PhilSwiss Schriften zur Philosophie
herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel

Band 1

James Gasser und Henri Volken (eds.)

Logic and set theory in 20th century Switzerland.

Bern 2001
ISSN 1424-8875

PhilSwiss Schriften zur Philosophie

herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel

Band 1

Logic and set theory in 20th century Switzerland /
James Gasser ; Henri Volken (eds.). -
Bern : PhilSwiss, 2001
(PhilSwiss Schriften zur Philosophie : Bd. 1
ISSN 1424-8875

ISSN 1424-8875

PhilSwiss Server für Philosophie:
www.philosophie.ch

Postanschrift:
Institut für Philosophie der Universität Bern
PD Dr. Martin Bondeli / PD Helmut Linneweber-Lammerskitten / Prof. Dr. Gerhard Seel
Länggassstr. 49a, CH-3009 Bern

Index

Préface

Durant la première moitié du vingtième siècle, la Suisse a été le théâtre d'un développement de la logique peu en rapport avec la taille du pays. Ce phénomène a été accentué par les circonstances historiques, qui obligèrent de nombreux logiciens à transiter par la Suisse et parfois de s'y réfugier. Ainsi, la grande époque des entretiens de Zurich et le début de la revue Dialectica sont aujourd'hui entrés dans l'histoire de la logique, mais restent suffisamment proches pour qu'il y ait encore parmi nous des témoins. Dans un colloque commun, tenu à l'université de Berne, la Société Suisse de Logique et Philosophie des Sciences et la Société Philosophique Suisse, se sont proposé de revenir sur la place qu'occupent de chercheurs comme Bachelard, Bernays, et Gonseth, mais aussi Piaget et Bochenski, dans l'histoire de la logique moderne. Le colloque a permis en outre de rendre justice à des logiciens moins connus comme Finsler et Mirimanoff, dont les contributions à la théorie des ensembles méritent une place à côté des travaux de Bernays et Weyl. Les comptes rendus reprennent certains des textes présentés durant le colloque. Le professeur Specker a développé son exposé tout en le séparant en deux textes disjoints. Le professeur Grize, qui était empêché de participer au colloque, a accepté que sa contribution écrite figure dans les comptes rendus. Nous l'en remercions vivement.

Preface

The papers collected here were prepared in connection with a joint meeting of the Swiss Society for Logic and Philosophy of Science and the Swiss Philosophical Society held on 4 and 5 June 1999 at the University of Bern. The general theme of the conference was the place of Switzerland in the history of logic of the twentieth century. This was chosen in recognition of the many significant contributions to logic—out of all proportion to Switzerland's population—made by persons working in this country in what we must now refer to as last century. The meeting focussed on achievements made between the wars and shortly thereafter, which are far enough in the past to have already become part of the 'lore' of one of logic's greatest periods yet recent enough to have been witnessed by some of the speakers and others in attendance at the Bern meeting. The Entretiens de Zurich of 1938, the proceedings of which were published by Ferdinand Gonseth in 1941, and the founding of the journal *Dialectica* by Gaston Bachelard, Paul Bernays and Gonseth in 1947 were among the topics most discussed. The contributions of Bernays, Paul Finsler, Dmitri Mirimanoff and Hermann Weyl to set theory was a major topic, as was the impact of authors such as Joseph Bochenski and Jean Piaget. The papers that appear here were chosen from among those given at the conference. All have been revised; in particular, the paper read by Prof. Specker has been developed into the two separate papers published here. Prof. Grize, who was unable to attend the conference, kindly accepted our invitation to contribute his paper here.

James Gasser / Henri Volken

Institute of Applied Mathematics, University of Lausanne February 2001

Abstracts

Ivor Grattan-Guinness

Foundational studies and logics during the 1930s: Gonseth's *Entretiens* (1941) and its background

This paper begins with a general survey of the range of the principal developments and concerns in the foundations of mathematics and logics in the 1930s. Then the articles in Ferdinand Gonseth's Entretiens, the proceedings of a meeting held in 1938, are reviewed against this background: while only some main positions were represented, a few neglected aspects were also treated.

Gerhard Heinzmann

Paul Bernays et la philosophie ouverte

In this paper the relation between Paul Bernays and the Swiss philosopher Ferdinand Gonseth is discussed. A first section concerns their direct co-operation as organisers of meetings and their common founding of the journal Dialectica. The focus of this paper, however, is the influence of Gonseth's ideas on Bernays' philosophical reflections. In a second section, Gonseth's "open philosophy" is characterised from a pragmatic standpoint: if object-constitution and description are mutually dependent, different levels of generation of mathematical objects are accompanied by a correlative transformation of the initial intuition. Rejecting Platonism, Formalism and Constructivism, Gonseth's aim is to reconsider the relation of syntax and semantics in terms of action-schemes. As explained in the main section, Bernays considers mathematics to be the general science of Gonseth's structures of schematic correspondence. It is shown to what extent this position implies a revision of the meanings of historical notions such as evidence, existence, experience or rationality in respect to mathematics.

Joseph Vidal-Rosset

Ce que "New Foundations" relativise

This paper presents a philosophical reading of set theory involving in particular a comparison of NF and ZF. It also proposes a philosophical interpretation of Specker's theorem (NF disproves the axiom of choice and proves infinity). This astonishing mathematical result contradicts Bernays's view according to which the presupposition of the totality of integers by arithmetic is Platonistic. This is true only in a set theory where infinity cannot be derived as a theorem but must be included as an axiom. Genuine Platonism survives only relative to a particular set theory.

Ernst Specker

La réponse de Dmitry Mirimanoff

A highly original development of set theory began with Mirimanoff. Many of his results were unrecognized, then later obtained by and credited to others. In particular, Mirimanoff analysed sets as partially ordered structures and used a definition of ordinal number independent of the notion of order. We owe him, in particular, the definition of the 'Cantorian limit' of a set.

Ernst Specker

Die Antwort von Finsler

How is it that certain objects cannot belong to one and the same set? In developing his set theory, Finsler begins with this question. He considers the usual practice of responding to the paradoxes by banning self-reference (Zirkel) overly restrictive. Certain kinds of acceptable self-reference (erfüllbare Zirkel) are tolerated in his theory, which nevertheless goes beyond the scope of first-order logic.

Jean-Blaise Grize

La logique opératoire de Jean Piaget

This paper examines the origins and nature of Piaget's work in the area of logic. His aim was not to make new contributions to a theory of deduction, but to carry out an empirical study of how logical thinking develops. The relationship between Piaget's "genetic epistemology" and logic is described here.

Biographies

Ivor Grattan-Guinness

Holder of both the doctorate (Ph.D.) and higher doctorate (D.Sc.) in the history of science at the University of London, he is currently Professor of the History of Mathematics and Logic at Middlesex University, England. From 1986 to 1988 he was the President of the British Society for the History of Mathematics. Editor of the history of science journal *Annals of Science* from 1974 to 1981, in 1979 he also founded the journal *History and Philosophy of Logic*, editing it until 1992. He is an effective member of the *Académie Internationale d'Histoire des Sciences*. He edited a substantial *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences* (two volumes, 1994, London, Routledge). His latest individual books are *Convolutions in French mathematics, 1800-1840*, three volumes (1990, Basel and Berlin, Birkhäuser); and *The Fontana* and *Norton history of the mathematical sciences. The rainbow of mathematics* (1997, London, Fontana; 1998, New York, Norton). To appear with Princeton University Press is *The search for mathematical roots, 1870-1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel.* He is the Associate Editor for mathematicians and statisticians for the *New dictionary of national biography*, to be published in 2004.

Jean-Blaise Grize

Logicien suisse, docteur ès sciences, collaborateur de Jean Piaget au Centre international d’Epistémologie génétique de Genève (1958–1968). Professeur de logique et de philosophie des sciences à l’Université de Neuchâtel (1960–1987), directeur du Centre de recherches sémiologiques de sa Faculté des lettres. Enseignement à l’Ecole pratique des Hautes Etudes et aux universités de Besançon, Fribourg, Genève, Lausanne et Montréal.

Gerhard Heinzmann

Né en 1950 à Fribourg-en-Brisgau, Gerhard Heinzmann a fait ses études de mathématiques et de philosophie à Fribourg/Brg., Heidelberg, Sarrebruck et Paris VII. Assistant de recherche au Collège de France (1981-83), Hochschulassistent à l'Université de la Sarre, il devient en 1990 maître de conférences, puis professeur à l'Université Nancy 2. Directeur des "Archives — Centre d'Etudes et de Recherche Henri-Poincaré", ses recherches portent sur la philosophie de la logique et des mathématiques et tout particulièrement sur l'œuvre de H. Poincaré. Mais ses sphères d'intérêts concernent également

les aspects systématiques de la philosophie de la connaissance, la philosophie grecque, l'histoire des sciences, l'empirisme logique et la philosophie du langage ; il a publié de nombreux travaux sur les oeuvres de Peirce, Poincaré, Gonseth et Cavaillès.
Serveur Internet : http://www.univ-nancy2.fr/ACERHP/index.html

Ernst Specker
Ernst Specker studied at the Federal Polytechnical School of Zurich (ETH), where his teachers included Hopf and Bernays. In 1955, after holding lectureships at the ETH and the Universities of Geneva and Neuchâtel, he became a professor at the ETH, where he remained until his retirement in 1987. He has also been a visiting professor in Cairo and at Cornell University. His research interests include topics in topology, algebra, logic, combinatorial analysis, and complexity theory.

Joseph Vidal-Rosset
http://www.u-bourgogne.fr/PHILO/joseph.vidal-rosset

Foundational studies and logics during the 1930s: Gonseth's *Entretiens* (1941) and its background

I. Grattan-Guinness

1. Developments in the 1930s

At the start of the decade, three main positions on the foundations of mathematics were in place.[1] The most prominent was the "metamathematics" and "proof theory" as prosecuted by David Hilbert (1862-1943) and his followers. By then his own health was declining, so that the main burden fell upon Paul Bernays (1888-1977), who wrote the "Hilbert-Bernays" *Grundlagen der Mathematik* in two volumes (1934, 1939). The various calculi (propositional, first- and higher-order predicate, and attendant set theory) were handled, with application especially to arithmetic; properties of consistency and (in)completeness proved as appropriate.

Hilbert *never* used the word "formalism" to describe this position: it had been introduced by L.E.J. Brouwer (1881-1966) in 1912, doubtless both meant and taken as a criticism. By 1930 his position had crystallised into "intuitionism", in which mathematical proofs were limited to direct construction; however, the means of construction were hard to understand. Further, while the polemics with Hilbert in the 1920s had gained both positions much publicity, Brouwer had gained few actual converts; the most important one in the 1930s was his former student Arend Heyting (1898-1980).

The third position was "logicism", as Rudolf Carnap had named it in the late 1920s: the claim of A.N. Whitehead (1881-1947) and Bertrand Russell (1872-1970) that not only the proofs but also the objects of mathematics (or a large part of it, growing out from set theory and arithmetic to mathematical analysis and geometry) could be produced from mathematical logic, including the logic of relations. The position had been outlined in detail, though incompletely, in three (out of the intended four) volumes of *Principia mathematica* (1910-1913, second edition 1925-1927). While it gained a wide

---

[1] In line with that time and the *Entretiens* in particular, I exclude foundational studies in branches of mathematics such as, say, probability theory or mechanics. Even in this restricted sense, there is no general study of foundational studies for the 1930s, but much information related to logicism can be found in Grattan-Guinness 2000, chs. 9-10 (and rather more for the period 1914-1930 in ch. 8). A brief survey of logics between the wars, with extensive secondary bibliography, is available in Grattan-Guinness 1981. Other sources include for logics Mostowski 1996, and Mangione and Bozzi 1993, esp. ch. 5; and for set theory, Fraenkel 1953, especially the bibliography. Several further references are given below.

James GASSER und Henri VOLKEN (eds.): Logic and set theory in 20th century Switzerland. Bern 2001

PhilSwiss Schriften zur Philosophie herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel, **Band 1**
 ISSN 1424-8875 www.philosophie.ch/schriften

range of reactions, it fell between mathematics and philosophy; thus, while its logic had become standard fare, logicism itself was falling somewhat into eclipse.

Both metamathematics and logicism had faced an unexpected setback in the new decade, when Kurt Gödel (1906-1978) proved his famous incompletability theorem for first-order arithmetic, together with a corollary that its consistency could only be proved in a richer metasystem. Their effect may be appraised in four categories. Firstly, the theorem itself sabotaged logicism, and affected metamathematics to some extent. Secondly, the corollary sabotaged metamathematics (and affected logicism to some extent) since Hilbert had assumed that the metatheory would be simpler than that of arithmetic. Thirdly, the proof-methods used, and to a large extent launched, (primitive) recursive function theory, which gained importance in its own right from mid decade with the thesis of Alonzo Church (1903-1995) about unsolvable problems and that of Alan Turing (1912-1954) on the scope and limitations of computability, and of finitary proof methods in general. Fourthly, Gödel had shown in his paper the necessity *rigidly* to distinguish metalogic from logic, and similarly for (meta)language, and the difficulty of doing so systematically.

Gödel's paper was quickly recognised by various mathematicians and philosophers, especially those associated with the Vienna Circle (hereafter, "VC").[2] Hilbert's circle also realised its consequences, although Hilbert's apparent anger blocked out discussion;[3] but Hilbert's assistant Gerhard Gentzen (1909-1945) recognised the situation by proving the consistency of arithmetic by transfinite means rather than the finitary demonstration for which Hilbert had hoped.

Apart from these three positions and somewhat overshadowed by them, various other traditions took note of foundational studies in mathematics and logics. A major country was Poland, where the largest community of logicians worked under the leadership of Jan Lukasiewicz (1878-1956) and Stanislav Lesniewski (1886-1939). They specialised also in many-valued logics, and in a variety of large-scale logical and set-theoretic systems.[4] Perhaps the leading figure internationally was Alfred Tarski (1902-1983), equally important with Gödel on stressing the need to distinguish logic and language from metalogic and metalanguage respectively.

German literature continued in its (neo-)Kantian and phenomenological traditions, adhering to none of these positions but trying to accommodate or criticise them as appropriate: among outstanding figures are the well-remembered Ernst Cassirer (1874-1945) and Oskar Becker (1881-1964), and the underrated Gerhard Stammler (1898-?) and Walter Burkamp (1879-1939). French interest increased from its traditional hostility to logic, with Leon Brunschvicg (1869-1944) and Emile Meyerson (1859-1933) the sen-

---

[2] Mancosu 1999. For literature on the VC, the first stopping point is the guide Stadler 1997.

[3] Personal recollection made to me by Saunders MacLane, who studied at Göttingen from 1931 to 1933 under Hermann Weyl (1885-1955) and never learnt of the theorem.

[4] Among a growing literature, see especially Szaniawski 1989, Wolenski 1989, and Wolenski and Köhler 1999.

ior figures, followed by Albert Spaier (1883-1934); conventionalism was quite prominent. A new figure was Jean Cavaillès (1903-1944) both as philosopher and historian of foundational developments. Work in Italy had declined considerably since its heyday at the turn of the century under the school led by Giuseppe Peano (1858-1932), but Ludovico Geymonat (1908-1991) publicised the work of the VC. A similar role was played in Britain by Susan Stebbing (1885-1943), the main supporter there of logicism; for Russell it was no longer a preoccupation, although he worked in it a little when he returned to philosophical work around 1937.

By contrast, interest in foundations in the USA had been quite strong since the beginning of the century. Much of the stimulus was due to interest in model theory, inspired by Hilbert, which was taken by E.H. Moore (1862-1932) and his doctoral student Oswald Veblen (1880-1960); and to the philosopher Josiah Royce (1855-1916) and his students, including H.M. Sheffer (1882-1964) and C.I. Lewis (1883-1964) (who was making some headway by the 1930s in developing and publicising modal logics). Another ex-student was C.J. Ducasse (1881-1969), who pursued a career in philosophy but retained such a strong interest in logic that he took the initiative to create in mid decade the Association for Symbolic Logic with its *Journal of symbolic logic*. The very first article there was by W.V. Quine (1908-2000), who had begun his restructuring of logicism with his doctoral thesis of 1932, and was its principal (post-Gödelian) representative.[5]

Apart from aspects of formalism, mathematicians were not deeply affected by these developments. For example, Gödel's theorem was not a disaster for them for he worked with a far stricter notion of proof than they did; the most striking feature was not that a theory turned out to be incomplete, but that it should be so elementary. However, set theory was still flourishing, especially in its topological aspects and applications such as functional analysis and measure theory and also in transfinite arithmetic. Axiomatisations were also under examination, especially involving model theory (Gödel again, and also Thoralf Skolem (1887-1962) among others). The first system (1908) of Ernst Zermelo (1871-1953) had met competition from an alternative approach launched in 1925 by John von Neumann (1905-1958), and Bernays commenced a reformation of the latter in 1937.

2. Switzerland and the *Entretiens*

This fresh mention of Bernays leads naturally to Switzerland, for he had been forced to move to Zürich in 1934 after the rise to power of Hitler; much of the writing of the *Grundlagen* mentioned above was done there, as well as this work. Among other Swiss

[5] See Ferreirós 1997; note, however, that Quine did not mention Gödel's theorem in his doctorate (1932) or first book *A system of logistic* (1934).

figures, Arnold Reymond (1874-1958) published a book on *Les principes de la logique et la critique contemporaine* (1932), based upon guest lecture courses at the Sorbonne: concentrating upon *Principia mathematica,* he described with approval many of its techniques.

Also influenced by logicism was Jean Piaget (1896-1982), mainly through a belief that rationality resembles mathematical reasoning, which in turn was captured by (mathematical) logic. By the late 1930s, while deploring Russell's separation of logic from psychology, he imitated *Principia mathematica* in giving prominence to (order-)isomorphism between classes, and even their "additive composition", when studying the child's supposed "conception of number".[6] But he seems not to have grasped the distinction between creating or appreciating mathematics and justifying it epistemologically. He then wrote a volume on *Nombres, classes et relations* (1942), a weary plod through the algebra of classes and relations.

