

Die Spannungsfunktionen einer Dyname

Schaefer, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 7, 1955,
S. 107-112



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Spannungsfunktionen einer Dyname

Von Hermann Schaefer

Mit 2 Abbildungen

Übersicht: Es wird der Tensor der Spannungsfunktionen eines Stabes untersucht, der durch eine Dyname belastet ist. Zusammenhänge mit der Volterraschen Theorie der Distortionen werden besprochen.

Summary: For a bar, loaded by a skew of forces, the Tensor of Stress-Functions is investigated. Connections with Volterra's „Theorie of Distorsions“ are discussed.

1. Einleitung

W. Günther [1] hat kürzlich gezeigt, wie die Oberflächenkräfte eines dreidimensionalen Spannungszustandes mit dem Tensor der Spannungsfunktionen zusammenhängen. Die 6 Komponenten der Dyname der Oberflächenkräfte eines durch die Flächenkurve C abgegrenzten Flächenstückes werden durch Funktionale von C dargestellt, die Linearformen der 6 Spannungsfunktionen und ihrer ersten Ableitungen enthalten.

Beim zweidimensionalen Spannungszustand liegen einfachere Zusammenhänge vor. Die Dyname der Randkräfte eines die Punkte A und B verbindenden Kurvenstückes besitzt nur 3 Komponenten, die jetzt als Funktionale des Punktepaars AB erscheinen. Die entsprechenden Formeln findet man in ([1] 3,9).*)

In Cartesischen Koordinaten erhalten sie die Gestalt

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right]_A^B, & K_2 &= \left[- \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right]_A^B, \\ M_0 &= \left[\Phi - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right]_A^B. \end{aligned} \quad (1,1)$$

Φ ist die einzige Spannungsfunktion des zweidimensionalen Spannungszustandes, die Airysche, und der Spannungstensor hat die Gestalt

$$S_{ik} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} + \delta_{ik} \cdot \Delta \Phi, \quad (1,2)$$

worin δ_{ik} das Kronekersche Symbol und Δ den Laplaceschen Operator bedeuten.

In spannungsfreien Gebieten des Kontinuums ist $\Phi(x_1, x_2)$ eine lineare Funktion, die Nullspannungsfunktion

$$\Phi^0 = a + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \quad (1,3)$$

mit den Konstanten a, ω_1, ω_2 .

*) Gegenüber [1] haben wir uns eine unwesentliche Vorzeichenänderung erlaubt und das auf den Nullpunkt des Koordinatensystems bezogene Moment mit M_0 bezeichnet.

Die Dynamie (1,1) ist auf den Nullpunkt des (x_1, x_2) -Koordinatensystems reduziert (Abb. 1).

Ihr Moment, bezogen auf einen Punkt $P(x_1, x_2)$ der Ebene ist

$$M = M_0 + K_1 x_2 - K_2 x_1. \quad (1,4)$$

In der x_2 -Achse des Koordinatensystems liege nun ein dünner Stab, der durch diese Dynamie beansprucht ist (Abb. 2).

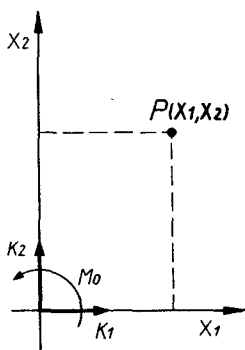


Abb. 1

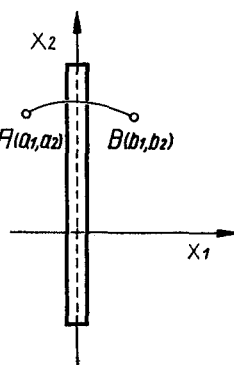


Abb. 2

Die beiden Halbebenen links und rechts vom Stabe sind spannungsfrei. Wenn wir in der linken Halbebene a , ω_1 und ω_2 zu Null annehmen, so sind in der rechten Halbebene ihre Werte durch (1,1) festgelegt. Es werden

$$K_1 = \omega_1, \quad K_2 = \omega_2 \quad (1,5)$$

und

$$M_0 = \Phi^\circ(b_1, b_2) + b_1 \omega_2 - b_2 \omega_1 = a, \quad (1,6)$$

so daß Φ° in der rechten Halbebene die Gestalt

$$\Phi^\circ = M_0 + K_1 x_2 - K_2 x_1 \quad (1,7)$$

hat, also nach (1,4) mit M identisch ist. Beim Überschreiten der x_2 -Achse springt Φ von Null auf $M_0 + K_1 x_2$, um den Betrag des Momentes der Dynamie in x_2 .

Natürlich bleibt es unbenommen, den 3 Konstanten von Φ° in der linken Halbebene beliebige, von Null verschiedene Werte zu erteilen. Die Komponenten der Dynamie drücken sich dann durch die Differenzen der Konstanten a , ω_1 und ω_2 in rechter und linker Halbebene aus. Wir wollen (1,7), offenbar eine singuläre Lösung von (1,2), *Spannungsfunktion einer ebenen Dynamie* nennen. Entsprechende Überlegungen sollen nur für den räumlichen Fall angestellt werden.

