

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

**ТЕОРИЯ РЕАКЦИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ТРЕХ ЧАСТИЦ
ВБЛИЗИ ПОРОГА***В. В. Анисович, А. А. Ансельм*

ВВЕДЕНИЕ

Реакции с образованием нескольких частиц интенсивно изучаются в последнее время экспериментально. Эти реакции служат пока единственным источником информации относительно амплитуд рассеяния нестабильных частиц. В частности, исследование их привело к обнаружению большого числа резонансов. Между тем способы теоретической интерпретации экспериментальных данных очень ограничены. Для обнаружения резонансов обычно анализируется, не согласуется ли спектр образующихся частиц с формулами Брейта — Вигнера или Ватсона — Мигдала¹⁻². В нерезонансной ситуации пытаются иногда использовать способ аналитического продолжения по переданному импульсу Чу и Лоу, требующий, однако, очень детальных экспериментальных данных. Последний метод дает в принципе возможность определять амплитуды рассеяния нестабильных частиц при любой энергии.

В настоящей работе мы рассмотрим еще один подход, позволяющий находить амплитуды рассеяния нестабильных частиц при нулевой энергии. Этот подход основан на исследовании процессов, связанных с образованием нескольких частиц вблизи порога. Оказывается, что в этом случае может быть развита последовательная теория, описывающая реакции с рождением частиц малой энергии через некоторое число неизвестных параметров и через амплитуды рассеяния пар образующихся частиц. Для случая рождения двух частиц эта теория представляет собой известную теорию эффективного радиуса дейтрона.

Мы будем интересоваться в основном реакциями с образованием трех частиц, хотя аналогичное рассмотрение может быть проведено и для большего числа частиц. Существование последовательной теории реакций с рождением частиц малой энергии представляется интересным и независимо от возможностей, связанных с определением амплитуд рассеяния пар частиц.

Первые шаги в создании описываемой ниже теории были сделаны, по существу, Г. В. Скорняковым и К. А. Тер-Мартиросяном³, рассмотревшим квантовомеханическую задачу о трех резонансно взаимодействующих частицах, и В. Н. Грибовым, изучавшим угловые корреляции в $K \rightarrow 3\pi$ -распаде⁴. Последняя работа В. Н. Грибова послужила основой для дальнейшего развития теории.

Вопросы, связанные с образованием трех частиц малой энергии, рассматривались далее рядом авторов⁵⁻¹⁰. Так как при этом понимание ситуации росло от работы к работе, в настоящее время изучение теории по оригинальным статьям кажется весьма затруднительным.

Именно это обстоятельство явилось основной причиной написания настоящего обзора.

В последние годы в литературе встречались работы, в которых близкие к рассматриваемым вопросы исследовались не вполне корректным образом. В самое последнее время рядом авторов²⁰⁻²² были отмечены ошибки, допущенные в более ранних работах. В рамках интересующего нас нерелятивистского порогового подхода результаты, содержащиеся в этих работах, большей частью перекрываются с результатами работ³⁻¹⁶. Мы позволим себе поэтому не останавливаться на этих работах.

Многие из изложенных ниже результатов были первоначально получены путем квантовомеханического рассмотрения. В дальнейшем более удобным оказался метод, основанный на изучении аналитических свойств амплитуд. С этой точки зрения мы и рассмотрим последовательно всю теорию реакций с рождением частиц вблизи порога.

В первом разделе работы приведены некоторые кинематические соотношения, полезные в дальнейшем. Во втором разделе рассмотрены общие вопросы, связанные с отбором существенных для нас диаграмм. Третий раздел посвящен иллюстрации развиваемого нами метода на примере реакции рассеяния двух частиц малой энергии. В четвертом разделе произведено разложение амплитуды рождения трех частиц по состояниям с различными полными угловыми моментами. Поскольку дальнейшие вычисления существенно связаны с использованием условия унитарности, в пятом разделе показано, как использовать условие унитарности для вычисления скачков амплитуд около интересующих нас особенностей. В шестом и седьмом разделах получено разложение амплитуды с полным моментом, равным нулю, по импульсам образующихся частиц с точностью до членов третьего порядка малости. В восьмом разделе рассмотрена амплитуда рождения трех частиц в состоянии с полным моментом, равным единице. Девятый раздел посвящен изучению реакций, в которых две из образующихся частиц взаимодействуют резонансно. В десятом разделе развитая теория применяется к некоторым конкретным реакциям ($\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi$, $\gamma + N \rightarrow N + \pi + \pi$ и $K \rightarrow 3\pi$ -распад). В настоящем обзоре мы почти не касаемся вопроса о реакциях с образованием трех резонансно взаимодействующих частиц (например, $N + D \rightarrow N + N + N$). Таким реакциям посвящены работы¹⁷⁻¹⁹, в которых имеются более подробные ссылки.

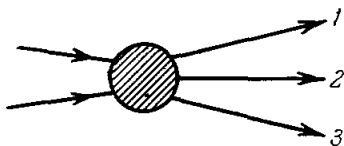


Рис. 1.

1. КИНЕМАТИКА

В настоящем разделе мы введем основные обозначения, употребляемые в дальнейшем, и выпишем ряд полезных кинематических соотношений. Амплитуда превращения двух частиц в три (рис. 1) зависит от пяти инвариантных переменных*), в качестве которых могут быть выбраны два переданных импульса и три относительные энергии частиц в конечном состоянии. Пусть p_1 и p_2 — 4-импульсы сталкивающихся частиц в системе центра масс, а k_1 , k_2 и k_3 — 4-импульсы образующихся частиц в этой же системе. Тогда относительные энергии трех частиц в конечном состоянии $\sqrt{s_{12}}$, $\sqrt{s_{13}}$ и $\sqrt{s_{23}}$ и переданные импульсы $\sqrt{-t_1}$ и

*) Это утверждение относится, строго говоря, к случаю нейтральных бесспиновых частиц. В дальнейшем мы убедимся, что наличие спина и изоспина не приводит к принципиальным осложнениям.

$\sqrt{-t_2}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} s_{12} &= (k_{10} + k_{20})^2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2, & t_1 &= (p_{10} - k_{10})^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1)^2, \\ s_{13} &= (k_{10} + k_{30})^2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)^2, & t_2 &= (p_{10} - k_{20})^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2)^2, \\ s_{23} &= (k_{20} + k_{30})^2 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где k_{i0} , p_{i0} и \mathbf{k}_i , \mathbf{p}_i — временные и пространственные компоненты k_i и p_i .

Все другие инвариантные переменные, характеризующие рассматриваемую амплитуду, могут быть выражены через пять выписанных инвариантов.

В нерелятивистском приближении, вблизи порога рождения частиц, величины s_{il} разлагаются в ряд по относительным импульсам образующихся частиц k_{il} :

$$\sqrt{s_{il}} \cong m_i + m_l + \frac{k_{il}^2}{2\mu_{il}}, \quad \mu_{il}^{-1} = m_i^{-1} + m_l^{-1}, \quad (2)$$

где m_i — массы частиц в конечном состоянии.

Кинетическая энергия E , выделяющаяся в реакции, связана с полной энергией $\sqrt{s} = [(p_{10} + p_{20})^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2]^{1/2}$ соотношением

$$\sqrt{s} = m_1 + m_2 + m_3 + E. \quad (3)$$

Из равенства $s = s_{12} + s_{13} + s_{23} - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2$ следует, что

$$E = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{k_{12}^2}{2\mu_{12}} + \frac{m_1 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{k_{13}^2}{2\mu_{13}} + \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}}. \quad (4)$$

Эта величина может быть также представлена в другой форме:

$$E = \frac{k_{12}^2}{2\mu_{12}} + \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}}, \quad \mu_{23}^{-1} = m_3^{-1} + (m_1 + m_2)^{-1}. \quad (5)$$

Переход от импульсов \mathbf{k}_{12} и \mathbf{k}_3 , например, к импульсам \mathbf{k}_{13} и \mathbf{k}_2 совершается по формулам

$$\mathbf{k}_2 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_{12}, \quad \mathbf{k}_{13} = -\frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} \mathbf{k}_3 + \frac{m_3}{m_1 + m_3} \mathbf{k}_{12}. \quad (6)$$

Другие аналогичные равенства получаются циклической перестановкой индексов.

Вблизи порога рождения выражения (1) для t_1 и t_2 с точностью до линейных членов по импульсам образующихся частиц могут быть переписаны в виде

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= t_1^{(0)} + 2p_1^{(0)} k_{1z_1}, \\ t_2 &= t_2^{(0)} + 2p_1^{(0)} k_{2z_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь $t_1^{(0)}$ и $t_2^{(0)}$ — пороговые значения инвариантов t_1 и t_2 , $p_1^{(0)}$ — абсолютная величина импульса \mathbf{p}_1 при пороговом значении энергии, z_1 и z_2 — косинусы углов между векторами \mathbf{p}_1 , \mathbf{k}_1 и \mathbf{p}_1 , \mathbf{k}_2 .

В дальнейшем часто будет удобно использовать вместо переменных k_{il} переменные

$$x_{il} = \frac{k_{il}}{\sqrt{2\mu_{il}E}}. \quad (8)$$

Кроме того, мы введем специальное обозначение для часто встречающейся комбинации из масс

$$\beta_1 = \frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} \quad (9)$$

(β_2 и β_3 определяются аналогичным образом). В этих обозначениях приведем полезное для дальнейшего соотношение между величинами x_{13} , x_{12} и z — косинусом угла между импульсом k_{12} (или x_{12}) и импульсом третьей частицы в системе центра тяжести частиц 1 и 2:

$$x_{13}^2 = (1 - \beta_1) x_{12}^2 + \beta_1 (1 - x_{12}^2) + 2z \sqrt{\beta_1 (1 - \beta_1) x_{12}^2 (1 - x_{12}^2)}. \quad (10)$$

2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОТБОРА ДИАГРАММ

Мы интересуемся амплитудой превращения двух частиц в три вблизи порога реакции, т. е. при условии, когда полная выделяющаяся кинетическая энергия гораздо меньше массы любой из частиц. В этом случае можно попытаться разложить амплитуду реакции в ряд по степеням $s_{ik} - s_{ik}^{(0)}$ и $t_i - t_i^{(0)}$, где $\sqrt{s_{ik}}$ и $\sqrt{t_i}$ инвариантные переменные (относительные энергии и переданные импульсы), от которых зависит амплитуда, а $\sqrt{s_{ik}^{(0)}}$ и $\sqrt{t_i^{(0)}}$ — их пороговые значения. Очевидно, что такому разложению препятствуют особенности амплитуды, находящиеся вблизи пороговых значений инвариантов. Однако после выделения этих особенностей амплитуду можно разложить в ряд по степеням $s_{ik} - s_{ik}^{(0)}$ и $t_i - t_i^{(0)}$. Под близкими особенностями амплитуды мы подразумеваем либо особенности, лежащие точно при пороговых значениях инвариантов, либо особенности, отстоящие от порога на расстояние, много меньшее квадрата массы любой из частиц. При этом, конечно, следует принимать во внимание особенности, расположенные как на физическом, так и на нефизическом листах. Остальные особенности («далекие особенности») расположены на расстояниях порядка квадрата масс частиц ($\sim m^2$), так что после выделения близких особенностей разложение производится, по существу, по степеням $(s_{ik} - s_{ik}^{(0)})/m^2$ и $(t_i - t_i^{(0)})/m^2$. Другими словами, после выделения близких особенностей мы имеем дело с разложением по степеням $(kr_0)^2$, где k — импульс любой из образовавшихся частиц, а r_0 — радиус взаимодействия.

Рассмотрим сначала особенности амплитуды, точно соответствующие пороговым значениям инвариантов. В этом простом случае положение и характер особенностей могут быть получены непосредственно из условия унитарности в s -канале (\sqrt{s} — полная энергия). Ситуация при этом проще, чем при получении кривых Ландау из условия унитарности, когда, как это было показано Мандельштамом, необходимо еще продолжение по переданному импульсу *).

Амплитуда реакции не имеет особенностей по переданным импульсам при пороговых значениях $t_i = t_i^{(0)}$, а появление особенностей по s и s_{il} связано с появлением новых членов в условии унитарности. Особенности возникают при значениях квадратов энергий s_{il} или s , равных квадратам сумм масс всевозможных промежуточных состояний. Если мы интересуемся особенностями, лежащими при пороговых значениях энергий, то нам следует рассмотреть те члены в условии унитарности, которые связаны промежуточными состояниями с теми же тремя частицами, что и в конечном состоянии. Этим членам в условии унитарности соответствуют фейнмановские диаграммы, символически изображенные на рис. 2.

*) Читатель, не знакомый с правилами Ландау²⁶ определения особенностей фейнмановских диаграмм, может сначала ознакомиться с приложением к настоящему обзору. В этом приложении дается простой вывод правил Ландау и выписываются конкретные формулы для случая треугольной диаграммы, используемые в дальнейшем.

Все другие диаграммы, не содержащие трехчастичного деления, не имеют особенностей на пороге рассматриваемой реакции (если, конечно, сумма масс каких-либо других частиц случайно не совпадает с $m_1 + m_2 + m_3$; этот случай мы не рассматриваем). Входящая в диаграмму рис. 2 амплитуда превращения трех частиц в три включает случаи, когда одна из частиц не взаимодействует с двумя другими (рис. 3).

В том случае, когда взаимодействие внутри шестихвостки реально имеет место между всеми тремя частицами, соответствующая фейнмановская диаграмма имеет трехчастичную особенность по квадрату полной энергии s при $s = (m_1 + m_2 + m_3)^2$ ($E = 0$). В случае вырожденной шестихвостки, изображенной на рис. 3, возникает двухчастичная особенность по s_{ik} при $s_{ik} = (m_1 + m_k)^2$ ($k_{il} = 0$). Ясно, что многие диаграммы могут иметь одновременно как ту, так и другую особенность. Такие диаграммы изображены, например, на рис. 4, б, г и е. Представим себе теперь, что мы выделили из диаграммы рис. 2 все возможные рассеяния пар частиц в конечном состоянии и превращения трех частиц в три.

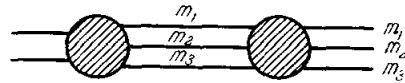


Рис. 2.

Тогда мы приходим к графикам, изображенным на рис. 4, где заштрихованные неприводимые блоки не содержат уже внутри себя превращений двух частиц в две или трех в три. Особые члены амплитуды получаются из этих диаграмм в том случае, когда все линии являются реальными ($q_i^2 = m_i^2$). Это, например, следует из правил Ландау (см. приложение). При этом при вычислении особых членов неприводимые блоки на рис. 3 входят на массовой поверхности, а поскольку они не содержат уже превращений двух частиц в две и трех в три, они не имеют особенностей при пороговых значениях своих инвариантов.

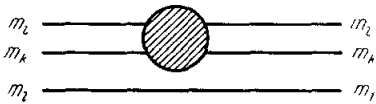


Рис. 3.

Вследствие этого мы в дальнейшем будем разлагать эти блоки в ряд по степеням отклонений инвариантов от пороговых значений. Постоянный член в блоке превращения двух частиц в две есть, очевидно, длина рассеяния в S -состоянии, а следующие члены связаны как с радиусом взаимодействия при S -рассеянии, так и с высшими парциальными волнами. Как будет видно из дальнейшего, если мы интересуемся не слишком высокими членами в разложении всей амплитуды по степеням $s_{ik} - s_{ik}^{(0)}$ и $t_i - t_i^{(0)}$, то и в разложении неприводимых блоков по своим инвариантам можно ограничиться несколькими членами.

До сих пор мы исследовали только особенности, находящиеся точно при пороговых значениях инвариантов. Реально нам интересны также другие близкие особенности, отстоящие от порога на расстояниях много меньших квадрата массы любой из частиц. К таким особенностям может приводить, во-первых, существование «составных частиц» с малой энергией связи (типа дейтрона). В частности, амплитуда реакции $\pi + D \rightarrow N + N + \pi$ имеет, например, близкие к порогу особенности по переданным импульсам, не связанные с диаграммами типа изображенных на рис. 4. Такие особенности возникают в диаграммах, показанных на рис. 5. В ситуациях такого рода следует, наряду с диаграммами типа рис. 4, учитывать также диаграммы, в вершинах которых происходят «почти реальные» превращения дейтрона в два нуклона. Ясно, что положения особенностей, связанных с этими последними диаграммами, будут находиться очень близко к физической области, так как энергия связи дейтрона мала.

Во-вторых, близкие особенности могут находиться на других листах, где они не определяются непосредственно условием унитарности. Для того чтобы эти особенности были расположены недалеко от физической области, они должны, конечно, находиться под разрезами, идущими либо из точки $s_{il} = (m_i + m_l)^2$ в плоскости s_{il} , либо из точки $s = (m_1 + m_2 + m_3)^2$ в плоскости s . Так как эти разрезы имеются только в диаграммах, изображенных на рис. 4, интересующие нас особенности

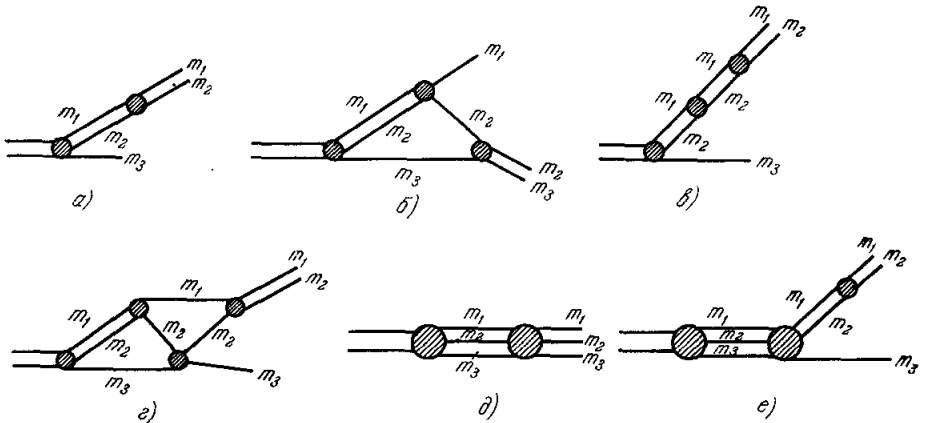


Рис. 4.

также могут возникать только в диаграммах типа рис. 4. Особенности, находящиеся на других нефизических листах, определяемых другими разрезами (связанными с далекими особенностями), не влияют, конечно, на разложение амплитуды около порога.

Мы приходим, таким образом, к следующему окончательному выводу. Чтобы правильно выделить особенности в разложении амплитуды превращения двух частиц в три вблизи порога, следует изучать диаграммы, связанные с рассеянием частиц и превращением трех частиц в три, типа изображенных на рис. 4.

При этом неприводимые блоки нужно заменять их разложением в ряд около пороговых значений инвариантов. При наличии слабо связанных частиц типа дейтрона следует еще учитывать графики с почти реальным распадом таких частиц. В перечисленных диаграммах содержатся все особенности, близкие к порогу, как на физическом, так и на нефизических листах.

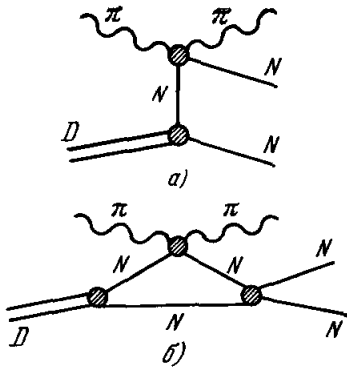


Рис. 5.

В заключение мы хотели бы подчеркнуть следующее важное обстоятельство. Поскольку все наши разложения сходятся в областях, определяемых положением «далеких» особенностей, совокупность рассмотренных диаграмм определяет амплитуду реакции в виде некоторого ряда по степеням $(kr_0)^2$, где r_0 — радиус взаимодействия, а k — импульс любой из образовавшихся частиц. При этом, конечно, подразумевается, что к вкладу выделенных диаграмм, содержащему особенность, добавляются аналитические члены (степени величин $s_{ik} - s_{ik}^{(0)}$ и $t_i - t_i^{(0)}$), возникающие как от рассмотренных диаграмм, так и от всех остальных графиков.