Another Swiss figure of note is, of course, Ferdinand Gonseth (1890-1974), who had been working on the philosophy of mathematics especially since his book *Les fondements des mathématiques* (1926).[7] He organised a gathering of mathematicians, logicians and philosophers for a four-day meeting held at the Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich early in December 1938. It was held under the auspices of the League of Nations, which guaranteed the absence of Germans (two were invited); no Americans or Britons took part either. Invited absentees included von Neumann, Brouwer and Heyting. Not invited, it seems, was Piaget, but 20 other Swiss comprised the majority of the participancy of 34 (pp. 5-6, and also Paulette Février reported on p. 107). Apart from the speakers to be named below, other notable participants included Federigo Enriques, Hans Hopf, Georg Polya and Stanislav "Mazurkiewitz". Mathematicians formed the majority of the audience.

The proceedings appeared three years later from a Geneva house. Its publication during the Second World War greatly reduced its circulation, even though Switzerland was neutral; copies are hard to find, at least in Europe.

In this section I summarise each article in order, which seems to be that of the corresponding lectures. Several of them are followed by discussions, presumably based upon versions taken down by stenographers. I indicate page numbers in the manner "a-b-c", where the full text from pages a to c is split by the discussion starting on page b.

---

6 Piaget 1941, esp. chs. 3-6, 7.

7 On his position see Panza and Pont 1992. For various manuscripts related to the philosophy of mathematics, see Gonseth's *Nachlass*, Salle des Manuscrits, Bibliothèque, Université de Lausanne, esp. Boxes 7-10 *passim*.

3. A survey of the *Entretiens*

After an amusingly sceptical opening discourse by A. Rohn, the director of the School (is it the best institution for such a gathering?, and so on), Gonseth launched the meeting with a lecture on "the preliminary doctrine of elementary truths" (pp. 13-24). Wondering about the "conditions for knowledge and thought", he took the power-set axiom from axiomatic set theory as an example of a proposition of which verification posed great difficulties (p. 21). With approval he quoted Gentzen's dislike of logicism (p. 14).[8] It is not clear whether or not discussion of the lecture was invited; but none was published in the *Entretiens*.

Much more impressive was a technical survey by Skolem "of the significance of the Löwenheim-Skolem theorem" (pp. 25-47-52). He ran through the main findings of the named authors, with plenty of examples of formulae indicating the bearing of normal forms and quantifier order, the consequences of Gödel's theorem, and the importance of non-categoricity. Although he did not speak of a paradox, the discussion centred upon it and related issues, especially the definability of certain sets.

Maurice Fréchet then wandered around "general analysis and the question of foundations" (pp. 53-73-81), contrasting in a rather vague way the limitations of deduction with the variety of experience. Probability theory was briefly handled via some undiscussed quotations from Francis Bacon (p. 61). He commented most usefully on general analysis (an indeed general theory due to E.H. Moore) and the important sub-branch of functional analysis, and the generalisation to abstract topological spaces. Most of the discussion concerned this part, with logicism received coldly by Fréchet (p. 75) although in the lecture he had quoted with approval Russell's famous remark about mathematics being the subject where we do not know what we are talking about or whether it is true (p. 54), which actually expresses the logicist position. Enriques concluded, falsely but understandably, that Fréchet "has fallen into an excessive empiricism" (p. 75).

In an amusing passing embarrassment in the discussion, Lukasiewicz was invited to comment upon the logical aspects of the issue, but declined for lack of competence (pp. 79-80)! His own lecture then followed, on "Logic and the [*sic*] foundation-problem" (pp. 82-100-108). This one and only problem lay in the propositional calculus, which he outlined in his own notation: the classical bivalent version was followed by his baby, the three-valued calculus, for which he gave future contingents as examples of propositions which were neither true nor false. Curiously, he did not mention Lewis's modal logics. The discussion focused upon his new logic, which seemed to be unfamiliar to many participants; the possibility of inconsistency arising (Belà von Kerekjarto), and reconciliation of different logics by means of the theory of elementary truths (Gonseth).

---

[8] Gonseth failed to give the reference, which is Gentzen 1938.

Apparently at Gonseth's insistence, Henri Lebesgue agreed to contribute some remarks on "controversies in set theory and the question of foundations" (pp. 109-121-124). His reluctance is well justified by the waffly piece produced. The axiom of choice was one of his targets: he was one of its sceptics although he had used it a fair amount,[9] and transfinite induction seemed to him a preferable assumption (p. 115). Like Gonseth, he quoted Russell's remark but regarded it as just a joke (p. 121); apparently "I will repeat what I have formerly written: 'the philosophy of mathematics can only be created by mathematicians'" (p. 109), but he hardly comes over as a strong candidate. Polya added an "intervention" seemingly given at a banquet (p. 190), about the creation and heuristics in the context of the axiom of choice; this is an early example of the kind of philosophy for which he was to become famous.
The discussion of Lebesgue's lecture was postponed by Gonseth to adjoin that for the next speaker, Waclav Sierpinski on "The axiom of choice and the continuum hypothesis" (pp. 125-132-143). He reported on several forms, variants and equivalents to both conjectures (or theorems) in a very competent survey though largely devoid of philosophical content. It was based upon various of his earlier publications, and he announced the imminent appearance of a new book under the above title, with an English translation in hand. Doubtless a successor to his *Hypothèse du continu* (1934) and was intended for the same Polish series, it never appeared, presumably a casualty of the War.
The highlight of the discussion (encompassing also Lebesgue's lecture) was a letter from Gödel to Gonseth announcing his new proof of the independence of the axiom of choice within set theory.[10] Most of the rest revived the old disputes over the legitimacy of axioms, which had flourished from its introduction in 1904 to the early 1920s;[11] the best remarks were made by Bernays, who rejected treating the axiom as a scapegoat, pointing to limited rigour in other mathematical contexts. Enriques appealed to his idealism to doubt the legitimacy of the axioms, but Gonseth requested more information of his use of "axiom" (p. 139).
Bernays next took the floor, to outline the basic features of "the Hilbertian theory of demonstration" (pp. 144-152-161). Then close to completing the second volume of Hilbert-Bernays, he ran through some material from the first volume; the (for Hilbert) catastrophe of Gödel's theorem and related developments were given one (praising) clause (p. 152). The discussion revealed a surprising degree of unfamiliarity with the subject among this audience; Bernays repeated some of its essentials using "Fermat's great theorem" as an example (p. 153, including this usual name for a result that had not yet been proved!).

---

[9] G.H. Moore 1983.
[10] Gödel 1938. The original of the letter to Gonseth, dated 25 September 1938, is in the latter's *Nachlass*, Correspondence Box 1.
[11] G.H. Moore 1982.

The main discussant was Paul Finsler (1894-1970), who felt that he had anticipated some of the main features of Hilbert's and Gödel's methods in the 1920s and had never received due acknowledgement (pp. 153-156, including a misstatement of Gödel's theorem, and Skolem's incomprehension of his own position). He diagnosed that circular definition was the cause of malady, not only Russell's paradox but even Cantor's general definition of a set by abstraction from its members. But he also adopted the formalist view that consistency implies existence, and was Platonist over sets. Building up set theory from the empty set as "pure" sets, a combinatorial aspect came into his approach, which looks somewhat like Gödelian recursion.[12] His work had largely been ignored during the 1930s, but he took this occasion to deliver a special lecture about it in January 1939, which Gonseth incorporated into the book (pp. 168-180). For his main target he picked on the axiom of choice within axiomatic set theory, challenging Gödel's new independence with a claim that it was false. Without acknowledgement he also based his construction of ordinals upon von Neumann's definitions, starting with zero defined as the unit set of the empty set (p. 172). Several pages of notes were added, mainly to accommodate Bernays's and Skolem's objections.
There followed two short "interventions" presumably made at the meeting rather than following Finsler's later talk. The Dane Jørgen Jørgensen, historian of logic and fan of the VC, now recorded his new enthusiasm for intuitionism, and the utility of allying psychology to the foundations of mathematics (pp. 181-184). The Belgian Jacques Barzin recorded a new variant of Russell's paradox produced by a student, in which the logic of relations was the cause (pp. 184-187).[13] In fact the criterion proposed also attacked benign cases of self-reference, as Heinrich Behmann was soon to show with the case "Does the quality 'not applying to itself' apply to itself or not?";[14] it has become well known through its presumably independent reappearance in an article of 1944 by Gödel on Russell.[15]
Finally, Gonseth tried to draw some general conclusions, not by seeking elementary truths again but with "the unifying role of the idea of dialectic" (pp. 188-209). While he gave a good impression of the range of philosophical positions then held, it is hard to summarise the strategy, since he was trying to reconcile the irreconcilable (for example, over the axiom of choice). As Saunders MacLane put it at the end of the long review of the book for the *Journal of symbolic logic,* his attempt "is hampered by an unwillingness to call any one wrong and by a disinclination to deal with technical ques-

[12] For discussion see Finsler 1997.
[13] Perelman 1936.
[14] Behmann 1937.
[15] Gödel 1944.

tions".[16] In *Mind* Max Black held the same view, and was critical in general of "the muddled and confused discussions manifest in these discussions".[17]

The last point is true of the *Entretiens* as a whole. From it the reader realises that many positions were maintained, involving several conflicts. Had more logicians spoken, this feature would have been come through still more; the impact of Gödel's theorem and corollary was not much considered. Further, the philosophy of the creation of mathematics gained only the attention of Polya. The foundational subject which received most detailed treatment was model theory, with its consequences for axiomatisation, especially the axiom of choice. Newcomers to the field may well have shared the view of Rohn, an engineer by profession, that "at first I took in with some surprise and incredulity the noise of controversies and even of disagreements concerning the foundations of mathematics" (p. 9).

Bibliography

Behmann, Heinrich, 1937, "The paradoxes of logic", in: *Mind n.s.* 46, 218-221.

Black, Max, 1943, Review of Gonseth 1941, in: *Mind n.s.* 52, 373-374.

Ferreirós, Jose, 1997, "Notes on types, sets and logicism, 1930-1950", in: *Theoria* 12, 91-124.

Finsler, Paul (eds D. Booth and R. Ziegler), 1997, *Finsler set theory. Platonism and circularity*, Basel: Birkhäuser.

Fraenkel, Abraham, 1953, *Abstract set theory*, 1st ed., Amsterdam: North-Holland.

Gentzen, Gerhard, 1938, "Die gegenwartige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung", in: *Deutsche Mathematik* 3, 255-268.

Gödel, Kurt, 1938, "Consistency proof for the continuum hypothesis", in: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 25, 220-224. Repr. in Gödel 1990, 28-32.

Gödel, Kurt, 1944, "Russell's mathematical logic", in: Schilpp, P.A. (ed.), *The philosophy of Bertrand Russell*, New York: Tudor, 123-153. Repr. in Gödel 1990, 119-143. [Also other reprints.]

Gödel, Kurt, 1990, *Collected works*, vol. 2, New York: Oxford University Press.

Gonseth, Ferdinand (ed.), 1941, *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques. 6-9 décembre 1938*, Zürich: Leemann.

Grattan-Guinness, I., 1981, "On the development of logics between the two world wars", in: *American mathematical monthly* 88, 495-509.

Grattan-Guinness, I., 2000, *The search for mathematical roots, 1870-1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton: Princeton University Press.

MacLane, Saunders, 1942, Review of Gonseth 1941, in: *Journal of symbolic logic* 7, 35-37.

Mancosu, Paolo, 1999, "Between Vienna and Berlin: the immediate reception of Gödel's incompleteness theorems", in: *History and philosophy of logic* 20, 33-45.

Mangione, Corrado and Bozzi, Silvio, 1993, *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*, [Milan]: Garzanti.

Moore, Gregory H., 1982, *Zermelo's axiom of choice*, New York: Springer.

Moore, Gregory H., 1983, "Lebesgue's measure problem and Zermelo's axiom of choice", in:

[16] MacLane 1942.

[17] Black 1943.

Annals of the New York Academy of Sciences 412, 129-154.
Mostowski, Andrzej, 1996, *Thirty years of foundational studies*, Oxford: Blackwell.
Panza, Marco and Pont, Jean-Claude (eds), 1992, *Espace et horizon de réalité. Philosophie mathématique de Ferdinand Gonseth*, Paris: Blanchard.
Perelman, Chaïm, 1936, “Les paradoxes de la logique”, in: *Mind n.s.* 45, 204-208.
Piaget, Jean, 1941, *La genèse du nombre chez l’enfant*, Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
Stadler, Friedrich, 1997, *Studien zum Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im Kontext*, Frankfurt am Main: Suhrkamp.
Szaniawski, Klemens (ed.), 1989, *The Vienna Circle and the Lvov-Warsaw school*, Dordrecht: Kluwer.
Wolenski, Jan, 1989, *Logic and philosophy in the Lvov-Warsaw school*, Dordrecht: Kluwer.
Wolenski, Jan and Köhler, Eckhardt (eds), 1999, *Alfred Tarski and the Vienna Circle*, Dordrecht: Kluwer.

Paul Bernays et la philosophie ouverte

Gerhard Heinzmann

I. Biographie de Bernays et aspects extérieurs d'une coopération

En 1933, les nazis retirent à Paul Bernays en tant que non-aryen la *venia legendi*. Étant de nationalité suisse, il retourne alors à Zurich. — Mais commençons au début: Né en 1888 à Londres, fils d'un homme d'affaire qui s'installera bientôt à Berlin, Bernays commence ses études de mathématiques, de philosophie et de physique théorique dans la capitale de la Prusse où il suit entre autres les cours de Schur, Landau, Frobenius, Stumpf, Cassirer et Planck. Après deux ans et demi, il passe à Göttingen et y assiste aux cours de Hilbert, Landau, Weyl, Klein, Born, Voigt et Léonard Nelson qui était alors le représentant principal de l'école néo-friesienne. D'ailleurs, la première publication de Bernays, imprimée dans les *Abhandlungen der Friesschen Schule*, a comme titre *Das Moralprinzip bei Sidgwick und bei Kant*. En 1912, Bernays soutient sa thèse de doctorat sur un sujet de la théorie analytique des nombres sous la direction de Landau. La même année encore, il obtient son Habilitation à Zurich où Zermelo était depuis 1910 professeur titulaire. Sa thèse est un travail en théorie des fonctions. En contact avec Polya, Einstein et Weyl, le Privatdozent rencontre en automne 1917 Hilbert à Zurich où celui-ci donne sa célèbre conférence *Axiomatisches Denken*. Hilbert l'invite alors à retourner à Göttingen et à collaborer comme son assistant à ses recherches sur les fondements de l'arithmétique, récemment reprises. En 1919, Bernays obtient à Göttingen la *venia legendi* avec un travail axiomatique sur le calcul propositionnel des *Principia Mathematica*. A partir de 1922, il est *außerordentlicher Professor* dans cette même ville. Après avoir perdu sa *venia legendi* en 1933, il reste encore six mois *privatim* assistant de Hilbert avant de retourner comme Privatdozent à Zurich. Il ne parvient qu'en 1939 à obtenir la *venia legendi*,[1] perdue en Allemagne, et ne devient qu'en 1945 professeur à l'École Polytechnique. Or, depuis 1929, Ferdinand Gonseth est titulaire à l'EPF d'une chaire de "Mathématiques en langue française", mais effectue ses recherches en philosophie des sciences. Gonseth, né en 1890, donc cadet de deux ans de Bernays, présentait à l'École Polytechnique en 1917 son travail de privatdocent,[2] au moment où Bernays quitta l'EPF pour Göttingen. Vu le parcours de Bernays, sa coopération avec Gonseth, dès la fin des années trente, n'est pas surprenante. En plus, Bernays peut procurer au philosophe le lien avec la recherche tech-

[1] Cf. Bernays 1976a et Specker 1979, 381sq.
[2] Cf. Emery 1985, 13.

James GASSER und Henri VOLKEN (eds.): Logic and set theory in 20th century Switzerland. Bern 2001

PhilSwiss Schriften zur Philosophie herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel, **Band 1**
 ISSN 1424-8875 www.philosophie.ch

nique actuelle dans les fondements des mathématiques que Gonseth, atteint de cécité, avait perdu. Écoutons un extrait de la brève biographie de Bernays que l'on trouve dans *Sets and Classes,* édité par G.-H. Müller:
"Im Philosophischen kam ich in näheren Kontakt mit Ferdinand Gonseth, an dessen philosophischen Seminarien ich mich mehrmals beteiligte. Ich war aufgrund meiner gedanklichen Auseinandersetzungen mit der Kant-Fries-Nelson'schen Philosophie den Ansichten Gonseth's sehr nahe gekommen, und so schloß ich mich seiner philosophischen Schule an."[3]
Il y a d'abord tous les signes extérieurs du fait que la coopération des deux savants était bien réelle: l'organisation commune des colloques — il s'agit des *Entretiens de Zurich*,[4] la fondation des structures académiques — ensemble avec Dürr et Popper ils fondent en 1947 *l'Union Internationale de Logique, de Méthodologie et de Philosophie des Sciences*, la discussion publiée des idées du collègue à l'occasion des *hommages*,[5] des éditions communes[6] et surtout la fondation et l'édition d'une revue — il s'agit évidemment de *Dialectica*, fondée en 1947 avec Bachelard. Dès le premier numéro de *Dialectica*, Bernays parle de "notre école de philosophie ouverte" lorsqu'il essaie à repousser les interprétations qui cherchent à rapprocher trop vite la dialectique de Gonseth à celle de Hegel.[7]
Mise à part l'utilisation fréquente du vocabulaire philosophique de Gonseth,[8] Bernays a commenté à plusieurs reprises la *philosophie ouverte* de Gonseth d'une manière explicite: en 1948, il donne aux deuxièmes Entretiens de Zurich une conférence intitulée *Grundsätzliches zur 'philosophie ouverte'*;[9] en 1952, lors des IIIèmes Entretiens de Zurich, il esquisse sa philosophie dans six thèses en soulignant la proximité méthodique avec la philosophie ouverte;[10] en 1960, il écrit en hommage au 70e anniversaire de Gonseth un article sur les *Charakterzüge der Philosophie Gonseths*;[11] à l'occasion de son 80e anniversaire, il rédige l'article *Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen,*[12] reproduit dans les *Abhandlungen zur Philosophie der Mathema-*

[3] Bernays 1976b, XVI.
[4] Bernays participe avec des contributions aux Iers, IIe, IIIe et IVe entretiens (cf. Bernays 1939b, 1948, 1952a, 1952b, 1953b).
[5] Cf. les hommages rendus par Bernays à l'occasion des 60e, 70e et 80e anniversaires ainsi qu'après la mort de Gonseth (Bernays 1950, 1960, 1970 et 1977).
[6] Cf. Bernays 1939a ou les actes des premiers Entretiens de Zurich, mis au point selon le propos de Gonseth, "dans une étroite collaboration" avec Bernays.
[7] Cf. e.g. Bernays 1947, 308.
[8] Cf par exemple Bernays 1976a, 80, 87, 91, 95, 107, 172sq., 176sqq.
[9] Cf. Bernays 1948.
[10] Cf. Bernays 1952.
[11] Cf. Bernays 1960.
[12] Cf. Bernays 1970.

tik[13] et après la mort de Gonseth, il publie finalement dans *Dialectica* l'article *Überlegungen zu Ferdinand Gonseths Philosophie*.[14]

II. La philosophie ouverte de Gonseth

Quels sont les grands traits caractéristiques de la philosophie ouverte de Gonseth? D'une manière générale elle pose que toute connaissance doive être conçue comme "dialectique" utilisant comme instrument conceptuel une "construction schématique". Grâce à cet outil, Gonseth espère pouvoir surmonter l'alternative entre empirisme et rationalisme rigides en installant une conciliation "dialectique" entre catégories rationnelles et le langage observationnel. Contrairement à ce que l'on pourrait d'abord penser Gonseth applique sa méthode en particulier aux mathématiques et à la logique, conçues toutes les deux par Gonseth comme "physiques", c'est-à-dire comme empiriquement ancrées. Dans un ouvrage sur Gonseth,[15] j'ai proposé une explication pragmatique du fonctionnement de la relation "dialectique" ou "schématique" en question: interprété comme schème d'action (i. e. une action considérée du point de vue universel et non comme acte singulier), le schéma de Gonseth peut être différencié en une partie opérationnelle-normative et une partie descriptive. Cette distinction permet ensuite une détermination conceptuelle plus exacte de la thèse selon laquelle tout niveau de la connaissance est caractérisé par une "correspondance schématique" entre "théorie" (aspect abstrait des actions scientifiques) et expérience (aspect concret des actions scientifiques). L'élucidation de cette concordance revient à considérer la science et la philosophie comme parties d'un "processus d'explication" unitaire qui dépend en dernière instance — comme on le trouve chez C.S. Peirce — du dialogue entre chercheurs. Gonseth indique d'ailleurs toute une série de conditions nécessaires au bon fonctionnement d'un tel dialogue.

