Kapitel 5:

Mengenlehre - Ein kurzer Überblick

Übersicht

5.1 Der naive Mengenbegriff

DER MENGENBEGRIFF NACH CANTOR

Eine Menge M ist die Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (den Elementen von M).

- Hier betrachten wir Mengen mathematischer Objekte.
- Objekte sind also z.B. Zahlen.
- Elemente von Mengen können aber auch selbst wiederum Mengen sein (z.B. Potenzmengen).

Insbesondere lassen sich nach Cantor (Georg Cantor, 1845 - 1918) die Mengen X mit einer gewissen Eigenschaft E wiederum zu einer Menge zusammenfassen:

$$M = \{X : E(X)\} \text{ ist eine Menge (Komprehensionsaxiom)}$$

In dieser uneingeschränkten Form führt die Mengenbildung jedoch zu Widersprüchen (Paradoxien / Antinomien der Mengenlehre).

DIE RUSSELLSCHE ANTINOMIE

Die Russellsche Menge R (Bertrand Russell, 1872 - 1970) enthält genau diejenigen Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten:

$$R = \{X : X \notin X\}$$

Enthält nun R sich selbst als Element?

- Nehmen wir $R \in R$ an, so folgt aus der Definition von R: $R \notin R$.
- Nehmen wir $R \notin R$ an, so folgt aus der Definition von R: $R \in R$.

Wir erhalten also in jedem Fall einen Widerspruch! D.h., R kann keine (wohldefinierte) Menge sein.

DIE MENGE ALLER MENGEN

Bei der Bildung der Russellschen Menge R gehen wir implizit von der Menge aller Mengen

$$V = \{X : X \text{ Menge}\}$$

aus.

Solch eine Allmenge kann es also nicht geben. Trotzdem scheint es natürlich, dass wir alle Mengen zu einer "Gesamtheit" V zusammenfassen können.

Wie können wir dieses Dilemma auflösen? Eine Möglichkeit ist, zwischen Mengen und Klassen zu unterscheiden.

KLASSEN UND MENGEN

Eine Klasse ist die Zusammenfassung von Mengen.

- Klassen können selbst wiederum Mengen sein, sind dies aber *nicht* notwendigerweise.
- Klassen, die keine Mengen sind, heißen eigentliche Klassen.

  Idee: Eigentliche Klassen sind zu groß, um Mengen zu sein!
  Insbesondere können sie nicht selbst wieder als Elemente von Klassen auftreten!

Im Folgenden bezeichnen wir Mengen mit kleinen Buchstaben, Klassen mit großen Buchstaben.

R UND V SIND EIGENTLICHE KLASSEN

Definieren wir

$$V = \{x : x \text{ Menge}\} \qquad \text{(Allklasse)}$$

und

$$R = \{x \in V : x \notin x\} \qquad \text{(Russellsche Klasse)},$$

so führt die Annahme, dass dies eigentliche Klassen sind, zu keinem Widerspruch mehr.

Aber welche Klassen sind nun Mengen? Hierzu wurden verschiedene Ansätze vorgestellt.

RUSSELLS TYPISIERTER MENGENBEGRIFF

Russell schlug folgende induktive Charakterisierung von Mengen mit Hilfe einer Typisierung vor:

- Eine Klasse M, die keine Mengen als Elemente enthält, ist eine Menge vom Typ 0.
- Enthält eine Klasse M nur Mengen vom Typ $\leq n$ als Elemente, so ist sie eine Menge vom Typ $n+1$.

Hiermit kann eine Menge nie Element von sich selbst sein (Die Russellsche Klasse ist also die leere Menge!). Die auf Selbstreferenz basierenden Antinomien werden also vermieden. (Um so ein hinreichend mächtiges Mengenkonzept zu erhalten, muss man allerdings Typen transfinit erweitern; nur endliche Typen $n \in \mathbb{N}$ sind zu schwach.)

Hier werden wir jedoch einen anderen Ansatz zur Beschreibung der Mengen betrachten!

ZERMELO - FRAENKEL MENGENLEHRE (ZF)

Der populärste Ansatz einer formalen Mengenlehre ist der von Zermelo und Fraenkel.

Hier werden eine Reihe von Mengenbildungsgesetzen als Axiome gewählt und die mit Hilfe dieser Gesetze gebildeten Klassen als Mengen bezeichnet.

Im Folgenden stellen wir die Theorie ZF vor, die formal im Rahmen der Prädikatenlogik entwickelt wird.

Die Zermelo - Fraenkel - Mengenlehre benutzt als einzige Objekte Mengen (und implizit Klassen) und als einziges nichtlogisches Symbol die Elementschaftsrelation $\in$. Wir werden zeigen, dass sich (mit Hilfe der Gleichheit und der logischen Operationen) hierauf alle anderen Mengenoperationen (wie z.B. die Vereinigung $\cup$) sowie das Relations- und Funktionskonzept zurückführen lassen.

Ferner kann man beim Aufbau der Mengenlehre auf Elemente verzichten, die nicht selbst wieder Mengen sind.

URELEMENTE UND PURE MENGEN

Beim Aufbau der Mengenlehre kann man von Urelementen ausgehen. Diese sind selbst keine Mengen, können aber Elemente von Mengen (und Klassen) sein. Typische Beispiele für Urelemente sind die natürlichen Zahlen n ($n \geq 0$).

Mengen (Klassen), die keine Urelemente enthalten, heißen pur.

Bei der Entwicklung der Mengenlehre kann man jedoch auf Urelemente verzichten, indem man diese durch geeignete pure Mengen repräsentiert. In ZF wird dies getan.