Как будет видно в дальнейшем, суммирование отобранных диаграмм приводит к появлению у амплитуды особенностей, положение которых связано не с эффективным радиусом взаимодействия r_0 , а с величиной амплитуды рассеяния пар частиц. Если эти амплитуды по порядку величины совпадают с r_0 , $a \sim r_0$ (нерезонансная ситуация), амплитуду реакции следует разложить еще по степеням (ka) . Фактически при этом оказывается возможным ограничиться лишь простейшими диаграммами, изображенными на рис. 4. Именно такая процедура и будет произведена в разделах 4—6 при вычислении членов разного порядка величины по пороговым импульсам. Если же $a \gg r_0$ (резонансный случай), как это, например, имеет место при рассеянии нуклонов малой энергии, то должны быть учтены все диаграммы типа рис. 4. Простейший пример такого рода (рассеяние двух частиц) приведен для иллюстрации в следующем разделе. В случае трех частиц мы приходим, вообще говоря, к уравнениям Скорнякова — Тер-Мартirosяна³, подробно исследованных Даниловым¹⁷. Детальное рассмотрение этих уравнений выходит за рамки настоящего обзора.

§3. РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ ВЕЛИЗИ ПОРОГА

Изложенные в предыдущем разделе соображения могут быть, конечно, без изменения распространены на случай произвольного числа частиц в конечном состоянии. Мы рассмотрим сейчас в качестве иллюстрации простейший случай рассеяния нуклонов нуклонами при низких энергиях и покажем, что правила отбора диаграмм, сформулированные в предыдущем разделе, немедленно приводят нас к хорошо известной теории эффективного радиуса Бете — Пайерлса.

Выражение для амплитуды низкоэнергетического нуклон-нуклонного рассеяния проще всего получить следующим образом. Парциальная амплитуда рассеяния $f_l(k) = k^{-1} \exp(i\delta_l) \sin \delta_l$ с моментом l удовлетворяет условию унитарности

$$\operatorname{Im} f_l = k |f_l|^2 \quad (k^2 > 0), \quad \operatorname{Im} f_l = 0 \quad (k^2 < 0).$$

Положив $h_l = -1/f_l$, имеем

$$\operatorname{Im} h_l = k \quad (k^2 > 0), \quad \operatorname{Im} h_l = 0 \quad (k^2 < 0),$$

т. е.

$$h_l = ik + \alpha_l(k^2). \tag{11}$$

Функция $\alpha_l(k^2)$ (вещественная часть h_l) должна быть аналитической функцией k^2 при $k^2 = 0$, поскольку в противном случае $\alpha_l(k^2)$ не могла бы быть вещественной функцией одновременно при $k^2 > 0$ и при $k^2 < 0$. Из (11) следует, что

$$f_l = -\frac{1}{ik + \alpha_l(k^2)} = \frac{\alpha_l(k^2)}{1 - ika_l(k^2)}, \quad \alpha_l(k^2) \equiv -\frac{1}{\alpha_l(k^2)}. \tag{12}$$

Очевидно, что при малых энергиях при S -рассеянии функция $\alpha_0(k^2)$ может быть заменена на константу $\alpha_0(0) = a_0$, представляющую собой амплитуду рассеяния нуклонов при нулевой энергии; тогда

$$f_0 = \frac{a_0}{1 - ika_0}. \tag{13}$$

Формула (13) дает хорошо известное выражение для амплитуды низкоэнергетического нуклон-нуклонного рассеяния. Если удержать следующий член в разложении функции $\alpha_0(k^2)$ по степеням k^2 , мы немедленно получим выражение для f_0 в приближении эффективного радиуса.

Покажем теперь, что диаграммы, изображенные на рис. 6, с нуклонами в промежуточном состоянии также приводят нас к формуле (13). Именно эти диаграммы имеют особенность при малой энергии нуклонов и поэтому, согласно сказанному в предыдущем разделе, должны быть рассмотрены для выделения особенности в амплитуде. При выделении особенности блоки, стоящие в вершинах диаграмм, могут быть разложены в ряд по степеням инвариантов, и в низшем приближении должны быть заменены на a_0 — амплитуду рассеяния при нулевой энергии.

Последнее условие приводит к тому, что вершины диаграмм рис. 6 становятся точечными, после чего вычисление становится особенно простым. Вычислим вклад

простейшей диаграммы, изображенной на рис. 6. Ее мнимая часть равна, очевидно, ka_0^2 , и, следовательно, весь график можно записать в виде дисперсионного интеграла

$$a_0^2 \frac{k^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k' dk'^2}{k'^2 (k'^2 - k^2 - i\epsilon)} = a_0^2 ik. \quad (14)$$

В формуле (14) сделано вычитание в точке $k^2 = 0$ и вычитательная константа не выписана, поскольку она относится к неособой части амплитуды. Легко, далее, заметить, что интегрирование по отдельным петлям в диаграммах высшего порядка, изображенных на рис. 6, производится независимо. Поэтому диаграмма, состоящая из n -петель, содержит слагаемое $a_0^{2n+1} (ik)^n$ и члены, связанные с интерференцией членов типа ika_0 с аналитическими членами. Всю амплитуду нуклон-нуклонного рассеяния (S -волна) можно записать в виде

$$f_0 = (ika_0) a_0 + (ika_0)^2 a_0 + (ika_0)^3 a_0 + \dots (15)$$

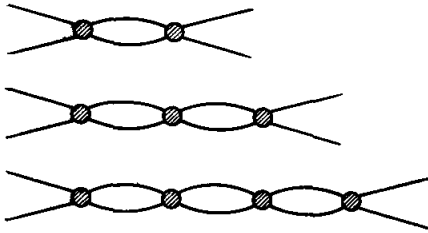


Рис. 6.

Выписанные члены представляют собой вклад диаграмм рис. 6, остальные члены происходят как от диаграммы рис. 6, так и от всех других диаграмм. Согласно сказанному в предыдущем разделе, при пренебрежении степенями $(kr_0)^2$ весь вклад невыписанных членов может быть заменен константой C . Величина $C = a_0$, так как, по определению, $f_0 = a_0$ при $k^2 = 0$. Суммируя геометрическую прогрессию (15), мы немедленно приходим к (13). В согласии со сказанным в конце предыдущего раздела, мы получим особенность при $k = 1/ia_0$. Найденный полюс может лежать на физическом листе при $a_0 < 0$, и тогда он соответствует существованию дейтрона; он может также находиться на физическом листе не при $a_0 > 0$, при этом он представляет собой синглетный виртуальный уровень в нуклон-нуклонной системе. Если бы величина a_0 была порядка r_0 , формулу (13) следовало бы переписать в виде

$$f_0 = a_0 (1 + ika_0).$$

Как и указывалось в предыдущем разделе, это выражение сводилось бы к вкладу (содержащему особенность) от простейшей диаграммы (см. рис. 6). Наконец, заметим, что учет аналитического члена $\sim k^2$ привел бы нас к приближению эффективного радиуса.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ПО СОСТОЯНИЯМ С РАЗЛИЧНЫМИ ПОЛНЫМИ УГЛОВЫМИ МОМЕНТАМИ

Во втором разделе указывалось, что реакции с образованием трех частиц делятся на два типа, изучение которых требует нескольких различных подходов. К одному типу относятся реакции, в которых в начальном состоянии присутствуют «составные частицы» типа дейтрона. В этом случае особенности по квадратам переданных импульсов — t_i расположены недалеко от физической области реакции, вблизи порога. В качестве примера приводилась реакция $\pi + D \rightarrow N + N + \pi$. К другому типу реакций, изучению которых и посвящена эта статья, относятся такие, у которых особенности по t_i лежат далеко от физической области (на расстояниях $\sim m^2$). В этом случае амплитуду рождения трех частиц можно разложить вблизи порога в ряд по степеням $t_i - t_i^0$ или же в ряд по $k_i z_i$ (см. формулу (7)):

$$A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2, t_1, t_2) = \sum_{p,s=0}^{\infty} T_{ps}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) (k_1 z_1)^p (k_2 z_2)^s. \quad (16)$$

Члены этого разложения с большими номерами p и s малы, так как разложение, по существу, ведется по степеням k_i/m .

Для дальнейшего ряд (16) оказывается удобным переписать в виде ряда по состояниям с различными полными угловыми моментами. Так

как в системе центра масс импульсы образовавшихся частиц удовлетворяют соотношению $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, они расположены в одной плоскости. Введем систему координат, в которой ось Z направлена перпендикулярно к этой плоскости, а ось X — вдоль вектора k_1 . Направление импульса падающих частиц p_1 характеризуется в этой системе координат двумя углами, ϑ и φ . z_1 и z_2 выражаются тогда через ϑ и φ следующим образом:

$$z_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z_2 = \sin \vartheta \cos (\varphi - \gamma), \quad (17)$$

где γ — угол между векторами k_1 и k_2 , выражающийся через энергии частиц в конечном состоянии.

Подставляя (17) в (16), мы получаем функцию углов ϑ и φ , которая может быть разложена в ряд по шаровым функциям $Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$:

$$A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2, t_1, t_2) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L A_{LM}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) Y_{LM}(\vartheta, \varphi). \quad (18)$$

Коэффициенты A_{LM} представляют собой амплитуды перехода с полным моментом L и проекцией M на ось Z .

Очевидно, что поскольку разложение полинома степени $p + s$ (от тригонометрических функций углов ϑ и φ) происходит лишь по шаровым функциям с $L \leq p + s$, коэффициенты A_{LM} выражаются через величины $T_{ps} k_1^p k_2^s$ с $p + s \geq L$. Это значит, что амплитуды A_{LM} порядка $(k_i/m)^L$, т. е. малы при больших L . Производя отражение в плоскости XOY и полное отражение системы координат, легко убедиться, что четность чисел L и M одинакова и A_{LM} выражаются через такие T_{ps} , у которых четность $p + s$ та же, что и четность L .

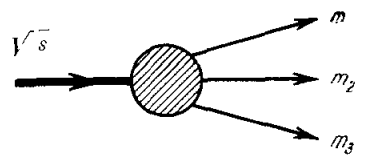


Рис. 7.

Амплитуды $A_{LM}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2)$ представляют собой, по существу, амплитуды распада частицы со спином L и массой, равной полной энергии падающих частиц \sqrt{s} . В соответствии с этим они графически могут быть изображены в виде диаграммы, показанной на рис. 7. В ближайших разделах мы подробно рассмотрим амплитуду $A_{00}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2)$, обозначаемую в дальнейшем через $A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2)$.

5. УСЛОВИЕ УНИТАРНОСТИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЧКОВ

При вычислении амплитуды реакции вблизи порога мы будем широко использовать условие унитарности. В простейшей форме условие унитарности для парциальных волн использовалось уже в разделе 3 для нахождения амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния.

В дальнейшем нам понадобятся также трехчастичное условие унитарности и выражения для скачков амплитуд, связанных с одной определенной особенностью. Мы приведем сейчас некоторые нужные нам соотношения.

Если, как обычно, вместо S -матрицы ввести T -матрицу, $S = 1 + iT$, то условие унитарности для S -матрицы $SS^+ = 1$ переписывается для T -матрицы в виде $-i(T - T^+) = TT^+$.

Удобно использовать инвариантные амплитуды M , связанные с матричными элементами T -матрицы соотношением

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_i - \sum p_f \right) \frac{M_{fi}}{\prod_n \sqrt{2\omega_n}}. \quad (19)$$

Здесь M_{fi} — амплитуда перехода из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$,

$\delta^4(\Sigma p_i - \Sigma p_f)$ — четырехмерная δ -функция, выражающая закон сохранения энергии-импульса, а ω_n — энергии, соответствующие всем начальным и конечным частицам. Легко видеть, что условие унитарности для амплитуд M_{fi} имеет тогда вид

$$\text{Im } M_{fi} = \sum_N \frac{1}{2(2\pi)^{3N-4}} \int d^4q_1 \dots d^4q_N \delta^4 \left(\sum p_i - \sum q_n \right) \delta(q_1^2 - m_1^2) \dots \dots \delta(q_N^2 - m_N^2) M_{fn} M_{in}^*, \quad (20)$$

где N — число частиц, а q_n — их 4-импульсы в промежуточном состоянии, M_{fn} и M_{in} — амплитуды перехода из промежуточного состояния в конечное и в начальное соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся двух- ($N=2$) и трехчастичные ($N=3$) условия унитарности. В первом из этих случаев (20) легко приводится к привычному виду

$$\text{Im } M_{fi} = \frac{q}{8\pi \sqrt{s}} \int \frac{d\Omega}{4\pi} M_{fn} M_{in}^*. \quad (21a)$$

Здесь \sqrt{s} — полная энергия двух частиц, q — величина импульса частиц в промежуточном состоянии в системе центра масс, а $d\Omega$ — элемент телесного угла импульса \mathbf{q} .

В случае, когда возможно только упругое рассеяние, вместо состояний с определенным импульсом часто удобно использовать состояния с определенным полным моментом l . Тогда вместо (21a) имеем

$$\text{Im } M_l = \frac{q}{8\pi \sqrt{s}} |M_l|^2. \quad (21b)$$

M_l с точностью до множителя совпадают, конечно, с парциальными амплитудами $f_l = e^{i\delta_l} \sin \delta_l / q$, где δ_l — фаза рассеяния. Поскольку $\text{Im } f_l = q |f_l|^2$, то

$$f_l = 8\pi \sqrt{s} M_l. \quad (22)$$

При нулевой энергии ($q = 0$) величина f_0 переходит в длину рассеяния частиц a_{12} . (Индексы 1 и 2 означают номера рассеивающихся частиц.) Если обозначить значение M_0 при нулевой энергии как g_{12} , то мы получим из (22) связь между g_{12} и a_{12} :

$$g_{12} = 8\pi (m_1 + m_2) a_{12}, \quad (23)$$

где m_1 и m_2 — массы рассеивающихся частиц. Величина g_{12} играет роль «заряда» в диаграммах Фейнмана, употребляемых нами в дальнейшем. Это значит, что вершинам диаграмм, в которых рассеиваются частицы 1 и 2, соответствует множитель $-i(2\pi)^4 g_{12}$.

В качестве примера мы приведем выражение для диаграммы, изображенной на рис. 8, необходимой нам в дальнейшем. Величина M_{fi} , соответствующая этой диаграмме, равна

$$-g_{12} g_{13} (q_1'^2 - m_1^2)^{-1} = -64\pi^2 (m_1 + m_2) (m_1 + m_2) (q_1'^2 - m_1^2)^{-1}, \quad (24)$$

где q_1' — импульс частицы в промежуточном состоянии.

Представим себе, что условие унитарности (20) содержит два члена, соответствующие двух- и трехчастичным промежуточным состояниям.

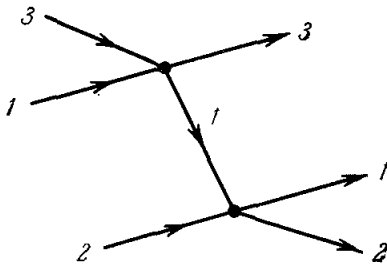


Рис. 8.

Рис. 8. Диаграмма Фейнмана, соответствующая амплитуде M_{fi} .

Амплитуда M_{ji} имеет тогда две пороговые особенности по квадрату полной энергии s в точках $s = (M_1 + M_2)^2$ и $s = (m_1 + m_2 + m_3)^2$ (рис. 9), где M_1, M_2 — массы частиц двухчастичного промежуточного состояния, а m_1, m_2, m_3 — массы частиц трехчастичного состояния. Пусть при этом $(m_1 + m_2 + m_3)^2 > (M_1 + M_2)^2$. Выражение (20) для мнимой части амплитуды M_{ji} при $s > (m_1 + m_2 + m_3)^2$ определяет одновременно скачок этой амплитуды при обходе обеих точек ветвления ($\text{Im } M_{ji}$ равна разности значений амплитуды M_{ji} в точках a и a' на рис. 9, a , деленной на $2i$). Для выделения особой части амплитуды, связанной, например, с трехчастичным порогом, нам понадобится в дальнейшем знание скачка на разрезе, начинающемся с трехчастичной особенности, т. е. разности значений амплитуды в точках b и b' (рис. 9, a). При этом мы интересуемся случаем, когда амплитуда берется на верхнем (физическом) берегу двухчастичного разреза. Чтобы показать возникающую ситуацию,

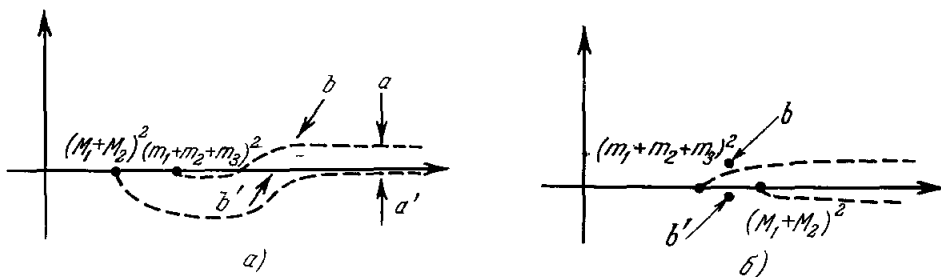


Рис. 9.

мы сдвинули на рис. 9, a часть двухчастичного разреза в нижнюю полуплоскость. Удобно найти этот скачок следующим образом. Продолжим аналитически амплитуду M_{ji} по массам M_1 и M_2 так, чтобы двухчастичный порог оказался правее трехчастичного $(M_1 + M_2)^2 > (m_1 + m_2 + m_3)^2$, как это показано на рис. 9, б. Тогда интересующий нас скачок в точках b и b' можно вычислить из условия унитарности, в котором остается одно трехчастичное деление. Амплитуды M^* , входящие в (20), представляют собой при этом значения амплитуд на нижнем берегу трехчастичного разреза, в точке b' . Условие унитарности (20) можно поэтому при $(m_1 + m_2 + m_3)^2 < s < (M_1 + M_2)^2$ переписать в виде

$$\frac{1}{2i} [M_{ji}(b) - M_{ji}(b')] = \frac{1}{2(2\pi)^5} \int d^4q_1 d^4q_2 d^4q_3 \times \\ \times \delta^4 \left(\sum p_i - \sum q_n \right) \delta(q_1^2 - m_1^2) \delta(q_2^2 - m_2^2) \delta(q_3^2 - m_3^2) M_{jn}(b) M_{in}(b'). \quad (25)$$

Выражение (25) записано в аналитической форме (не содержит знака комплексного сопряжения) и поэтому может быть продолжено непосредственно обратно в область $(M_1 + M_2)^2 < (m_1 + m_2 + m_3)^2$. Мы видим тогда, что интересующий нас скачок на трехчастичной особенности определяется интегралом обычного для условия унитарности вида по трехчастичному фазовому объему от произведения амплитуды M_{jn} , взятой на верхнем берегу обоих разрезов (в точке b на рис. 9, a), и амплитуды M_{in} , взятой на верхнем берегу двухчастичного разреза и на нижнем берегу трехчастичного разреза (в точке b' на рис. 9, a). Значение M_{in} в точке b' отличается от M_{in}^* , входящей в (20).

Мы рассмотрели для примера определенный случай наличия двух- и трехчастичной особенностей. Обобщение полученного правила для вычисления скачка на произвольной особенности совершенно очевидно.

В следующих разделах мы будем с помощью условия унитарности детально изучать диаграммы, связанные с рассеянием частиц в конечном состоянии. В качестве параметра во все выражения будет при этом входить константа λ — амплитуда рождения трех частиц при нулевой энергии. Величина λ может быть комплексной, однако легко видеть, что ее вещественная и мнимая части связаны условием унитарности. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать условие унитарности при энергии, точно соответствующей порогу реакции:

$$\text{Im } \lambda = e^{i\delta} \sin \delta \cdot \lambda^*. \quad (26)$$

Здесь δ — фаза рассеяния падающих (начальных) частиц при пороговой энергии в состоянии с полным угловым моментом, равным нулю. Трехчастичный член в условии унитарности исчезает на пороге из-за обращения в нуль фазового объема. Из (26) видно, что

$$\lambda = \rho e^{i\delta}, \quad (27)$$

где ρ — вещественное (положительное или отрицательное) число. Формула (27) иллюстрирует, по существу, правило Ферми для определения фаз матричных элементов.

6. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ЧЛЕНЫ В РАЗЛОЖЕНИИ АМПЛИТУДЫ С $L = 0$ ПО ПОРОГОВЫМ ИМПУЛЬСАМ

В настоящем разделе мы рассмотрим амплитуду $A_{00}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) \equiv A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2)$, соответствующую полному моменту, равному нулю, и вычислим ее с точностью до членов, квадратичных по k_{12} , k_{13} и k_{23} . При этом длины рассеяния пар образовавшихся частиц a_{12} , a_{13} и a_{23} будут считаться не слишком большими: $a_{ik} \ll r_0$ (r_0 — радиус взаимодействия). Иными словами, мы будем предполагать отсутствие резонансной ситуации в рассеянии образовавшихся частиц при нулевой энергии.

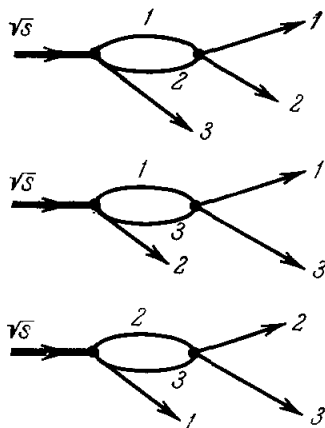


Рис. 10.

Рассмотрим вначале простейшие диаграммы рассеяния частиц в конечном состоянии, которые, как пояснялось в разделе 2, имеют особенности при пороговых значениях инвариантов. Мы изучим сейчас подробно аналитические свойства этих диаграмм, вычислим их, а затем покажем, что именно эти простейшие диаграммы вносят вклад в линейные и квадратичные по пороговым импульсам члены или, точнее говоря, в линейные и квадратичные члены, неаналитические вблизи порога.

Наиболее простые диаграммы связаны с однократным рассеянием частиц в конечном состоянии (рис. 10). При вычислении наибольших по пороговым импульсам особых частей этих диаграмм их вершины следует заменить на амплитуды рассеяния пар частиц при нулевой энергии a_{12} , a_{13} и a_{23} и величину λ — амплитуду превращения начальных частиц в три частицы при пороговом значении энергии. Эта процедура совершенно аналогична произведенной в разделе 3. Особая часть диаграмм рис. 10 может быть тогда вычислена таким же способом, что и вклад диаграмм, изображенных на рис. 6. Воспользовавшись результатом (14) третьего раздела, мы сразу

получаем особую часть диаграмм рис. 10

$$i\lambda_{12}k_{12} + i\lambda_{13}k_{13} + i\lambda_{23}k_{23}. \quad (28)$$

Перейдем теперь к рассмотрению диаграмм типа изображенной на рис. 11. Всего имеется, очевидно, шесть диаграмм подобного вида, отличающихся перестановкой частиц в конечном и промежуточном состояниях. Вершины рассматриваемой диаграммы снова представляют собой парные амплитуды рассеяния частиц при нулевой энергии и амплитуду рождения трех частиц с нулевой кинетической энергией. Диаграмма рис. 11 зависит от двух переменных, k_{12}^2 и $E = \sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3$. Для вычисления вклада диаграммы рис. 11, содержащего особенность по k_{12}^2 при малых k_{12}^2 , удобно воспользоваться дисперсионным соотношением по k_{12}^2 . Диаграмма рис. 11 является, по существу, «треххвосткой» с распадной массой \sqrt{s} . В этой ситуации трудно, вообще говоря, непосредственно написать дисперсионное соотношение по k_{12}^2 . Его можно, однако, получить, если исходить из простого дисперсионного соотношения по k_{12}^2 при малых значениях s и произвести затем аналитическое продолжение по этой переменной.

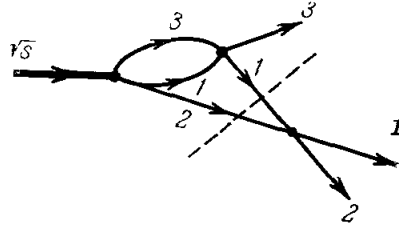


Рис. 11.

При малых s дисперсионное соотношение по k_{12}^2 имеет вид

$$I(k_{12}^2, E) = I(0, E) + \frac{k_{12}^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_1(k_{12}^2, E)}{k_{12}^2(k_{12}^2 - k_{12}^2 - ie)} dk_{12}^2, \quad (29)$$

где вычитательная константа $I(0, E)$ не зависит, конечно, от k_{12}^2 и поэтому не относится к особым по k_{12}^2 членам.

Диаграмма рис. 11, казалась бы, могла иметь, помимо тривиальных пороговых особенностей, особенности типа Ландау, соответствующие обращению в нуль всех фейнмановских знаменателей. Оговорим сразу же, что в рассматриваемом случае особенности Ландау на самом деле отсутствуют. Чтобы понять причину отсутствия этих особенностей, необходимо напомнить обычную ситуацию в треугольных диаграммах. При нормальных значениях двух внешних масс M_1 и M_2 треугольные диаграммы имеют обычно две особенности типа Ландау по третьей массе M_3 , расположенные на нефизическом листе. Эти особенности являются одновременно особенностями абсорбционной части по M_3 . При увеличении одной из внешних масс (например, M_1) одна из указанных особенностей абсорбционной части по третьей массе зацепляет контур интегрирования, в результате чего дисперсионное соотношение приобретает нетривиальный вид, а сама особенность амплитуды по M_3 выходит на физический лист. В случае диаграммы, изображенной на рис. 11, положения двух указанных особенностей по M_3 совпадают. На самом деле это и приводит к тому, что эти особенности сокращают друг друга. Это будет строго следовать из дальнейшего вычисления величины диаграммы рис. 11, а пока мы ограничимся следующим замечанием. Положение особенностей, о которых идет речь, определяется мандельштамовским соотношением (см. приложение) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1z_2z_3 - 1 = 0$ между тремя косинусами z_1, z_2, z_3 , связанными с массами в вершинах треугольной диаграммы. (Каждый косинус равен $(\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2)(2\mu_1\mu_2)^{-1}$, где μ_1 и μ_2 — массы внутренних линий, а μ_3 — масса наружной линии.)

Для диаграммы, изображенной на рис. 11, косинус, связанный с вершиной, в которой происходит рассеяние частиц 1 и 3, равен единице, в результате чего положение подозрительной для нас точки (соответствующей обычно наличию особенности Ландау) определяется соотношением

$$s_{12} = (m_1 + m_2)^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_3} [s - (m_1 + m_2 + m_3)^2]. \quad (30)$$

Мы видим, что независимо от того, является ли в действительности эта точка особой точкой абсорбционной части, она при увеличении s равномерно движется слева направо и не деформирует контур интегрирования в дисперсионном интеграле (29). Таким образом, дисперсионное соотношение (29) во всяком случае сохраняет свой вид, чем мы и воспользуемся в дальнейшем.

Перейдем теперь к вычислению абсорбционной части $I_1(k_{12}^2, E)$. Мы увидим сейчас, что она действительно не имеет особенности в точке, определяемой соотношением (30), однако при этом окажется, что $I_1(k_{12}^2, E)$ имеет вблизи порога другую особенность по k_{12}^2 (или s_{12}) неландауского типа, т. е. особенность, не соответствующую обращению в нуль знаменателей фейнмановской диаграммы¹⁰⁻²⁰. При малых значениях s $I_1(k_{12}^2, E)$ может быть получена с помощью условия унитарности в канале, где s_{12} является энергией:

$$I_1(k_{12}^2, E) = \frac{k_{12}}{\sqrt{s_{12}}} a_{12} (m_1 + m_2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{2} B(s'_{13}). \quad (31)$$

Нормировка написанного условия унитарности следует из (21) и (23); $B(s'_{13})$ есть амплитуда превращения начальных частиц в три частицы, изображенная на рис. 11 левее пунктирной линии. Она зависит, конечно, лишь от s'_{13} — квадрата полной энергии относительного движения частицы 3 в конечном состоянии и частицы 1 в промежуточном состоянии. z — косинус угла между импульсом третьей частицы в конечном состоянии в системе центра масс частиц 1 и 2 и относительным импульсом частиц 1 и 2 в промежуточном состоянии. Легко выписать связь между инвариантом s'_{13} и переменной z :

$$s'_{13} = m_1^2 + m_3^2 - \frac{(s_{12} + m_3^2 - s)(s_{12} + m_1^2 - m_2^2)}{2s_{12}} + \frac{z}{2s_{12}} \sqrt{[s_{12} - (m_1 + m_2)^2][s_{12} - (m_1 - m_2)^2][s - (\sqrt{s_{12} + m_3^2})^2][s - (\sqrt{s_{12} - m_3^2})^2]}. \quad (32)$$

Перейдем в (31) с помощью (32) к интегрированию по s'_{13} . Подынтегральная функция $B(s'_{13})$ имеет, очевидно, единственную особенность в плоскости s'_{13} при $s'_{13} = (m_1 + m_3)^2$ (рис. 12). Интегрирование по s'_{13} в выражении (31) при малых значениях s ($s < (\sqrt{s_{12} - m_3^2})^2$) ведется вдоль участка отрицательной полуоси между значениями s'_{13}^- и s'_{13}^+ (контур 1 на рис. 12, а). Чтобы получить правильное выражение при больших s , необходимо произвести аналитическое продолжение по s , приписывая к s (квадрату внешней массы) положительную мнимую добавку: $s \rightarrow s + i\epsilon$. При $s = (\sqrt{s_{12} - m_3^2})^2$ s'_{13}^- и s'_{13}^+ выходят в комплексную плоскость, и при $s > (\sqrt{s_{12} - m_3^2})^2$ интегрирование ведется между комплексно-сопряженными точками (контур 2 на рис. 12, а). Заметим, что точка $s = (\sqrt{s_{12} - m_3^2})^2$ не является особой, так как продолжение с $s \rightarrow s + i\epsilon$ дает здесь тот же результат, что и $s \rightarrow s - i\epsilon$. Это связано с тем, что

возникающее при этих двух продолжениях изменение направления интегрирования компенсируется изменением знака корня в множителе, связывающем dz и ds'_{13} . При $s = (\sqrt{s_{12} + m_3})^2$ пределы интегрирования s_{13}^+ и s_{13}^- попадают на разрез функции $B(s'_{13})$, идущий от точки $(m_1 + m_3)^2$ вдоль положительной части вещественной оси. При этом s_{13}^+ попадает на верхний берег разреза, а s_{13}^- — на нижний берег, и контур интегрирования охватывает разрез, как это показано на рис. 12, а контуром 3. Как легко видеть из (34), точка совпадения s_{13}^+ и s_{13}^- в плоскости s'_{13} всегда лежит правее $(m_1 + m_3)^2$, если только, как это и предполагается, $s_{12} > (m_1 + m_2)^2$. Точка $s = (\sqrt{s_{12} + m_3})^2$ является особой, так как при продолжении с $s \rightarrow s + i\epsilon$ верхний предел интегрирования s_{13}^+ движется при дальнейшем увеличении s вдоль вещественной оси направо, а s_{13}^- — налево (рис. 12, б, контур 4), тогда как после обхода точки $s = (\sqrt{s_{12} + m_3})^2$ с отрицательной мнимой добавкой ($s \rightarrow s - i\epsilon$) s_{13}^+ движется налево, а s_{13}^- — направо. Кроме того, при таких продолжениях возникают разные

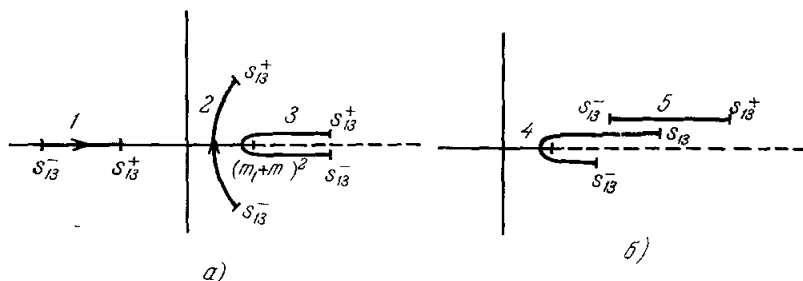


Рис. 12.

знаки в множителе, связывающем dz с ds'_{13} (разный знак корня $\sqrt{s - (\sqrt{s_{12} + m_3})^2}$). В отсутствие разреза у функции $B(s'_{13})$ изменение знака корня компенсировало бы перестановку пределов интегрирования, как это и имело место в точке $s = (\sqrt{s_{12} - m_3})^2$. Однако из-за наличия разреза у $B(s'_{13})$ обход точки $s = (\sqrt{s_{12} + m_3})^2$ с положительной и отрицательной мнимыми добавками приводит к разным результатам, и поэтому точка $s = (\sqrt{s_{12} + m_3})^2$ оказывается особой. При дальнейшем возрастании s точка s_{13}^- обходит начало разреза $(m_1 + m_3)^2$ и попадает на верхний берег, после чего контур интегрирования принимает вид 5 на рис. 12, б. Точка s_{13}^- совпадает с началом разреза как раз при s , определяемом соотношением (30). Соответствующее (30) значение s могло бы быть, вообще говоря, особой точкой абсорбционной части (совпадение конца контура интегрирования с особой точкой подынтегральной функции). Как уже отмечалось, эта точка не оказывается на самом деле особой, что будет непосредственно видно из явного выражения для абсорбционной части, полученного ниже.

Перейдем теперь к непосредственному вычислению $I_1(k_{12}^2, E)$. Функция $B(s'_{13})$, входящая под интеграл (34), содержит некоторую постоянную часть, линейную по k'_{13} часть и члены более высокого порядка по k'_{13} . Постоянное слагаемое в $B(s'_{13})$ приведет нас снова к выражению (23), так что учет этого члена сведется, по существу, к перенормировке константы λ . Коль скоро под последней подразумевается уже наблюдаемая величина амплитуды рождения трех частиц при нулевой энергии, постоянный член в $B(s'_{13})$ должен быть отброшен. Мы рассмотрим сейчас линейный по k'_{13} член в $B(s'_{13})$. Легко видеть из последующих вычислений,

что члены более высокого порядка по k'_{13} в $B(s'_{13})$ приводят к членам более высокого порядка по пороговым импульсам в окончательном выражении для амплитуды. С указанной точностью $B(s'_{13})$ следует заменить величиной (см. формулу (28))

$$B(s'_{13}) = i\lambda a_{13} k_{13}. \quad (33)$$

Переходя к нерелятивистскому приближению с помощью формул раздела 1 в выражении (32), мы получим связь между k'_{13} и z . Эта связь выражается соотношением (10) раздела 1, где $x_{13} = k_{13}/\sqrt{2\mu_{13}E}$ следует заменить на $x'_{13} = k'_{13}/\sqrt{2\mu_{13}E}$. Подставляя (33) в (31), имеем

$$\begin{aligned} I_1(x_{12}^2, E) &= \int_{x_{13}^-}^{x_{13}^+} dx'_{13} x_{13}^2 i\lambda a_{12} a_{13} \sqrt{\frac{\mu_{12}\mu_{13}}{\beta_1(1-\beta_1)}} \frac{E}{\sqrt{1-x_{12}^2}} = \\ &= i\lambda a_{12} a_{13} E \frac{2\sqrt{\beta_1\mu_{12}\mu_{13}} x_{12}}{\sqrt{1-x_{12}^2}} \left(1 + \frac{1-4\beta_1}{3\beta_1} x_{12}^2\right), \quad (34) \\ x_{13}^\pm &= \sqrt{\beta_1(1-x_{12}^2)} \pm \sqrt{(1-\beta_1)x_{12}^2}. \end{aligned}$$

Пределы интегрирования $x_{13}^\pm = \sqrt{\beta_1(1-x_{12}^2)} \pm \sqrt{(1-\beta_1)x_{12}^2}$ в интеграле (34) получены следующим образом. Интегрирование по z непосредственно сводится к интегрированию по x'_{13} в пределах $(\sqrt{\beta_1(1-x_{12}^2)} \pm \sqrt{(1-\beta_1)x_{12}^2})^2$. При переходе к интегрированию по x'_{13} возникает вопрос о выборе знака корня при определении новых пределов интегрирования. Этот выбор должен быть сделан в соответствии с описанным выше аналитическим продолжением условия унитарности по s (см. рис. 12). Из этого продолжения, в частности, видно, что при больших s (большие E , малые x_{12}) оба предела интегрирования по x'_{13} лежат на верхнем берегу разреза, в соответствии с чем оба предела интегрирования по x'_{13} должны быть положительны. Это условие и выполнено в интеграле (34).

Выражение (34) для абсорбционной части $I_1(x_{12}^2, E)$ имеет особенность при $x_{12}^2 = 1$, т. е. при $k_{12}^2 = 2\mu_{12}E$. Эта особенность, как уже упоминалось, имеет неландауский характер и соответствует попаданию на разрез концов интегрирования для абсорбционной части (положение этой особенности было приведено раньше в виде $s = (\sqrt{s_{12} + m_3})^2$. Полученная особенность расположена на границе физической области, в точке, где импульс третьей частицы обращается в нуль. С другой стороны, как и утверждалось ранее, (34) не содержит характерной особенности типа Ландау, соответствующей обращению в нуль всех знаменателей фейнмановской диаграммы. Такая особенность, если бы она имелась, должна была бы находиться при значении s_{12} , определенном формулой (30), т. е. при $x_{12}^2 = \beta_2$.

Для вычисления особого вклада в амплитуду от диаграммы рис. 11 выражение (34) должно быть теперь подставлено в дисперсионный интеграл (29). При этом возникает вопрос о правильном обходе особенности $k_{12}^2 = 2\mu_{12}E$ ($x_{12}^2 = 1$) при интегрировании по k_{12}^2 . Выражение (34) справедливо, очевидно, как при $E > 0$, так и при $E < 0$, когда особенность $k_{12}^2 = 2\mu_{12}E$ лежит вне контура интегрирования. Правильным аналитическим продолжением из области $E < 0$ в область $E > 0$ будет продолжение, при котором к E приписывается положительная мнимая добавка (поскольку E играет роль внешней массы). Поэтому особенность $k_{12}^2 = 2\mu_{12}E$ оказывается расположенной выше контура интегрирования по k_{12}^2 .

Если подставить (34) в (29), легко видеть, что возникающий интеграл расходится логарифмически. Эта расходимость возникла от разложения абсорбционной части по степеням k_{12}^2 , точное же выражение обрезало бы интеграл на величине k_{12}^2 порядка масс частиц. Уточнить характер этого обрезания, исходя из вида конкретной диаграммы, бессмысленно, так как обрезание может происходить также, например, за счет убывания точных амплитуд, замененных нами на константы в вершинах диаграммы. С другой стороны, два результата, полученные при различных обрезаниях, отличаются друг от друга на величину Ck_{12}^2 , где C — некоторая константа. Члены такого типа носят аналитический характер, они содержатся в большом числе диаграмм и, согласно развиваемому подходу, не могут быть вычислены, а должны быть добавлены к амплитуде с произвольным коэффициентом. В силу сказанного, мы обрежем интеграл (29) при $k_{12}^2 \sim m$, где m — величина порядка масс встречающихся в реакции частиц.