Dans le processus d'explication imaginé par Gonseth, l'*explicandum* est représenté à l'aide d'une "image d'explication", par exemple à l'aide d'un modèle mécanique. La "correspondance schématique" lui sert à caractériser le rapport entre cette image et la réalité visée. Mais, contrairement à ce que l'on pourrait penser, il ne songe pas à établir un isomorphisme entre une image donnée et une réalité préexistante. En revanche, l'image est un élément constitutif de la connaissance, c'est-à-dire elle est un moyen de la construction de la réalité. La visée de la philosophie ouverte est bien distincte de celle d'une théorie tout faite qui ne chercherait sa justification que dans un domaine d'application donné. Gonseth remplace les conditions *a priori* kantiennes de la possibilité de l'expérience par "l'idonéité": l'image doit être apte à la construction de la réalité. Une "doctrine préalable" remplace alors la disposition libre ou aprioriste qu'on adopte

[13] Cf. Bernays 1976a.
[14] Cf. Bernays 1977.
[15] Heinzmann 1982.

à propos des moyens mis en œuvre. Cette doctrine se trouve elle-même justifiée "en devenir" dans la mesure où elle doit offrir la possibilité de différencier l'image en question tout en conservant son idonéité. Bref, l'explication est un processus "dialectique", dont la justification consiste dans la possibilité d'un approfondissement continuel. L'image d'explication est la *forme* de la réalité.

D'une part, le concept de schéma utilisé rappelle bien celui de schème génétique chez Piaget, mais sans que le processus d'explication soit réduit à celui de la genèse empirique. D'autre part, l'idée de séquence "dialectique" d'explication trouve une analogie chez Peirce: l'explication de la sémantique d'un signe à l'aide d'une séquence cumulative d' "interprétants" qui conduit à la détermination progressive de l'objet du signe. Mais l'idonéïsme obéit surtout à l'exigence centrale du pragmatisme: le signe et son objet sont constitués "l'un par rapport à l'autre, dans une interaction qui les fait évoluer l'un et l'autre".

Dans l'application de sa méthode aux mathématiques, Gonseth cesse — comme les intuitionnistes l'ont fait avant lui — de vouloir reléguer le contenu mathématique aux métamathématiques. Pour lui, l'évidence des axiomes se mesure par le degré de schématisation des constructions de la langue-objet. Le moyen conceptuel du "schéma constitutif" d'actions permet un développement simultané de la syntaxe et de la sémantique grâce à un processus comportant trois niveaux, expliqué à l'exemple de la géométrie: celui de "l'intuition", celui de "l'expérience instrumentale" et celui de "l'axiomatique". L'unité de chacun de ces niveaux est assurée grâce à une synthèse entre un aspect intuitif, expérimental et théorique.

Dans le conflit entre une conception formaliste et une conception réaliste des mathématiques, Gonseth opte sans aucun doute pour cette dernière. Il restitue les objets mathématiques comme schémas symboliques qui sont définis grâce à certaines procédures d'abstraction. Ainsi il s'oppose:

– à la conception formaliste où l'objet des mathématiques est une théorie syntaxique;
– à la conception platoniste où les entités sont indépendantes de notre activité humaine (réalisme *conceptuel*);
– au constructivisme strict où l'objet est l'ensemble des règles de constructions qui définissent les opérations portant sur les signes.

Gonseth se refuse donc à considérer les objets mathématiques comme des données immédiates et il exige un critère d'admissibilité plus souple qu'une simple évidence syntaxique ou opératoire. Pour lui, les objets mathématiques sont des structures schématiques, définis d'une manière pragmatique: la syntaxe et la sémantique y sont des aspects corrélatifs.

En résumé, l'idonéisme obéit aux quatre maximes méthodologiques suivantes:[16]

[16] Cf. Heinzmann 1982, 42.

1° Au principe de dualité disant — et ici je cite la première fois l'interprétation de Bernays — "qu'il est incongru de vouloir dissocier dans une proposition une composante langagière et factuelle".[17]

2° Au principe de révisibilité selon lequel les moyens de descriptions utilisés dans les synthèses dialectiques doivent être considérés comme révisables.

3° Au principe de technicité qui combat l'idée que l'unité de la science puisse être garantie par un langage quelconque unificateur fixe. Le langage doit être révisable, il doit inclure le *knowing how* et le *knowing that* du point de vue antérieur.[18]

4° Au principe d'intégralité impliquant une théorie holiste de la signification.

III. Bernays et la philosophie ouverte

Bien que nous ayons vu que Bernays s'est intéressé depuis tout le temps à la philosophie, il me semble qu'il a rencontré l'idonéisme non pas en cherchant les problèmes de la connaissance mais au détour des difficultés de son métier de logicien et collaborateur de Hilbert. C'est naturellement la motivation la plus évidente pour approcher la philosophie des mathématiques,[19] mais, selon Bernays, cette approche est même caractéristique pour une attitude qui inclut la production scientifique dans la réflexion philosophique.[20] Ainsi, dans un résumé de sa conférence lors de la *Réunion d'études sur les fondements et la méthode dans les sciences mathématiques* organisée par *l'Institut International de Coopération Intellectuelle* (prédécesseur de l'UNESCO),[21] réunion mieux connue sous le nom de *Premiers Entretiens de Zurich*, Bernays écrit en 1938:
"Le récent développement de la théorie de la démonstration de Hilbert [...] a mené à une révision du point de vue philosophique [...]. Il semble forcé de reconnaître qu'il n'est pas possible de tracer une ligne de démarcation nette entre les raisonnements évidents (sûrs) et les raisonnements attaquables (suspects), quoi qu'on puisse délimiter différents points de vue méthodiques".[22]
Les différents points de vue méthodiques découlent par exemple des travaux de Gentzen qui suggèrent une séparation nette des méthodes arithmétiques proprement dites de celles appartenant à la théorie cantorienne des ordinaux. L'équivalence montrée par Gödel des raisonnements classiques et intuitionnistes dans le domaine de la théorie des nombres entiers montre d'une part la consistance de l'arithmétique et elle permet d'autre part à établir que la méthode de Gentzen (induction jusqu'à ε_0) constitue un terme

---

[17] Bernays 1957, 238.
[18] Cf. Bernays 1960, 155.
[19] Cf. Gonseth 1939, 47.
[20] Cf. Bernays 1948, 279.
[21] Cf. Gonseth 1977, 13.
[22] Bernays 1938.

intermédiaire entre la méthode *évidente* finitiste et la méthode *attaquable* de l'intuitionnisme. Or, la révision nécessaire des catégories gnoséologiques comme *évident* ou *attaquable*, entendues comme alternative entre l'évidence logique (le fini) et l'évidence empirique ou opératoire n'est pas suffisamment élucidée par l'introduction d'un synthétique apriori comme le prône la solution kantienne.[23] Les anciennes catégories "évident", "fini" — "attaquable", "infini" n'étant pas assez spécifiques, il faut donc, exprimés en termes gonsethiens, passer d'un niveau épistémologique "intuitif" à un niveau épistémologique "théorique" où la démarcation nette se retrouve alors dans la distinction entre le domaine arithmétique et celui d'un certain segment non initial de la théorie des ensembles qui s'inspire "pour une part essentielle d'idées géométriques et en tire [...] leur force d'évidence".[24] La séparation ne s'opère, dira en 1940 Jean Cavaillès, non pas entre le fini et l'infini mais à l'intérieur des ordinaux de la 2ème classe,[25] donc à l'intérieur de l'infini.

Bernays a très bien vu (avant Kuhn) qu'une révision n'est pas simplement une question de vérité ou de fausseté, mais qu'il s'agit d'introduire un nouveau système conceptuel.[26] Cependant, l'affaiblissement du concept de vérité est pour lui une conséquence épistémologique provenant de la théorie de la connaissance adoptée et non une conséquence méthodologique provenant d'un changement du paradigme et donc d'une incommensurabilité. Comme pour Poincaré et Cassirer, les révisions se font dans le même paradigme, c'est-à-dire d'une manière évolutives et non révolutionnaires. Bref, elles obéissent au principe de technicité.

Dans ses thèses exposées au 9e congrès International de Philosophie, tenu en 1937 à Paris, Bernays recommande encore d'autres révisions. Elles concernent la distinction entre l'intuition arithmétique et l'intuition géométrique, effectuée traditionnellement selon les éléments spatiaux et temporels. Ce critère devrait être abandonné en faveur d'une distinction entre le discret et le continu.[27] De plus, au lieu de maintenir la distinction kantienne entre analytique et synthétique, distinction dont les difficultés sont aujourd'hui bien connues par les écrits de Quine, il recommande l'introduction de la distinction entre les éléments motivés formellement et "objectuellement" (gegenständlich) d'une théorie.[28]

C'est par le biais de cette dernière distinction qu'il arrive à lier le principe de révision avec le principe de dualité entre théorie et expérience. En s'opposant à l'empirisme logique par leur conviction qu'il est impossible de saisir le fait brut par une simple description, Gonseth et Bernays[29] — et j'ajoute: avant eux, Poincaré — développent une méthode d'interaction entre les éléments du langage théorétique et observationnel.

[23] Cf. Bernays 1939a, 87.
[24] Bernays 1939b, 152.
[25] Cavaillès 1962, 261.
[26] Cf. Bernays 1948, 274; 1952a, 136.
[27] Bernays 1976a, 81.
[28] Bernays 1976a, 79.
[29] Cf. Bernays 1949, 46sq.

Gonseth transpose cette interaction au niveau méthodologique tel que les positions de fondement métaphysique, soient-elles ontologiques ou épistémologiques, sont transformés en une stratégie d'engagement ouvert à l'expérience, c'est-à-dire révisable en vue des conséquences à obtenir par rapport à l'activité de définition et de démonstration. Comme le fait déjà Popper, Gonseth et Bernays soulignent que la rationalité n'est pas liée à une évidence absolue. Il nous faut adopter une position du juste milieu entre le programme initial de l'empirisme logique et le tournant, initié par Wittgenstein 2, vers une *ordinary philosophy of language.*

Formulé en termes plus classiques, le principe de dualité est l'expression d'un point de vue anti-dualiste en théorie de la connaissance. Car il postule avant tout la thèse que la spontanéité et la réceptivité sont inséparables. La compréhension est une capacité et non une théorie interprétative sur une donnée factuelle inaliénable. "L'information que la sensation extérieure nous donne des choses n'a pas un caractère d'immédiateté".[30] Contrairement à l'avis du dualiste, l'illusion n'est donc plus une fausse interprétation à partir des vraies données et l'expérience ne s'épuise plus dans les dates enregistrées par des observations singulières. Ainsi, selon Bernays, il nous faut "d'un point de vue de la 'philosophie ouverte' une révision par rapport à la délimitation d'éléments rationnels et empiriques":[31] au niveau d'un corpus systématique, l'élément rationnel doit, certes, être situé au niveau des expressions d'une théorie scientifique, mais il s'y trouve dans un stade particulièrement développé; moins développé, l'élément rationnel se trouve néanmoins déjà dans le mythe tel que celui-ci est à considérer, *modulo* certaines intentions, comme vraie doctrine de la réalité. S'il y a bien différence entre mythe et théorie scientifique, elle est cependant graduelle et non de principe, c'est-à-dire il n'y a pas une frontière franche. De cette sorte, la juxtaposition du principe de révision et de dualité conduisent à une transformation pragmatique de la corrélation même entre les termes en question: d'une part, l'empirique (dans sa signification révisée) n'est pas opposé au rationnel en général, mais à une systématisation, c'est-à-dire l'entendement ne se fait plus valoir dans des principes *a priori*, mais dans le progrès de la formation des concepts[32] — et d'autre part, le rationnel (dans sa conception révisée) n'est pas opposé à l'empirique, mais à la capacité de concevoir des impressions de contenu (inhaltliche Eindrücke), c'est-à-dire de *concevoir* un domaine de données. D'où la possibilité pour Bernays de parler de l'expérience, soit-elle *geistig* (dans l'esprit),[33] par rapport au domaine des mathématiques. L'opposition kantienne entre le concept et l'intuition qui, exprimée en termes logiques est l'opposition entre le général et le singulier est remplacée par la distinction entre forme et contenu, conçue dans la tradition néo-kantienne comme rapport fonctionnel.[34] L'invariance qui fonde l'analogie entre les concepts

[30] Bernays 1946, 321.
[31] Bernays 1953a, 32.
[32] Cf. Bernays 1937, 289.
[33] Cf. Bernays, 1952a, 131.
[34] Cf. Cassirer 1990, 343.

d'expérience et d'expérience dans l'esprit consiste dans le fait que les deux sont conçues en tant que contenus dans un rapport fonctionnel avec leur forme respective. Ainsi, une révision ne consiste plus dans une critique de la sensibilité par l'entendement (Kant), mais c'est le même entendement qui révise d'un point de vue plus étendu la connaissance antérieure.[35]

Par exemple, en logique, il nous faut bien accepter l'exigence méthodique de la cohérence d'une théorie, mais cette cohérence en tant que forme n'est pas à confondre avec la formulation du principe de non-contradiction en tant que son instantiation. Car, le principe pourrait être susceptible d'amendements.[36] La logique para-consistante donnera bien raison à Bernays. En mathématique, chaque thématisation schématisante d'un certain domaine, c'est-à-dire le passage d'un domaine particulier à sa structure, nous donne évidemment la possibilité de considérer une foule de domaines structurellement identiques, mais différents quant à leurs contenus. A ce stade, l'élément fonctionnel devient visible grâce à la distinction entre *axiomatisation schématisante* et *structurante*, une distinction dont la terminologie est reprise par Bernays de l'ouvrage *Le problème du temps* de Gonseth.[37] Les deux façons d'axiomatiser se placent à des niveaux d'abstractions différentes: l'axiomatisation schématisante se fonde sur un langage dont l'engagement ontologique est supposé connu, c'est-à-dire où l'on dispose de noms propres ou d'un domaine de quantification fixe, dont les éléments sont d'ailleurs bien différents des objets de la nature, puisque le domaine ne contient pas les faits exprimés dans les assertions élémentaires sur ces éléments.[38] Par contre, dans l'axiomatisation structurante, les objets ne sont uniquement connus que comme membres d'une structure, elle-même donnée par une définition explicite grâce à l'indication de ses axiomes. Les modèles non nécessairement isomorphes qui réalisent cette structure — ou, s'ils ne sont pas isomorphes, qui réalisent le *genre* de structures — peuvent être considérés comme sa signification extérieure, c'est-à-dire comme son contenu empirique *conçu*. Cette manière de parler étant justifiée par le double processus d'abstraction obtenu à la suite d'une concaténation des deux axiomatisations. Bien que les structures soient souvent considérées indépendamment de leurs modèles ou uniquement par rapport à leur signification "interne", l'intérêt plus ou moins grand des modèles, c'est-à-dire leur apparenté à d'autres structures abstraites ou concrètes peut néanmoins influencer le développement des mathématiques. C'est la raison pour laquelle Bernays réfute avec Gonseth l'opposition carnapienne entre langage théorétique, utilisé pour exprimer un fait formel, et langage observationnel, utilisé pour exprimer un fait concret ou un fait de la nature. La sémantique des deux langages est supposée être interconnectée dès le départ par une correspondance schématique qui peut intervenir

[35] Cf. Bernays 1948, 276.
[36] Cf. Bernays 1948, 278.
[37] Cf. Bernays 1970, 181 et Gonseth 1964, 159.
[38] Cf. Bernays 1963, 50.