REPRÄSENTATION DER NATÜRLICHEN ZAHLEN DURCH PURE MENGEN

Z.B. können wir die natürlichen Zahlen mit Hilfe der leeren Menge $\emptyset$ wie folgt repräsentieren:

$$\begin{gathered}
\underline{0} := \emptyset \\
\underline{1} := \emptyset \cup \{\emptyset\} = \underline{0} \cup \{\underline{0}\} \\
\underline{2} := \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} = \underline{1} \cup \{\underline{1}\} \\
\dots \\
\underline{n+1} := \underline{n} \cup \{\underline{n}\}
\end{gathered}$$

Offensichtlich gilt:

$$\underline{n+1} = \{\underline{0}, \dots, \underline{n}\} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$$

Also:

$$\underline{n} \in \underline{n+1} \text{ und } \underline{n} \subset \underline{n+1}$$

Die Menge $\underline{n}$ hat n Elemente.

5.2 Die Zermelo - Fraenkel - Mengenlehre (ZF)

DIE SPRACHE DER ZF-MENGENLEHRE

Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} = \mathcal{L}(\in)$ von ZF enthält als einziges nichtlogisches Zeichen das 2-st. Relationszeichen $\in$, das die Elementschaftsrelation bezeichnet. (Wir benutzen die übliche Infixschreibweise.)

Im Folgenden bezeichnen wir freie Variablen mit $a, b, c, a_i, \dots$, gebundene Variablen mit $x, y, z, x_i, \dots$.

Eine Variable a steht also für eine Menge; $a \in b$ besagt, dass a Element von b ist.

Wir erhalten Klassen, indem wir alle Mengen mit einer gewissen Eigenschaft zusammenfassen.

KLASSEN UND KLASSENTERME

Ist $\varphi(x)$ eine Formel, so schreiben wir

$$a \in \{x : \varphi(x)\} :\equiv \varphi(a)$$

und nennen $\{x : \varphi(x)\}$ den von φ definierten *Klassenterm*.

Anschaulich bezeichnet der Klassenterm $\{x : \varphi(x)\}$ die Klasse aller Mengen mit Eigenschaft φ.

GLEICHHEIT VON MENGEN: DAS EXTENSIONALITÄTSPRINZIP

Das Extensionalitätsprinzip besagt, dass zwei Mengen (oder Klassen) genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente besitzen. In ZF wird dies formalisiert durch:

EXTENSIONALITÄTSAXIOM (Ext)

$$a = b \leftrightarrow \forall\, x\, (x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

Wir können dies auf Klassenterme übertragen, indem wir schreiben:

$$\{x : \varphi(x)\} = \{x : \psi(x)\} :\equiv \forall\, x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$$

DIE MENGENOPERATIONEN

Das Extensionalitätsaxiom erlaubt uns Vereinigung $\cup$, Durchschnitt $\cap$, Differenz $-$ sowie die Teilmengenrelation $\subseteq$ wie folgt darzustellen:

- $a \cup b = c :\equiv \forall x(x \in c \leftrightarrow x \in a \vee x \in b)$
- $a \cap b = c :\equiv \forall x(x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge x \in b)$
- $a - b = c :\equiv \forall x(x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin b)$
- $a \subseteq b :\equiv \forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$

NB: Aus dem Extensionalitätsaxiom folgt jedoch noch nicht, dass $a \cup b$ (usw.) tatsächlich eine Menge ist, also ein c mit $a \cup b = c$ existiert. Hierzu benötigt man weitere Axiome, die die Bildung von Mengen mit Hilfe dieser Operationen aus gegebenen Mengen erlaubt.

MENGENBILDUNGSAXIOME

Die weiteren Axiome von ZF beschreiben mit einer Ausnahme (dem Fundierungsaxiom, das wir zum Schluss behandeln werden), wie wir Mengen bilden können, d.h., gewisse Klassen als Mengen nachweisen können.

Diese Mengenbildungsaxiome sind:

- Aussonderungsaxiom (Aus) (kann weggelassen werden)
- Nullmengenaxiom (Null)
- Paarmengenaxiom (Paar)
- Summen(=Vereinigungs)axiom (Sum)
- Ersetzungsaxiom(enschema) (ErsS)
- Potenzmengenaxiom (Pot)
- Unendlichkeitsaxiom (Un)

DAS AUSSONDERUNGSAXIOM

Fassen wir alle Mengen mit einer Eigenschaft φ zusammen (Komprehension), so erhalten wir mit $\{x : \varphi(x)\}$ i.a. nur eine Klasse (vgl. die zu Beginn betrachteten Antinomien der Mengenlehre). Betrachten wir jedoch nur die Mengen mit Eigenschaft φ innerhalb einer Menge a, so erhalten wir wiederum eine Menge (Aussonderung).

AUSSONDERUNGSAXIOM(enschema) (Aus)

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

Hiermit lassen sich also Teilmengen einer Menge als Menge nachweisen, solange diese durch eine definierbare Eigenschaft (d.h. Formel) ausgesondert werden können.

BEISPIEL

Der Durchschnitt von zwei Mengen a und b ist wiederum eine Menge.

Nämlich

$$\exists y (y = a \cap b)$$

da

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

für

$$\varphi(x) :\equiv x \in b.$$

DAS NULLMENGENAXIOM

Das Nullmengenaxiom besagt, dass die leere Klasse eine Menge ist.

NULLMENGENAXIOM (Null)

$$\exists y \forall x (x \notin y)$$

Im Folgenden bezeichnen wir die leere Menge wie üblich mit $\emptyset$.

DAS PAARMENGENAXIOM

Das Paarmengenaxiom besagt, dass für Mengen a und b das ungeordnete Paar $\{a, b\}$ wiederum eine Menge ist:

PAARMENGENAXIOM (Paar)

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$$

Hieraus folgt auch, dass folgende Klassen Mengen sind:

- Einerklasse von a: $\{a\}$ (da $\{a\} = \{a, a\}$)
- Geordnetes Paar von a, b: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$

RELATIONEN UND FUNKTIONEN

Aus den geordneten Paaren kann man induktiv geordnete n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ definieren und hiermit mehrdimensionale Mengen (d.h. Relationen):

$$x \in a^n :\equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n (x_1 \in a \wedge \cdots \wedge x_n \in a \wedge x = (x_1, \ldots x_n))$$

Eine n-stellige Relation r über a ist dann durch $r \subseteq a^n$ charakterisiert.