2. Bezeichnungen und Zusammenstellung der benötigten Formeln

Wir schließen uns in unseren Bezeichnungen eng an die *Günthersche* Arbeit [1] an, jedoch wollen wir durchweg mit Cartesischen Koordinaten arbeiten.

Aus dem symmetrischen Tensor S_{ik} der Spannungen wird nach ([1], 1,23) der Tensor 4. Stufe

$$T_{ik, lm} = e_{ik\alpha} e_{lm\beta} S_{\alpha\beta} \quad (2,1)$$

gebildet. Nach ([1] 1,24) läßt sich $T_{ik, lm}$ als Rotation eines Tensors 3. Stufe darstellen:

$$T_{ik, lm} = \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_{k, lm} - \frac{\partial}{\partial x_k} \gamma_{i, lm}. \quad (2,2)$$

Indem wir den Tensor der Spannungsfunktionen F_{ik} sogleich als symmetrischen Tensor einführen, erhalten wir

$$\gamma_{l, ik} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_{kl} - \frac{\partial}{\partial x_k} F_{il} \quad (2,3)$$

und die zyklische Symmetrie

$$\gamma_{ikl} + \gamma_{kli} + \gamma_{lik} \equiv 0. \quad (2,4)$$

Es wird dann

$$T_{ik, lm} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} F_{km} + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} F_{il} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} F_{kl} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F_{im}. \quad (2,5)$$

Die 6 Komponenten einer Dyname werden mit K_l und M_l bezeichnet. Nach Günther [1] läßt sich ihr Zusammenhang mit den γ_{ikl} und F_{ik} sehr einfach darstellen, wenn man den „schiefsymmetrischen Krafttensor“

$$K_{lm} = e_{lm\alpha} K_\alpha \quad (2,6)$$

einführt.

Der auf den Nullpunkt des Koordinatensystems bezogene Momentenvektor hat dann die Komponenten

$$M(0)_l = x_\alpha K_{l\alpha}. \quad (2,7)$$

Nach ([1] 1,14) ist der auf das Element df_{ik} der Oberfläche entfallende Kraftvektor:

$$dK_{lm} = T_{\alpha\beta, lm} df_{\alpha\beta} \quad (2,8)$$

und sein Moment im Nullpunkt nach (2,7):

$$dM(0)_l = T_{\alpha\beta, l\alpha} x_\alpha df_{\alpha\beta}. \quad (2,9)$$

Zufolge (2,2) ist dK_{lm} ein totales Flächendifferential. Geben wir in einem einfach zusammenhängenden Teile des beanspruchten Körpers eine geschlossene Kurve C vor, so ist das Oberflächenintegral von dK_{lm} über eine von dieser Kurve C begrenzte Oberfläche unabhängig von der Gestalt der Oberfläche. Nach dem Stokesschen Satz wird K_{lm} ein Funktional der Kurve C :

$$K_{lm} = \oint_C \gamma_{k, lm} dx_k. \quad (2,10)$$

Zufolge von (2,3) ist aber auch $dM(0)_l$ ein totales Flächendifferential. Nach (2,2) und (2,4) hat man zunächst

$$T_{ik, l\alpha} x_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_\alpha \gamma_{k, l\alpha}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (x_\alpha \gamma_{i, l\alpha}) + \gamma_{l, ik}, \quad (2,11)$$

woraus nach Einführung von (2,3) und Anwendung des Stokesschen Satzes das Funktional

$$M(0)_l = \oint_C [F_{kl} + x_e \gamma_{k,le}] dx_k \quad (2,12)$$

entsteht.

(2,10) und (2,12) sind, bis auf eine unwesentliche Vorzeichenänderung von F_{ik} , die in der Einleitung erwähnten *Güntherschen* Darstellungen im Sonderfall cartesischer Koordinaten.

3. Die Spannungsfunktion eines räumlich beanspruchten geraden Stabes

Der Stab möge jetzt in der x_3 -Achse unseres Koordinatensystems liegen, eingebettet in ein spannungsfreies Kontinuum.

Nach (2,5) ist der Tensor der Spannungsfunktionen F_{ik} aus den auf der x_3 -Achse singulären Lösungen von

$$T_{ik,lm} = 0 \quad (3,1)$$

aufzubauen. In ([1] 2,1 bis 2,7) und [2] ist gezeigt worden, daß jede Lösung von (3,1) sich als symmetrischer Gradiententensor

$$F_{ik}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad (3,2)$$

Tensor der Nullspannungsfunktionen genannt, darstellen läßt. Im vorliegenden Falle sind die v_i im ganzen Raume regulär, ausgenommen die x_3 -Achse, auf der sie die für die Dynamik charakteristische Singularität besitzen müssen. Gemäß (2,3) bekommen wir

$$\gamma_{l,ik} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \right], \quad (3,3)$$

und nach (2,10) für den Kraftvektor der Dynamik:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \oint_C \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \right) \right] dx_k = \\ &= \oint_C d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \right) \right], \end{aligned} \quad (3,4)$$

wobei das Integral über eine beliebige, den Stab umschlingende geschlossene Kurve C zu erstrecken ist.