sous plusieurs formes, par exemple comme axiomatisation schématisante et structurante. Je cite une conférence de Bernays faite en 1956:
"What we do by our mathematical theories of branches of nature is to set up a schema, as Mr. Gonseth says or more explicitly: the theories stand to nature in a relation of schematic correspondence. But these schemata have their inner structure and mathematics can be conceived as the general science of these structures."[39]
Au contraire, un fait par rapport auquel les points de vue de Bernays et Carnap semblent s'accorder est que l'existence, dans la pratique mathématique, est le plus souvent conditionnée par le cadre langagier choisi en vue d'un objectif arrêté; elle est donc "interne" (Carnap) ou "*bezogen*" (Bernays). Mais veut-on alors dire avec Carnap[40] que le choix du cadre est soumis au principe de tolérance, applicable aux formes linguistiques et déterminé par des considérations pratiques de sorte que les assertions existentielles externes sont dépourvues de tout contenu cognitif? Ou croit-on, au contraire, le libre choix limité par un engagement ontologique ou par l'intuition mathématique? On pourrait penser qu'il s'agit ici d'une controverse rappelant la dispute entre le formaliste et le réaliste face au théorème d'incomplétude de Gödel: le formaliste montre la transcendance et par conséquent le non-sens des questions sémantiques, le réaliste considère l'incomplétude comme symptôme de la limitation du formalisme[41] qui serait à élargir, par exemple dans le sens que Gentzen l'a fait. Cependant, une telle alternative est pour ainsi dire neutralisée ou transgressée par l'opinion avancée par Gonseth, puis par Quine (et non l'inverse): les deux philosophes sont d'accord sur le fait qu'il n'existe pas, en principe, une frontière précise entre l'acceptation d'une structure langagière et l'acceptation d'une assertion formulée dans ce langage.[42] A mon avis, nous sommes ici au cœur de la problématique que Bernays attache au concept de correspondance schématique. Si les propositions théoriques à l'intérieur d'un cadre linguistique ne sont pas nettement distinctes des jugements pratiques qui déterminent ce cadre, l'espace frontière exige à la fois un processus de la construction des objets et leur description à l'intérieur du cadre formel suggéré par la construction effectuée. En d'autres termes, un processus constructif de schématisation et un processus descriptif de structuration constituent deux horizons d'objectivité qui restent dans une interdépendance appelée selon une proposition provenant de Cavaillès, *dialectique*.[43] D'où le nom de "Dialectica". Bernays préfère à juste titre le terme *horizon d'objectivité* au terme gonsethien d'*horizon de réalité*.[44] Car il n'est guère convaincant que les mathématiques puissent être réduites au réel quelle que soit la signification que l'on veut lui attribuer: le réel objectif, le réel phénoménal ou la chose concrète.[45] C'est la révision du concept de réel

[39] Bernays 1956, 7.
[40] Cf. Carnap 1958.
[41] Cf. McNaughton 1957.
[42] Cf. Carnap 1958, 215, note 1 et Heinzmann 1982, 122, note 1.
[43] Cf Bernays 1977, 121.
[44] Cf. Bernays 1977, 125sq.
[45] Cf. Bernays 1950, 93.

vers un élément objectuel qui constitue le développement essentiel qu'apporte Bernays à la philosophie ouverte. Voici un passage qui illustre sa transgression évolutive de l'empirisme helmholtzien vers une intuition intellectuelle:
"Wir können dem besonderen Charakter der in der Geometrie vorliegenden anschaulichen (d. h. von der Anschauung geleiteten) Ideenbildung durchaus gerecht werden, ohne damit die sehr plausible Auffassung auszuschließen, daß diese geometrische Ideenbildung im Zusammenhang mit der geistigen Verarbeitung der grundlegenden Beobachtungen erfolgt, die im Hantieren mit festen Körpern gewonnen werden".[46]
Les métathéorèmes de la limitation des formalismes ainsi que les antinomies logiques et ensemblistes sont pour Bernays le symptôme que les mathématiques ne forment pas elles-mêmes un objet mathématique clos, mais une multiplicité ouverte.[47] Mais comment peut-on alors distinguer le fait mathématique ouvert de l'existence idéale d'objets mathématiques, si l'on veut éviter le psychologisme? Bernays ne donne guère une réponse satisfaisante à cette question. Sa solution demanderait une analyse sémiotique de l'intuition mathématique. Mais ceci dépasse notre sujet d'aujourd'hui.

Références

Bernays, Paul, 1937, "Grundsätzliche Betrachtungen zur Erkenntnistheorie", in: *Abhandlungen der Friesschen Schule,* neue Folge 6 (Heft 3/4), 279-290.

Bernays, Paul, 1938, "Résumé", Manuscrit, Fond Jussieu.

Bernays, Paul, 1939a, "Bemerkungen zur Grundlagenfrage", in: F. Gonseth, *Philosophie Mathématique,* Paris: Hermann, 83-87.

Bernays, Paul, 1939b, "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie Hilbertienne de la démonstration", in: *Entretiens de Zürich 1938*, Zürich: Leemann & Co., 144-152.

Bernays, Paul, 1946, "Quelques points de vue concernant le problème de l'évidence", in: *Synthese* 5, 321-329.

Bernays, Paul, 1947, "Contradiction et non-contradiction", in: *Dialectica* 1, 305-309.

Bernays, Paul, 1948, "Grundsätzliches zur 'philosophie ouverte'", in: *Dialectica* 2, 275-279.

Bernays, Paul, 1949, "Die Erneuerung der rationalen Aufgabe", in: *Proceedings of the Int. Congress of Philosophy*, Vol. 1, Amsterdam, 42-50.

Bernays, Paul, 1950, "Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit", in: P.B., *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1976, 92-106.

Bernays, Paul, 1952a, "Dritte Gespräche von Zürich", in: *Dialectica* 6, 130-136.

Bernays, Paul, 1952b, "Gesichtspunkte der Erkenntnistheorie", in: *Dialectica* 6, 137-140.

Bernays, Paul, 1953a, "Diskussionsbemerkungen zum Referat von Herrn Husson", in: *Dialectica* 7, 32-34.

Bernays, Paul, 1953b, "Einleitendes Referat", in: *Dialectica* 7, 318-321.

Bernays, Paul, 1957, "Von der Syntax der Sprache zur Philosophie der Wissenschaften", in: *Dialectica* 11, 233-246.

[46] Bernays 1937, 284.
[47] Cf. Bernays 1969, 196.

Bernays, Paul, 1960, "Charakterzüge der Philosophie Gonseths", in: *Dialectica* 14, 151-156.
Bernays, Paul, 1963, "Remarks to 'the End of a Phase'", in: *Dialectica* 16, 49-50.
Bernays, Paul, 1969, "Bemerkungen zur philosophie der Mathematik", in: *Akten des XIV. Internationalen Kongresses für Philosophie 1968*, Wien: Herder, 192-198.
Bernays, Paul, 1970, "Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen", in: *Dialectica* 24, 53-66.
Bernays, Paul, 1976a, *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt.
Bernays, Paul, 1976b, "Kurze Biographie", in: Gert H. Müller (ed.), *Sets and classes*, Amsterdam/New York/Oxford: North-Holland.
Bernays, Paul, 1977, "Überlegungen zu F. Gonseth's Philosophie", in: *Dialectica* 31, 119-128.
Carnap, Rudolf, 1958, "Empiricism, Semantics, and Ontology", in: R.C., *Meaning and necessity,* Chicago/London: Univ. of Chicago Press, 205-221.
Cassirer, Ernst, 1990 ([1]1910), *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Cavaillès, Jean, 1962, "Transfini et continu", in: J. C., *Philosophie mathématique*, Paris: Hermann, 255-274.
Emery, Eric, 1985, *Ferdinand Gonseth. Pour une philosophie dialectique ouverte à l'expérience,* Lausanne: L'Age d'Homme.
Gonseth, Ferdinand, 1939, *Philosophie mathématique,* Paris: Hermann.
Gonseth, Ferdinand, 1964, *Le problème du temps*, Neuchâtel: Griffon.
Gonseth, Ferdinand, 1977, "Notes autobiographiques", in: *Association Ferdinand Gonseth. Bulletin d'information* 10, 12-17.
Heinzmann, Gerhard, 1982, *Schematisierte Strukturen. Eine Untersuchung über den Idoneismus Ferdinand Gonseths auf dem Hintergrund eines konstruktivistischen Ansatzes*, Bern: Haupt.
McNaughton, Robert, 1957, "Conceptual schemes in set theory", in: *The Philosophical Review* 61, 66-80.
Specker, Ernst, 1979, "Paul Bernays", in: M. Boffa, D. van Dalen, K. McAloon (eds), *Logic colloquium 78*, Amsterdam/London: North-Holland.

Ce que “New Foundations” relativise

Joseph Vidal-Rosset

En hommage à Ernst Specker

Le système ensembliste inventé par Quine, exposé dans son célèbre article de 1937 intitulé "New Foundations for Mathematical Logic",[1] et désigné depuis lors sous l'abréviation NF, a connu un écho relativement limité chez les mathématiciens. Leur manque d'intérêt pour NF s'explique par la supériorité pratique de la théorie classique des ensembles (ZFC) à produire le maximum de théorèmes. Mais on peut dire surtout que la publication en 1953 d'un résultat de Specker, démontrant que NF contredit l'axiome du choix,[2] a probablement été une très mauvaise publicité pour le système ensembliste de Quine.

Cet état de fait n'a cependant pas empêché une minorité de logiciens et de théoriciens des ensembles à s'intéresser au système NF et à ses dérivés. Le mathématicien américain Randall Holmes a publié un article dont le titre est à lui seul suffisamment éloquent : "The set-theoretical program of Quine succeeded, but nobody noticed".[3] Mais ce n'est pas, selon Holmes, NF mais NFU (NF + *Urelemente*) augmenté de l'axiome du choix et de l'infini, qui peut être considéré comme une alternative intéressante à ZFC. La question de savoir pourquoi il en est ainsi, reste, dit-il, "an intriguing mathematical question". Holmes va jusqu'à conjecturer que, si la formulation du système NFU par Jensen[4] (1969) avait précédé le fameux théorème de Specker (1953), l'intérêt qui se serait manifesté pour les théories ensemblistes munies d'un ensemble universel eût été tout autre, puisque NFU est un système dont la cohérence est démontrée (par un théorème de l'arithmétique de Peano) et dans lequel on peut représenter les vérités de la théorie classique des ensembles (ZFC).[5] J'ignore si une telle conjecture est justifiée. Il est cependant incontestable que, si NF et les systèmes qui en dérivent ont déjà fait l'objet chez une minorité de mathématiciens de travaux difficiles et de résultats importants, ceux-ci sont restés presque sans écho dans le monde de la philosophie analytique au sens large. Quine a reconnu l'importance et le caractère impressionnant du théorème de Specker, mais il n'en a fait presque aucun commentaire philosophique. Or je crois

[1] Quine 1937.
[2] Specker 1953.
[3] Holmes 1994.
[4] Jensen 1969.
[5] Holmes 1998, 12.

James GASSER und Henri VOLKEN (eds.): Logic and set theory in 20th century Switzerland. Bern 2001
PhilSwiss Schriften zur Philosophie herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel, **Band 1**
 ISSN 1424-8875 www.philosophie.ch/schriften

que l’axiomatique de NF et les principaux résultats qui en sont déduits peuvent apporter des arguments précis dans les débats difficiles de la philosophie des mathématiques.

On commencera donc, dans un premier temps, par montrer comment l'axiomatique de NF permet d'éviter les paradoxes et pourquoi elle conduit à la relativité des théorèmes ensemblistes (à travers le traitement du théorème de Cantor) inclinant ainsi à conventionnalisme dans le cadre de la théorie des ensembles dont il s'agira de montrer précisément le poids et la portée.

Ce n'est que dans un second temps qu'une analyse détaillée du théorème de Specker montre comment cette preuve infirme ou au moins relativise l'assertion philosophique de Bernays selon laquelle "la plus faible des suppositions 'platoniciennes' introduite par l'arithmétique est celle de la totalité des nombres entiers."[6] Il est bien connu que cette philosophie postule l'existence d'un monde intelligible et que les entités abstraites de ce monde sont découvertes et non inventées. Le théorème de Specker est philosophiquement remarquable parce qu'il fragilise sérieusement le platonisme contemporain qui s'est édifié sur la théorie classique des ensembles qui en effet *suppose* la totalité des nombres entiers en inscrivant celle-ci dans la liste de ses axiomes. Mais si l'on peut construire une théorie des ensembles où l'infini actuel est un théorème, c'est-à-dire une *conséquence logique* de l'axiomatique ensembliste, alors le platonisme n'apparaît plus comme la seule philosophie en accord avec l'édifice mathématique fondé sur ZFC, mais comme une philosophie mathématique contemporaine relative à une théorie ensembliste parmi d'autres possibles. Pour qu'un tel argument soit acceptable, il est nécessaire de montrer pourquoi NF et les systèmes qui en dérivent ne se prêtent pas nécessairement à une interprétation platonicienne des objets abstraits que sont les ensembles. On verra enfin pourquoi les développements mathématiques du programme ensembliste de Quine peuvent être en accord avec des positions philosophiques que Quine ne rejetterait certainement pas: le relativisme ontologique et finalement un réalisme mathématique distinct du platonisme authentique parce qu'en accord possible avec l'empirisme.

Mais l'abandon de la croyance naïve en l'existence des objets mathématiques ne signifie pas que l'on doive renoncer aux expressions de "découverte", de "surprise" et de "mystère" qui sont habituellement employées pour décrire la recherche en mathématiques. Lorsque Specker montra que le système NF contredisait l’axiome du choix, il créa en effet la surprise, car la théorie des types que le système NF simplifiait était, elle, cohérente avec cet axiome. Cette surprise n’est pas l’indice de l’existence d’un monde d’entités abstraites indépendantes, mais que les univers des théories des en-

[6] Bernays 1935, 53.

sembles sont définis par les règles formelles.

Relativité de l'ontologie, signification et dénotation

NF est une théorie qui est principalement née des réflexions sur la théorie simple des types (TT). La stratification propre à NF n'est rien d'autre que l'ambiguïté donnée à la typification. Avant Quine, Russell en avait formulé le principe. Dans NF, les types peuvent être représentés par les nombres naturels comme dans la plus simple théorie des types, mais ils sont en quelque sorte identifiés ou supprimés par l'ambiguïté de leur désignation : si une variable x dans une formule φ a un type n donné, et si la sous-formule '$x \in y$' apparaît dans φ, alors y doit être de type $n + 1$. Si '$x = y$' apparaît dans φ, alors x et y doivent être du même type. Une formule est dite *stratifiée* (*stratified*) si l'assignation des types aux variables obéit à ces contraintes, sinon elle est *non-stratifiée* (*unstratified*). L'axiomatique de NF se réduit alors aux deux axiomes suivants:

> *L'extensionalité:* quel que soit x et quel que soit y, si tout élément de x est aussi un élément de y et réciproquement, alors x et y sont un seul et même ensemble.
> *Le schéma d'axiomes de compréhension:* l'extension d'une formule stratifiée est un ensemble.

Le système NF évite la réduplication encombrante de copies d'un même objet. En théorie des types, on doit admettre l'existence d'un nombre 3 différent pour chaque type. Le nombre 3 étant défini comme la collection de tous les ensembles de trois objets de type n, est lui-même de type $n + 2$. L'astuce syntaxique de la stratification nous libère de cette multiplication déplaisante des entités.

Contrairement à la plus simple des théories des types et d'une manière comparable à ZF, NF est une théorie de purs ensembles (dans le langage de Quine, "une théorie de pures classes"), c'est-à-dire une théorie sans ces éléments simples (*Urelemente*) qui ne peuvent jamais être à droite du signe d'appartenance. Cependant, à la différence de ZF, la question de l'existence des ensembles n'est nullement liée à la taille des ensembles *mais à la manière dont ceux-ci sont définis.*[7]

En effet, l'ensemble M défini comme l'ensemble de tous les ensembles ne peut pas exister dans ZF puisqu'en vertu du théorème de Cantor l'ensemble des parties de M serait strictement plus grand que M et cela en contradiction avec la définition de M lui-même. Le théorème de Cantor interdit donc dans ZF que l'on puisse affirmer l'exis-

[7] Forster 1997.

tence d'un ensemble *absolument* universel. La situation dans NF est complètement différente: l'ensemble universel V existe parce que sa définition "V est l'ensemble des x tels que $x = x$" (ou, en formule, $V = \{x \mid x = x\}$) est *une formule stratifiée*.

Cette différence entre ZF et NF donne un argument intéressant aux partisans du conventionnalisme en mathématiques: il n'y a en effet pas de raison de considérer que les expressions "l'ensemble universel" ou "l'ensemble de tous les ensembles" sont des expressions qui ne peuvent pas dénoter des entités, car elles sont significatives et c'est en vertu de règles différentes qu'elles peuvent être ou ne pas être à l'origine de contradictions. L'expression "ensemble de tous les ensembles" est contradictoire dans ZF en vertu du théorème de Cantor qui s'applique dans ZF à tous les ensembles. L'existence de l'ensemble universel est en revanche impliquée par le schéma d'axiomes de compréhension de NF, alors que le théorème de Cantor sous sa forme générale échoue dans NF puisqu'il dépend d'un argument diagonal dont la formule n'est pas stratifiée. Le théorème de Cantor redevient néanmoins valable dans NF sous l'expression "l'ensemble des singletons de tout ensemble est de cardinalité strictement inférieure à la cardinalité de son ensemble puissance" et l'on peut alors dériver le corollaire selon lequel le nombre cardinal des singletons de V est strictement inférieur au nombre cardinal de V. C'est là une illustration de la relativité de l'ontologie: les vérités mathématiques de la théorie des ensembles sont relatives aux axiomatiques et peuvent dans certains cas être traduites d'une théorie dans une autre avec les contraintes qu'impose tout manuel de traduction.

Signification et dénotation

Dans le cadre de la question philosophique classique des rapports entre la signification et la dénotation, NF a une caractéristique remarquable qui mérite d'être soulignée. L'axiomatique de NF s'accorde avec l'idée naturelle selon laquelle le caractère significatif d'un énoncé n'implique pas nécessairement la dénotation d'un objet auquel l'énoncé ferait référence. Si une formule comme '$x \in x$' est non significative dans ZF en raison d'un principe d'induction appliqué sur la relation d'appartenance: si nous avons une assertion qui est vraie de l'ensemble vide et qui est vraie de tout ensemble pour autant qu'elle l'est de tout élément, alors elle l'est de tous les ensembles. En revanche, si l'on raisonne dans NF, on admet que l'énoncé '$x \in x$' est une formule significative mais elle est non stratifiée et par conséquent n'enveloppe pas l'existence des ensembles qui sont à eux-mêmes leur propre élément. Ainsi sont d'ailleurs *évités* tous les paradoxes ensemblistes comparables au paradoxe de Russell. Puisqu'il n'y a pas d'axiome dans NF nous permettant de dire que la collection de tous les ensembles qui ne sont pas membres d'eux-mêmes est un ensemble - une formule comme '$x \notin x$' étant non stratifiée - le paradoxe ne peut pas être formulé.