Учитывая сделанные замечания, можно довольно просто выполнить интегрирование (29), что приводит нас к следующему выражению для особых по k_{12}^2 членов, связанных с диаграммой рис. 11:

$$I(x_{12}^2, E) - I(0, E) = -2\lambda a_{12}a_{13}E \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} \left[\frac{2x_{12} \arccos x_{12}}{\pi \sqrt{1-x_{12}^2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\beta_1 + \frac{1-4\beta_1}{3} x_{12}^2 \right) - \frac{1-4\beta_1}{3\pi} x_{12}^2 \left(\ln \frac{m}{E} + i\pi \right) \right]. \quad (35)$$

Итак, мы выделили из полного вклада в амплитуду диаграммы рис. 11 члены, содержащие особенность по k_{12}^2 . Первые члены в (35) имеют, как видно, характерную корневую пороговую особенность при $k_{12}^2 = 0$ и любопытную особенность по k_{12}^2 при $k_{12}^2 = 2\mu_{12}E$, находящуюся, однако, на нефизическом листе, связанном с разрезом, идущим от точки $k_{12}^2 = 0$. В самом деле, при $x_{12} > 0$ (на верхнем берегу разреза) при $x_{12}^2 \rightarrow 1$ $\arccos x_{12}$ ведет себя как корень $\sqrt{2(1-x_{12}^2)}$, который сокращается с корнем в знаменателе. Однако на нижнем берегу разреза, где $x_{12} < 0$, при $x_{12}^2 \rightarrow 1$ $\arccos x_{12} \rightarrow \pi$, и мы имеем особенность типа $(1-x_{12}^2)^{-1/2}$. Последний член в (35) не содержит особенности по k_{12}^2 , хотя и имеет особенность при $E = 0$ типа $k_{12}^2 \ln E$. Включение этого члена в (35) несколько условно и оправдано тем, что следующей нашей задачей как раз является выделение в диаграмме рис. 11 членов, содержащих особенность по полной энергии E . Мы увидим сейчас, что, кроме последнего члена в (35), подобный вклад содержится и в вычитательной константе $I(0, E)$. Этот вклад имеет характер $E \ln E$ и отражает наличие обычной логарифмической особенности по полной энергии, связанной с трехчастичным промежуточным состоянием.

Для вычисления $I(0, E)$ (или, точнее, выделения особого вклада) удобно воспользоваться трехчастичным условием унитарности в канале, где E является энергией (рис. 13). При этом нас интересует, конечно, скачок только на трехчастичном разрезе (напомним, что λ имеет «собственную комплексность», связанную с рассеянием частиц в начальном состоянии (см. формулу (27)). Этот скачок определяется согласно (25) выражением

$$I_2(0, E) = -\frac{1}{\pi^3} \lambda a_{12}a_{13} (m_1 + m_2)(m_1 + m_3) \int \frac{d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3}{q_1^2 - m_1^2} \times \\ \times \delta^4(q_1 + q_2 + q_3 - P) \delta(q_1^2 - m_1^2) \delta(q_2^2 - m_2^2) \delta(q_3^2 - m_3^2). \quad (36)$$

Обозначения в этой формуле достаточно очевидны. Смысл 4-импульсов q_1, q_2, q_3, q_1 и P поясняется рис. 13. Импульс P имеет только временную компоненту, равную $p_0 = \sqrt{s} \approx m_1 + m_2 + m_3 + E$. В формуле (36) учтен лишь вклад от разреза, показанного на рис. 13 пунктирной линией. Вклад в трехчастичный скачок, связанный с делением, показанным волнистой линией, отсутствует, так как относительный импульс частиц 1 и 2 равен нулю. Нормировочный множитель в (36) получается из (25) и (24).

Вычисление интеграла (36), хотя и несколько громоздко, но вполне элементарно. Удобно, например, поступать следующим образом. Выполнив интегрирование с помощью четырехмерной δ -функции по $d^4 q_3$, можно

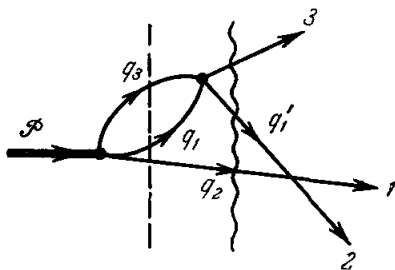


Рис. 13.

произвести последующие интегрирования по $d^4 q_1$ в системе центра масс частиц 1 и 3. Эти интегрирования дают тогда двухчастичный фазовый объем частиц 1 и 3. После этого удобно ввести дополнительное интегрирование по массе (полной энергии) частиц 1 и 3: $\delta((q_1 + q_3)^2 - m_{13}^2) dm_{13}$, и выполнить интегрирование по $d^4 q_2$ в общей системе центра масс. При этом интегрирование $d^4 q_2 \delta(q_2^2 - m_2^2) \delta((P - q_2)^2 - m_3^2)$ есть снова интегрирование по двухчастичному фазовому объему

частиц с массами m_2 и m_{13} . Выполняя в конце последнее интегрирование по dm_{13} , можно прийти к следующему результату, при получении которого сделан, разумеется, переход к нерелятивистскому приближению:

$$I_2(0, E) = \lambda a_{12} a_{13} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} \frac{1}{3} (1 + 2\beta_1) E. \quad (37)$$

Выражение (37) позволяет получить особую часть функции $I(0, E)$ по $E_{\perp} s^{\perp}$ помощью дисперсионного соотношения:

$$I(0, E) - I(0, 0) = \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} dE' \frac{I_2(0, E')}{E'(E' - E - i\epsilon)}. \quad (38)$$

Вычитательная константа $I(0, 0)$ дает вклад лишь в амплитуду процесса при нулевой энергии. Это постоянное слагаемое должно быть включено в λ , наблюдаемое значение амплитуды рождения трех частиц при нулевой энергии. Учитывая это, мы опустим $I(0, 0)$ и приведем лишь выражение для $I(0, E)$, содержащее особенность по E . При подстановке (37) в (38) возникает логарифмически расходящийся интеграл. Мы обрежем его на величине порядка масс частиц m , исходя из тех же соображений, что и при получении формулы (35) из дисперсионного интеграла (29). Таким образом, имеем

$$I(0, E) = \lambda a_{12} a_{13} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} \frac{1}{3} (1 + 2\beta_1) \frac{E}{\pi} \left(\ln \frac{m}{E} + i\pi \right). \quad (39)$$

Последний член в (39) не содержит особенности по E и включен поэтому в (39) несколько условно. Мы увидим, однако, что подобные мнимые аналитические члены, в отличие от вещественных членов в $I(0, E)$, возникают в рассматриваемой задаче лишь от графиков, связанных с многократным рассеянием частиц, и поэтому их выписывание имеет однозначный смысл.

Мы вычислили линейные (формула (28)) и квадратичные (формулы (35) и (39)) по пороговым импульсам неаналитические члены, связанные с диаграммами, изображенными на рис. 10 и 11. При этом под квадратичными членами подразумеваются также члены порядка $E \ln E$ (или $k_{12}^2 \ln E$). Мы разясним сейчас, почему найденные нами неаналитические линейные и квадратичные члены возникают в амплитуде лишь от диаграмм рассмотренного типа (трех диаграмм рис. 10 и шести диаграмм, аналогичных изображенной на рис. 11). Напомним в первую очередь, что неаналитические члены могут возникать лишь в диаграммах, связанных с рассеянием образовавшихся частиц. Если мы рассмотрим диаграммы, связанные с двукратным рассеянием какой-либо пары частиц (рис. 14, а), и будем выделять линейные члены из обеих петель, то легко видеть, что их вклад равен $-\lambda k_{12}^2 a_{12}$, что представляет собой аналитическое выражение по k_{12}^2 . Поэтому вклад от таких диаграмм не может быть отделен от других аналитических членов. Рассмотрим далее диаграммы, связанные с большим числом рассеяний (например, диаграмма рис. 14, б,

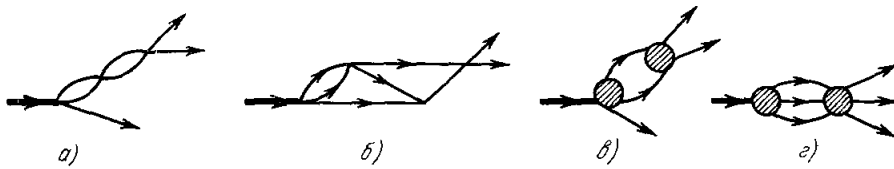


Рис. 14.

где образовавшиеся частицы перерассеиваются трижды). Из приведенных в настоящем разделе вычислений видно, в сущности, что каждое добавочное рассеяние приводит к лишней степени порогового импульса в выражении для амплитуды. Так, диаграммы рис. 10 дают линейные члены, а диаграмма, изображенная на рис. 11, приводит к квадратичным членам. В следующем разделе мы убедимся, что диаграммы с трехкратным рассеянием (например, рис. 14, б) дают кубические члены. Причина этого факта вполне понятна. Каждое дополнительное рассеяние дает лишнюю степень импульса в абсорбционную часть диаграммы. Этот импульс представляет собой, по существу, фазовый объем рассеивающихся частиц около порога. При восстановлении особых членов в амплитуде по абсорбционной части в дисперсионном интеграле существенна всегда область малых импульсов (или энергии), так как большие импульсы интегрирования дают лишь аналитические члены. Иными словами, в любом дисперсионном интеграле можно сделать достаточное число вычитаний, чтобы при малых внешних импульсах оказались существенными малые импульсы интегрирования. Возникающий же вычитательный полином дает аналитическую зависимость, и члены такого типа все равно включаются отдельно. Таким образом, мы приходим к выводу, что диаграммы с большим числом актов рассеяния (например, типа рис. 14, б) не вносят вклада в неаналитические линейные и квадратичные члены.

Особые члены могут возникать в диаграммах, описывающих рассеяние частиц, в которых блоки рассеяния или превращения в три частицы не заменены на константу. Символически одна из диаграмм такого типа изображена на рис. 14, в. Разложим входящие в диаграмму блоки в ряд по степеням отклонений соответствующих инвариантов от пороговых значений (напомним, что после выделения всех рассеяний эти блоки зависят вблизи порога от своих инвариантов аналитическим образом). Постоянные

члены в этих разложениях приводят нас как раз к одной из учтенных нами диаграмм, изображенной на рис. 10. Следующие слагаемые дают в абсорбционную часть по меньшей мере кубические по пороговым импульсам члены. Как уже разъяснялось, соответствующие неаналитические члены в самой амплитуде оказываются при этом также по крайней мере кубическими.

Наконец, обратимся к рассмотрению диаграммы, изображенной на рис. 14, з, включающей блок превращения трех частиц в три. Напомним, что диаграммы такого типа содержат неаналитические вблизи порога члены независимо от того, имеется ли в них рассеяние пар частиц. Если блок превращения трех частиц в три является константой, то абсорбционная часть такой диаграммы порядка E^2 (фазовый объем трех частиц вблизи порога), а сама амплитуда содержит неаналитический член порядка $E^2 \ln E$. Иными словами, в этом случае диаграмма вносит вклад лишь

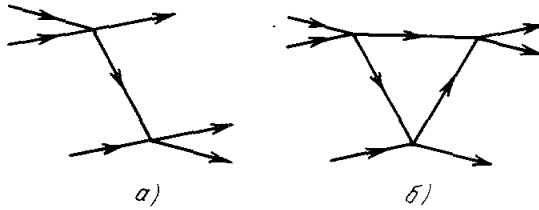


Рис. 15.

в члены четвертого порядка малости по пороговым импульсам. Блок превращения трех частиц в три может, однако, обращаться в бесконечность при малых импульсах частиц. Это имеет место, например, если амплитуда превращения трех частиц в три имеет полюсный характер (рис. 15, а). В этом случае мы приходим к изученной нами диаграмме рис. 11. Поскольку величина полюсной «шестихвостки» порядка E^{-1} , величина абсорбционной части оказывается порядка E , как это и было видно из формул (34) и (37). Вся амплитуда также оказывается порядка E (или $E \ln E$). Амплитуда превращения трех частиц в три может обращаться в бесконечность и более медленным образом. Как видно из следующего раздела, «шестихвостка», изображенная на рис. 15, б, вблизи порога будет порядка $E^{-1/2}$. Соответственно вклад в амплитуду от диаграммы рис. 14, б, включающей такую «шестихвостку», как уже упоминалось, порядка $E^{3/2}$. Поскольку амплитуда превращения трех частиц в три не может обращаться в бесконечность быстрее чем E^{-1} , для вычисления амплитуды с квадратичной точностью нам оказывается достаточным рассматривать диаграммы вида рис. 11.

Мы можем теперь привести полное выражение для амплитуды с точностью до квадратичных по пороговым импульсам членов. Из сказанного выше видно, что это выражение получается из вклада трех диаграмм, изображенных на рис. 10 (линейные члены), шести диаграмм типа диаграммы, изображенной на рис. 11 (квадратичные неаналитические члены) и аналитических членов следующего вида: λ (амплитуда реакции при пороговой энергии) и $\alpha_3 k_{12}^2, \alpha_2 k_{13}^2, \alpha_1 k_{23}^2$. Последние члены представляют собой аналитические квадратичные члены, которые должны быть добавлены к амплитуде с некоторыми неизвестными коэффициентами. Поскольку эти члены характеризуют вклад далеких особенностей, коэффициенты по порядку величины равны λ/m^2 , где m — величина порядка масс частиц, встречающихся в реакции. В соответствии с этим мы положим $\alpha_i = \lambda C_i$, где $C_i \sim 1/m^2$. Таким образом, имеем

$$A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) = \lambda [1 + ik_{12}a_{12} + ik_{13}a_{13} + ik_{23}a_{23} + a_{12}a_{13} (I_1(x_{12}, E) + I_1(x_{13}, E)) + a_{12}a_{23} (I_2(x_{12}, E) + I_2(x_{23}, E)) + a_{13}a_{23} (I_3(x_{23}, E) + I_3(x_{13}, E)) + C_1 k_{23}^2 + C_2 k_{13}^2 + C_3 k_{12}^2]. \quad (40)$$

и

$$I_\alpha(x, E) = -2E \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} \left\{ \frac{2x \arccos x}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[\beta_\alpha + x^2 \frac{1-4\beta_\alpha}{3} \right] - \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{m}{E} + i\pi \right) \left[\frac{1}{6} (1 - 2\beta_\alpha) + x^2 \frac{1-4\beta_\alpha}{3} \right] \right\}. \quad (41)$$

Напомним, что $x_{il} = k_{il} / \sqrt{2\mu_{il}E}$, а, например, $\beta_1 = m_1(m_1 + m_2 + m_3) \times (m_1 + m_2)^{-1}(m_1 + m_3)^{-1}$. Выражение для $I_1(x_{12}, E)$ было получено в формулах (35) и (39), в которых $I_1(x_{12})$ обозначалось как $I(x_{12}^2, E)$.

В формуле (40) содержатся три неопределенные константы C_1, C_2, C_3 , кроме того, в каждый из $I_\alpha(x, E)$ входит член вида $E \ln m$, так что $\ln m$ также есть некоторая неопределенная константа. Поскольку, однако, E представляет собой сумму квадратов k_{12}^2, k_{13}^2 и k_{23}^2 (формула (4)), выражение (40) содержит, по существу, только три неопределенные константы.

Из формулы (40) немедленно следует выражение для дифференциального сечения реакции:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Gamma} = & |\lambda|^2 \{ 1 + 2a_{12}a_{13} |k_{12}k_{13}| + I_1(x_{12}, E) + I_1(x_{13}, E) \} + \\ & + 2a_{12}a_{23} |k_{12}k_{23}| + I_2(x_{12}, E) + I_2(x_{23}, E) \} + 2a_{13}a_{23} |k_{13}k_{23}| + I_3(x_{13}, E) + I_3(x_{23}, E) \} + \\ & + 2C_1 k_{23}^2 + 2C_2 k_{13}^2 + 2C_3 k_{12}^2, \\ d\Gamma = & \delta \left(\frac{k_{12}^2}{2\mu_{12}} + \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}} - E \right) d^3k_{12} d^3k_{23}. \end{aligned} \quad (42)$$

Элемент фазового объема $d\Gamma$ можно, разумеется, представлять в другой форме, например, $d\Gamma \sim dk_{12}^2 dk_{13}^2$ или $d\Gamma \sim k_{12}^2 dk_{12} d\Omega_{k_{13}}$ ($d\Omega_{k_{13}}$ — элемент телесного угла импульса третьей частицы в общем центре масс). Выражение (42) для дифференциального сечения обладает одним любопытным свойством.

На краях спектра, например, при $k_{12} \rightarrow 0$ сечение не содержит линейного по k_{12} члена. Это следует из того, что в физической области реакции при $k_{12} \rightarrow 0$ $x_{13} \rightarrow \beta_1$ (см. формулу (10)), т. е. $k_{13} \rightarrow \sqrt{2\beta_1 \mu_{13} E}$. С другой стороны, функция $I_1(x_{12}, E)$ при малых k_{12} содержит слагаемое вида $-k_{12} \sqrt{2\beta_1 \mu_{13} E}$, который в точности сокращает линейный по k_{12} член. Это свойство поведения сечения на краю спектра носит весьма общий характер. Дело заключается в том, что при любой полной энергии E (даже когда она не мала по сравнению с массами частиц) амплитуда реакции на краю спектра, например, при $k_{12} \rightarrow 0$, имеет вид

$$A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) = A(0, k_{13}^2, k_{23}^2) (1 + ik_{12} a_{12}). \quad (43)$$

При этом нужно иметь в виду, что это свойство выполняется лишь в физической области процесса. На рис. 16 изображена диаграмма Далитца для рассматриваемой реакции. Физической областью является круг, заключенный внутри треугольника. В физической области значению $k_{12}^2 = 0$ соответствует лишь одна точка a , показанная на рисунке стрелкой. Выражение (43) применимо именно в окрестности этой точки, поэтому переменные k_{13}^2 и k_{23}^2 в (43) выражаются через полную энергию E . Формулу (43) легче всего вывести следующим образом. При любой полной энергии E , но малом k_{12}^2 , особые по k_{12}^2 члены следует искать в диаграммах типа изображенной на рис. 4, а. Удобно снова искать особые члены с помощью дисперсионного соотношения по k_{12}^2 . При вычислении особой части амплитуды при малых k_{12}^2 снова будут существенны малые импульсы интегрирования в дисперсионном интеграле по k_{12}^2 . При малых k_{12}^2

в абсорбционной части блок рассеяния частиц следует заменить на амплитуду рассеяния частиц при нулевой энергии, после чего в условии унитарности входит амплитуда рождения трех частиц, проинтегрированная по углу одной из частиц в промежуточном состоянии. При малых k_{12}^2

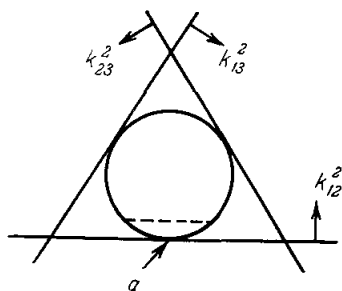


Рис. 16.

область интегрирования по углу соответствует очень малой области изменения инвариантов, от которых зависит амплитуда. Например, для случая превращения одной частицы в три интегрирование по углу соответствует интегрированию вдоль пунктирной прямой на рис. 16, когда инварианты k_{13}^2 и k_{23}^2 меняются в небольших пределах. Поэтому амплитуда рождения частиц может быть заменена своим значением в точке a и вынесена из-под знака интеграла. После этого мы немедленно приходим к результату (43). Из формулы (43) видно, что в сечении (квадрате модуля (43)) не остается линейного по k_{12} члена. Это свойство существенно меняется, если возможна перезарядка частиц 1 и 2. Это обстоятельство может играть существенную роль, например, при интерпретации экспериментальных данных по реакции $\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi$ или $\gamma + N \rightarrow N + \pi + \pi$. Ниже мы вернемся еще к обсуждению этого вопроса. Из формулы (42) без труда получаем выражение для полного сечения реакции:

$$\sigma = \text{const} \cdot E^2 \left[1 + AE \ln \frac{m}{E} + BE \right], \quad (44)$$

$$A = \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} [a_{12} a_{13} (1 - \beta_1) + a_{12} a_{23} (1 - \beta_2) + a_{13} a_{23} (1 - \beta_3)].$$

Константа B не вычисляется, так как она связана с постоянными C_i , входящими в (42). Околопороговая зависимость сечения (44) от энергии может и не иметь места при наличии перезарядок образовавшихся частиц. Этот случай также будет обсуждаться ниже при рассмотрении реакций $\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi$ и $\gamma + N \rightarrow N + \pi + \pi$.