Hieraus erhält man auch Funktionen, indem man diese mit ihren Graphen identifiziert.

Um zu zeigen, dass Relationen (und damit Funktionen) über Mengen wiederum Mengen sind, benötigen wir noch das Summenaxiom, und um zu zeigen, dass Bilder von Mengen wiederum Mengen sind, das Ersetzungsaxiom.

DAS SUMMENAXIOM

Die Vereinigung (Summe) von Klassen ist allgemein definiert durch

$$\bigcup A := \bigcup_{x \in A} x := \{y : \exists x (x \in A \wedge y \in x)\}$$

Das Summenaxiom besagt, dass die Vereinigung von Mengen wiederum eine Menge ist:

SUMMENAXIOM (Sum)

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge z \in x))$$

Wegen $\bigcup\{a, b\} = a \cup b$ ist also insbesondere die Vereinigung von zwei Mengen wiederum eine Menge. Ähnlich folgt, dass für jede Menge a das n-fache cartesische Produkt a^n ebenfalls eine Menge ist. Mit dem Aussonderungsaxiom folgt dann, dass n-stellige (definierbare) Relationen über einer Menge a ebenfalls Mengen sind.

DAS ERSETZUNGSAXIOM

Das Ersetzungsaxiom(enschema) besagt, dass das Bild $F(a)$ einer Menge a unter einer (definierbaren) Funktion F wiederum eine Menge ist (dabei muss die Funktion F selbst keine Menge sein, sondern kann eine eigentliche Klasse sein).

ERSETZUNGSAXIOM (ErsS)

$$\varphi \text{ beschreibt den Graphen einer Funktion } F_\varphi \ \rightarrow$$

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, z)))$$

DAS POTENZMENGENAXIOM

Das Potenzmengenaxiom besagt, dass die Potenzklasse einer Menge wiederum eine Menge ist. Hierbei ist die Potenzklasse $\mathcal{P}(A)$ der Klasse A durch

$$\mathcal{P}(A) = \{b : b \text{ Menge} \quad \wedge \; b \subseteq A\}$$

definiert.

POTENZMENGENAXIOM (Pot)

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq a)$$

DAS UNENDLICHKEITSAXIOM

Die bisher eingeführten Axiome sichern noch nicht die Existenz einer unendlichen Menge.

UNENDLICHKEITSAXIOM (Un)

$$\exists x(\emptyset \in x \ \wedge \ \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$$

Die kleinste derartige Menge ist gerade die Menge der natürlichen Zahlen $\underline{\mathbb{N}} = \{\underline{0}, \underline{1}, \dots\}$. (Ohne das Axiom (Un) wären die einzelnen natürlichen Zahlen $\underline{n}$ zwar Mengen, die Gesamtheit $\underline{\mathbb{N}}$ aller natürlicher Zahlen aber nur eine Klasse.)

DAS FUNDIERUNGSAXIOM

Während die bisher eingeführten Axiome die Bildung von Mengen erlauben, schränkt das letzte ZF-Axiom die Mengenbildung ein.

FUNDIERUNGSAXIOM (Fun)

$$a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a(x \cap a = \emptyset)$$

D.h., jede nichtleere Menge a besitzt ein Element x, das kein Element von a als Element enthält.

In Russells typisierter Mengenlehre gilt dieses Axiom: Man betrachtet hierzu ein Element x von a dessen Typ minimal ist.

Man kann auf das Fundierungsaxiom verzichten, erhält dann aber der gängigen Vorstellung widersprechende Mengen. ZF_0 bezeichne ZF ohne das Fundierungsaxiom.

5.3 Das Auswahlaxiom

In der Mathematik wird neben den Zermelo-Fraenkel-Axiomen in der Regel noch ein weiteres Axiom angenommen, das Auswahlaxiom. (Wir setzen ZFC = ZF + AC.)

AUSWAHLAXIOM (AC = Axiom of Choice)

Sei a eine Menge, deren Elemente x nicht leer sind. Dann gibt es eine Funktion $f : a \to \bigcup a$, sodass für jedes $x \in a$ das Bild $f(x)$ ein Element von x ist.

Für endliches a folgt AC aus ZF. I.a. ist jedoch AC unabhängig von ZF: Ist ZF konsistent, so auch

- ZF + AC (Gödel 1938)
- ZF + $\neg$AC (Cohen 1963)

(EINIGE) FOLGERUNGEN AUS AC

- Wohlordnungssatz (s. später)
- Zornsches Lemma
- Satz von Tychonoff (Topologie)
- Basissatz für Vektorräume (Lin. Algebra)
- Vollständigkeitssatz (Logik)
- Existenz nichtmessbarer Mengen (Maßtheorie)

ALTERNATIVEN ZU AC

- Es werden alternative Mengenlehren betrachtet, in denen das Auswahlaxiom in seiner allgemeinen Form nicht gilt.
- Ein Beispiel hierfür ist ZF+AD, wobei das Determiniertheitsaxiom (AD) besagt, dass gewisse 2-Personen-Spiele determiniert sind, d.h. einer der Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.
- Für hinreichend einfache Spiele ist Determiniertheit in ZF beweisbar, also mit AC verträglich. In der allgemeinen Form sind aber AC und AD nicht kompatibel. So lässt sich z.B. in ZF+AD beweisen, dass *alle* Mengen messbar sind.