On a déjà dit que NF est directement issue de TT grâce à l'ambiguïté donnée à la typification *via* la stratification. Or, de la même façon que la *free logic* purifie la logique classique des prédicats du 1er ordre de ses engagements ontologiques, le procédé syntaxique de stratification débarrasse la théorie des ensembles de l'assomption réaliste des types et c'est pourquoi l'on peut dire que NF est une *free type theory*.

Enfin, puisque aucune existence d'ensemble n'est assumée dans NF indépendamment d'une formule stratifiée qui définisse l'ensemble, NF apparaît comme une théorie dont les exigences constructives sont plus fortes que dans ZF. Il est intéressant à ce titre de comparer le schéma d'axiomes de compréhension de NF (énoncé plus haut) avec le schéma d'axiomes de séparation de ZF: $(\forall a)(\exists b)(\forall x)\ ((\mathrm{x} \in b) \leftrightarrow (x \in a \wedge Fx))$. Tous deux sont formulés pour permettre à la fois la définition d'ensembles à l'aide d'une propriété des éléments de ceux-ci et pour éviter la formation des paradoxes ensemblistes. Ce dernier objectif est réalisé *grosso modo* à l'aide du même procédé : *la différence de niveau* entre les ensembles et les membres de ceux-ci (à cette différence près que la stratification dans NF impose que x soit de niveau n et y de niveau $n + 1$ si la formule '$x \in y$' indique l'existence d'un ensemble). Dans ZF, un ensemble ne peut être défini en compréhension qu'à l'intérieur d'un autre ensemble *déjà donné*, telle est la signification du schéma d'axiomes de séparation. Un tel présupposé, réaliste dans son expression puisque l'existence d'un ensemble a quelconque est la condition de la définition en compréhension d'un ensemble b, est absent de NF: c'est uniquement une formule (stratifiée) qui permet d'affirmer *l'existence* de l'ensemble.

Les axiomes différents de ZF et de NF ont des conséquences différentes relativement à l'existence de l'ensemble absolument universel. Il est possible de faire usage de l'axiome de séparation et de définir grâce à la formule ouverte $x = x$ un ensemble universel b dans ZFC, mais cet ensemble est défini par séparation, relativement à un ensemble de départ a, qui n'est pas absolument universel, b ne l'étant *a fortiori* pas non plus. La façon dont sont définis les ensembles dans ZF exclut donc la possibilité de l'existence d'un ensemble absolument universel, tout comme il exclut un complément de cet ensemble ainsi que de tout ensemble (il n'y a pas d'axiome des compléments dans ZF).[8] En revanche, puisqu'il n'y a pas de schéma de séparation dans NF, mais un schéma de compréhension stratifiée, il y a un ensemble absolument universel tout comme un complément évident de cet ensemble (l'ensemble vide). Tout ensemble ayant alors un complément dans NF, l'univers de NF offre une algèbre de Boole alors qu'une telle algèbre ne survit dans ZF que lorsqu'on la relativise à un ensemble arbitraire, mais non dans l'univers de ZF puisque celui-ci n'est pas un ensemble.[9]

---

[8] Gochet & Gribomont 1994, vol. 2, 24-25.
[9] Quine 1969b, 287-289.

Cependant, contrairement à ce que pourrait faire imaginer le fait que NF implique l'existence d'un ensemble absolument universel, c'est cette théorie, bien plus que ZF, qui plaide en faveur du caractère conventionnel de la nature des vérités ensemblistes. Comme le souligne Holmes, une formule non stratifiée qui définit un ensemble n'implique pas l'impossibilité de l'existence d'un tel ensemble; cela signifie simplement que, dans une théorie ensembliste à la NF, un tel ensemble *peut* ne pas exister et, en l'absence d'une formule stratifiée, nous sommes libres de rejeter une telle existence si celle-ci est problématique.[10] Il y a sans doute quelque chose de choquant pour le platonicien à faire de l'existence ou de l'inexistence d'un ensemble non défini par une formule stratifiée une simple affaire de commodité, selon qu'un tel ensemble conduit à des difficultés ou nous laisse travailler en paix. Il peut aussi sembler étrange que la preuve de l'existence d'un ensemble repose sur la seule astuce syntaxique de la stratification. De là à penser que le système NF illustre le pragmatisme et la thèse philosophique du caractère linguistique des vérités logico-mathématiques, il n'y a qu'un pas qu'il faut se garder de franchir aussi brutalement.

L'origine de ce malaise platonicien face au programme ensembliste de Quine a pour cause la conviction que les ensembles sont des objets abstraits indépendants de l'esprit, comme tous les objets mathématiques. Faire reposer l'existence des ensembles sur un procédé syntaxique vide de contenu tout en admettant l'existence possible d'ensembles définis par des formules non stratifiées c'est, pour le platonicien contemporain, mettre les objets réels sur le même plan que les fictions. Adopter ce jugement revient à dire des ensembles ce que Frege disait du nombre: qu'ils ne sont pas plus un objet de la psychologie ou un produit de nos processus psychiques que ne l'est la mer du Nord.[11] Lorsque Gödel écrit que le concept de "nombre entier" peut être remplacé par celui d'"ensemble" (et ses axiomes),[12] il songe au projet classique de Frege-Russell, celui-ci pouvant, il est vrai, être mené à bien aussi bien dans ZF que dans NF. Cette traductibilité des concepts d'une théorie dans l’autre nous incline à penser qu'ils traduisent effectivement une même et unique réalité mathématique indépendante de nos constructions mentales par lesquelles nous nous efforçons d'atteindre le monde intelligible. Cette traductibilité serait cependant un argument plus troublant qu'elle ne l'est effectivement si l'indétermination de la traduction ne touchait pas ces branches de la théorie des ensembles: l'univers des ensembles de ZF n'est précisément pas un ensemble mais une classe proprement dite, *a class as many,* selon l'expression de Russell, lorsque l'univers de NF est un ensemble, *a class as one*. De tels exemples de l'indétermination de la référence conduisent à s'interroger pour savoir si le Platonisme a un quelconque intérêt

---

[10] Holmes 1998, 53.
[11] Frege 1884, 153.
[12] Gödel 1995, 199.

à s'installer dans la théorie des ensembles pour développer ses arguments, car on peut douter qu'il existe un royaume des ensembles indépendants de nos constructions théoriques.

Cependant, comme me l'a fait remarquer Vuillemin, le Pythagorisme se passait complètement du concept d'ensemble infini des nombres entiers et c'est à l'intérieur du Pythagorisme que le Platonisme s'est développé et cet argument suffit à soulever la question de savoir si s'attaquer au Platonisme contemporain fondé sur la théorie classique des ensembles n'est pas s'engager dans une bataille digne de Don Quichotte. Je répondrai en soulignant que c'est aussi le théorème de Löwenheim-Skolem (selon lequel toute théorie qui admet un modèle est également satisfaite par au moins un modèle limité aux entiers positifs) qui a été le cheval de bataille des partisans de la réduction ontologique pythagoricienne, celle-ci étant alors plus d'inspiration nominaliste que platonicienne.[13] On connaît l'hostilité de Quine à une telle réduction: c'est parce qu'il n'existe pas de fonction délégante permettant de représenter l'univers non dénombrable des réels dans l'univers dénombrable des entiers naturels, qu'il rejette la réduction pythagoricienne impliquée par la version forte du théorème de Löwenheim-Skolem. Ce théorème, lorsqu'il dépend de l'axiome du choix, dit que "si une théorie est vraie et a un univers non dénombrable, alors la totalité de cet univers, à l'exception d'une partie dénombrable, est du bois mort, en ce qu'on la peut exclure du parcours de valeurs des variables sans rendre fausse aucune phrase de la théorie."[14] Or ce théorème est pour Quine une parfaite illustration de la relativité de l'ontologie: "il n'y a pas de sens absolu à parler de l'ontologie d'une théorie". Mais il montre surtout que le choix d'une théorie n'est pas indifférent lorsqu'il s'agit de discuter, à l'aide de l'ontologie de cette théorie adoptée, de l'ontologie d'une théorie-objet: parce qu'un univers des réels n'est pas représentable dans celui des entiers naturels, la réduction pythagoricienne est "sans attrait". "[Au théorème de Löwenheim-Skolem] revient l'honneur même de stigmatiser le pythagorisme comme dénué de sens. Car il n'y pas de sens absolu à dire que tous les objets d'une théorie sont des nombres, ou qu'il sont des ensembles, ou des corps, ou quoi que ce soit d'autre; cela n'a pas de sens, sauf par rapport à une théorie d'arrière plan."[15] On peut donc se débrouiller uniquement avec des entiers pour réinterpréter nos énoncés d'observation sur le monde, mais nous n'aurions pu constituer initialement notre science avec l'ontologie du pythagorisme: "les nombres ne correspondent pas un par un aux réifications qui ont été notre marchepied." Il nous faut rester "à portée de fonctions délégantes."[16] L'argument de Quine pourrait être un argument de poids pour un Platonisme authentique fondé sur la théorie des ensembles: nous sommes engagés

[13] Quine 1966.
[14] Quine 1969a, 71.
[15] Quine 1969a, 72.
[16] Quine 1990, 57-59.

dans une ontologie d'ensemble d'objets abstraits qui transcendent par leur nombre tous nos moyens de notations. Cette ontologie a, pour point de départ de son élaboration, l'ensemble infini des entiers, qui fait l'objet d'un axiome dans la théorie ZFC. L'engagement ontologique envers l'infini actuel est bien l'acte théorique qui rend problématique le nominalisme. Mais si cet engagement peut-être prouvé comme la conséquence formelle d'une axiomatique ensembliste, et non plus comme un postulat qui s'impose à l'entendement, le Platonisme contemporain reste possible, mais il est affaibli par la démonstration. C'est ce qu'a réussi Specker en démontrant que l'infini est un théorème de NF et non un axiome. On va donc examiner quelques propriétés de ce théorème et tenter de montrer l'importance philosophique qu'il peut avoir dans le contexte de la querelle entre le Platonisme authentique et le positivisme logique.

Remarques philosophiques sur le théorème de Specker (1953)

Dans son article original de 1937, Quine pense démontrer l'existence de l'infini dans NF en raison de l'existence de la suite infinie des objets {}, {{}}, {{{}}}, …. Mais la collection formée à partir de l'itération de singletons de l'ensemble vide n'a pas de définition stratifiée et il n'est donc pas prouvé qu'il existe. Mais l'intuition de Quine était cependant juste au sens où l'infini est bien un théorème (difficile) du système que Specker démontra d'abord pour lui-même (dans un article qui ne fut jamais publié) puis comme corollaire de la contradiction de l'axiome du choix dans NF. Cette démonstration, publiée en 1953, peut non seulement être considérée comme la plus importante démonstration mathématique concernant NF, mais encore comme une démonstration dont les conséquences philosophiques n'ont pas été encore suffisamment remarquées. Il serait fastidieux de reprendre pas à pas la démonstration difficile que donne Specker. J'en donne donc ici, en annexe de cet article, une version publiée par Boffa (plus brève que la preuve originale de Specker), et je ne ferai qu'insister sur les points importants du point de vue philosophique.

La preuve de Specker est construite à partir des concepts suivants:

- l'ensemble universel, $V = \{x \mid x = x\}$
- l'ensemble vide, $\Lambda = \{x \mid x \neq x\}$
- l'ensemble puissance de *a*, noté SC(*a*)
- l'ensemble de singletons de *a*, noté USC(*a*)
- le nombre cardinal de *a*, noté |*a*|, défini selon une formulation de Rosser. (Les nombres cardinaux sont des ensembles saturés d'ensembles équivalents: 1 est par exemple le nombre cardinal des ensembles avec un élément. Cette définition est celle du nombre cardinal selon Frege-Whitehead-Russell.)

- la somme de nombres cardinaux quelconques
- la relation d'ordre et l'axiome du choix donné sous la forme: "les nombres cardinaux sont munis d'un bon ordre"
- l'opération $2^{|x|}$ qui, non stratifiée, est égale à $|SC(x)|$
- la stratification de l'opération $2^{|x|}$ qui est égale à $|SC(y)|$ lorsque $|x| = |USC(y)|$
- l'opération T pour les nombres cardinaux : $T\,|a| = |USC(a)|$
- le principe d'induction mathématique, ce principe ne supposant nullement que l'ensemble des entiers naturels soit infini. On en cite la formulation que donne Holmes:

  Soit S un ensemble de nombres naturels. Si $0 \in S$ et pour tout n, $n + 1 \in S$ si $n \in S$, il suit que $S = N$; tous les nombres naturels sont dans S.

  Une formulation en termes de propriétés de nombres à la place des ensembles [telle qu'on la trouve dans la formulation de Peano: "toute propriété possédée par 0 et possédée par le successeur de tout nombre qui la possède aussi, est vraie de tous les nombres"] marchera aussi bien, du moment que ces propriétés sont exprimées par des formules stratifiées et que donc elles définissent des ensembles. On pourra admettre un axiome qui aura pour conséquence que l'induction vaut aussi dans des conditions où il n'y a pas de stratification, mais l'induction sur des conditions non stratifiées n'est pas nécessaire à l'arithmétique (ce qui a d'importantes conséquences en théorie des ensembles).[17]

A partir de ces éléments Specker définit un ensemble $\Phi(m)$ des nombres cardinaux m, 2^m, 2^{2^m}, … L'opération $2^{|x|}$ n'est pas définie pour $x = V$.

Supposons V muni d'un bon ordre (et que par conséquent tout ensemble le soit), alors, si l'on note α l'élément minimal et β, le plus grand élément de $\Phi(a)$, 2^β *étant non défini*, on a $\beta > T|V|$, donc $T\beta > T^2|V|$, donc $2^{T\beta} \geq 2^{T2|V|} = T|V|$. Si $2^{T\beta} > T|V|$, alors $\Phi(2^{T\beta}) = \{2^{T\beta}\}$; et si $2^{T\beta} = T|V|$, alors $\Phi(2^{T\beta}) = \{T|V|, |V|\}$. Donc:

(i) $|\Phi(2^{T\beta})| = 1$ ou 2
(ii) donc $|\Phi(T\alpha)| = Tn + 1$ ou 2
(iii) $\Phi(T\alpha)$ est fini et $\alpha = T\alpha$

Il y a contradiction entre (ii) et (iii). Il est en effet facile de montrer que n et $T(n)$ sont congrus modulo 3 pour tous les nombres naturels n et qu'il est donc impossible pour tout nombre naturel n d'être égal à $Tn + 1$ ou $Tn + 2$. Pour tout nombre naturel n, *on doit avoir* $n = Tn$. Or (i) et (ii) se déduisent correctement de la minimalité de α et de la maximalité de β *sans valeur définie pour* 2^β. La conclusion est donc la suivante: l'uni-

[17] Holmes 1998, 81.

vers de NF ne peut en aucun cas être muni d'un bon ordre (négation de l'axiome du choix), et il est infini (corollaire) car s'il ne l'était pas, il pourrait être bien ordonné.

On doit remarquer enfin que cette réfutation de l'axiome du choix fait usage des cardinaux non mesurables qui sont de la taille de *V* et qui ne sont pas "cantoriens". (Un ensemble *a* est cantorien quand le nombre cardinal de *a* est égal au nombre cardinal de l'ensemble des singletons que l'on peut définir dans *a*. Tous les ensembles dénombrables sont par définition cantoriens.) L'opération *T* sur les cardinaux joue un rôle fondamental et les cardinaux cantoriens sont aisément définis comme le point fixe de l'opération *T*. De la même façon, le fait que la cardinalité de *V* ne soit pas fixée sous *T* (que *V* ne soit donc pas cantorien) est tout aussi crucial. La preuve n'exclut donc pas que l'axiome du choix puisse s'appliquer sans restriction à tous les ensembles cantoriens.

Le théorème de Specker signifie, comme l'écrit Boffa, que NF contient l'arithmétique. La beauté d'un tel système réside dans la démonstration, certes indirecte, de l'existence de l'infini actuel dans un système ensembliste qui ne se donne au départ que l'extensionalité (forte) et la stratification qui elle même présuppose l'induction.