7. КУБИЧЕСКИЕ ЧЛЕНЫ В РАЗЛОЖЕНИИ ПО ПОРОГОВЫМ ИМПУЛЬСАМ И ОБЩАЯ СТРУКТУРА РАЗЛОЖЕНИЯ АМПЛИТУДЫ С $L=0$

Мы получили выражение для амплитуды реакции с образованием трех частиц малой энергии с полным моментом, равным нулю с точностью до квадратичных по пороговым импульсам членов. Общий характер приведенного рассмотрения позволяет качественно охарактеризовать полную структуру разложения амплитуды с $L=0$ вблизи порога. Очевидно, что амплитуда может быть представлена в виде суммы вида

$$A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2), \quad (45)$$

где каждая из величин $A^{(n)}$ порядка $(E/m)^{n/2}$, E — кинетическая энергия трех частиц, m — величина порядка масс частиц. При $n=0$ имеем $A_0 = \lambda$ — амплитуду рождения трех частиц при нулевой энергии. При $n=1$ $A^{(1)}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2)$ задается выражением (28) предыдущего раздела. Характерной особенностью этих линейных (по пороговым импульсам) членов является то, что они содержат в качестве параметров только амплитуды рассеяния пар частиц.

Напомним, что этот факт связан с тем, что линейные члены, по определению, неаналитичны, если рассматривать их как функции комплексных переменных $k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2$. Квадратичные члены в разложении амплитуды ($n = 2$ в формуле (45)) содержат уже новые неизвестные вещественные параметры C_1, C_2 и C_3 . Физический смысл этих параметров очевиден: они характеризуют взаимодействие частиц на малых расстояниях. Введение констант C_i в выражение для амплитуды эквивалентно введению радиуса взаимодействия в задаче о рассеянии частиц при малой энергии. При рассмотрении квадратичных членов мы впервые сталкиваемся со сложными функциями безразмерных отношений типа $x_{12}^2 = k_{12}^2/2\mu_{12} E$, существование которых обусловлено в первую очередь наличием нескольких различных переменных одного порядка величины. Появление таких функций тесно связано с существованием простейших пороговых особенностей по следующей причине. Каждая из подобных функций должна, очевидно, иметь особенность по своим переменным (x_{ij}^2) при некоторых численных значениях x_{ij}^2 (например, при $x_{ij}^2 = 1$, как это имеет место в квадратичных членах). В противном случае эти функции были бы просто полиномами или имели бы существенную особенность на бесконечности. Всякая особенность типа $x_{ij}^2 = 1$ является одновременно особенностью в плоскости k_{ij}^2 при $k_{ij}^2 = 2\mu_{ij} E$ и особенностью в плоскости E при $E = k_{ij}^2/2\mu_{ij}$. Такие особенности не могут присутствовать на физическом листе и должны быть «спрятаны» под разрезы, связанные с пороговыми особенностями.

Какие параметры входят в члены более высокого порядка в (45) и в первую очередь в кубические члены? Как разъяснялось в предыдущем разделе, кубические члены надо искать в диаграммах, связанных не более чем с трехкратным рассеянием частиц в конечном состоянии. Абсорбционные части соответствующих диаграмм будут, очевидно, всегда выражаться через парные амплитуды рассеяния и амплитуду рождения трех частиц, вычисленную с точностью до квадратичных членов. Последняя содержит, кроме парных амплитуд, постоянные C_1, C_2, C_3 , которые и войдут, таким образом, в окончательное выражение для кубических членов. Однако никаких новых неизвестных констант не появится, и это обстоятельство есть проявление неаналитичности всех кубических членов.

Члены четвертого порядка содержат большое число новых неизвестных параметров. По существу, их число становится здесь настолько большим, что практического смысла вычисление членов четвертого порядка уже не имеет. В первую очередь появляются невычисляемые слагаемые вида $B_1 k_{23}^4, B_2 k_{13}^4, \dots, D_1 k_{12}^2 k_{13}^2, D_2 k_{12}^2 k_{23}^2$ и т. д. Кроме того, в этом порядке следует учесть, как это разъяснялось в предыдущем разделе, диаграмму, изображенную на рис. 14, г. Эта диаграмма даст неаналитический по полной энергии член вида $E^2 \ln E$ с коэффициентом, пропорциональным постоянной части амплитуды превращения трех частиц в три — величины, не встречавшейся в членах более низкого порядка.

Дальнейшая структура разложения (45) ясна. Члены пятого порядка, например, не содержат новых неизвестных параметров по сравнению с членами первого — четвертого порядков. Вообще же с ростом номера появляется все большее число невычисляемых констант, наличие которых лишает ряд (45) практического смысла.

Перейдем теперь к детальному вычислению кубических членов в амплитуде рождения трех частиц. При этом мы будем, однако, вычислять не все члены третьего порядка, но лишь вещественные кубические члены.

Дело заключается в том, что только эти члены интерферируют в выражении для сечения с 1 и дают в него вклад третьего порядка малости по пороговым импульсам. Мнимые же кубические члены интер-

ферируют лишь с линейными (мнимыми) членами и дают в сечение вклад четвертого порядка. Оговорим сразу же, что такая ситуация имеет место лишь в отсутствие перезарядок частиц в конечном состоянии и в некоторых других интересных с практической точки зрения случаях, разобранных в дальнейшем ($K \rightarrow 3\pi$ -распад, рождение π -мезона при столкновении π^+ -мезона с протоном). В некоторых других случаях ($\pi^- + p \rightarrow N + \pi + \pi$, $\gamma + p \rightarrow N + \pi + \pi$) члены третьего порядка в сечении реакции появляются также за счет мнимых кубических членов в амплитуде реакции. Существенно, однако, что для реакций первого типа (нейтральный случай и др.) выражение для сечения не содержит линейных членов, так что кубические члены являются здесь первой поправкой к основным, квадратичным членам. Во втором же случае сами квадратичные члены уже

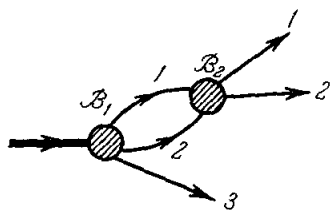


Рис. 17.

представляют собой поправку к имеющимся в сечении линейным членам, поэтому вычисление кубических членов представляет здесь меньший интерес.

Амплитуда процесса может содержать комплексные члены, связанные с рассеянием частиц в конечном состоянии, и комплексность, появляющуюся из-за взаимодействия частиц в начальном состоянии. Так, в частности, в отсутствие других возможных промежуточных состояний, кроме начального и

конечного, амплитуда превращения двух частиц в три содержит множитель $e^{i\delta(E)}$, где $\delta(E)$ — фаза рассеяния частиц в начальном состоянии.

Мы будем сейчас интересоваться только взаимодействием в конечном состоянии и разделять вещественные и мнимые члены в выражении для величины $e^{-i\delta(E)} A(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2)$, а не в самой амплитуде. В дальнейшем полученные результаты будут применяться к случаю $K \rightarrow 3\pi$ -распада, где вообще отсутствует комплексность, связанная с взаимодействием в начальном состоянии, и к случаю рождения π -мезона при столкновении π^+ -мезона с протоном, где также можно показать, что в амплитуде отсутствуют другие вещественные кубические члены, кроме вычисленных.

Как и другие неаналитические слагаемые, вещественные кубические члены следует искать в диаграммах, связанных с рассеянием частиц. Пусть, например, мы имеем дело с диаграммой, изображенной на рис. 17, где для определенности рассеиваются частицы 1 и 2. Будем считать, что блоки, входящие в диаграмму, также могут включать внутри себя различные рассеяния частиц. Чтобы получить кубические члены в выражении для амплитуды реакции, необходимо учесть линейные и квадратичные члены в блоках B_1 и B_2 . Легко видеть, что если учесть линейные члены по k_{12} в обоих блоках B_1 и B_2 , мы придем к чисто мнимым кубическим членам для всей амплитуды.

В самом деле, в этом случае мы немедленно получаем для абсорбционной части вещественное выражение, пропорциональное k_{12}^2 , и кубический член в самой амплитуде, пропорциональной ik_{12}^3 . Если выбрать из блока B_2 линейный по k_{12} член, а из блока B_1 линейный, например, по k_{13} член, мы приходим к диаграмме, изображенной на рис. 18, а. Эту диаграмму мы изучим далее более детально. Если блок B_1 заменить его пороговым значением λ , а из B_2 выделить квадратичные члены $\sim k_{12}^2$, мы снова придем к чисто мнимому вкладу в амплитуду. Это следует из того, что квадратичные члены в амплитуде рассеяния двух частиц всегда вещественны (см. формулу (12)), так что абсорбционная часть оказывается здесь также вещественной, а амплитуда чисто мнимой. Попробуем теперь учесть квадратичные члены в B_1 , заменив блок B_2 на амплитуду рассеяния частиц

при нулевой энергии. В первую очередь надо иметь в виду, что блок B_1 содержит аналитические вещественные члены вида $C_3 k_{12}^2$, $C_2 k_{13}^2$ и $C_1 k_{23}^2$, не связанные с каким-либо определенным классом диаграмм. Легко,

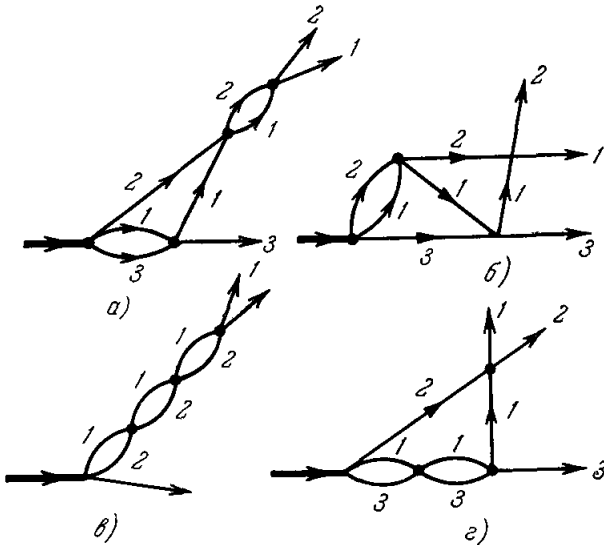


Рис. 18.

однако, видеть, что эти члены дают чисто мнимый вклад в амплитуду процесса. Для слагаемого $C_3 k_{12}^2$ это утверждение очевидно.

Если же блок B_1 заменен, например, на $C_2 k_{13}^2$, то вычисление диаграммы рис. 17 аналогично произведенному раньше вычислению диаграммы рис. 11 (с той разницей, что мы имели там для блока B_1 выражение $i k_{13} \lambda a_{13}$). Абсорбционная часть по k_{12} получается вещественной, а сам вклад в амплитуду чисто мнимым.

Наконец, мы можем сохранить в блоке B_1 неаналитические квадратичные члены или чисто мнимые члены, пропорциональные iE , связанные с диаграммами двукратного рассеяния частиц. При этом мы приходим к диаграммам двух типов, изображенных на рис. 18, а и б. Первая из этих диаграмм, как видно, совпадает с диаграммой, получившейся от выделения линейных членов в B_1 и B_2 .

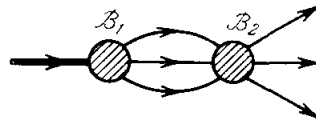


Рис. 19.

Полезно еще заметить, что диаграммы, изображенные на рис. 18, в и г, дают чисто мнимый вклад в амплитуду. Диаграмма рис. 18, в была уже, по существу, отброшена, когда мы пояснили, что сохранение линейных по k_{12} членов в обоих блоках B_1 и B_2 приводит к мнимому вкладу в амплитуду, а диаграмма рис. 18, г может быть рассмотрена абсолютно аналогично рассмотренному выше вкладу члена $C_2 k_{13}^2$.

До сих пор для нас исходными были диаграммы, связанные с рассеянием пары частиц (см. рис. 17). Легко видеть, что если начать рассмотрение с произвольной диаграммы, включающей превращение трех частиц в три (рис. 19), мы снова придем к диаграммам рис. 18, а и б. В самом деле, поскольку трехчастичный фазовый объем по порядку величины равен E^2 , единственная возможность для получения кубического члена — это замена B_1 на рис. 19 на константу (λ) и выделение из блока B_2 вклада,

ведущего себя как $E^{-1/2}$ при малых значениях E . Прямым вычислением можно убедиться, что таким свойством обладают амплитуды превращения трех частиц в три, изображенные на рис. 20, *а* и *б*. Других «шестихвосток», обладающих требуемым свойством, нет. Подстановка диаграмм, изображенных на рис. 20, *а* и *б*, в качестве блока B_2 в диаграмму рис. 19, приводит нас к диаграммам рис. 18, *а* и *б*.

Итак, мы показали, что интересующие нас вещественные кубические члены могут содержаться лишь в диаграммах рис. 18, *а* и *б*. Вычислим теперь эти кубические члены. Рассмотрение диаграммы, изображенной на рис. 18, *а*, совершенно элементарно, поскольку интегрирование по петле, состоящей из частиц 1 и 2, происходит независимо от других интегрирований. Это значит, что для получения кубических членов здесь нужно лишь умножить члены второго порядка, зависящие от k_{12}^2 (и E), на величину $ik_{12}a_{12}$. При этом для вклада диаграммы рис. 18, *а* получается следующее выражение (см. формулу (41)):

$$-k_{12}a_{12}^2a_{13}2E \sqrt{\frac{m_1m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}} \left[\frac{1}{6}(1+2\beta_1) + \frac{1}{3}(1-4\beta_1)x_{12}^2 \right]. \quad (46)$$

Несколько сложнее рассмотрение диаграммы рис. 18, *б*. Для ее вычисления удобно использовать дисперсионные соотношения по k_{12}^2 и E аналогично тому, как это делалось при вычислении квадратичных членов.

Абсорбционная часть по k_{12}^2 определяется сечением диаграммы рис. 18, *б*. Часть диаграммы, расположенная слева от этой линии, представляет собой величину $I_1(x_{13}, E)$, вычисленную в предыдущем разделе. Можно показать, что если взять вещественные члены из $I_1(x_{13}, E)$, то соответствующий вклад в абсорбционную часть оказывается вещественным при $k_{12}^2 < 2\mu_{12}E$ и мнимым при $k_{12}^2 > 2\mu_{12}E$. Вклад же в саму амплитуду оказывается при этом чисто мнимым. Проверка высказанного утверждения требует довольно громоздких вычислений; мы не приводим даже окончательного выражения, поскольку явный вид получающихся мнимых кубических членов не представляет для нас никакого интереса. С другой стороны, если выделить из $I_1(x_{13}, E)$ чисто мнимые члены, окончательный вклад в амплитуду оказывается вещественным. Вычисление абсорбционной части и дисперсионного интеграла очень сходно здесь с соответствующими вычислениями для квадратичных членов. Окончательное выражение для вклада диаграммы рис. 18, *б* имеет вид

$$k_{12}a_{12}^2a_{13}2E \sqrt{\frac{m_1m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}} \left[-\frac{1}{6}(1+4\beta_1-8\beta_1^2) - \frac{1}{3}(1-4\beta_1)(1-2\beta_1)x_{12}^2 \right]. \quad (47)$$

Для получения (47) можно либо использовать дисперсионное соотношение по k_{12}^2 с двумя вычитаниями, либо не делать вычитаний, но обрезать дисперсионный интеграл по k_{12}^2 на некоторой величине Λ^2 . При этом расходящиеся части интеграла, зависящие от Λ^2 , оказываются чисто мнимыми и не представляют для нас интереса. Последнее замечание позволяет нам избежать вычисления вычитательных констант в дисперсионном соотношении по k_{12}^2 , зависящих от полной энергии. Прямое вычисление этих констант, подобное проделанному в предыдущем разделе, также показывает, что они являются чисто мнимыми величинами.

Полное выражение для кубических членов в амплитуде получается в результате суммирования вкладов от шести диаграмм, отличающихся перестановкой частиц типа изображенных на рис. 18, *а*, и двенадцати диаграмм типа рис. 18, *б*.

8. РОЖДЕНИЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ В СОСТОЯНИИ С ПОЛНЫМ МОМЕНТОМ, РАВНЫМ ЕДИНИЦЕ

До сих пор мы исследовали амплитуду рождения трех частиц с полным моментом $L = 0$. В настоящем разделе будет рассмотрена амплитуда с $L = 1$, с точностью до квадратичных по импульсам членов.

Разложение амплитуды рождения трех частиц по амплитудам с различными полными моментами было произведено в разделе 3. Там же были введены обозначения для ряда величин, фигурирующих в настоящем разделе, которыми мы и будем пользоваться без специальных оговорок.

Амплитуда рождения трех частиц с полным моментом $L = 1$ с точностью до квадратичных по импульсам членов полностью определяется двумя слагаемыми ряда (16):

$$T_{10}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2)k_1z_1 + T_{01}(k_{12}^2, k_{23}^2, k_{13}^2)k_2z_2. \quad (48)$$

Это следует из того, что амплитуда с $L = 1$ связана лишь с такими T_{mn} , у которых $m + n$ — нечетное число. Следующие же слагаемые ряда (16) с четными $m + n$, хотя и дают вклад в амплитуду с $L = 1$, но являются, очевидно, членами более высоких порядков.

Линейные по импульсам члены получаются из (48) при замене T_{10} и T_{01} на их пороговые значения. Квадратичные члены получаются из-за того, что в амплитудах T_{10} и T_{01} имеются неаналитические линейные по k_{ij} члены. Эти члены, естественно, возникают от графиков, изображенных на рис. 21. Целью настоящего раздела как раз и является вычисление этих линейных поправок в T_{10} и T_{01} . Предварительно, однако, заметим, что поскольку $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, имеет место соотношение

$$k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3 = 0. \quad (49)$$

Это значит, что выражение (48) может быть переписано также в виде линейной комбинации k_1z_1 и k_3z_3 или k_2z_2 и k_3z_3 . Мы, для определенности, пользуемся углами z_1 и z_2 ,

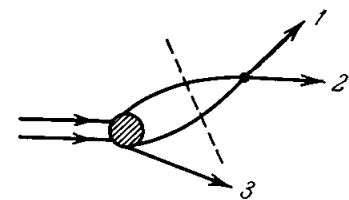


Рис. 21.

а в конце раздела покажем, как можно записать полученный ответ в симметричном виде.

Обозначим пороговые значения амплитуд T_{10} и T_{01} через α_1 и α_2 соответственно. Члены, линейные, например, по k_{12} , получаются тогда из рассмотрения диаграммы, изображенной на рис. 21, в которой блок, стоящий слева от пунктирной линии, должен быть заменен на величину $\alpha_1k_1z_1 + \alpha_2k_2z_2$.

Диаграмма рис. 21 может быть вычислена с помощью развитых нами в предыдущих разделах методов. Интересующие нас линейные поправки в этой диаграмме определяются дисперсионным интегралом по k_{12}^2 :

$$\frac{k_{12}^2}{\pi} \int_0^\infty dk_{12}'^2 \frac{B(k_{12}')}{k_{12}^2(k_{12}'^2 - k_{12}^2 - i\epsilon)}, \quad (50a)$$

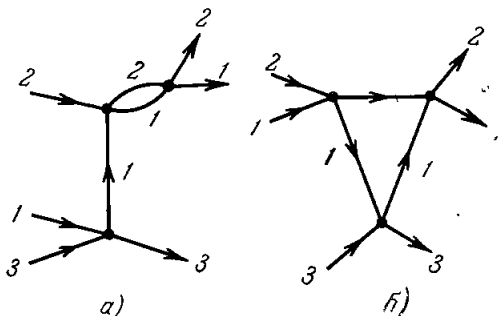


Рис. 20.