ANMERKUNGEN ZUR KONSISTENZ VON ZF

- Wie Gödel gezeigt hat, sind ZF und ZFC equikonsistent, d.h. aus der Konsistenz von ZF folgt auch die Konsistenz von ZFC. Hierzu hat Gödel gezeigt, dass die Existenz eines Modells für ZF die Existenz eines Modells für ZFC impliziert. Letzteres besteht aus den sog. konstruktiblen Mengen.
- Die Konsistenz von ZF(C) lässt sich wegen des 2. Unvollständigkeitssatzes von Gödel (s. Kapitel 6) nicht beweisen! Dieser Satz besagt, dass die Konsistenz einer (hinreichend ausdrucksstarken) Theorie T nicht innerhalb der Theorie T bewiesen werden kann. Da wir die gesamte (formale) Mathematik innerhalb von ZFC entwickeln, lässt sich also in der formalen Mathematik die Konsistenz von ZFC nicht nachweisen.
- Die große Mehrheit der Mengentheoretiker geht davon aus, dass ZFC konsistent ist. (Es gibt aber Ausnahmen.)

5.4 Ordinalzahlen

KARDINALZAHLEN VS. ORDINALZAHLEN

Natürliche Zahlen dienen sowohl zur Bezeichnung der Größe endlicher Mengen (*A hat 5 Elemente, d.h.* $|A| = 5$) als auch der Beschreibung der Reihenfolge bzgl. einer gegebenen Wohlordnung (*x ist das 5. Element*) bzw. des Ordnungstyps einer endlichen Ordnung.

Entsprechend kann eine Zahl als Kardinalzahl oder Ordinalzahl aufgefasst werden.

Wir werden nun diese Konzepte ins Unendliche fortsetzen. Dabei werden im Unendlichen Kardinalzahlen und Ordinalzahlen auseinanderfallen:

Z.B. lässt sich die Menge $\mathbb{N}$ auf unterschiedliche Weise anordnen:

- $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$
- $0, 2, 4, 6, 8, \dots, 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

Offensichtlich haben diese Ordnungen unterschiedliche Ordnungstypen (nämlich ω und $\omega + \omega$ in unserer (späteren) Notation; s. auch Kapitel 4).

ORDINALZAHLEN: VORBEMERKUNGEN

Wir wollen zunächst die Ordinalzahlen einführen. Hierzu benötigen wir zunächst den Begriff der Wohlordnung und der ordnungserhaltenden Abbildungen.

Ordinalzahlen sind dann anschaulich gerade die möglichen Ordnungstypen von Wohlordnungen.

Formal werden wir die Ordinalzahlen als spezielle Repräsentanten der Ordnungstypen einführen, bei denen die Ordnungsrelation $<$ durch die Elementschaftsrelation $\in$ realisiert wird.

WOHLORDNUNGEN

Eine lineare Ordnung $<$ auf einer Menge a ist eine Wohlordnung, wenn jede nichtleere Teilmenge b von a ein $<$-kleinstes Element besitzt. (Dies ist äquivalent zu der in Kapitel 4 gegebenen Definition.)

Eine Wohlordnung $(a, <)$ besitzt ein kleinstes Element (setze $b := a$), und wir können die Menge a der Reihe nach durchlaufen in dem Sinne, dass es zu jedem $x \in a$ ein nächstgrößeres Element $x' =: x + 1$ gibt (falls x nicht das größte Element von a ist), nämlich $x' = \min\{y \in a : y \not\leq x\}$.

BEISPIELE (vgl. Kapitel 4). Offensichtlich ist $(\mathbb{N}, <)$ eine Wohlordnung, wogegen z.B. $(\mathbb{Z}, <)$ oder $(\mathbb{Q}_+, <)$ keine Wohlordnungen sind.

Weiter ist jedes Anfangsstück einer Wohlordnung wiederum eine Wohlordnung.

ORDNUNGSERHALTENDE ABBILDUNGEN

Seien $(a, <)$ und $(b, \prec)$ lineare Ordnungen. Eine Abbildung $f : a \to b$ ist ordnungserhaltend oder monoton, falls stets

$$x < y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$$

gilt.

Ist f zusätzlich bijektiv, so ist f ein (Ordnungs-)Isomorphismus. Ein Isomorphismus $f : (a, <) \to (a, <)$ ist ein Automorphismus.

$(a, <)$ und $(b, \prec)$ heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $f : (a, <) \to (b, \prec)$ gibt (vgl. Kapitel 4). NB: Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation.

EIGENSCHAFTEN VON WOHLORDNUNGEN

Für jede Wohlordnung $(a, <)$ gilt:

- Der einzige Automorphismus von $(a, <)$ ist die Identität.
- $(a, <)$ ist nicht isomorph zu einem echten Anfangsstück von $<$.

Sind $(a_0, <_0)$ und $(a_1, <_1)$ Wohlordnungen, so stehen diese in genau einer der folgenden Beziehungen zueinander:

- $(a_0, <_0)$ und $(a_1, <_1)$ sind isomorph.
- $(a_0, <_0)$ ist isomorph zu einem echten Anfangsstück von $(a_1, <_1)$.
- ein echtes Anfangsstück von $(a_0, <_0)$ ist isomorph zu $(a_1, <_1)$.

ORDNUNGSTYPEN VON WOHLORDNUNGEN

Der (Ordnungs-)Typ $typ(a, <)$ einer Wohlordnung $(a, <)$ ist die Äquivalenzklasse von $(a, <)$ unter Isomorphismen.

Definieren wir $typ(a_0, <_0) < typ(a_1, <_1)$, falls $(a_0, <_0)$ isomorph zu einem echten Anfangsstück von $(a_1, <_1)$ ist, so ist $<$ wohldefiniert und eine Wohlordnung. ($<$ ist allerdings keine Menge sondern eine echte Klasse.)

Identifizieren wir die Typen $typ(a, <)$ von Wohlordnungen mit den Ordinalzahlen, so ist $<$ also eine Wohlordnung auf allen Ordinalzahlen.

Die kleinsten Ordinalzahlen sind natürlich die Typen der Wohlordnungen $\hat{n} := \{0 < 1 < \cdots < n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei $\hat{0} < \hat{1} < \hat{2} < \ldots$ Diese heißen die endlichen Ordinalzahlen und werden mit den entsprechenden natürlichen Zahlen identifiziert.