Specker démontre l'infini et la négation du choix dans NF d'une manière "diaboliquement tortueuse" pour reprendre l'adjectif par lequel Quine lui rend hommage.[18] Peut-on tirer un enseignement philosophique d'un procédé diabolique ? Il est vrai que le caractère non constructif de la preuve semble ne pas nous permettre de comprendre pourquoi NF prouve l'existence de l'infini actuel. Si bien que cette question apparaît finalement aux yeux d'un logicien spécialiste de NF comme le problème philosophique majeur soulevé par NF. On peut au contraire considérer que la preuve relève de la technicité de la théorie des nombres cardinaux et n'a pas en elle-même de signification philosophique. On peut enfin considérer que le théorème de Specker prouve que, si NF est cohérent (ce que l'on ne sait toujours pas démontrer), il est impossible d'identifier un individu avec son singleton (puisque l'ensemble des singletons de *V* est strictement plus petit que *V*, *V* étant son propre ensemble puissance).[19] Ces trois idées philosophiques sont dignes d'estime. Mais il y a plus: Specker a exprimé d'une manière logiquement impeccable ce à quoi songeait Russell en 1921 et ce que Quine a cru prouver en rédigeant "New Foundations": l'existence d'un ensemble infini dans une théorie des ensembles issue de la théorie des types. Russell raisonnait de manière informelle sur le principe d'induction mathématique. Mais un raisonnement informel ne tient pas lieu de démonstration. Quine a donné une démonstration inacceptable dans le cadre même de la théorie NF. Specker inventa un procédé dont le double résultat surprit tellement qu'il

[18] Quine 1969c, 350.
[19] Forster 1995, 12-13 et 27.

laissa dans un premier temps Bernays lui-même sceptique.[20] En prouvant que NF contredit l'axiome du choix on pouvait croire que ce système ensembliste était définitivement rejeté par-dessus bord, selon un des mots favoris de son auteur. Il n'en était rien, puisque cette négation de l'axiome du choix ne portait que sur les ensembles de la taille de V elle n'avait de portée que locale: elle ne touchait, comme on l'a déjà dit, que les ensembles "non cantoriens", ceux que les spécialistes de NF nomment les "big cardinals" par oppositions aux "large cardinals".[21] Mais quelle est la taille de l'univers de NF, quel est le nombre cardinal de V ? V est l'univers, il contient tous les ensembles, il ne peut pas être bien ordonné, il est donc non mesurable et est infini. Il est aussi piquant que la démonstration de l'existence de cette infini (supérieur par définition à n'importe quel autre) puisse être démontré indirectement dans NF sans que l'on puisse même démontrer que, pour tout nombre naturel n, on a $Tn = n$, puisqu'une telle formule n'est pas stratifiée et que l'induction ne peut donc pas s'y appliquer. Specker a donc démontré que l'existence d'une totalité infinie d'entiers était logiquement déductible à partir d'une structure mathématique ensembliste qui ne se donne au départ que l'extensionalité, un principe d'abstraction fondée sur l'induction (i.e. la stratification), et la logique classique puisque le théorème prouve finalement l'infini en faisant usage du procédé de démonstration par l'absurde. Jamais l'infini actuel n'est supposé dans la preuve, mais seulement l'indéfini, comme on l'a souligné plus haut. Specker a donc prouvé que le Platonisme tel que le décrit Bernays ne s'impose pas nécessairement pour traduire l'arithmétique dans la théorie des ensembles. L'infini actuel s'imposant ici comme une conséquence logique, le fait de considérer que le postulat de l'existence d'un objet abstrait qui dépasse notre entendement est une condition nécessaire au fondement de l'arithmétique apparaît alors comme un mythe. Si l'existence de l'infini actuel n'avait jamais pu faire l'objet d'une preuve mathématique mais s'était toujours imposé comme un acte de foi, comme un axiome, le Platonisme authentique ne pourrait être ainsi fragilisé. Mais cette preuve étant apportée, le réalisme ensembliste (distinct alors du Platonisme authentique) et le pragmatisme face à la rivalité des théories des ensembles deviennent tout à fait compatibles avec l'empirisme. Forster affirme qu'il y a quelque chose de correct, dans le fait de comparer une théorie des ensembles avec un ensemble universel avec la croyance en Dieu, si Dieu est représenté ici par l'objet infini "tel que rien de plus grand ne peut être conçu", pour reprendre que Saint Anselme donne dans son *Proslogion*.[22] J'aurais plutôt tendance à penser que la preuve de Specker, pour non constructive qu'elle soit, réussit à démontrer que nous pouvons dériver cet infini du fini. Quine décrit donc bien correctement la relativité ensembliste et il a en un mot exprimé l'essentiel en disant qu'il y a quelque chose de diabolique dans la

[20] Je tiens l'anecdote d'une conversation avec Specker, en juin 1999, à Berne.
[21] *Large cardinal* est un concept familier du point de vue de ZF: mesurable, compacte, etc. Les *big cardinals* sont les cardinaux en relation avec l'univers, ou la collection de tous les ordinaux: les cardinaux de choses qui seraient des classes propres dans ZF.
[22] Forster 1995, 11.

preuve de Specker …

Annexe : L'arithmétique dans NF*

On a le surprenant théorème démontré par Specker (1953):

NF |- l'univers V n'est pas bien ordonnable.

Mais l'on prouve facilement dans NF que tout ensemble fini est bien ordonnable, d'où le corollaire:

NF |- AI

Preuve du théorème de Specker (1953)

Dans NF, on peut définir le cardinal $|PX|$ d'un ensemble X comme l'ensemble des ensembles équipotents à X. On peut même définir l'ensemble C des cardinaux et le munir naturellement d'un ordre partiel $\leq$. Soit P_1X l'ensemble de tous les singletons définissables sur X, en formule: $P_1X = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Contrairement à l'intuition, on ne peut pas former l'ensemble des couples $<x, \{x\}>$ qui établirait une bijection de X sur P_1X parce que x et $\{x\}$ ne sont pas du même type, par conséquent il n'est en général pas vrai que $P_1X \approx X$. Ceci nous conduit à définir une opération $T : C \to C$ (qui comme l'opération singleton, augmente le type d'une unité) comme suit:

si $\alpha = |X|$, alors $T\alpha = |P_1X|$.

On définit également une opération partielle (mais conservant le type) comme suit:

si $\alpha = |P_1X|$, alors $2^\alpha = |PX|$.

On remarque que 2^α n'est défini que pour $\alpha \leq |P_1V|$. Bien qu'on puisse avoir $|X| = |PX|$ (par exemple lorsque $X = V$), le théorème de Cantor reste néanmoins conservé sous la forme $|P_1X| < |PX|$ (i.e. $\alpha < |2^\alpha|$ pour $\alpha \leq |P_1V|$). En particulier on a $|P_1V| < |V|$. Si l'on pose $\Omega = |V|$, il vient donc : $\Omega > T\Omega > T^2\Omega >$ …. D'autre part, on vérifie facilement que $T(2^\alpha) = 2^{T\alpha}$ pour $\alpha \leq |P_1V|$; et comme $2^{T\Omega} = \Omega$, on voit que :

* Cette exposé est celui donné par Boffa, dans un séminaire de Théorie des modèles, donné à l'Université de Paris 7, en décembre 1980. Le texte de ce séminaire a été publié dans le *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, Série A, 33 (1981), pp. 21-31. Je tiens à remercier vivement le Professeur Boffa de m'avoir communiqué son texte.

$$\Omega \underset{2^\bullet}{\overset{T}{\rightleftarrows}} T\Omega \underset{2^\bullet}{\overset{T}{\rightleftarrows}} T^2\Omega \underset{2^\bullet}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \ldots$$

et l'on remarque que 2^α n'est pas défini pour $\alpha = \Omega$.
Pour tout cardinal α on peut enfin définir le plus petit ensemble $\varphi(\alpha)$ comprenant α et fermé pour l'opération $2^\bullet$ (ceci grâce au fait que cette opération conserve le type; il ne serait pas possible de définir un ensemble analogue fermé pour l'opération *T*. Exemples: $\varphi(\Omega) = \{\Omega\}$, $\varphi(T\Omega) = \{T\Omega, \Omega\}$ ...

On a maintenant tous les ingrédients nécessaires à la preuve. Supposons que *V* soit bien ordonnable (et donc que tout ensemble le soit), alors l'ordre naturel des cardinaux est un bon ordre, donc il existe un plus petit cardinal α tel que $\varphi(\alpha)$ soit fini. En notant β le plus grand élément de $\varphi(\alpha)$ on a donc :

$$\varphi(\alpha) = \left\{\alpha, 2^\alpha, 2^{2^\alpha}, \ldots, \beta\right\}$$

d'où, par induction sur $|\varphi(\alpha)|$:

$$\varphi(T\alpha) = \left\{T\alpha, 2^{T\alpha}, 2^{2^{T\alpha}}, \ldots, T\beta\right\} \cup \varphi\,(2^{T\beta}),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(T\alpha) = \{T\gamma \mid \gamma \in \varphi(\alpha)\} \cup \varphi\,(2^{T\beta}),$$

d'où

$$|\varphi(T\alpha)| = |\{T\gamma |\ \gamma \in \varphi(\alpha)\}| \cup |\varphi(2^{T\beta})|$$

d'où, en posant $n = |\varphi(\alpha)|$,

$$|\varphi(T\alpha)| = Tn + |\varphi(2^{T\beta})|.$$

Mais β n'est ni inférieur ni égal à $T\Omega$, car 2^β n'est pas défini, donc $\beta > T\Omega$, donc $T\beta > T^2\Omega$, donc $2^{T\beta} \geq 2^{T^2\Omega} = T\Omega$. Si $2^{T\beta} > T\Omega$, $\varphi(2^{T\beta}) = \{2^{T\beta}\}$, et si $2^{T\beta} = T\Omega$, alors $\varphi(2^{T\beta}) = \{T\Omega, \Omega\}$. Donc (i) $|\varphi(2^{T\beta})| = 1$ ou 2,
donc (ii) $|\varphi(T\alpha)| = Tn + 1$ ou 2.
$\varphi(T\alpha)$ est par conséquent fini, d'où $\alpha \leq T\alpha$. En fait $\alpha = T\alpha$ (sinon $\alpha = T\delta$ avec $\delta < \alpha$, donc $\varphi(\delta)$ infini, donc $\varphi(T\delta)$ infini), et finalement $n = Tn + 1$ ou 2, ce qui est absurde car n et Tn sont congrus modulo 3.

Nous savons donc maintenant que NF contient l'arithmétique: tout ensemble fini peut être bien ordonnable, *V* ne peut être muni d'un bon ordre (négation de AC), or si *V* pouvait être bien ordonné, il serait fini, par conséquent il est infini (preuve de l'existence de l'infini dans NF).

Bibliographie des ouvrages cités

Bernays, P., 1935, "Sur le platonisme dans les mathématiques", in: *L'enseignement mathématique* no 35, 52-69.

Forster, T.E., 1995, *Set theory with a universal set. Exploring an untyped universe*, second edition, Oxford: Clarendon Press.

Forster, T.E., 1997, "Quine's NF - 60 years on", in: *American Mathematical Monthly*, November issue.

Frege, G., 1884, *Grundlagen der Arithmetik*, trad. fr. 1969 *Les fondements de l'arithmétique*, Paris: Seuil.

Gochet, P. & Gribomont, P., 1994, *Logique*, Paris: Hermès.

Gödel, K., 1995, *Unpublished philosophical essays*, Rodriguez-Consuegra, F.A. (ed.), Basel: Birkhäuser.

Holmes, R., 1994, "The set-theoretical program of Quine succeeded, but nobody noticed", in: *Modern logic* 4, no 1, 1-47.

Holmes, R., 1998, *Elementary set theory with a universal set*, Louvain-la-Neuve: Bruylant-Academia.

Jensen, R.B., 1969, "On the consistency of a slight (?) modification of Quine's 'New foundations'", in: *Synthese* 19, 250-263.

Quine, W.V.O., 1937, "New foundations for mathematical logic", in: *American mathematical monthly* 44, 655-660; réédité in: Quine, W.V.O., 1953, *From a logical point of view*, second edition, Cambridge Mass.: Harvard University Press, 80-101.

Quine, W.V.O., 1966, "Ontological reduction and the world of numbers", in: *The ways of paradox and other essays*, Cambridge Mass.: Harvard University Press, 212-220.

Quine, W.V.O., 1969a, *Ontological relativity and other essays*, trad. fr. 1977 *Relativité de l'ontologie et autres essais*, Paris: Aubier Montaigne.

Quine, W.V.O., 1969b, *Set theory and its logic*, Cambridge Mass.: Harvard University Press.

Quine, W.V.O., 1969c, in: Davidson, D. & Hintikka, J. (eds), *Words and objections. Essays on the work of W.V. Quine*, Dordrecht: Reidel.

Quine, W.V.O., 1990, *Pursuit of truth*, trad. fr. 1993 *La poursuite de la vérité*, Paris, Seuil.

Specker, E.P., 1953, "The axiom of choice in Quine's 'New foundations for mathematical logic'", in: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.* 39, no 9, 972-975.

La réponse de Dmitry Mirimanoff

Ernst Specker

(1) Dans les Annales de la Société Vaudoise des Sciences naturelles (volume 63, 1945/48, p. 242-243) a paru la notice nécrologique suivante:

"Le 5 janvier 1945 s'est doucement éteint à Genève le professeur Mirimanoff, âgé de quatre-vingt-trois ans.
Membre d'honneur de notre Société, Dmitry Mirimanoff accumulait sur sa tête, avec une modestie extrême qui faisait son charme, de nombreux titres et distinctions que lui valurent ses éminentes qualités de mathématicien et son enseignement lumineux.
Né en Russie en 1861 (le 13 septembre à Pereslav Zalessky), il poursuivit ses études en Italie puis en France pour venir se fixer à Genève. C'est là qu'il acquit le bonnet de docteur en 1900, puis devint privat-docent en 1901. C'est de là également que rayonna dès lors son activité d'analyste rigoureux, fin et précis, qui lui valut en 1922 une chaire d'analyse supérieure, puis l'ordinariat à titre honorifique en 1931. Il fut appelé à donner des cours de mathématiques supérieures à l'Université de Fribourg en 1920 et 1921, puis à celle de Lausanne de 1922 à 1931.
Atteint par la limite d'âge, il prit sa retraite mais son esprit de chercheur ne quitta pas un instant les sentiers de la découverte scientifique. En reconnaissance de la haute qualité de son œuvre, les Universités de Lausanne et de Lyon lui décernèrent le titre de docteur honoris causa, tandis que la Société mathématique suisse et la Société vaudoise des sciences naturelles le nommaient membre d'honneur (juin 1922). Ses recherches et ses publications d'une probité et d'une clarté remarquables, concernent surtout la théorie des nombres, la théorie des ensembles et la théorie des probabilités."

(2) Mirimanoff a publié les trois articles [1], [2], [3] sur la théorie des ensembles (tous dans L'Enseignement Mathématique). C'est dans la publication [1] (1917) que se trouvent les résultats principaux. Ils n'ont pas eu l'écho qu'ils méritent ; en géneral, ces résultats sont attribués aux auteurs qui les ont retrouvés plus tard.

Synopsis des résultats de [1]:

(a) Les ensembles sont analysés comme structures partiellement ordonnées. Ceci conduit Mirimanoff à définir la notion d'ensemble ordinaire ("fundierte Menge", "regular set"). Pour les ensembles généraux (c'est-à-dire des ensembles contenant des éléments indécomposables "Urelemente", "atoms") il introduit

James GASSER und Henri VOLKEN (eds.): Logic and set theory in 20th century Switzerland. Bern 2001

PhilSwiss Schriften zur Philosophie herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel, **Band 1**

une notion d'isomorphie, premier exemple d'une "bisimulation".
Ces notions permettent d'étudier les antinomies de Russell et de Burali-Forti sous un point de vue commun et de les transformer en théorèmes. En termes modernes, ces théorèmes affirment que certaines classes (p. ex. la classe de tous les ensembles) ne sont pas des ensembles.

(b) La notion de nombre ordinal est définie de façon indépendante de la notion d'ordre. D'après cette définition un nombre ordinal est l'ensemble des nombres ordinaux plus petits; le nombre 0 est donc l'ensemble vide e (notation de Mirimanoff), le nombre 1 l'ensemble {e}, le nombre 2 l'ensemble {e, {e}}, le nombre 3 l'ensemble {e,{e}, {e, {e}}}[1,46].
Ce qui distingue Mirimanoff de ses successeurs, c'est que son analyse présuppose la notion naïve de nombre naturel. S'il avait senti le besoin de s'en passer, cela aurait été facile. Il eut fallu définir la notion d'ensemble ordinaire sans présupposer la notion de nombre naturel.

(c) Mirimanoff introduisit la notion de rang d'un ensemble (notion reprise plus tard par J. von Neumann [6]) et les notions de borne cantorienne et de noyau d'un ensemble. Ces notions lui permettent de répondre à la question fondamentale de la théorie des ensembles: Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'individus existe?

Théorème. Une classe d'ensembles ordinaires (dont le noyau est un ensemble) est un ensemble si et seulement si les éléments de la classe possèdent une borne cantorienne.

(3) Mirimanoff atteint ses buts par une analyse subtile des antinomies. Son analyse sera présentée dans le langage moderne: Au lieu de dire "l'ensemble des éléments x satisfaisant à C(x) existe", nous dirons "la classe des x satisfaisant C(x) est un ensemble".
Pour l'analyse de l'antinomie de Russell, la classe de tous les ensembles est répartie en deux classes, la classe A1 des x tels que non x e x et la classe A2 des x tels que x e x.

Lemme. Tout sous-ensemble de A1 est élement de A1.

Démonstration. x e x et x sous-ensemble de A1 entraîne x e A1.
non x e x entraîne x e A1.

Corollaire. A1 n'est pas un ensemble.

(4) Cette façon de présenter l'antinomie de Russell permet d'en trouver des variations.

Pour une première variation, Mirimanoff introduit la notion d'isomorphie. Cette notion n'est intéressante que pour les théories admettant des éléments indécomposables différents de l'ensemble vide ("Urelemente", "atoms"), c'est-à-dire des éléments qui ne soient pas des ensembles. Voilà comment cette notion est introduite[1, p. 40-41]:

"Soient deux ensembles E et E'. Je dirai qu'ils sont *isomorphes* si les conditions suivantes sont satisfaites:

a) Les ensembles E et E' sont équivalents; en d'autres termes, une correspondance parfaite peut être établie entre les éléments de E et ceux de E'.

b) Cette correspondance peut être établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable e de E corresponde un élément indécomposable e' de E', et réciproquement; et qu'à tout élément-ensemble F de E corresponde un élément-ensemble F' de E'. La correspondance parfaite entre F et F' pouvant être à son tour établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable de F corresponde un élément indécomposable de F', et à tout élément-ensemble de F un élément-ensemble équivalent de F', - et ainsi de suite."

À l'heure actuelle, on ne s'exprimerait pas de cette façon; mais l'exposé de Mirimanoff est si clair qu'une définition récursive est immédiate.

Définition de la classe B1: B1 est la classe des ensembles x tels qu'il n'existe pas d'ensemble y qui soit à la fois isomorphe à x et élement de x.

B2 est le complément de B1.

Lemme. Tout sous-ensemble de B1 est élément de B1.

Corollaire. B1 n'est pas un ensemble.

Théorème. Il existe des ensembles appartenant à A1 et à B2.

Démonstration: Soit [a(0), a(1), ...] une suite infinie d'éléments indécomposable et soient b(0), b(1), ... les ensembles b(0) = {a(0), b(1)}, ... , b(k) = {a(k), b(k+1)}, …
(Chacun est libre de refuser une telle définition.)
Les ensembles b(k) sont isomorphes mais differents; b(0) est donc élément de A1 et de B2.