где абсорбционная часть $B(k'_{12})$ равна

$$B(k'_{12}) = k'_{12} a_{12} \int_{-1}^1 \frac{dz}{2} (a_1 k'_1 z'_1 + a_2 k'_2 z'_2). \quad (50b)$$

Здесь \mathbf{k}' и \mathbf{k}'_2 — импульсы промежуточных частиц 1 и 2 в системе центра масс, z — косинус угла между относительным импульсом частиц 1 и 2 в промежуточном состоянии (\mathbf{k}'_{12}) и импульсом одной из падающих частиц (\mathbf{P}), z'_1 и z'_2 — косинусы углов между \mathbf{k}'_1 и \mathbf{k}'_2 и \mathbf{P} . Умножая скалярно на \mathbf{P} соотношения (6) между \mathbf{k}'_1 , \mathbf{k}'_2 и \mathbf{k}_3 , \mathbf{k}'_{12} , сразу получаем

$$k'_1 z'_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} k_3 z_3 + k'_{12} z, \quad k'_2 z'_2 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} k_3 z_3 - k'_{12} z, \quad (51)$$

что позволяет немедленно выполнить интегрирование по z в (50b); имеем

$$B(k'_{12}) = k_3 z_3 a_{12} k'_{12} \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2} a_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} a_2 \right). \quad (52)$$

Отсюда сразу же следует, что интеграл (50a) равен $iB(k_{12})$. Рассматривая аналогичным образом поправки, связанные с рассеянием других пар частиц, мы получим следующие выражения для амплитуды с $L=1$ с точностью до квадратичных по импульсам членов:

$$\begin{aligned} \sum_M A_{1M}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) Y_{1M}(\vartheta, \varphi) = \\ = k_1 z_1 \left[a_1 + ik_{12} a_{12} \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} + ik_{23} a_{23} \left(a_1 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} a_2 \right) \right] + \\ + k_2 z_2 \left[a_2 + ik_{12} a_{12} \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} + ik_{13} a_{13} \left(a_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_3} a_1 \right) \right]. \quad (53) \end{aligned}$$

Таким образом, структура амплитуды рождения трех частиц с $L=1$ аналогична структуре амплитуды с $L=0$. Первые члены этой амплитуды также определяются неизвестными константами (амплитудами при пороговой энергии) a_i , а поправочные члены определяются через эти же константы и через длины рассеяния образовавшихся частиц. Мнимые и вещественные части комплексных констант (точно так же как и мнимые и вещественные части амплитуд λ) связаны между собой условием унитарности.

Выражение (53) несимметрично по индексам 1, 2 и 3. Это связано со специальным выбором амплитуды в виде (48). Если с самого начала использовать симметричную запись амплитуды в виде

$$T_1 k_1 z_1 + T_2 k_2 z_2 + T_3 k_3 z_3, \quad (54)$$

то легко получить вместо (53) следующий симметричный по индексам ответ:

$$\begin{aligned} \sum_M A_{1M}(k_{12}^2, k_{13}^2, k_{23}^2) Y_{1M}(\vartheta, \varphi) = \\ = k_1 z_1 \left[\beta_1 + ik_{23} a_{23} \left(\beta_1 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} \beta_2 - \frac{m_3}{m_2 + m_3} \beta_3 \right) \right] + \\ + k_2 z_2 \left[\beta_2 + ik_{13} a_{13} \left(\beta_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_3} \beta_1 - \frac{m_3}{m_1 + m_3} \beta_3 \right) \right] + \\ + k_3 z_3 \left[\beta_3 + ik_{12} a_{12} \left(\beta_3 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \beta_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \beta_2 \right) \right], \quad (55) \end{aligned}$$

где β_1 , β_2 и β_3 — пороговые значения T_1 , T_2 и T_3 . Из-за наличия связи (49) между $k_1 z_1$, $k_2 z_2$ и $k_3 z_3$ функции T_i в формуле (54) (и β_i) определены не однозначно. По существу, одна из величин T_i произвольна; (53) соответствует выбору $T_3=0$.

9. РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОБРАЗОВАВШИХСЯ ЧАСТИЦ

Все рассмотрение, проведенное в предыдущих разделах, относилось к случаю нерезонансного взаимодействия образовавшихся частиц, т. е. к случаю, когда длины рассеяния образовавшихся частиц были порядка радиуса взаимодействия $a_{il} \sim r_0$.

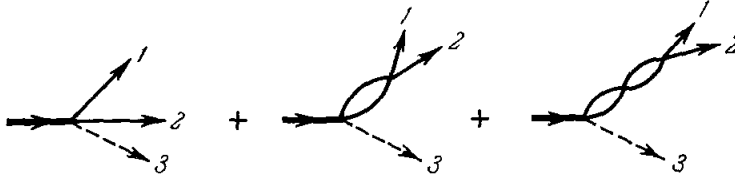


Рис. 22.

Если амплитуды a_{il} велики ($a_{il} \gg r_0$), существует такая область энергий, в которой, хотя и выполнено условие $k_{il}r_0 \ll 1$, но $k_{il}a_{il} \sim 1$. Рассмотрим наиболее простой случай, когда велика только одна из парных амплитуд рассеяния, например, a_{12} . Из рассмотрения предыдущих разделов ясно, что при этом надо учитывать диаграммы, включающие сколь угодно большое число рассеяний частиц 1 и 2. Если раньше в нулевом приближении амплитуда определялась одним графиком рис. 22, то теперь для получения амплитуды в нулевом приближении следует просуммировать все диаграммы, изображенные на рис. 22. Это суммирование, очевидно, совершенно аналогично произведенному в разделе 3 при рассмотрении амплитуды рассеяния двух частиц. В результате для амплитуды в нулевом приближении получается хорошо известная формула Мигдала — Ватсона

$$A = \lambda (1 - ik_{12}a_{12})^{-1}, \tag{56}$$

где λ — амплитуда процесса при нулевой энергии.

Линейные по импульсам поправки к этому выражению могут быть двух типов: поправки порядка $k_{12}r$, связанные с эффективным радиусом взаимодействия частиц 1 и 2, и поправки порядка $k_{12}a_{13}$ и $k_{12}a_{23}$, связанные с однократным рассеянием нерезонансно взаимодействующих частиц. Поправки первого типа учитываются аналогично тому, как это делается в случае рассеяния двух частиц. Можно показать, что достаточно лишь произвести в формуле (56) замену

$$a_{12} \rightarrow a_{12} \left(1 - \frac{1}{2} k_{12}^2 r_0 a_{12}\right) \quad \text{и} \quad \lambda \rightarrow \lambda \left(1 - \frac{1}{2} k_{12}^2 r_0 a_{12}\right).$$

Строгое обоснование приведенной замены может быть получено, например, с помощью квантовомеханического рассмотрения ¹⁷. Причина замены $\lambda \rightarrow \lambda \left(1 - \frac{1}{2} k_{12}^2 a_{12} r_0\right)$ состоит в том, что волновые функции трех частиц, относящиеся к разным значениям k_{12} , оказываются пропорциональны друг другу в области действия сил с линейной по r_0 точностью, если только $a_{12} \gg r_0$. Мы можем привести также следующее пояснение. Диаграммы, не содержащие парных рассеяний, были заменены в нулевом приближении на константу λ . Теперь мы интересуемся, по существу, разложением величины этих диаграмм по k_{12}^2 . Рассмотрим, например, процесс $N + N \rightarrow N + N + \pi$. Среди других диаграмм, не содержащих парных рассеяний образовавшихся частиц, имеется, например, диаграмма, изображенная на рис. 23. Показанный на рисунке блок должен быть заменен с линейной по kr_0 точностью на величину $a_{12} \left(1 - \frac{1}{2} k_{12}^2 a_{12} r_0\right)$. Отсюда видно, что для учета диаграмм типа изображенной на рис. 23 величина λ должна быть заменена на $\lambda \left(1 - \frac{1}{2} k_{12}^2 a_{12} r_0\right)$. С другой стороны, вклад этих диаграмм в λ оказывается больше вклада других диаграмм, если

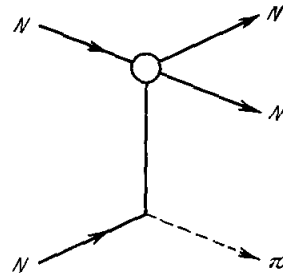


Рис. 23.

величина a_{12} велика ($a_{12} \gg r_0$). Таким образом, мы получаем следующую поправку к формуле Мигдала — Ватсона:

$$A = \frac{\lambda \left(1 - \frac{1}{2} k_{12}^2 r_0 a_{12} \right)}{1 - ik_{12} a_{12} \left(1 - \frac{1}{2} k_{12}^2 r_0 a_{12} \right)}. \quad (57)$$

Как уже упоминалось, другие линейные по импульсам поправки возникают от однократного рассеяния нерезонансно взаимодействующих частиц. Здесь дело сводится к вычислению суммы диаграмм, изображенных на рис. 24, *a* и *б*. При этом диаграммы рис. 24, *б* должны быть еще умножены на величину $(1 - ik_{12} a_{12})^{-1}$, поскольку в этих диаграммах возможно еще многократное дополнительное рассеяние частиц 1 и 2. (Соответствующие диаграммы мы не изображаем в целях экономии места.) Вычисление диаграмм рис. 24, *a* и *б* произведено в работах 8, 14. Полученный в этих работах результат имеет довольно громоздкий вид, и поэтому

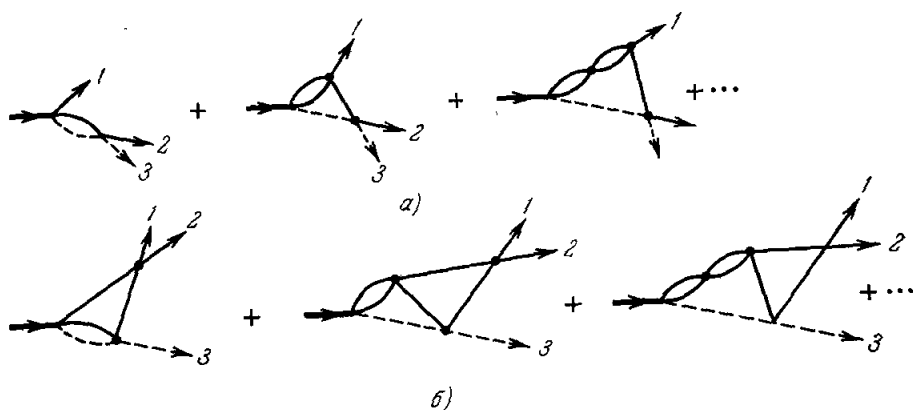


Рис. 24.

здесь не приводится. Любопытно, однако, заметить следующее. Если речь идет о реакции, где частицы 1 и 2 гораздо тяжелее частицы 3, например, о реакции $N + N \rightarrow N + N + \pi$, то все поправки, связанные с диаграммами рис. 24, *a* и *б*, содержат дополнительный малый множитель $\sqrt{\frac{\mu}{M}}$ (μ и M — массы π -мезона и нуклона). Поэтому для реакций такого типа поправки, связанные с радиусом взаимодействия, оказываются более существенными, и при анализе этих реакций можно использовать простую формулу (57).

Коснемся теперь кратко вопроса о резонансном взаимодействии всех трех частиц, когда все три парные амплитуды гораздо больше r_0 . В этом случае уже в нулевом приближении надо суммировать все диаграммы, описывающие рассеяние образовавшихся частиц. Для суммы этих диаграмм можно получить некоторое интегральное уравнение^{15,18}, которое ранее было выведено Скорняковым и Тер-Мартirosяном из квантовомеханического рассмотрения задачи³. Аналогичным образом могут быть получены уравнения и в линейном по kr_0 приближении^{17, 18}. Детальное изучение вопроса о резонансном взаимодействии трех частиц выходит за рамки настоящего обзора.

Следует еще, быть может, отметить, что формулы, выведенные в предыдущих разделах (где предполагалось нерезонансное взаимодействие образующихся частиц), остаются в силе, если $a_{il} \gg r_0$, но полная кинетическая энергия настолько мала, что $k_{il} a_{il} \ll 1$. Единственное обстоятельство, которое при этом следует иметь в виду, заключается в том, что при $a_{il} \gg r_0$ все неопределенные константы, связанные с аналитическими членами, также выражаются через парные амплитуды рассеяния. Причина этого состоит в следующем. Аналитические квадратичные члены в формуле (40) возникали, по существу, из-за обрезания интегралов по импульсам при $k_{il}^2 \sim 1/r_0^2 \sim m^2$. В резонансной ситуации это обрезание происходит значительно ниже, при $k_{il}^2 \sim 1/a_{il}^2$, поскольку блоки парных рассеяний содержат множители типа $(1 - ik_{12} a_{12})^{-1}$.

10. РЕАКЦИИ $\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi$, $\gamma + N \rightarrow N + \pi + \pi$ и $K \rightarrow 3\pi$ -РАСПАД

Мы рассмотрим сейчас некоторые реальные процессы с участием трех частиц малой энергии в конечном состоянии и обсудим возможность их экспериментального анализа с точки зрения развитой выше теории. Один из первых вопросов, возникающих в этой связи, состоит в экспериментальном разделении состояний с определенными полными моментами. Хотя в принципе такое разделение не вызывает особых затруднений, мы хотели бы отметить одно простое обстоятельство. Полученное выражение для сечения реакции с полным моментом $L = 0$ с точностью до квадратичных членов (формула (42)) может быть непосредственно использовано для анализа экспериментальных данных, если последние усреднены по углам, определяющим относительную ориентацию плоскости рождения частиц и направления падающего пучка. Полное выражение для сечения реакции содержит как члены с $L = 0$, так и члены, отвечающие моменту $L = 1$ (формула (53)). Если произвести усреднение квадрата модуля суммы членов (40) и (53) по углам ϑ и φ , то интерференционные слагаемые, конечно, выпадают, а весь вклад членов с $L = 1$ в усредненное сечение оказывается равным

$$\int |k_1 z_1 a_1 - k_2 z_2 a_2|^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta.$$

Если воспользоваться выражениями (17) для z_1 и z_2 , то легко видеть, что выписанный интеграл содержит члены трех типов: k_1^2 , k_2^2 и $k_1 k_2$. В силу равенства $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ все эти слагаемые могут быть записаны через линейную комбинацию k_{12}^2 , k_{13}^2 и k_{23}^2 . Отсюда видно, что в усредненном сечении члены с $L = 1$ приводят лишь к перераспределению постоянных C_1 , C_2 и C_3 в выражении (40).

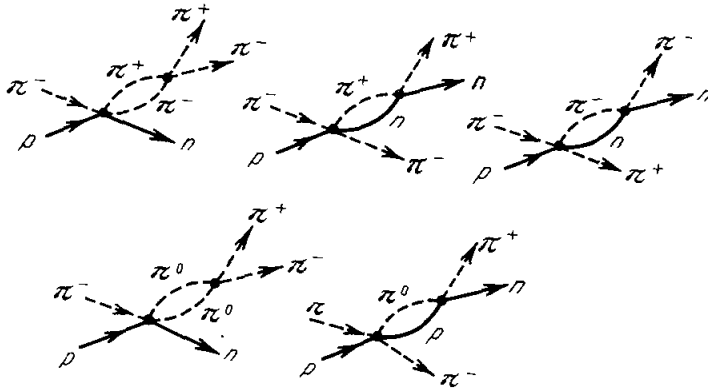


Рис. 25.

Развитая в предыдущих разделах теория для нейтральных и бесспиновых частиц легко может быть обобщена на случай рождения реальных частиц. При этом достаточно лишь иметь в виду, что вершины рассматриваемых диаграмм могут соответствовать теперь не только упругому рассеянию частиц, но и их перезарядке. Так, например, для вычисления линейных членов в реакции $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^+ + \pi^-$ нужно рассмотреть все диаграммы, изображенные на рис. 25.

При этом, если в первых трех диаграммах в вершине, соответствующей превращению двух частиц в три, стоит амплитуда процесса $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^+ + \pi^-$ при нулевой энергии, то в двух других диаграммах стоят амплитуды процессов $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0 + \pi^0$ и $\pi^- + p \rightarrow p + \pi^- + \pi^0$. Перейдем теперь к рассмотрению конкретных реакций.

а) Реакция $\pi^- + N \rightarrow N + \pi + \pi$. Рассмотрим сначала реакции образования двух π -мезонов при столкновении π -мезона с протоном:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n, \tag{58a}$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + n, \tag{58б}$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p. \tag{58в}$$

Обозначим амплитуды этих реакций при нулевой энергии соответственно

$$\lambda_1 = Q_1 e^{i\varphi_1}, \quad \lambda_2 = Q_2 e^{i\varphi_2}, \quad \lambda_3 = Q_3 e^{i\varphi_3}$$

и положим

$$a_{ik} = Q_{ik} \sin \varphi_{ik}, \quad \beta_{ik} = Q_{ik} \cos \varphi_{ik}, \quad Q_{ik} = Q_k / Q_i, \quad \varphi_{ik} = \varphi_i - \varphi_k. \tag{59}$$

Если ввести амплитуды рассеяния π -мезонов при нулевой энергии в состояниях с полным изотопическим спином $T=0-a_0$ и $T=2-a_2$, нормированные как предел величины $k^{-1}e^{i\delta} \sin \delta$, когда $k \rightarrow 0$, то различные амплитуды рассеяния и перезарядки π -мезонов при нулевой энергии выражаются через a_0 и a_2 по формулам

$$\begin{aligned} a_{\pi^+\pi^+}^{\pi^+\pi^+} &= a_{\pi^-\pi^-}^{\pi^-\pi^-} = 2a_2, & a_{\pi^+\pi^0}^{\pi^+\pi^0} &= a_{\pi^-\pi^0}^{\pi^-\pi^0} = a_2, & a_{\pi^+\pi^-}^{\pi^+\pi^-} &= \frac{2}{3} a_0 + \frac{1}{3} a_2 \equiv a_s, \\ a_{\pi^0\pi^0}^{\pi^0\pi^0} &= \frac{2}{3} a_0 + \frac{4}{3} a_2 \equiv a_s^0, & a_{\pi^+\pi^0}^{\pi^0\pi^0} &= a_{\pi^-\pi^0}^{\pi^0\pi^0} = \frac{2}{3} (a_2 - a_0) \equiv a_l. \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь, например, величина $a_{\pi^+\pi^+}^{\pi^+\pi^+}$ означает амплитуду рассеяния $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$, $a_{\pi^+\pi^0}^{\pi^0\pi^0}$ — амплитуду перезарядки $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ и т. д.

Нормировка амплитуд выбрана таким образом, что полное сечение $\sigma = 4\pi |a|^2$ для неодинаковых образующихся π -мезонов и $\sigma = 2\pi |a|^2$ — для тождественных π -мезонов. Так, например,

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi^+\pi^+}^{\pi^+\pi^+} &= 2\pi |a_l|^2, & \sigma_{\pi^0\pi^0}^{\pi^0\pi^0} &= 4\pi |a_l|^2, \\ \sigma_{\pi^+\pi^+}^{\pi^-\pi^-} &= 2\pi |2a_2|^2 = 8\pi |a_2|^2, & \sigma_{\pi^+\pi^0}^{\pi^+\pi^0} &= 4\pi |a_2|^2. \end{aligned} \quad (61)$$

Амплитуды рассеяния и перезарядки π -мезона на нуклоне также легко выражаются через изотопические амплитуды $b_{1/2}$ и $b_{3/2}$:

$$\begin{aligned} b_{p^+\pi^+}^{p^+\pi^+} &= b_{n^-\pi^-}^{n^-\pi^-} = b_{3/2}, & b_{p^-\pi^+}^{p^-\pi^+} &= b_{n^+\pi^-}^{n^+\pi^-} = \frac{1}{3} b_{3/2} + \frac{2}{3} b_{1/2} \equiv b_s, \\ b_{p^0\pi^0}^{p^0\pi^0} &= b_{n^0\pi^0}^{n^0\pi^0} = \frac{1}{3} b_{1/2} + \frac{2}{3} b_{3/2} \equiv b_s^0, & b_{p^-\pi^0}^{p^-\pi^0} &= b_{n^+\pi^0}^{n^+\pi^0} = \frac{1}{3} \sqrt{2} (b_{3/2} - b_{1/2}) \equiv b_l. \end{aligned} \quad (62)$$

Наконец, введем нумерацию частиц в той последовательности, в которой они выписаны в реакциях (58). Тогда, например, величина k_{12} для первой реакции будет обозначать в дальнейшем импульс относительного движения первой и второй частиц, т. е. π^+ и π^- -мезонов, k_{23} — для третьей реакции импульс относительного движения π^0 и p и т. д.