ORDINALZAHLEN

Formal definieren wir die Ordinalzahlen, indem wir Repräsentanten aus den Ordnungstypen auswählen, die *transitiv* sind und bei denen die Elementschaftsrelation gerade die Ordnungsrelation ist. Hierbei heißt eine Menge a transitiv, falls jedes Element von a auch eine Teilmenge von a ist.

DEFINITION. Eine Menge a ist eine Ordinalzahl, wenn a transitiv ist und a bezüglich $\in$ wohlgeordnet ist.

Wir bezeichnen Ordinalzahlen mit kl. griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und die Klasse aller Ordinalzahlen mit *On*.

NB. Unsere natürlichen Zahlen $\underline{0} = \emptyset$, $\underline{1} = \underline{0} \cup \{\underline{0}\}, \ldots, \underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$ sind (die kleinsten) Ordinalzahlen und es gilt $\underline{0} \in \underline{1} \in \underline{2} \in \ldots$
(Im Folgenden schreiben wir kurz n statt $\underline{n}$.)

DIE WOHLORDNUNG ALLER ORDINALZAHLEN

Man kann nun leicht zeigen, dass $(On, \in)$ eine Wohlordnung ist. (Wir schreiben daher im Folgenden auch meist $\alpha < \beta$ statt $\alpha \in \beta$.)

Hierzu beobachtete man:

- $0 = \emptyset$ ist eine Ordinalzahl.
- Ist α eine Ordinalzahl und gilt $\beta \in \alpha$, so ist β ebenfalls eine Ordinalzahl.
- Sind α und β Ordinalzahlen mit $\beta \subset \alpha$, so gilt $\beta \in \alpha$.
- Sind $\alpha \neq \beta$ Ordinalzahlen, so gilt $\alpha \subset \beta$ oder $\beta \subset \alpha$.

EINFACHE FOLGERUNGEN

- Ist α eine Ordinalzahl, so gilt $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.
- Ist α eine Ordinalzahl, so ist $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ die nächstgrößere Ordinalzahl, genannt der Nachfolger von α.
- Gilt $\beta = \alpha + 1$ für eine Ordinalzahl α, so heisst β Nachfolgerzahl; andernfalls heißt β Limeszahl, falls $\beta \neq 0$.

  Notation: Im Folgenden bezeichnet λ stets eine Limeszahl.

  (Es gibt also 3 Typen von Ordinalzahlen: 1) die kleinste Ordinalzahl 0, 2) Nachfolgerzahlen und 3) Limeszahlen.)
- Ist α eine Limeszahl, so gilt $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$.
- Wir bezeichnen mit ω die kleinste Limeszahl > 0:

$$\omega = \sup\{\underline{n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ (d.h. } (\omega, \in) \cong (\mathbb{N}, <))$$

WOHLORDNUNGEN VS. ORDINALZAHLEN

SATZ. Zu jeder wohlgeordneten Menge $(a, <)$ gibt es genau eine Ordinalzahl α, sodass $(a, <)$ und $(\alpha, \in)$ isomorph sind.

Jeder Ordnungstyp von wohlgeordneten Mengen enthält also genau eine Ordinalzahl. D.h., intuitiver und formaler Ordinalzahlbegriff entsprechen einander.

TRANSFINITE INDUKTION

Die vollständige Induktion (und die zugehörigen rekursiven Definitionen) sind ein zentrales Hilfsmittel bei der Analyse der natürlichen Zahlen. Dieses Mittel lässt sich auf die Ordinalzahlen wie folgt ausdehnen:

SATZ ÜBER DIE TRANSFINITE INDUKTION. Sei C eine Klasse von Ordinalzahlen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \in C$.

(ii) Ist α in C, so ist auch $\alpha + 1$ in C.

(iii) Ist $\alpha \neq 0$ eine Limeszahl und sind alle $\beta < \alpha$ Elemente von C, so ist auch α ein Element von C.

Dann ist C die Klasse On aller Ordinalzahlen.

ORDINALZAHLARITHMETIK: ADDITION

Die arithmetischen Operationen $+$, $\cdot$ und x^y lassen sich auf die Ordinalzahlen fortsetzen.

Für die Definition von $+$ definiert man hierzu die Summe $(a, <)$ von zwei (disjunkten) Wohlordnungen $(a_0, \leq_0)$ und $(a_1, \leq_1)$ dadurch, dass man die Ordnung $(a_1, \leq_1)$ hinten an die Ordnung $(a_0, \leq_0)$ anhängt:

- $a := a_0 \cup a_1$
- $x < y :\Leftrightarrow x <_0 y \ \vee \ [x \in a_0 \ \wedge \ y \in a_1] \ \vee \ x <_1 y$

Für endliche Wohlordnungen entspricht dies der Addition auf $\mathbb{N}$.

ORDINALZAHLARITHMETIK: ADDITION (Forts.)

Formal lässt sich die Summe $\alpha + \beta$ auf den Ordinalzahlen dann basierend auf dieser Idee mit Hilfe einer transfiniten Rekursion einführen:

- $\alpha + 0 := \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$
- $\alpha + \lambda = \lim_{\beta \to \lambda}(\alpha + \beta)$ ($\lambda > 0$ Limeszahl)

NB. $+$ ist assoziativ aber i.a. nicht kommutativ. Z.B. gilt

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$

ORDINALZAHLARITHMETIK: MULTIPLIKATION

Die Multiplikation $\alpha \cdot \beta$ wird entsprechend wie in $\mathbb{N}$ durch Rückgriff auf $+$ rekursiv definiert:

- $\alpha \cdot 0 := 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- $\alpha \cdot \lambda = \lim_{\beta \to \lambda} (\alpha \cdot \beta)$

Anschaulich: Die Ordnung α wird β mal hintereinander geschrieben, d.h. jedes Element von β durch eine Kopie von α ersetzt.

