welch, Greg abd GaryBishop, "*An Introduction to the Kalman Filter*", TR 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, 2002.

solerara@bccr.fi.cr