Если отвлечься от зависимости сечений реакций от энергии падающего пучка, т. е. полной энергии образующихся частиц, члены вида $k_{ii}^2 \ln(\mu/E)$ и $E \ln(\mu/E)$ включаются в слагаемые типа Ck_{ii}^2 . Тогда для квадратов матричных элементов реакций (58) имеем с точностью до квадратичных членов

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma(\pi^+\pi^-n)}{d\Gamma} &= Q_1^2 \left\{ 1 + k_{12}\alpha_{12}a_l + 2k_{13}\alpha_{13}b_l + \beta_1 [k_{12}k_{13} + I_1(x_{12}) + \right. \\ &+ I_1(x_{13})] + \beta_2 [k_{12}k_{23} + I_1(x_{12}) + I_1(x_{23})] + \beta_3 [k_{13}k_{23} + I_3(x_{13}) + \\ &+ I_3(x_{23})] + \beta_4 [I_1(x_{12}) + I_1(x_{13})] + \beta_5 I_3(x_{13}) + C_1 k_{12}^2 + C_2 k_{13}^2 \}, \\ \beta_1 &= 2 \left(a_s + \frac{1}{2} \beta_{12} a_l \right) (b_s + \beta_{13} b_l) + \alpha_{12} \alpha_{13} a_l b_l, \\ \beta_2 &= 2 \left(a_s + \frac{1}{2} \beta_{12} a_l \right) b_{3/2}, & \beta_3 &= 2(b_s + \beta_{13} b_l) b_{3/2}, \\ \beta_4 &= 2a_l b_l \beta_{13} - a_l b_l (\beta_{12} \beta_{13} + \alpha_{12} \alpha_{13}), & \beta_5 &= 2(b_l)^2 (\beta_{12} - \sqrt{2} \beta_{13}); \end{aligned} \right\} \quad (63a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma(\pi^-\pi^0n)}{d\Gamma} &= Q_2^2 \left\{ 1 + 2k_{12}\alpha_{21}a_l + 2(k_{15} + k_{23})\alpha_{23}b_l + \right. \\ &+ \gamma_1 [k_{12}(k_{13} + k_{23}) + 2I_1(x_{12}) + I_1(x_{13}) + I_1(x_{23})] + \\ &+ \gamma_2 [k_{13}k_{23} + I_3(x_{13}) + I_3(x_{23})] + \gamma_3 [2I_1(x_{12}) + I_1(x_{13}) + I_1(x_{23})] + \\ &+ \gamma_4 [I_3(x_{13}) + I_3(x_{23})] + D_1 k_{12}^2 \}, \\ \gamma_1 &= 2\alpha_{21}\alpha_{23}a_l b_l + 2 \left(\frac{1}{2} a_s^0 + \beta_{21} a_l \right) (b_s^0 + b_l \beta_{23}), \\ \gamma_2 &= 2(b_s^0 + \beta_{23} b_l)^2 + 2\alpha_{23}^2 b_l^2, & \gamma_3 &= 2(b_l)^2 (\beta_{21} - \beta_{23}^2) - 2(b_l)^2 \alpha_{23}^2, \\ \gamma_4 &= -2(\alpha_{21}\alpha_{23} + \beta_{21}\beta_{23})a_l b_l + \beta_{23} a_l b_l; \end{aligned} \right\} \quad (63b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma(\pi^-\pi^0\rho)}{d\Gamma} &= a_3^2 \{ 1 + 2k_{13}a_{32}b_l + 2k_{23}a_{31}b_l + \delta_1 [k_{12}k_{13} + \\ &+ I_1(x_{12}) + I_1(x_{13})] + \delta_2 [k_{12}k_{23} + I_1(x_{12}) + I_1(x_{23})] + \\ &+ \delta_3 [k_{13}k_{23} + I_3(x_{13}) + I_3(x_{23})] + \delta_4 [I_1(x_{13}) - I_1(x_{23})] + \\ &+ \delta_5 I_3(x_{13}) + \delta_6 I_3(x_{23}) + F_1 k_{12}^2 + F_2 k_{13}^2 \}, \\ \delta_1 &= 2a_2(b_s + \beta_{32}b_l), \quad \delta_2 = 2a_2(b_s^0 + \beta_{31}b_l), \\ \delta_3 &= 2(b_s + \beta_{32}b_l)(b_s^0 + \beta_{31}b_l) + 2\alpha_{31}\alpha_{32}(b_l)^2, \\ \delta_4 &= 2a_l b_l \left(\beta_{31} - \frac{1}{2}\beta_{32} \right), \quad \delta_5 = 2(b_l)^2 [1 - \alpha_{31}\alpha_{32} - \beta_{31}\beta_{32}], \\ \delta_6 &= -2(b_l)^2 [\alpha_{31}\alpha_{32} + \beta_{31}\beta_{32}] + 2\beta_{31}(b_l)^2 \sqrt{2}. \end{aligned} \right\} (63в)$$

Функции I_1 и I_3 определены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} I_1(x) &= -2E \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{M+2}{2(M+1)} - x^2 \frac{M+3}{3(M+1)} \right] \frac{2}{\pi} \arccos x, \\ I_3(x) &= -2E \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{M(M+2)}{(M+1)^2} - x^2 \frac{3M^2+6M-1}{3(M+1)^2} \right] \frac{2}{\pi} \arccos x, \\ x_{12} &= k_{12}/\sqrt{E}, \\ x_{13} &= k_{13} \sqrt{(M+1)/2ME}, \\ x_{23} &= k_{23} \sqrt{(M+1)/2ME}. \end{aligned} \right\} (64)$$

Здесь E — полная кинетическая энергия трех частиц, M — масса нуклона; масса π -мезона положена равной единице.

В формулу (63) включены члены вида $\text{const} \cdot k_{12}^2$. При этом, однако, в (63а) и (63в) уже нет надобности включать Ck_{23}^2 , так как k_{23}^2 выражается через k_{12}^2 , k_{13}^2 и E , а зависимость от полной энергии мы в этих формулах не выписываем. В выражении (63б) не нужно выписывать обоих квадратов k_{23}^2 и k_{13}^2 , так как оно содержит только их сумму, выражающуюся через k_{12}^2 и E .

Укажем сразу же, как надо изменить (63), чтобы выделить также и зависимость от полной энергии. Во всех трех формулах необходимо приписать член $\text{const} \cdot E$ и сделать замену

$$I_1(x) \rightarrow I_1(x) + K_1(x), \quad I_3(x) \rightarrow I_3(x) + K_3(x),$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_1(x) &= -\frac{2E}{\pi} \ln \left(\frac{\mu}{E} \right) \sqrt{\frac{M}{M+2}} \left[\frac{-2M-3}{6(M+1)} + \frac{M+3}{3(M+1)} x^2 \right], \\ K_3(x) &= -\frac{2E}{\pi} \ln \left(\frac{\mu}{E} \right) \sqrt{\frac{M}{M+2}} \left[\frac{-(3M^2+6M+1)}{6(M+1)^2} + \frac{3M^2+6M-1}{3(M+1)^2} x^2 \right]. \end{aligned} \right\} (65)$$

Выражения типа $k_{12}k_{13} + I_1(x_{12}) + I_1(x_{13})$, выделенные в формулах (63), ведут себя при малых k_{12} и k_{13} как k_{12}^2 и k_{13}^2 . Их труднее отличить экспериментально от членов $C_1 k_{12}^2$ и $C_1 k_{13}^2$, чем слагаемые, выписанные после них. Поэтому, например, определение коэффициентов β_1 , β_2 и β_3 сложнее, чем β_4 и β_5 . Последние, однако, всегда пропорциональны произведению амплитуд перезарядки, и поэтому из двух π -мезонных длин рассеяния дают (как и линейные члены) информацию только о комбинации $a_2 - a_0$.

Величины α_{ik} и β_{ik} , входящие в формулы (63), благодаря условию унитарности могут быть выражены через фазы πN -рассеяния δ_{11} и δ_{31} в состояниях $P_{1/2}$ с изотопическим спином $1/2$ и $3/2$ при энергии, соответствующей порогу рождения двух π -мезонов.

Если записать изотопически инвариантные матричные элементы рождения двух π -мезонов в состояниях с $T=0$ (полный изотопический спин $1/2$) и с $T=2$ (полный спин $3/2$) в виде

$$\left\langle \frac{1}{2} 0 \mid S \mid \frac{1}{2} \right\rangle = F_{11} e^{i\delta_{11}}, \quad \left\langle \frac{3}{2} 2 \mid S \mid \frac{3}{2} \right\rangle = F_{31} e^{i\delta_{31}}, \quad (66)$$

то, как легко показать,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{3} F_{11} e^{i\delta_{11}} + \frac{1}{3\sqrt{5}} F_{31} e^{i\delta_{31}}, \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{2}}{3} F_{11} e^{i\delta_{11}} + \frac{2}{3\sqrt{5}} F_{31} e^{i\delta_{31}}, \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{\sqrt{10}} F_{31} e^{i\delta_{31}}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Отсюда легко найти, например, что

$$\alpha_{12} = \frac{3 \sin(\delta_{31} - \delta_{11})}{x\sqrt{10} + 1/x\sqrt{10} - 2 \cos(\delta_{31} - \delta_{11})}, \quad (68)$$

$$\beta_{12} = \frac{(2/x\sqrt{10}) - x\sqrt{10} - \cos(\delta_{31} - \delta_{11})}{x\sqrt{10} + 1/x\sqrt{10} - 2 \cos(\delta_{31} - \delta_{11})},$$

$x = F_{11}/F_{31}$, а также связь между α_{12} и α_{13} и β_{12} и β_{13} :

$$\alpha_{12} = -\sqrt{2} \alpha_{13}, \quad 1 + \beta_{12} = -\sqrt{2} \beta_{13}. \quad (69)$$

При особенно малой кинетической энергии образующихся частиц в формулах (63) можно ограничиться только линейными по импульсам членами. Тогда анализ экспериментальных данных сильно упрощается. Если представить экспериментальную зависимость сечения, например, реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ от k_{12} и k_{13} в виде

$$\frac{d\sigma}{dk_{12}^2 dk_{13}^2} = \text{const} \cdot [1 + Ak_{12} + Bk_{13}], \quad (70)$$

то, как видно из (63а) и (69), отношение коэффициентов A/B определяется лишь амплитудами перезарядки π -мезонов друг на друге и π -мезонов на нуклоне:

$$\frac{A}{B} = -\frac{a_1}{\sqrt{2} b_1} = -\frac{a_2 - a_0}{b_{3/2} - b_{1/2}}. \quad (71)$$

Поскольку $b_{1/2}$ и $b_{3/2}$ известны, экспериментальный анализ реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ позволяет, таким образом, определить амплитуду перезарядки π -мезонов при нулевой энергии. Соответствующий эксперимент проводится в настоящее время в Дубне. Предварительное значение амплитуды перезарядки π -мезонов оказалось равным ²³

$$a_2 - a_0 = (-0,25 \pm 0,05) \frac{\hbar}{\mu c}.$$

Перейдем к рассмотрению рождения π -мезона при столкновениях π^+ -мезона с протоном. В этом случае возможны две реакции:

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n, \quad (72a)$$

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p. \quad (72б)$$

Обе амплитуды (72) при нулевой энергии легко выражаются через введенный ранее матричный элемент рождения π -мезона в состоянии с полным изотопическим спином $3/2$ (спин π -мезонов 2). Имеем

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\delta_{31}} F_{31}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}} e^{i\delta_{31}} F_{31}. \quad (73)$$

Поскольку эти амплитуды не имеют относительного сдвига фаз, линейных по k_{1i} членов в выражении для сечения не возникает. Зато выражение для сечения зависит только от амплитуд $\pi\pi$ - и πN -рассеяния при нулевой энергии. Мы выпишем

результат, выраженный через изотопические амплитуды a_2 и $b_{1/2}$, $b_{3/2}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma(\pi^+\pi^+n)}{d\Gamma} &= \frac{4}{5} |F_{31}|^2 \{ 1 + \beta_1 [k_{12}(k_{13} + k_{23}) + 2I_1(x_{12}) + I_1(x_{13}) + I_1(x_{23})] + \\ &+ \beta_2 [k_{13}k_{23} + I_3(x_{13}) + I_3(x_{23})] + \beta_3 [I_3(x_{13}) + I_3(x_{23})] + C_1 k_{12}^2 \}, \\ \beta_1 &= 2a_2 \left(\frac{1}{6} b_{3/2} + \frac{5}{6} b_{1/2} \right), \quad \beta_2 = 2 \left(\frac{1}{6} b_{3/2} + \frac{5}{6} b_{1/2} \right)^2, \\ \beta_3 &= -\frac{5}{18} (b_{3/2} - b_{1/2})^2; \end{aligned} \right\} (74a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma(\pi^+\pi^0p)}{d\Gamma} &= \frac{1}{10} |F_{31}|^2 \{ 1 + \gamma_1 [k_{12}k_{13} + I_1(x_{12}) + I_1(x_{13})] + \\ &+ \gamma_2 [k_{12}k_{23} + I_1(x_{12}) + I_1(x_{23})] + \gamma_3 [k_{13}k_{23} + I_3(x_{13}) + I_3(x_{23})] + \gamma_4 I_3(x_{23}) + \\ &+ D_1 k_{12}^2 + D_2 k_{13}^2 \}, \\ \gamma_1 &= 2a_2 b_{3/2}, \quad \gamma_2 = 2a_2 \left(\frac{5}{3} b_{1/2} - \frac{2}{3} b_{3/2} \right), \\ \gamma_3 &= 2b_{3/2} \left(\frac{5}{3} b_{1/2} - \frac{2}{3} b_{3/2} \right), \quad \gamma_4 = \frac{20}{9} (b_{3/2} - b_{1/2})^2. \end{aligned} \right\} (74b)$$

Функции I_1 и I_3 определены по-прежнему формулами (64), D_1 и D_2 — неизвестные постоянные. Если интересоваться зависимостью сечений от энергии, то снова к правым частям формул (74) следует приписать член, пропорциональный E , с неопределенным коэффициентом и произвести замену (65). Из двух амплитуд $\pi\pi$ -рассеяния в формулы (74) входит, конечно, только a_2 .

Наконец, выпишем выражения для полных сечений реакций (58), оставляя члены порядка $E^{1/2}$ и $E \ln \left(\frac{\mu}{E} \right)$ по сравнению с единицей. Члены $\sim E$ включают уже неопределенные постоянные и не выражаются через амплитуды рассеяния. Для реакций при столкновении π^- -мезона с протоном имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\pi^+\pi^-n) &= Q_1^2 E^2 (1 + A_1 \sqrt{E} + B_1 E \ln(\mu/E)), \\ \sigma(\pi^0\pi^0n) &= \frac{1}{2} Q_3^2 E^2 (1 + A_2 \sqrt{E} + B_2 E \ln(\mu/E)), \\ \sigma(\pi^-\pi^0p) &= Q_3^2 E^2 (1 + A_3 \sqrt{3} + B_3 E \ln(\mu/E)); \\ A_1 &= \frac{32}{15\pi} \left(\alpha_{12} a_l + 2 \sqrt{\frac{2M}{M+1}} \alpha_{13} b_l \right), \\ A_2 &= \frac{32}{15\pi} \left(2\alpha_{21} a_l + 4 \sqrt{\frac{2M}{M+1}} \alpha_{23} b_l \right), \\ A_3 &= \frac{32}{15\pi} \left(2\alpha_{32} b_l + 2 \sqrt{\frac{2M}{M+1}} \alpha_{31} b_l \right), \\ B_1 &= \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{M}{M+1} [2\alpha_s b_s^0 + \beta_{12} a_l b_s^0 + \beta_{13} a_2 b_l] + \\ &+ \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{1}{(M+1)^2} \left[b_s b_{3/2} + \frac{1}{2} \beta_{12} (b_l)^2 + \beta_{13} b_s^0 b_l \right], \\ B_2 &= \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{M}{M+1} [\alpha_s^0 b_s^0 + 2\beta_{21} a_l b_s^0 + 2\beta_{23} a_2 b_l] + \\ &+ \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{1}{(M+1)^2} [(b_s^0)^2 + \beta_{21} (b_l)^2 + 2\beta_{23} b_s^0 b_l], \\ B_3 &= \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{M}{M+1} [a_2 (b_s^0 + b_s) + \beta_{31} a_2 b_l + \beta_{32} a_2 b_l] + \\ &+ \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{1}{(M+1)^2} \left[b_s b_s^0 + \frac{1}{2} (b_l)^2 + \beta_{31} b_s^0 b_l + \beta_{32} b_s^0 b_l \right]. \end{aligned} \right\} (75)$$

При столкновении π^+ -мезона с протоном полные сечения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\pi^+\pi^+n) &= \frac{2}{5} |F_{31}|^2 E^2 \left(1 + BE \ln \frac{\mu}{E}\right), \\ \sigma(\pi^+\pi^0p) &= \frac{1}{10} |F_{31}|^2 E^2 \left(1 + B'E \ln \frac{\mu}{E}\right), \\ B &= \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{M}{M+1} \left[2a_2 \left(\frac{1}{6} b_{3/2} + \frac{5}{6} b_{1/2}\right) \right] + \\ &+ \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{M}{M+2}} \frac{1}{(M+1)^2} \left[\frac{1}{9} (5b_{1/2}^2 + 5b_{1/2}b_{3/2} - b_{3/2}^2) \right], \\ B' &= B. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Легко показать, что равенство коэффициентов B и B' есть простое следствие изотопической инвариантности.

Поскольку для реакций (72) выражения для сечений не содержат линейных членов, имеет смысл вычислить для них кубические по импульсам члены, являющиеся первой поправкой к квадратичным. Амплитуды реакций (72а) и (72б) не имеют относительного сдвига фаз, поэтому ситуация с кубическими членами оказывается очень сходной с рассмотренным в разделе 7 нейтральным случаем. Явное выражение для кубических членов в сечениях реакций (72а) и (72б) получено в работе ¹⁶; мы не приводим его для экономии места.

б) Р е а к ц и и $\gamma + p \rightarrow N + \pi + \pi$. Рассмотрим теперь реакции фоторождения двух π -мезонов:

$$\gamma + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + p, \quad (77a)$$

$$\gamma + p \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + p, \quad (77б)$$

$$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + n. \quad (77в)$$

Нетрудно заметить, что поскольку зарядовые состояния образующихся частиц получают заменой всех проекций изотопического спина конечных состояний в реакциях (58), формулы (63) и (65) будут применимы и в этом случае, если придерживаться нумерации частиц в той последовательности, как они выписаны в реакциях (77). Теперь, например, импульс k_{13} для реакции (77а) есть импульс относительного движения π -мезона и протона; импульс k_{23} в третьей реакции относится к движению π -мезона относительно нейтрона и т. д.

Амплитуды фоторождения при нулевой энергии λ_i не имеют, разумеется, ничего общего с амплитудами реакции $\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi$. Они могут быть выражены через матричные элементы фоторождения в состояниях с полным изотопическим спином $1/2$ и $3/2$ — $G_{11}e^{i\alpha_{11}}$, $G_{31}e^{i\alpha_{31}}$ при полном моменте количества движения $1/2$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} G_{11}e^{i\alpha_{11}} - \frac{1}{\sqrt{15}} G_{31}e^{i\alpha_{31}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} G_{11}e^{i\alpha_{11}} - \frac{2}{\sqrt{15}} G_{31}e^{i\alpha_{31}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{3}{10}} G_{31}e^{i\alpha_{31}}. \end{aligned}$$

откуда имеем в этом случае

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{3 \sin(\alpha_{31} - \alpha_{11})}{y \sqrt{5} + 1/y \sqrt{5} - 2 \cos(\alpha_{31} - \alpha_{11})}, \\ \beta_{12} &= \frac{2/y \sqrt{5} - y \sqrt{5} - \cos(\alpha_{31} - \alpha_{11})}{y \sqrt{5} + 1/y \sqrt{5} - \cos(\alpha_{31} - \alpha_{11})}. \end{aligned} \quad (78)$$

Фазы α_{11} и α_{31} могут быть связаны с помощью условия унитарности с другими процессами. Нетрудно заметить, что между величинами α_{12} , α_{13} и β_{12} , β_{13} сохраняется связь (69).