NB. $\cdot$ ist assoziativ aber i.a. nicht kommutativ. Z.B. gilt

$$2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega$$

ORDINALZAHLARITHMETIK: POTENZ

Entsprechend wie im Endlichen kann man über die Multiplikation dann noch die Potenz definieren:

- $\alpha^0 := 1$
- $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$
- $\alpha^\lambda = \lim_{\beta\to\lambda} \alpha^\beta$

CANTORS NORMALFORMTHEOREM

CANTORS NORMALFORMTHEOREM. Jede Ordinalzahl $\alpha > 0$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n,$$

wobei $n \geq 1$, $\alpha \geq \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

NB. I.a. kann β_1 nicht echt kleiner als α gewählt werden. Stimmen α und β_1 überein, so ist $n = k_1 = 1$, d.h. $\alpha = \omega^\alpha$. Der kleinste derartige Fixpunkt α der Funktion $f(\alpha) = \omega^\alpha$ wird mit ϵ_0 bezeichnet. Er spielt in der Beweistheorie eine wichtige Rolle: In PA lässt sich die Korrektheit der transfiniten Induktion (bei geeigneter Gödelisierung der Ordinalzahlen) gerade für alle Ordinalzahlen $\alpha < \epsilon_0$ beweisen. Umgekehrt reicht eine transfinite Induktion bis ϵ_0 aus, um die Konsistenz von PA nachzuweisen. ϵ_0 charakterisiert also die Beweisstärke von PA. Entsprechend konnte man die Beweisstärke anderer Theorien durch Angabe ihrer kritischen Ordinalzahl charakterisieren.

Im Folgenden betrachten wir noch zwei interessante Beispiele für Anwendungen von transfiniten Induktionen bzw. Rekursionen.

DER WOHLORDNUNGSSATZ

Die Frage, ob sich auf jeder Menge a eine Wohlordnung definieren lässt, lässt sich in ZF nicht entscheiden. Bei Hinzunahme des Auswahlaxioms, d.h. in ZFC erhalten wir aber:

WOHLORDNUNGSSATZ (ZFC). Jede Menge a lässt sich wohlordnen.

DER WOHLORDNUNGSSATZ: BEWEIS

- Sei f eine Auswahlfunktion für die Potenzmenge von a ohne die leere Menge, d.h. $f(b) \in b$ für jede nichtleere Teilmenge b von a.
- Wir geben eine transfinite Aufzählung $\langle a_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ (β geeignet) von a ohne Wiederholungen an. D.h. $a = \{a_\alpha : \alpha < \beta\}$ und $a_\alpha \neq a_{\alpha'}$ für $\alpha \neq \alpha'$.
- Dann erhalten wir die gewünschte Wohlordnung $<$ von a (vom Typ $(\beta, \in)$) durch

$$a_\alpha < a_{\alpha'} :\Leftrightarrow \alpha \in \alpha'.$$

- a_α definieren wir durch transfinite Rekursion wie folgt:

$$a_\alpha := f(a - \{a_\xi : \xi < \alpha\})$$

falls $a - \{a_\xi : \xi < \alpha\} \neq \emptyset$ und wir setzen $\beta := \alpha$ für das kleinste α mit $a - \{a_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$.

DIE VON-NEUMANN-HIERARCHIE

Die Von-Neumann-Hierarchie $\langle V_\alpha : \alpha \in On \rangle$ ist definiert durch

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi$

Aus dem Fundierungsaxiom ergibt sich:

$$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha.$$

Die Von-Neumann-Hierarchie umfasst also alle (puren) Mengen und ordnet diese gemäß der Schachtelungstiefe der Elementschaftsrelation. Die Stufe V_α der Hierarchie entspricht dabei gerade den typisierten Mengen von Russell vom Typ α.

DIE VON-NEUMANN-HIERARCHIE: EIGENSCHAFTEN

Die Stufen der Von-Neumann-Hierarchie haben z.T. interessante Abschlusseigenschaften:

- $(V_\omega, \in)$ enthält nur (erblich) endliche Mengen und ist ein Modell von ZF - (Un).
- Für jede Limeszahl $\lambda > \omega$ ist $(V_\lambda, \in)$ ein Modell von ZF - (ErsS).
- Die Frage, ob es ein α gibt, sodass $(V_\alpha, \in)$ ein Modell von ZF ist, hängt mit der Frage nach der Existenz sog. großer Kardinalzahlen zusammen.

  Die Existenz solcher großen Kardinalzahlen lässt sich - wegen des 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatzes - nicht in ZF(C) beweisen. Es lässt sich noch nicht einmal zeigen, dass die Annahme der Existenz equikonsistent zu ZF(C) ist.

5.5 Kardinalzahlen

KARDINALITÄT

- Zwei Mengen a und b haben die gleiche Kardinalität (oder sind gleichmächtig), falls es eine Bijektion $f : a \to b$ gibt.

  Wir schreiben dann $|a| = |b|$.

- Offensichtlich ist die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation.

  Anschaulich können wir daher die Kardinalzahlen als die Äquivalenzklassen der Gleichmächtigkeit definieren.

  Diese Äquivalenzklassen sind jedoch eigentliche Klassen, keine Mengen! Wir werden deshalb geeignete Repräsentanten dieser Gleichmächtigkeitsklassen auswählen.

  Dies erfordert jedoch das Auswahlaxiom!

KARDINALZAHLEN: IDEE

Formal werden wir die Kardinalzahlen über die Ordinalzahlen (d.h. als spezielle Ordinalzahlen) einführen.

Da Mengen desselben Ordnungstyps gleichmächtig sind, und da jeder Ordnungstyp einer Wohlordnung eine Ordinalzahl enthält, lässt sich so jeder *wohlgeordneten* Menge a eine Kardinalzahl κ_a mit $|a| = |\kappa_a|$ eindeutig zuordnen, indem wir κ_a als die kleinste (im Sinne der Ordnung $<$ (d.h. $\in$) auf On) Ordinalzahl α mit $|a| = |\alpha|$ wählen. (Dies geht ohne AC.)