Remarque. La suite des ensembles b(k) est une chaîne infinie descendante, c'est-à-dire b(k+1) e b(k) pour tout k.

Définition. Les ensembles qui ne sont pas premier élément d'une telle chaîne infinie sont dits "ordinaires".

(5) C1 est la classe des éléments ordinaires, C2 le complément de C1.

Lemme. Un sous-ensemble de C1 est élément de C1.

Corollaire. La classe C1 n'est pas un ensemble.

Définition du "noyau" d'un ensemble. Le noyau de l'ensemble x est la classe des éléments y tels qu'il existe une chaîne descendante x (0), ... , x(n) avec x(0) = x et x(n) = y et tel que l'élement y soit un élément indécomposable.

Soit N un ensemble d'ensembles indécomposables. La classe des ensembles dont le noyau est un sous-ensemble de N n'est pas un ensemble.

(6) En particulier, la classe D1 des ensembles dont le noyau ne contient que l'ensemble vide e n'est pas un ensemble. Dans la théorie axiomatique des ensembles on dira que l'axiome de régularité ("Fundierungsaxiom") est satisfait si D1 est la classe de tous les ensembles.

(7) Sur cette base, Mirimanoff est à même de définir les nombres ordinaux indépendamment de la notion d'ordre. Pour arriver à ce but, il passe d'un ensemble bien ordonné E à l'ensemble semblable E'. Voilà comment il décrit sa construction:

"Remplaçons les segments dont se compose E' par les ensembles des segments de ces segments, et appliquons une transformation analogue aux segments introduits de cette manière, et ainsi de suite. A chaque ensemble bien ordonné E correspond ainsi un ensemble d'une forme particulière que j'appellerai ensemble S. Le segment fictif e subsiste seul après cette transformation. On voit qu'un même ensemble S correspond à tous les ensembles bien ordonnés du même type d'ordre." [1, 45/46].

Mirimanoff ajoute [1, 47]:

"Je ferai remarquer encore qu'on peut définir les ensembles S sans passer par l'intermédiaire des ensembles bien ordonnés. Soit E un ensemble S. Nous avons vu que:
1. L'ensemble E est un ensemble ordinaire à un noyau (le noyau e).
2. Si x et y sont deux éléments quelconques de E, l'un d'eux est élément de l'autre.
En outre:
3. Si x est un élément de E, tout élément de x est un élément de E
Ces propriétés sont caractéristiques des ensembles S, et peuvent servir à les définir."

Cette définition des nombres ordinaux a été retrouvée vingt ans plus tard par R.M. Robinson [6].

Théorème. L'ensemble S n'existe pas (ou: La classe S n'est pas un ensemble).

Revenons maintenant à la question fondamentale "Quelles sont les conditions pour qu'un ensemble d'individus existe?"

Mirimanoff donne une réponse à cette question pour les classes d'ensembles dont les noyaux sont contenus dans un ensemble d'ensembles indécomposables, en particulier donc pour une classe d'ensembles réguliers.

Il se fonde sur un système d'axiomes où il distingue "propriété I et II" [1, 44/45] et "postulats 1, 2 , 3" [1,49].

Propriété I: Si x est un ensemble et y contenu dans x, alors y est un ensemble.

Propriété II: Si x est équivalent à S, alors x n'est pas un ensemble.

Postulat 1: La classe des sous-ensembles d'un ensemble est un ensemble.

Postulat 2: Si x est un ensemble d'ensembles ordinaires, alors la réunion des ensembles de x est un ensemble.

Postulat 3: Si x est un ensemble et y équivalent à x, alors y est un ensemble.

Pour énoncer son critère, Mirimanoff introduisit la notion de rang, définie pour les ensembles ordinaires.

1) Le rang d'un ensemble indécomposable est le nombre ordinal 0 (c'est-à-dire l'ensemble vide).
2) Le rang d'un ensemble décomposable x est le plus petit nombre ordinal plus grand que tous les rangs des éléments de x.

Définition de la notion de *borne cantorienne*: Une classe d'ensembles possède une borne cantorienne si les rangs de ses ensembles sont éléments d'un nombre ordinal.

Critère de Mirimanoff:
Une classe d'ensembles ordinaires (dont les noyaux sont contenus dans un en-

semble) est un ensemble si et seulement si les rangs des ensembles ont une borne cantorienne.

Et voilà comment Mirimanoff énonce son critère:

"Pour qu'un ensemble d'ensembles non-isomorphes existe, il faut et il suffit que ces ensembles aient une borne cantorienne." [1, 49]

Bibliographie

[1] Mirimanoff, D., "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles", (*L'Enseign. math*. 19, 1917, 37-52)

[2] Mirimanoff, D., "Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes I", (Ibid. 19, 1917, 209-217)

[3] Mirimanoff, D., "Remarques sur la théorie des ensembles et les antimomies cantoriennes II", (Ibid. 21, 1920, 29 - 52)

[4] von Neumann, J., "Zur Einführung der transfiniten Zahlen", *Acta Lit. ac. Sc. Univ*. (Szeged), Sectio Sc. Math. 1, 199-208

[5] von Neumann, J., "Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre", *J. f. Math.* 160, 227-241

[6] Robinson, R. M., "The theory of classes. A modification of von Neumann's system", *J.S.L*. 2, 29-36

Die Antwort von Finsler

Ernst Specker

„Paul Finsler, am 1. April 1894 in Heilbronn geboren, entstammte einer alten Zürcher Familie. Zu seinen Vorfahren gehörte Joh. Caspar Lavater. Grosse Berühmtheit erlangte er 1918 mit seiner Dissertation über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, die er unter der Leitung von Carathéodory in Göttingen schrieb. Von Göttingen kam er 1922 als Privatdozent nach Köln, 1927 - 1959 war er Professor an der Universität Zürich. Zu seinen hauptsächlichsten mathematischen Interessen gehörten Geometrie, Grundlagen der Mathematik, elementare Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Gegensatz zu seinen geometrischen Arbeiten haben ihm seine logischen Untersuchung wenig Anerkennung eingetragen; und darunter hat Finsler gelitten. 1924 entdeckte er in Bonn seinen ersten Kometen, 1937 in Zürich den nach ihm benannten zweiten Kometen. Mathematisches Denken war für Finsler eine natürliche Grundlage des Lebens. Nicht im Wahrheitssuchen lag für ihn ein Glück; nur im Finden der Wahrheit erwartete er Glück und Freiheit.“ ([17], gekürzt)

Finsler starb am 29. April 1970 auf dem Weg zum Dies academicus der Universität Zürich. J. J. Burckhardt zitiert in [16, 39] eine Stelle aus dem Roman [18] von Humm, wo (wie Burckhardt sagt) in der Gestalt des Hans Gisler ein treffendes Bild des jungen Finsler gezeichnet ist.

In seinen Untersuchungen zu den Grundlagen der Mathematik geht Finsler von der folgenden Frage aus:

> „Wie kommt es oder wie ist es möglich, dass es Dinge gibt, die nicht zu einer Menge zusammengefasst werden können?“

Auch Finsler wurde durch die Antinomien auf seine Frage geführt. Es war ihm klar, dass die Widersprüche mit der zirkelhaften Natur der Antinomien zusammenhängen. Aber - so sagt er - man hat daraufhin versucht, alle Zirkel zu verbieten und ist damit ebenfalls nicht zum Ziel gelangt. Man muss sich vielmehr darüber klar sein, dass ein Zirkel sehr wohl erfüllbar sein kann, dass er aber keineswegs immer erfüllbar sein muss. [1, 152]

Nach Finsler sind die folgenden Zirkel der Mengenlehre erfüllbar.

James GASSER und Henri VOLKEN (eds.): Logic and set theory in 20th century Switzerland. Bern 2001

PhilSwiss Schriften zur Philosophie herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel, **Band 1**
 ISSN 1424-8875 www.philosophie.ch/schriften

(1) Die Allmenge A erfüllt den Zirkel $x\ e\ x$; es ist $A\ e\ A$.
(2) Die leere Menge erfüllt den Zirkel $x \neq x$.
(3) Die Menge $\{0\}$ erfüllt $x = 0$.
(4) Nach Finsler ist auch der Zirkel $x = \{x\}$ erfüllbar. Es seien J, K solche Mengen. Nach dem Extensionalitätsprinzip (das auch bei Finsler gilt) ist $J = K$ genau dann, wenn J und K dieselben Elemente enthalten, d.h. wenn $J = K$ ist; die Frage bleibt somit unentschieden.
Zur Entscheidung wird das Axiom herangezogen, welches besagt, dass isomorphe Mengen identisch sind (Axiom II [3, 491]). Finsler hat Isomorphie auf zwei verschiedene Arten definiert. Für die Mengen J, K spielt dies aber keine Rolle.

Unerfüllbar sind die folgenden Zirkel:

(1) Die Menge der x mit non $x\ e\ x$ (Antinomie von Russell)
(2) Die Menge der x, die Ordinalzahlen sind. (Antinomie von Burali-Forti).

Im folgenden Beispiel (das nicht von Finsler stammt) ist der Widerspruch nicht ganz so offensichtlich.

(3) Sei (versuchsweise) S die Menge der x mit (non $x\ e\ x$ und $x \neq 0$).
Die Menge $\{0\}$ erfüllt die Bedingung und ist somit Element von S. Anderseits soll gelten
$$S\ e\ S \text{ genau wenn (non } S\ e\ S \text{ und } S \neq 0);$$
dies ist aussagenlogisch äquivalent (non $S\ e\ S$ und $S = 0$), was $\{0\}$ e S widerspricht.

Finsler hat das System der Mengenlehre als axiomatische Theorie entwickelt nach dem Vorbild der Grundlagen der Geometrie von Hilbert. Er wählt dazu als Ausgangsbeziehung die zur üblichen *e*-Beziehung inverse Beziehung *b,* so dass also $M\ b\ N$ bedeutet: M besitzt N als Element. In [12, 187] wird dies folgendermassen begründet: „Die Nullmenge ist als Ding, welches die *b*-Beziehung zu keinem Ding besitzt, sehr *einfach* zu definieren: die Existenz von andern Dingen wird dabei nicht vorausgesetzt. Verlangt man aber von jeder Menge, dass sie die e-Beziehung zur Nullmenge nicht besitzen darf, so ist das *unendlich kompliziert,* sobald es unendlich viele Mengen gibt. Es ist also *gar nicht gleichgültig,* welche Beziehung als Ausgangsbeziehung gewählt wird.

Die Axiome sind nun [3, 691]:

(I) Für beliebige Mengen M und N ist eindeutig entschieden, ob M die Beziehung b zu N besitzt oder nicht.

(II) Isomorphe Mengen sind identisch.

(III) Die Mengen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung der Axiome I und II keiner Erweiterung mehr fähig ist.

In der Arbeit [10] formuliert Finsler seine Auffassung der Mengenlehre mit anderen Worten. Er spricht nicht von „Axiomen“ sondern von „Definitionen“.
Die Mengen sind ideelle Dinge, die durch ein Grundbeziehung b mit einander verknüpft und allein durch diese Grundbeziehung festgelegt sind. Dabei soll noch folgendes gelten:

a) Jede Menge bestimmt ihre Elemente, das heisst die Mengen, zu denen sie die Beziehung b besitzt.

b) Die Mengen M, N sind identisch immer, wenn möglich.

c) M ist Menge immer, wenn möglich. [10,133]

Diese Definitionen werden durch Zusätze erläutert. So wird etwa aus *b*) gefolgert, dass für Mengen mit $J = \{J\}$ und $K = \{K\}$ gilt $J = K$.

Finsler setzt sich nun zum Ziel, auf der so gelegten Grundlage die Unendlichkeit der Zahlenreihe zu beweisen, In [12, 176] sagt er: „Wenn man einfach behauptet, es gibt unendlich viele Zahlen, ohne zu wissen, ob das stimmt, so ist das unwürdig und unehrlich. Wenn ein Kind fragt: ist es wahr, dass es zu jeder Zahl immer noch eine grössere gibt, kann man ihm dann *mit gutem Gewissen* antworten: ja, das ist wahr?“
Die Notwendigkeit eines Beweises wird in [10, 131/132] folgendermassen begründet: „Es scheint nun wohl so, als ob dies in der Welt der ideellen Dinge eigentlich selbstverständlich wäre, denn man sieht zunächst keinen Grund, der einen hindern würde zu jeder Zahl m eine folgende Zahl n anzunehmen. In Wirklichkeit gibt es aber einen solchen Grund, und dass dies der Fall ist, das sieht man bei der Betrachtung der Ordinalzahlen.“ Nach Finsler nämlich gibt es die Menge W der Ordinalzahlen, zu den es eine grössere gibt. W ist Ordinalzahl und es gibt keine grössere. Die Antinomie von Burali-Forti greift hier nicht, weil es zur Ordinalzahl W keine grössere Ordinalzahl gibt und somit von W nicht verlangt wird, dass es Element von W ist.

Zur Definition der natürlichen Zahlen werden Systeme S betrachtet, für welche gilt
0 ist Element von S**;** ist M Element von S und $\{M\}$eine Menge, so ist auch {M} ein Element von S. Der Durchschnitt aller dieser System sei Z. Es gilt:
Z enthält 0 als Element und mit jeder Menge M auch $\{M\}$, falls dies eine Menge ist. Ferner gilt für Z das Induktionsprinzip [6, 92/93]. Dass Z unendlich ist, bedeutet: Mit M ist auch $\{M\}$ in Z, d.h für alle M in Z ist $\{M\}$ eine Menge. Dies wird nun induktiv bewiesen, und zwar mit Hilfe des Begriffes „zirkelfrei“.

Die Einführung dieses Begriffes ist der Punkt, an dem Finsler am weitesten abweicht von seinen Vorgängern. Der Ausgangspunkt seiner Überlegung sind wohl die folgenden Feststellungen:

(1) Es gibt keine Menge, die genau die Mengen enthält, die sich selbst nicht enthalten. Der Grund, warum diese Menge nicht existiert, ist der unerfüllbare Zirkel der Definition.
(2) Auch die Menge aller Mengen ist zirkelhaft definiert. Hier ergibt sich kein Widerspruch, die Menge existiert, ist aber zirkelhafter Natur.
(3) Es gibt zirkelfrei definierte Mengen , so die Nullmenge 0, die Mengen 1 (= {0}) und 2 (= {1}).

Finsler definiert in [10,134] den Begriff „zirkelfrei" (oder kurz „z-frei") folgendermassen:

(I) *Eine Menge ist z-frei, wenn ihre Elemente z-frei sind und sie selbst nicht vom Begriff „z-frei" abhängt.*
(II) *Eine Menge ist z-frei nur, wenn notwendig.*

Dabei ist eine Menge vom Begriff „z-frei" unabhängig, wenn sie sich nicht ändert, gleichgültig, welche Mengen als z-frei betrachtet werden. Die Menge aller z-freien Mengen ist nicht z-frei.
Wird keine Menge als z-frei betrachtet, so ist es die leere Menge, werden alle Mengen als z-frei betrachtet, so ist es die Allmenge. Die Nullmenge ist auf Grund ihr Definition als Menge ohne Elemente z-frei.
Als Beispiel sei der Beweis dafür angeführt, dass eine z-freie Menge sich nicht selbst als Element enthält [10,135]: „Wenn nämlich *M* sich selbst enthält, also *M b M* gilt, dann kann man die Menge *M* zunächst als z-haft, d.h. als nicht z-frei bezeichnen. Dann enthält sie nicht nur z-freie Elemente, sie muss also nach I nicht z-frei sein, und nach II ist sie es auch nicht."

Nach der Überzeugung von Finsler führt die Annahme, dass eine Gesamtheit von z-freien Menge eine Menge sei, zu keinem Widerspruch, denn es besteht ja die Möglichkeit, dass diese Menge z-haft ist. Da mit der Menge *M* auch die Menge {*M*} z-frei ist, folgt mit Induktion: Jede natürlich Zahl *n* ist z-frei und besitzt den Nachfolger {*n*}; das System Z aller natürlichen Zahlen ist eine z-freie Menge.

Es ist instruktiv, diese Begriffsbildungen von Finsler mit dem Axiomensystem von W. Ackermann [15] aus dem Jahre 1956 zu vergleichen. Das System ist in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit formalisiert, unter Zugrundelegung einer zweistelligen Relation *e* und eines Prädikates *M*. Für den Vergleich ist „*M(x)*" zu interpretieren als „x ist zirkelfrei".

Das System besteht aus den folgenden Axiomen:

(1) Extensionalität: Enthalten x und y dieselben Elemente, so ist $x = y$.
(2) Ist x Element oder Teilmenge von y und gilt $M(y)$, so auch $M(x)$.
(3) Ist F eine Formel mit der freien Variablen x und folgt $M(x)$ aus $F(x)$, so gibt es ein y, so dass $x\ e\ y$ genau dann gilt, wenn $F(x)$ gilt.
(4) Ist F eine Formel mit der freien Variablen x, aufgebaut auf Grund von „=" und „e" (d.h. ohne „M") und folgt $M(x)$ aus $F(x)$, so gibt es ein y, so dass $M(y)$ gilt und $x\ e\ y$ genau wenn $F(x)$.

Bemerkung: Enthält F weitere freie Variable z,.., so ist in Prämissen zu fordern, dass $M(z)$,... gilt.

Das Axiom (4) ist das formale Gegenstück zum Satz von Finsler, der besagt, dass eine Gesamtheit von z-freien Mengen definiert unabhängig vom Begriff z-frei eine z-freie Menge ist.

Ackermann beweist nun in seinem System auf ganz ähnliche Weise wie Finsler, dass zu jeder natürlichen Zahl ein Nachfolger existiert und dass alle natürlichen Zahlen (sowie ihre Menge) *M-Mengen* sind. Dagegen ist es z.B. nicht möglich zu zeigen, dass eine Menge, die sich selbst enthält, keine *M-Menge* ist. Finsler überschreitet den Rahmen der heutzutage üblichen Axiomatisierungen nicht nur dadurch, dass er sich nicht auf die Logik erster Stufe beschränkt - durch Forderungen wie „M ist Menge immer, wenn möglich", „z-frei nur, wenn notwendig" führt er eine Negation durch Scheitern (negation through failure) ein.