в) Р а с п а д $K^+ \rightarrow 3\pi$. Выражение для вероятностей распада $K^+ \rightarrow 3\pi$ с точностью до квадратичных по импульсам членов было получено Грибовым ⁹. Так как K^+ -распад идет с выполнением правила $\Delta T = 1/2$, то образовавшиеся π -мезоны могут находиться только в состоянии с полным изотопическим спином, равным единице. С учетом этого замечания нетрудно переписать формулы работы ¹¹ для

вероятностей распадов $K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$ и $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^+$ в следующем виде:

$$\frac{dW}{d\Gamma} = 4\lambda^2 \left\{ 1 + \beta_1 [k_{12}(k_{13} + k_{23}) + 2I(x_{12}) + I(x_{13}) + I(x_{23})] + \right. \\ \left. + \beta_2 [k_{13}k_{23} + I(x_{13}) + I(x_{23})] + \beta_3 [I(x_{13}) + I(x_{23})] + \right. \\ \left. + 2\alpha k_{12}^2 + \left[\alpha + \delta - \frac{25}{36}(a_0 - a_2)^2 \right] (k_{13}^2 + k_{23}^2) \right\}, \quad (79a)$$

$$\frac{dW'}{d\Gamma} = \lambda^2 \left\{ 1 + \gamma_1 [k_{12}(k_{13} + k_{23}) + 2I(x_{12}) + I(x_{13}) + I(x_{23})] + \right. \\ \left. + \gamma_2 [k_{13}k_{23} + I(x_{13}) + I(x_{23})] + 2\gamma_3 I(x_{12}) + 2\delta k_{12}^2 + 2\alpha (k_{13}^2 + k_{23}^2) \right\}. \quad (79б)$$

Здесь k_{il} — импульсы относительного движения i -го и l -го π -мезонов. Индексы 1 и 2 относятся к одинаковым частицам,

$$I(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \kappa^2 \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{8}{9} x^2 \right), \quad (80) \\ x = k/\kappa, \quad \kappa^2 = M_K - 3 \approx 0,56;$$

M_K — масса K -мезона, масса π -мезона равна единице, λ , α , δ — действительные числа, которые определяются из эксперимента; β и γ_i — числа, выражающиеся через длины рассеяния π -мезонов a_0 и a_2 :

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{5}{3} a_0 a_2 + \frac{1}{3} a_2^2, & \gamma_1 &= \frac{10}{3} a_0 a_2 - \frac{4}{3} a_2^2, \\ \beta_2 &= \frac{1}{18} (5a_0 + a_2)^2, & \gamma_2 &= 2a_2^2, \\ \beta_3 &= -\frac{5}{18} (a_0 - a_2)^2, & \gamma_3 &= \frac{10}{9} (a_0 - a_2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Используя формулы (79а) и (79б), можно получить выражения для полных вероятностей процессов $K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$ и $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^+$:

$$W = 4\lambda^2 \Omega \{ 1 + \kappa^2 [2\alpha + \delta - 0,71(a_0 - a_2)^2 + 0,04\beta_1 + 0,02\beta_2 - 0,42\beta_3] \}, \quad (82a)$$

$$W' = \lambda^2 \Omega' \{ 1 + \kappa^2 [2\alpha + \delta + 0,04\gamma_1 + 0,02\gamma_2 - 0,42\gamma_3] \}; \quad (82б)$$

Ω и Ω' — фазовые объемы образовавшихся π -мезонов. Из-за того, что $2\mu_{\pi^+} - 2\mu_{\pi^0} \approx \approx 9,2 M_{\pi^0}$, Ω' несколько больше, чем Ω .

Отношение вероятностей распадов равно

$$W'/W = 0,315 [1 + 0,05(a_0 - a_2)^2]. \quad (83)$$

В этой формуле в членах порядка единицы учтена разница фазовых объемов образовавшихся π -мезонов²⁴.

Из формул (79а) и (79б) можно также получить энергетические распределения образовавшихся π -мезонов:

$$W_{\pi^-} = 1 + \kappa^2 \left[\beta_1 F_1(x) + \beta_2 F_2(x) + \beta_3 F_3(x) + \frac{25}{36} (a_0 - a_2)^2 x^2 + (\alpha - \delta) x^2 \right], \quad (84a)$$

$$W_{\pi^+} = 1 + \kappa^2 \left[\beta_1 \left(\frac{1}{2} F_1(x) + F_2(x) \right) + \frac{1}{2} \beta_2 F_1(x) + \right. \\ \left. + \beta_3 \left(I(x) + \frac{1}{2} F_3(x) \right) - \frac{25}{72} (a_0 - a_2)^2 x^2 - \frac{1}{2} (\alpha - \delta) x^2 \right], \quad (84б)$$

$$W'_{\pi^+} = 1 + \kappa^2 \left[\gamma_1 F_1(x) + \gamma_2 F_2(x) + 2\gamma_3 I(x) - 2(\alpha - \delta) x^2 \right]; \quad (84в)$$

величина x^2 связана с энергией рассматриваемого мезона E следующим образом: $\kappa^2 = \kappa^2 x^2 + 3E/2$.

В формулах (84) можно опускать все постоянные слагаемые порядка κ^2 , так как после включения их в нормирующий множитель они скажутся только на членах порядка κ^4 . Функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$ сравнительно легко вычисляются, и оказывается, что они хорошо аппроксимируются в области $0 < x < 1$ следующими полиномами от x^2 :

$$F_1(x) = -0,33 + 0,74x^2, \quad F_2(x) = 0,42 - 0,74x^2, \quad F_3(x) = -0,33 - 0,16x^2. \quad (85)$$

Если ввести $\varepsilon = E/E_{\text{max}}$, то формулы (84) можно переписать в следующем виде:

$$W_{\pi^-} = 1 + (\varepsilon - 1/2) [0,2a_0^2 + 0,4a_0a_2 - 0,5a_2^2 - 0,5(\alpha - \delta)]; \quad (86a)$$

$$W_{\pi^+} = 1 + (\varepsilon - 1/2) [-0,1a_0^2 - 0,2a_0a_2 + 0,2a_2^2 + 0,25(\alpha - \delta)] - \\ - 0,2(a_0 - a_2)^2 [I(\sqrt{1-\varepsilon}) + 0,1], \quad (86б)$$

$$W'_{\pi^+} = 1 + (\varepsilon - 1/2) [-1,4a_2a_0 + 1,4a_2^2 + 1,2(\alpha - \delta)] + \\ + 1,3(a_0 - a_2)^2 [I(\sqrt{1-\varepsilon}) + 0,1]. \quad (86в)$$

Энергетические спектры в рассматриваемых реакциях измерялись рядом авторов²⁵. Эксперимент дает

$$W_{\pi^-} = 1 + (\varepsilon - 1/2) (0,53 \pm 0,07), \quad W_{\pi^+} = 1 - (\varepsilon - 1/2) (0,26 \pm 0,09), \\ W'_{\pi^+} = 1 - (\varepsilon - 1/2) (1,0 \pm 0,4). \quad (87)$$

В формулы (86) входит одна неизвестная заранее константа $\alpha - \delta$, поэтому изучение энергетического спектра одного из π -мезонов не может дать нам сведений об a_0 и a_2 . Так как $|I(\sqrt{1-\varepsilon}) + 0,1| \lesssim 0,1$ при $0 < \varepsilon < 1$, последнее слагаемое в (86б) порядка 10^{-2} . Поэтому примерно $(W_{\pi^-} - 1)/(W_{\pi^+} - 1) \approx -2$, что находится в согласии с экспериментом. Для того чтобы получить сведения об a_0 и a_2 из энергетических распределений, необходимо изучать как реакцию $K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$, так и $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^+$.

Экспериментальные данные об энергетическом распределении π^+ -мезонов в реакции $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^+$ довольно грубы. Они позволяют лишь сделать оценку комбинации величин a_0 и a_2 . Последнее слагаемое в (86в) порядка 0,1. Пренебрегая им, можно убедиться, что из сравнения (86) и (87) следует $a_0^2 - a_0a_2 + 0,5a_2^2 \approx 0,7 \pm 1$.

Используя формулы (79), можно также найти распределение по z (разность энергий одинаковых мезонов, деленная на ее максимальное значение $z = \sqrt{3} \kappa^{-2} (E_1 - E_2)$). Это распределение для реакции $K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-$ имеет вид

$$W(z) = 1 + z^2 (0,04a_0^2 + 0,4a_0a_2). \quad (88)$$

Эксперимент дает²⁵

$$W(z) = 1 + z^2 (0,0 \pm 0,1). \quad (89)$$

Отсюда следует, что $|a_0^2 + 10a_0a_2| \lesssim 2,5$. Если a_0 не намного больше a_2 , то $|a_0a_2| \lesssim 0,25$.

Таким образом, из приведенного выше рассмотрения видно, что экспериментальные данные по $K^+ \rightarrow 3\pi$ -распаду не противоречат формулам, выведенным в предположении, что a_0 и a_2 невелики. Но точность эксперимента не позволяет пока найти a_0 и a_2 из анализа $K \rightarrow 3\pi$ -распада.

Кубические члены по импульсам образующихся частиц были вычислены в работе¹¹. Они оказались очень малыми, и сравнение их с экспериментальными данными в настоящее время не имеет смысла.

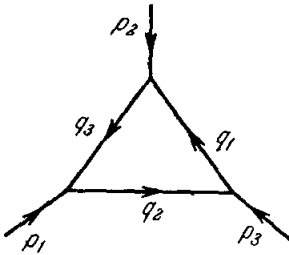


Рис. 26.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы приведем простой вывод правил Ландау²⁶ для нахождения особенностей фейнмановских диаграмм. Для определенности мы будем рассматривать треугольную диаграмму, изображенную на рис. 26, хотя последующие рассуждения будут иметь общий характер.

Пусть импульсы внешних частиц есть p_1, p_2, p_3 , а массы их m_1, m_2, m_3 , по определению $p_i^2 = m_i^2$ ($i = 1, 2, 3$). Из закона сохранения импульса $p_1 + p_2 + p_3 = 0$. Импульсы внутренних (виртуальных) частиц обозначим через q_1, q_2, q_3 , массы — через μ_1, μ_2, μ_3 . Здесь, вообще говоря, $q_i^2 \neq \mu_i^2$.

Фейнмановский интеграл для диаграммы рис. 26 с точностью до множителя равен

$$\int \frac{d^4q_1}{(q_1^2 - \mu_1^2)(q_2^2 - \mu_2^2)(q_3^2 - \mu_3^2)}, \quad q_2 = q_1 - p_3, \quad q_3 = q_1 + p_2. \quad (\text{П}, 1)$$

Рассмотрим сначала интегрирование по dq_{10} . Подынтегральная функция имеет в комплексной плоскости q_{10} полюсы при

$$\left. \begin{aligned} q_{10} &= \pm \sqrt{q_1^2 + \mu_1^2} \mp i\delta, \\ q_{20} &= \pm \sqrt{q_2^2 + \mu_2^2} \mp i\delta, \\ q_{30} &= \pm \sqrt{q_3^2 + \mu_3^2} \mp i\delta, \end{aligned} \right\} \text{т. е. } \left. \begin{aligned} q_{10} &= p_{30} \pm \sqrt{(q_1 - p_3)^2 + \mu_2^2} \mp i\delta, \\ q_{10} &= -p_{20} \pm \sqrt{(q_1 + p_2)^2 + \mu_3^2} \mp i\delta. \end{aligned} \right\} (\text{П}, 2)$$

Одно из возможных расположений этих полюсов показано на рис. 27. Точками изображены полюсы, выписанные в первой строчке (П, 2), крестиками — полюсы, выписанные во второй строчке, а кружками — полюсы, выписанные в третьей строчке. Очевидно, что интеграл (П,1) может иметь особенность только в том случае, когда полюсы в плоскости q_{10} подынтегрального выражения зажимают контур интегрирования, например, когда положение крестика, находящегося сверху от вещественной оси, совпадает (с точностью до знака бесконечно малой мнимой части) с положением кружка, расположенного снизу от вещественной оси. Таким образом, интеграл (П,1) имеет особенность только тогда, когда по крайней мере два или все три знаменателя в (П,1) одновременно обращаются в нуль:

$$q_i^2 = \mu_i^2 \quad (i = 1, 2, \text{ или } i = 1, 3, \text{ или } i = 2, 3) \quad (\text{П,3})$$

или же

$$q_i^2 = \mu_i^2 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{П,4})$$

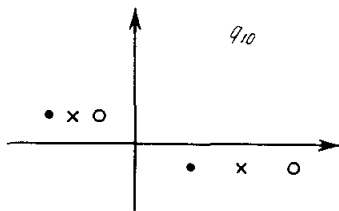


Рис. 27.

Условия (П,3) представляют собой, по существу, условия для нахождения особенностей более простых диаграмм, в которых одна из внутренних линий стянута в точку (как, например, на рис. 28). В этом можно немедленно убедиться, выписав выражение для такой упрощенной диаграммы. Мы остановимся сейчас лишь на особенностях, связанных с условием (П,4). Рассуждая совершенно аналогично тому, как это делается в дальнейшем, легко показать, что условия (П,3) приводят к простым пороговым особенностям $p_1^2 = (\mu_3 + \mu_2)^2$, $p_2^2 = (\mu_1 + \mu_3)^2$, $p_3^2 = (\mu_2 + \mu_1)^2$.

Условия (П,4) заведомо не являются достаточными для появления особенности. В самом деле, из сказанного выше ясно, что еще необходимо, чтобы при совпадении особенностей подынтегрального выражения часть из них находилась сверху, а часть — снизу от вещественной оси. Так как знак бесконечно малой мнимой добавки противоположен знаку q_{10} (см. (П,2)), для этого требуется, чтобы одна из трех величин q_{10} , q_{20} , q_{30} имела бы знак противоположный двум другим. В более общем случае, когда обращается в нуль большее число $q_i^2 - \mu_i^2$, требуется, чтобы среди величин q_{i0} встречались бы величины разного знака. Заметим, что это требование носит инвариантный характер, так как знак временной компоненты времениподобного вектора не зависит от выбора системы отсчета.

Рассмотрим теперь три положительных числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, определенном которых мы займемся позже. Составим трехмерный вектор $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3$ и выберем систему координат таким образом, чтобы выписанный импульс обращался в ней в нуль *). Таким образом, по определению,

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 = 0. \quad (\text{П,5})$$

Рассмотрим теперь величину $\alpha_1 q_{10} + \alpha_2 q_{20} + \alpha_3 q_{30}$. Поскольку среди величин q_{i0} одна имеет знак противоположный двум другим, всегда можно выбрать α_1, α_2 и α_3 таким образом, чтобы комбинация $\alpha_1 q_{10} + \alpha_2 q_{20} + \alpha_3 q_{30}$ обращалась в нуль:

$$\alpha_1 q_{10} + \alpha_2 q_{20} + \alpha_3 q_{30} = 0. \quad (\text{П,6})$$

Условия (П,5) и (П,6) могут быть теперь сформулированы в следующем инвариантном виде. Для тех значений q_i , которые соответствуют появлению особенности в интеграле (П,1), всегда могут быть найдены такие положительные числа α_i , что 4-вектор $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3$ обращается в нуль:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i q_i = 0. \quad (\text{П,7})$$

Условия (П,4) (или (П,3)) и (П,7) имеют совершенно общий характер и называются правилами Ландау. Можно показать, что при рассмотрении вещественных особенностей эти условия являются достаточными для появления особенности. Даль-

*) При этом 4-вектор $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3$ считается вначале времениподобным. В дальнейшем за счет подбора соответствующих значений α_i он становится тождественным нулю. Очевидно, что такой нулевой вектор всегда может быть получен как частный (предельный) случай времениподобного вектора.

нейшее относится к конкретному случаю диаграммы рис. 26. Умножая (П,7) скалярно на q_1 , q_2 и q_3 , получаем систему

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 (q_1 q_2) + \alpha_3 (q_1 q_3) &= 0, \\ \alpha_1 (q_1 q_2) + \alpha_2 q_2^2 + \alpha_3 (q_2 q_3) &= 0, \\ \alpha_1 (q_1 q_3) + \alpha_2 (q_2 q_3) + \alpha_3 q_3^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П,8})$$

(П,8) определяет отличные от нуля α_i лишь при дополнительном условии равенства нулю детерминанта:

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & (q_1 q_2) & (q_1 q_3) \\ (q_1 q_2) & q_2^2 & (q_2 q_3) \\ (q_1 q_3) & (q_2 q_3) & q_3^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{П,9})$$

В силу (П,4) $q_i^2 = \mu_i^2$, а например, $(q_1 q_2) = -\frac{1}{2} [(q_1 - q_2)^2 - q_1^2 - q_2^2] = -\frac{1}{2} [m_3^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2] \equiv -\mu_1 \mu_2 z_3$. С помощью введенных таким образом переменных z условие (П,9) может быть переписано в виде (см. стр. 299):

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1 z_2 z_3 - 1 = 0. \quad (\text{П,10})$$

Если разрешить (П,10) относительно одного из инвариантов m_1^2 , m_2^2 , m_3^2 или, что то же самое, относительно одной из величин z_1 , z_2 , z_3 , возникнут два решения. Можно показать, что только одно из них приводит к положительным α_i . Соответствующая особенность оказывается единственной на физическом листе, который задается точным определением расположения особенностей в интеграле (П,1), т. е. формулами (П,2).

Институт физики высоких энергий
Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. K. Watson, Phys. Rev. 88, 1163 (1952).
2. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ 28, 10 (1955).
3. Г. В. Скорняков, К. А. Тер-Мартirosян, ЖЭТФ 31, 775 (1956).
4. V. N. Gribov, Nucl. Phys. 5, 653 (1958).
5. А. А. Ансельм, В. Н. Грибов, ЖЭТФ 36, 1890 (1959).
6. А. А. Ансельм, В. Н. Грибов, ЖЭТФ 37, 501 (1959).
7. И. Т. Дятлов, ЖЭТФ 37, 1330 (1959).
8. В. Н. Грибов, ЖЭТФ 38, 553 (1960).
9. В. Н. Грибов, ЖЭТФ 41, 1221 (1961).
10. В. В. Анисович, А. А. Ансельм, В. Н. Грибов, ЖЭТФ 42, 224 (1962).
11. V. V. Anisovich, A. A. Anselm, V. N. Gribov, Nucl. Phys. 38, 132 (1962).
12. В. В. Анисович, А. А. Ансельм, В. Н. Грибов, И. Т. Дятлов, ЖЭТФ 43, 966 (1962).
13. В. В. Анисович, Л. Г. Дахно, ЖЭТФ 44, 198 (1963).
14. В. В. Анисович, Л. Г. Дахно, ЖЭТФ 46, 1307 (1964).
15. В. В. Анисович, ЖЭТФ 44, 1593 (1963).
16. Ю. Нири, ЖЭТФ 46, 671 (1964).
17. Г. С. Данилов, ЖЭТФ 40, 498 (1961); 42, 1449 (1962).
18. В. В. Комаров, А. М. Попова, ЖЭТФ 45, 214 (1963).
19. Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ 41, 1851 (1961).
20. J. V. Brosnan, C. Cascer, Phys. Rev. 132, 2703 (1963).
21. C. Cascer, Phys. Rev. 132, 2712 (1963).
22. J. V. Brosnan, Phys. Rev. B134, 687 (1964).
23. Ю. А. Батусов, С. А. Бунятов, В. М. Сидоров, В. А. Ярба, Доклад на XII Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна (1964).
24. R. H. Dalitz, Proc. Phys. Soc. A66, 710 (1953); В. Б. Берестецкий, ДАН СССР 92, 519 (1953).
25. H. Ferro-Luzzi, D. H. Hiller, I. I. Murray, A. H. Rosenfeld, R. D. Tripp, Nuovo cimento 22, 1087 (1961).
26. L. D. Landau, Nucl. Phys. 13, 181 (1959).