Da wegen des (in ZFC gültigen) Wohlordnungssatzes jede Menge wohlgeordnet werden kann, wird so in ZFC jeder Menge ihre Kardinalzahl zugeordnet. Weiter folgt aus der Definition der Kardinalzahlen, dass die Klasse der Kardinalzahlen wohlgeordnet ist.

Im Folgenden führen wir Kardinalität und Kardinalzahlen detaillierter ein.

ENDLICHE MENGEN UND KARDINALITÄTEN

Wir nennen a endlich, falls $|a| = |n|$ für eine natürliche Zahl n gilt, und sagen in diesem Fall, dass a Kardinalität n hat.

Zur Erinnerung: Wir schreiben n für $\underline{n}$ und $\underline{n}$ hat gerade n Elemente.

Die Kardinalität endlicher Mengen lässt sich durch

$$|m| \leq |n| :\Leftrightarrow m < n$$

vergleichen.

Dies lässt sich auf natürliche Weise auf alle Kardinalitäten fortsetzen.

VERGLEICH VON KARDINALITÄTEN

Wir sagen, dass die Kardinalität von a kleiner-gleich der Kardinalität von b ist, $|a| \leq |b|$, falls es eine injektive Abbildung $f : a \to b$ gibt. Wir schreiben $|a| < |b|$, falls $|a| \leq |b|$ und $|a| \neq |b|$.

Dass durch $|a| < |b|$ eine partielle Ordnung auf den Kardinalitäten definiert wird, zeigt der folgende

SATZ VON CANTOR UND BERNSTEIN. Gilt $|a| \leq |b|$ und $|b| \leq |a|$, so gilt auch $|a| = |b|$.

Um zu zeigen, dass die Ordnung $|a| < |b|$ total ist, werden wir als nächstes den Begriff der Kardinalzahl $|a|$ einer (wohlgeordneten) Menge a präzisieren.

KARDINALITÄTEN WOHLGEORDNETER MENGEN

Ist a wohlgeordnet (via $<$), so nennen wir

$$|a| := \mu\, \alpha\, (|a| = |\alpha|)$$

die Kardinalzahl von a.

Bemerkungen und Beobachtungen:

- Wie man leicht sieht, hängt $|a|$ nicht von der gewählten Wohlordnung $<$ auf a ab, ist also wohldefiniert.
- Für endliches a der Größe n gilt: $|a| = |n| = n$.
- Da in ZFC jede Menge wohlgeordnet ist, lässt sich dort jeder Menge eine Kardinalzahl zuordnen. In ZFC sind also alle Kardinalitäten durch Kardinalzahlen, d.h. durch spezielle Ordinalzahlen beschreibbar. Die Klasse aller Kardinalzahlen ist (als Teilordnung der Ordinalzahlen) daher insbesondere (bezüglich $\in$) wohlgeordnet.

  Ordinalzahlen, die zugleich Kardinalzahlen sind, bezeichnen wir im Folgenden mit κ.

UNENDLICHE KARDINALZAHLEN I

Im Folgenden setzen wir das Auswahlaxiom AC voraus!

Die kleinste unendliche Kardinalzahl ist die Ordinalzahl ω. Mengen a mit $|a| = \omega$ heißen abzählbar, Mengen a mit $|a| > \omega$ überabzählbar.

Die Existenz überabzählbarer Mengen ergibt sich aus dem folgenden Satz von Cantor:

UNENDLICHE KARDINALZAHLEN II

SATZ VON CANTOR. Für alle Mengen a gilt, $|a| < |\mathcal{P}(a)|$.

BEWEIS. $|a| \leq |\mathcal{P}(a)|$ ergibt sich aus der Injektivität der Funktion $f : a \to \mathcal{P}(a)$ mit $f(a) = \{a\}$. Die Striktheit der Ungleichung zeigt man indirekt.

Widerspruchsannahme: Es gelte $|a| = |\mathcal{P}(a)|$.

Dann gibt es $g : a \to \mathcal{P}(a)$ surjektiv. Definiere

$$d = \{x \in a : x \notin g(x)\}.$$

Dann gilt $d \subseteq a$ d.h. $d \in \mathcal{P}(a)$. Wegen der Surjektivität von g gibt es also ein $x_d \in a$ mit $g(x_d) = d$.

Das ist aber unmöglich wegen:

$$x_d \in d \Leftrightarrow_{\text{Definition von } d} x_d \notin g(x_d) =_{\text{Wahl von } x_d} d$$

("Cantorsches Diagonalargument")

UNENDLICHE KARDINALZAHLEN III

- Wegen des Satzes von Cantor und der Wohlordnungseigenschaft von On gibt es zu jeder Kardinalzahl κ eine kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist. Wir bezeichnen diese mit κ^+.
- Weiter kann man leicht zeigen, dass für eine Menge *a* von Kardinalzahlen das Supremum *sup a* wiederum eine Kardinalzahl ist.
- Hiermit kann man die unendlichen Kardinalzahlen (durch eine transfinite Rekursion) wie folgt auflisten ($\aleph$ = Aleph):
  - $\aleph_0 := \omega$
  - $\aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$
  - $\aleph_\lambda := \sup\{\aleph_\xi : \xi < \lambda\}$ ($\lambda > 0$ Limeszahl)

Wie man leicht sieht gilt $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ für $\alpha < \beta$.

KARDINALZAHLARITHMETIK I

Die Arithmetischen Operationen $+$, $\cdot$ und x^y lassen sich kanonisch auf die unendlichen Kardinalzahlen fortsetzen. Diese stimmen jedoch nicht mit den bereits eingeführten Fortsetzungen auf den Ordinalzahlen überein, da z.B. die Summe zweier Kardinalzahlen anders interpretiert wird als die Summe zweier Ordinalzahlen:

- Die Summe zweier Wohlordnungen ist die Verkettung der Wohlordnungen.
- Die Summe der Kardinalitäten zweier disjunkter Mengen ist die Kardinalität der Vereinigung.