Wie schon der Titel „Über die Grundlegung der Mengenlehre" [3] vermuten lässt, war Finsler der Überzeugung mit seinem Aufbau ein festes Fundament für die Mengenlehre gelegt zu haben, so wie es Hilbert mit seinen Grundlagen für die Geometrie gelungen war. Den Ausgangspunkt dieser Theorie der „reinen" Mengen (d.h. der Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind) beschreibt er in seinem Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft Basel folgendermassen: „Ich will jetzt genauer erklären, was wir unter einer reinen Menge oder kurz unter einer *Menge* verstehen wollen. Wie gesagt ist es eine Verallgemeinerung der natürlichen Zahlen. Der Unterschied ist im wesentlichen nur der, dass eine natürliche Zahl immer nur *einen* Vorgänger hat, während eine Menge beliebig viele Vorgänger haben kann. Für eine Menge M kann also auch für $a \neq b \neq c$ gelten $M\ b\ a,\ M\ b\ b,\ M\ b\ c$ usw., wobei diese Dinge a, b, c usw. auch wieder Mengen sein sollen. Die „Vorgänger" nennt man dann die *Elemente* von M und schreibt $M = \{a, b, c,...\}$, Dies erklärt auch den Namen „Menge"; in Wirklichkeit sind die Mengen aber auch nur ideelle Dinge, welche durch die b-Beziehung miteinander verknüpft sind. [10, 133]

Es wird hier die Auffassung der Menge als „Gesamtheit" ersetzt durch die Auffassung als Struktur. Warum ist es so leicht, ein Kind davon zu überzeugen, dass es zu jeder Zahl eine grössere gibt? Es genügt ja zu sagen: Nenne eine Zahl und dann zählen wir weiter.

Ähliches hat Finsler nun für die Mengenlehre versucht. Sein System ist aber von Anfang an auf Widerspruch gestossen. In den Jahren 1924-1926 hat er mit Bernays darüber korrespondiert; die Kritik von Bernays hat Finsler veranlasst, gewisse Formulierungen zu modifizieren. Am Ende der Einleitung zu [3] heisst es: „Für kritische Bemerkungen und wertvolle Ratschläge bei der Ausarbeitung bin ich Herrn Bernays zu besonderem Dank verpflichtet." Spätere Kritik hat Finsler stets als unbegründet abgewiesen.

Die Kritik bezieht sich besonders auf folgende Punkte:

(1) Das Vollständigkeitsaxiom (vgl. [5]). Es schliesst sich an ein analoges Axiom von Hilbert in den Grundlagen der Geometrie an. Wie dort betont wird, würde das Vollständigkeitsaxiom ohne das Axiom von Archimedes zu einem Widerspruch führen, d.h. eine „Logik", die solche Aussagen zulässt ist nicht monoton: Wird eine Voraussetzung fallen gelassen, so sind neue Sätze beweisbar (z. B. 0 = 1). Das Vollständigkeitsaxiom wird jetzt auch allgemein durch ein Schnittaxiom ersetzt.

(2) Die Verwendung der „Negation durch Scheitern", wonach etwas nicht gilt, wenn es nicht herleitbar ist. Wird diese Negation mit „scheit" bezeichnet, so bedeutet das Axiom „M ist Menge, immer wenn möglich" offenbar „M ist Menge, wenn scheit M keine Menge". Hängt aber das Ergebnis bei Herleitungen mit „scheit" nicht von der Reihenfolge ab?

Finsler hat darauf geantwortet: „Die ‚Existenz' soll aber hier doch wohl nicht die Zugehörigkeit der Menge zu einem Modell einer willkürlich eingeschränkten Mengenlehre bedeuten, sondern eine Existenz im absoluten Sinn, das heisst im Bereich aller mögliche Mengen. Die ‚möglichen' Mengen sind aber die widerspruchsfreien, also gerade diejenigen, bei denen die Annahme der Existenz keinen Widerspruch enthält. Dann kann jedoch die Existenz einer Menge nicht von unserer Willkür abhängen, also nicht davon, ob wir eine andere Menge als existierend annehmen oder nicht." [11, 139]

Diese Präzisierung von Finsler ist nicht die einzige, die vorgeschlagen worden ist. Es kann dazu auf [14] mit den Kommentaren von David Booth und Renatus Ziegler verwiesen werden. Beide Kommentatoren stimmen mit Finsler darin überein, dass kein formales System die Mengenlehre darzustellen vermag; die Schwierigkeiten werden aber nicht einfach übergangen. [14] enthält ferner ein ausführliches Verzeichnis sowohl der Arbeiten, die sich an Finsler anschliessen als auch jener, die sich kritisch mit ihm auseinandersetzen. Der Briefwechsel von Bernays und Finsler wird in der Handschriftenabteilung der Eidg. Techn. Hochschule verwahrt.

Arbeiten von P. Finsler zur Mengenlehre:

[1] „Gibt es Widersprüche in der Mathematik?“, *Jber. Deutsch Math.-Ver. 34*, 143-155 (1925)

[2] „Formale Beweise und die Entscheidbarkeit“, *Math. Z. 25*, 676-682 (1926)

[3] „Über die Grundlegung der Mengenlehre. Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome“, *Math. Z. 25*, 673-713 (1926)

[4] (mit H. Lips) „Über die Lösung von Paradoxien“, *Phil. Anzeiger 2*, 183-203 (1927)

[5] „Erwiderung auf die vorstehende Note des Herrn R. Baer“, *Math. Z. 25* 540-542 (1928)

[6] „Die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums“, *Comment. Math. Helv. 5*, 88-94 (1933)

[7] „A propos de la discussion sur les fondements des mathématiques“. *Les entretiens de Zürich* , 6-9 décembre 1938, 162-180

[8] „Gibt es unentscheidbare Sätze?“, *Comment. Math. Helv. 16*, 310-320 (1943/44)

[9] „Über die Berechtigung infinitesimalgeometrischer Betrachtung“, *Convegno Internationale di Geometria Differentiale*, Italia, 1953, 8-12

[10] „Die Unendlichkeit der Zahlenreihe“, *El. Math. 9*, 250-257 (1954)

[11] „Der platonische Standpunkt in der Mathematik“, *Dialectica 10*, 250-277 (1956)

[12] „Über die Grundlegung der Mengenlehre. Zweiter Teil. Verteidigung“, *Comment. Math. Helvet. 38*, 172-218 (1964)

[13] *Aufsätze zur Mengenlehre* (hrsg. von G. Unger), Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1975

[14] *Finsler Set Theory: Platonism and Circularity (Translation and Comments)*, ed. by David Booth and Renatus Ziegler, Birkhäuser 1996

(Ein Korrekturblatt zum Index ist erhältlich von Renatus Ziegler, Mathematisch-Astronomische Sektion, Goetheanum, CH-4143 Dornach)
Literaturverzeichnisse zu den Arbeiten von Finsler finden sich in [16] und [17] (dies mit Hinweisen auf Besprechungen im Zentralblatt und in Math. Review); keines dieser Verzeichnisse ist ganz im andern enthalten.

[15] Ackermann, W., „Zur Axiomatik der Mengenlehre“, *Math. Ann. 131*, 336-345 (1956)

[16] Burckhardt, J.J., 1980, *Die Mathematik an der Universität Zürich 1916-1950*, Birkhäuser

[17] Gross, Herbert, „Nachruf Paul Finsler“, *El. Math. 26*, 19-21 (1971)

[18] Humm, R.J., 1977, *Universität oder Ein Tag im Leben des Daniel Seul*, Werner Classen Verlag

La logique opératoire de Jean Piaget

Jean-Blaise Grize

Sollicité en 1950 d'écrire son autobiographie, Piaget y déclare qu'il n'est pas logicien de profession mais qu'il n'a jamais cessé depuis vingt ans de se préoccuper des mécanismes de raisonnement, au point qu'il venait de publier, chez A. Colin, un *Traité de logique*.[1] A première vue, il y a quelque malveillance de ma part à choisir pour traiter mon sujet d'un ouvrage dont le compte-rendu de E.W. Beth dans *Methodos* se termine en déclarant que “ce livre abonde en erreurs, tant au niveau élémentaire qu'au niveau supérieur, ce qui le rend absolument inutilisable en tant que ‘Traité de logique’ et lui enlève tout intérêt scientifique”.[2] A y regarder de plus près toutefois, on s'aperçoit que les choses ne sont pas aussi tranchées. Il faut en effet prendre en compte, non seulement le titre (commercial), mais son sous-titre *Essai de logistique opératoire* (Piaget 1948), au point que sa deuxième édition revue s'intitule simplement *Essai de logique opératoire* (Piaget 1971).
Si l'on ne peut qu'être d'accord avec Beth en considérant que l'ouvrage ne peut nullement se substituer, comme l'éditeur l'espérait, aux manuels de Goblot (1918) et de Serrus (1945) en usage dans les lycées, il est d'un incontestable “intérêt scientifique”. Pour le faire voir, il est utile de commencer par le situer dans l'époque de sa genèse.

1. Le contexte

Si la logique, et avant même que le terme n'existe en son sens actuel, a toujours été l'étude des procédés qui conduisent à des inférences valides, elle se présentera durant des siècles sous la forme de la théorie du syllogisme. Les syllogismes, avec leurs quatre figures et leurs vingt-quatre modes conclusifs, reflètent la capacité qu'a la pensée d'accéder à une connaissance nécessaire. Celle-ci repose sur l'organisation en classes des objets dont il est question et, tout particulièrement, sur les intersections et les emboîtements de leurs extensions. En même temps, il est clair que la saisie et la communication de ces organisations passent par le langage avec sa dimension intensionnelle.[3] C'est ainsi que la tradition attribue aux Mégariques et aux Stoïciens l'élaboration d'une logique des propositions qui les a conduits à dégager trois principes moteurs de la dé-

[1] Piaget 1976, 22.
[2] Beth 1950, 264.
[3] L'orthographe avec 's' est celle de Leibniz.

James GASSER und Henri VOLKEN (eds.): Logic and set theory in 20th century Switzerland. Bern 2001
PhilSwiss Schriften zur Philosophie herausgegeben von M. Bondeli, H. Linneweber-Lammerskitten und G. Seel, **Band 1**
 ISSN 1424-8875 www.philosophie.ch/schriften

duction. Il est intéressant de noter que ceux-ci, le *modus ponens*, le *modus tollens* et le *modus tollendo ponens*, sont considérés comme des "indémontrables", irréductibles les uns aux autres. Comme nous savons bien aujourd'hui qu'ils sont équivalents entre eux, cela fait voir que, jusqu'à la fin du XIXe siècle, la logique relevait d'une activité de pensée et non d'un calcul. C'est à ce tournant, qui va conduire à prendre conscience que la relation d'emboîtement n'est pas seule en jeu, que Piaget commence à élaborer sa future logique opératoire.

2. La visée piagétienne

Si vos parents ont trois filles, vous n'avez Madame que deux sœurs, mais du temps, pas si lointain d'ailleurs, je me plais à le reconnaître, que vous étiez fillette, vous n'en aperceviez pas la nécessité. C'est que la chose dépasse de loin l'expérience que vous aviez de votre propre famille et qu'elle n'est pas directement inscrite dans le vocabulaire de votre langue maternelle. Elle résulte, en effet, d'une démarche de pensée complexe qui n'est possible qu'au sein d'un système de classes et de relations.
Installé de 1919 à 1921 dans le laboratoire inoccupé d'Alfred Binet, Piaget fut très frappé de constater les difficultés que le jeune enfant avait à répondre correctement aux questions des fameux tests de Burt, questions qui pourtant ne font pas problème à l'adulte. Il a ainsi été amené à “étudier empiriquement le développement de la pensée pour elle-même”,[4] c'est-à-dire à confronter les raisonnements de l'enfant à la logique supposée partagée par tout adulte. Dès lors, si en première approximation “la logique est l'étude de la connaissance vraie”, elle apparaît rapidement comme “la théorie formelle des opérations de la pensée” et plus précisément comme “*la théorie formelle des opérations déductives*”.[5] Restait alors à expliciter cette théorie.
Certes, Whitehead et Russell en avaient fait un exposé magistral dans leurs *Principia Mathematica*. Mais l'ouvrage était destiné à des spécialistes, ce que Piaget n'était pas. Plus encore, sous l'ironie avec laquelle Poincaré avait traité Couturat, la France était peu disposée à prendre au sérieux le renouvellement de la logique, ceci au point que, en 1948 encore, Marcel Boll pouvait publier chez Dunod lui-même un *Manuel de logique scientifique* sans citer les *Principia*. Piaget n'a ainsi connu de Russell que sa réduction popularisée du nombre aux classes et aux relations,[6] théorie qu'il considérait psychologiquement aberrante. Il s'en est ensuivi que ce fut dans l'œuvre de Boole que Piaget a trouvé son inspiration et ceci pour trois raisons supplémentaires. D'abord Boole, à l'inverse de Russell, part de la logique des classes pour ne passer qu'ensuite à celle des propositions; ensuite il aborde le problème à l'aide du formalisme algébrique:

[4] Piaget 1976, 11.
[5] Piaget 1922, 3, 9 et 20.
[6] Russell 1928.

enfin il s'est explicitement posé comme tâche de procéder à une “Investigation of the laws of thought”.[7]
Il y a toutefois chez Boole, et chez les autres logiciens algébristes, une lacune importante. Ils explicitent bien les principes et les règles dont ils se servent, mais ils ne justifient jamais leurs choix. Lorsqu'ils considèrent qu'une classe *A* est contenue dans une classe *B*, elle-même contenue dans une classe *C*, ils les traitent, elles et les relations qu'elles soutiennent entre elles, comme des données. Mais ces "données" ne tombent pas du ciel, ni même directement sous les sens, comme le voulait Locke. Elles résultent déjà d'une activité opératoire de la pensée, donc d'une activité logique. Il ne suffit pas de savoir déduire, encore faut-il avoir construit les éléments de la déduction, ce qui réclame de dégager les opérations de classification et de sériation qui vont fournir la base sur laquelle reposera la logique standard des classes. C'est ce à quoi Piaget va s'attacher.

3. L'*Essai*

Si le propos est de procéder à “une analyse opératoire de l'intelligence”,[8] il ne suffit pas de recenser un certain nombre d'opérations et d'en dresser la liste. Des opérations ne font véritablement sens qu'au sein de totalités organisées. Certes Piaget n'est pas le premier psychologue à dénoncer la stérilité d'une approche atomistique de la pensée, Alfred Binet lui-même et toute l'École de Würzburg ont insisté sur la nécessité de prendre en compte, non des éléments isolés, mais les structures d'ensemble qu'ils constituent. L'originalité de la tentative piagetienne est de porter sur les actions cognitives qui permettent de manipuler les opérations et de mettre en place une “logique de la coordination des actions”.[9] Dès lors, et comme l'application d'une opération est une transformation, l'*Essai* va porter sur les systèmes de transformations qu'autorise la logique proprement dite.
Si l'on analyse alors les opérations de la logique standard, on s'aperçoit qu'elles reposent sur des structures algébriques. Techniquement, en effet, l'algèbre de Boole peut être définie au choix comme un anneau dont les éléments sont idempotents et qui possède un élément unité ou comme un treillis distributif et complémenté.[10] Si Piaget ne disposait pas de telles connaissances mathématiques, il n'en a pas moins été sensibilisé à la structure de groupe par son ami Gustave Juvet et il a mis en évidence le fameux groupe de transformations INRC[11] et le treillis des 16 opérations binaires.

---

[7] Boole 1854.
[8] Inhelder et Piaget 1955, 11.
[9] Beth et Piaget 1961, 329.
[10] Halmos 1962.
[11] Soit α et β deux classes. Si *a* représente $\alpha \cap \beta$, *b* représente $\alpha \cap -\beta$, *c* représente $-\alpha \cap \beta$ et *d* représente $-\alpha \cap -\beta$, alors I est l'identité: I(*abcd*) = *abcd*; N est la négation: N(*abcd*) = *a'b'c'd'*; R est la réci-

L'intérêt de telles considérations consiste en ce que Piaget pense avoir montré expérimentalement que c'est l'acquisition de ces structures qui permet à la pensée de faire face aux problèmes que posent la combinatoire, les proportions, les états mécaniques, les probabilités, etc. Il est vrai que, à moins de manipulations tout à fait ad hoc,[12] INRC et les 16 opérations ne relèvent pas d'une superstructure unique. Cela n'empêche en rien que la "logique opératoire" de Piaget ne soit nullement une théorie de la déduction — les mécanismes d'inférence n'y sont jamais abordés — mais qu'elle constitue à proprement parler une métalogique, c'est-à-dire une description plus ou moins formalisée de la logique classique.

Références

Beth, E.W., 1950, "A propos d'un 'Traité de logique'", in: *Methodos* 2, 258–264.

Beth, E.W. et Piaget J., 1961, "Épistémologie mathématique et psychologie", in: *Études d'épistémologie génétique* 14. Paris: PUF.

Boll, M., 1948, *Manuel de logique scientifique,* Paris: Dunod.

Boole, G., 1854, *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, London: Macmillan.

Goblot, E., 1928, *Traité de logique*, Paris: A. Colin.

Grize, J.-B., 1987, "Operatory logic", in: Inhelder, B., de Caprona, A., Cornu-Wells, A. (eds), *Piaget today*, Hove and London: Erlbaum.

Halmos, P.R., 1962, *Algebraic logic*, New York: Chelsea.

Inhelder, B. et Piaget, J., 1955, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris: PUF.

Piaget, J., 1949, *Traité de logique. Essai de logistique opératoire,* Paris: A. Colin.

Piaget, J., 1972, *Essai de logique opératoire*, 2e édition avec une introduction de l'auteur, Paris: Dunod.

Piaget, J., 1976, "Autobiographie (reproduite et complétée)", in: Busino, G. (éd.), *Les sciences sociales avec et après Jean Piaget*, Genève: Librairie Droz.

Russell, B., 1928, *Introduction à la philosophie mathématique*, trad. G. Moreau, Paris: Payot [London 1919].

Serrus, C., 1945, *Traité de logique*, Paris: Aubier.

proque: R(*abcd*) = *dcba*; C est la corrélative: C(*abcd*) = *d'c'b'a'*.

[12] Grize 1987.