Im endlichen Fall stimmen diese Summenbegriffe überein, nicht aber im unendlichen Fall:

Z.B. ist $\omega +_{Kard} \omega = \omega$ (da die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist) aber (wie früher gezeigt) gilt $\omega +_{Ord} \omega \neq \omega$ (und $\omega +_{Ord} \omega$ ist keine Kardinalzahl).

Es gilt jedoch $|\alpha| +_{Kard} |\beta| = |\alpha +_{Ord} \beta|$.

KARDINALZAHLARITHMETIK II

Die Kardinalzahloperationen $+$, $\cdot$ und x^y sind definert durch:

- $|a| + |b| := |a \cup b|$ für a, b disjunkt
- $|a| \cdot |b| = |a \times b|$, wobei $a \times b = \{(x, y) : x \in a \;\&\; y \in b\}$.
- $|a|^{|b|} = |\{f : f : b \to a\}|$

  Insbesondere ist also $2^{|a|} = |\mathcal{P}(a)|$. Da man weiter die Potenzmenge der natürlichen Zahlen mit den rellen Zahlen definieren kann, gilt $|\mathbb{R}| = 2^{\mathbb{N}} = 2^{\omega}$.

Wie man unschwer zeigen kann, ist die Addition und Multiplikation auf den unendlichen Kardinalzahlen trivial:

- $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$

Die Exponentiation - und da schon der Spezialfall 2^κ - ist dagegen sehr interessant.

DIE KONTINUUMSHYPOTHESE

Die Einordnung von $2^{\aleph_\alpha}$ in die $\aleph$-Hierarchie ist in ZFC nicht möglich.

Wegen des Satzes von Cantor gilt $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Es ist aber nicht entscheidbar, ob die Gleichheit gilt.

VERALLGEMEINERTE KONTINUUMSHYPOTHESE (GCH). Für alle α gilt: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

KONTINUUMSHYPOTHESE (CH). $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ d.h. $|\mathbb{R}|$ ist die *kleinste* überabzählbare Kardinalzahl.

Sowohl CH wie GCH sind von ZFC unabhängig, d.h. ZFC + CH, ZFC + GCH, ZFC + $\neg$CH und ZFC + $\neg$GCH sind equikonsistent (Gödel 1938 und Cohen 1963).

RELATIVE KONSISTENZ VON AC UND CH

Den Nachweis von

$$\text{ZF konsistent } \Rightarrow \text{ZFC} + \text{CH konsistent}$$

hat Gödel (1938) - etwas vereinfacht dargestellt - wie folgt geführt:

- Ist ZF konsistent, so ist das durch die Von-Neumann-Hierarchie gegebene Mengenuniversum $V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ (wobei $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ und $V_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi$) ein Modell von ZF.
- Im Nachfolgeschritt der Definition dieser Hierarchie ersetzt Gödel nun die Potenzmenge der vorhergehenden Stufe durch die Menge der (in PL1 mit Parametern) definierbaren Teilmengen der vorhergehenden Stufe und erhält so die sogenannte konstruktible Hierarchie $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$.

  (Anschaulich: Es werden also nur die Teilmengen betrachtet, deren Existenz sich aus der Beschreibungssprache notwendigerweise ergibt, wogegen die Mengen, die unbeschreibbar sind, als nicht existent angenommen werden.)

RELATIVE KONSISTENZ VON AC UND CH (Forts.)

- Gödel zeigt dann, dass die Theorien ZF und ZF + $(V = L)$ equikonsistent sind, d.h. die Annahme $V = L$ relativ konsistent zu ZF ist.

  (Anschaulich: Ist ZF konsistent, so ist L ein Modell von ZF.)

- Die Struktur L lässt sich aber gut analysieren. So kann man relativ leicht zeigen, dass L wohlgeordnet ist und daher AC in L gilt; und (mit etwas mehr Mühe) kann man zeigen, dass die Kontinuumshypothese CH in L ebenfalls gilt.

- Also: ZF konsistent $\Rightarrow L \models \mathrm{ZF} + \mathrm{AC} + \mathrm{CH}$.

RELATIVE KONSISTENZ VON $\neg$AC UND $\neg$CH

Der Nachweis von

$$\text{ZF konsistent } \Rightarrow \text{ZF} + \neg\text{AC und ZF(C)} + \neg\text{CH konsistent}$$

wurde erst weit später von Cohen (1963) geführt.

Cohen hat hierzu die sog. Forcing -Methode eingeführt und hiermit generische Erweiterungen G des konstruktiblen Universums L eingeführt, in denen AC bzw. CH nicht gelten.

Die Forcing-Methode entwickelte sich zu einer der grundlegenden Techniken der Mengenlehre. Zahlreiche weitere Unabhängigkeits- oder Equikonsistenzergebnisse wurden mit dieser Methode erzielt.

LITERATURHINWEISE ZUR MENGENLEHRE

1. K. Gloede: Mengenlehre (Skript).
   www.math.uni-heidelberg.de/logic/skripten/mengenlehre/mengen.pdf
2. H.D. Ebbinghaus: Einführung in die Mengenlehre.
   BI-Wissenschaftsverlag.
3. Th. Jech: Set Theory. Springer

Eine Diskussion der Kontinuumshypothese im Rahmen der aktuellen Ergebnisse zur Mengenlehre findet sich in einem in zwei Teilen in den Notices der AMS erschienenen Artikel von W. Hugh Woodin aus dem Jahre 2001:

Teil 1: http://www.ams.org/notices/200106/fea-woodin.pdf

Teil 2: http://www.ams.org/notices/200107/fea-woodin.pdf

VORLESUNG ZUR MENGENLEHRE IM SoSe 2014

Prof. Dr. Kai Hauser:

Einführung in die Mengenlehre

2 V + 1 Ü

Zeit: voraussichtlich Fr 16.15-17.45 (Vorlesung; Übung n.V.)

Zielgruppe: Bachelor, Lehramt, Diplom (Mathematik)