Dasselbe gilt für das Umlaufintegral (2,12), das nach kurzer Zwischenrechnung, die hier übergangen werden darf, die Gestalt

$$M(0)_l = \oint_C d \left[v_l + x_m \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \right) \right] \quad (3,5)$$

erhält.

Die Integranden unserer Umlaufintegrale sind totale Differentiale. Die Integrale werden demnach im allgemeinen nur dann von Null verschieden sein, wenn das Vektorfeld der v_i mehrdeutig ist. Ein solches Vektorfeld läßt

sich aber sehr einfach aus dem Momentenfeld der Dyname bilden. Der Momentenvektor in irgendeinem Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ des Raumes ist

$$M_l = M(0)_l - x_\alpha K_{l\alpha}. \quad (3,6)$$

Im Felde $\bar{v}_l = M_l$ wird nun

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_m}{\partial x_l} - \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_m} \right) = \frac{1}{2} (-K_{ml} + K_{lm}) = K_{lm}. \quad (3,7)$$

Wir erhalten also das gesuchte mehrdeutige Feld, wenn wir setzen:

$$v_l = M_l \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = M_l \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \text{arc tg } \frac{x_2}{x_1}. \quad (3,8)$$

Die Ableitungen von $\text{arctg } x_2/x_1$ sind eindeutige Funktionen, so daß jetzt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \right) = K_{lm} \cdot \frac{\varphi}{2\pi} + \text{eind. Funkt.} \quad (3,9)$$

wird. So ist unmittelbar einzusehen, daß die Umlaufintegrale (3,4) und (3,5) die geforderten Komponenten der Dyname liefern. Der Tensor F_{ik}^0 der Spannungsfunktionen kann jetzt mit (3,2) und (3,8) berechnet werden. Seine Komponenten sind im ganzen Raume eindeutig, jedoch singularär auf der x_3 -Achse. Auf ihre Ausrechnung sei hier verzichtet.

4. Die Analogie zu den Volterraschen Distorsionen

Der Nullspannungstensor

$$F_{ik}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (4,1)$$

kann zum Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (4,2)$$

eines Kontinuums in Analogie gesetzt werden.

Wenn wir für das soeben behandelte Beispiel diese Analogie weiter verfolgen, so ist zunächst festzustellen, daß zwar das Verzerrungsfeld unseres Kontinuums eindeutig, jedoch das zugehörige Verschiebungsfeld mehrdeutig ist.

In seiner berühmt gewordenen Abhandlung „Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes“ [3] hat *Volterra* die Theorie solcher Verzerrungs- und Verschiebungsfelder behandelt.

Ein dickwandiger Hohlzylinder aus elastischem Material stehe auf der (x_1, x_2) -Ebene so, daß seine Figurenachse mit der x_3 -Achse zusammenfällt. Eine Schnittebene durch die x_3 -Achse schneidet ihn an einer Seite auf, so daß er nur noch einfach zusammenhängend ist. Jetzt wird eine „Distorsion“ (Verrenkung) vorgenommen, und zwar so, daß die Ebene des einen Schnittufers festgehalten, diejenige des anderen aber einer Translation und Rotation unterworfen wird, derart, daß die Verschiebung ihrer Punkte

$$u_l = a_l - x_\alpha \omega_{l\alpha} \quad (4,3)$$

ist. Die drei Komponenten des Vektors a_l sind die Komponenten der Translation, die drei Komponenten des schiefsymmetrischen Tensors ω_{lm} diejenigen der Rotation. Demnach wird die zweite Schmittebene wie ein starrer Körper verschoben. Anschließend stellt man den doppelten Zusammenhang des Zylinders dadurch wieder her, daß man unter Zufügung oder Wegnahme von Material beide Schnittufer zusammenschweißt. In dem jetzt herrschenden Eigenspannungszustand sind die Deformationen überall eindeutig. Erst die Berechnung der Verschiebungen aus den Deformationen gibt über die vorgenommene Distorsion Aufschluß.

Das von uns in (3,8) angegebene mehrdeutige Vektorfeld kann nicht unmittelbar als Verschiebungsfeld des distordierten Zylinders angesehen werden. Es ist zwar ein kinematisch mögliches Verschiebungsfeld eines Kontinuums. Jedoch müssen die aus ihm errechneten Deformationen bei einem elastischen Körper über das Hookesche Gesetz zu Spannungen führen, die im Inneren des Körpers den Gleichgewichtsbedingungen genügen. M. a. W., die Verschiebungen eines elastischen Körpers haben Differentialgleichungen zu genügen, deren Lösungen unter den biharmonischen Funktionen zu suchen sind. Diese selbst setzen sich aus harmonischen und Produkten linearer und harmonischer Funktionen zusammen. Da nun die einfachste mehrdeutige harmonische Funktion der Imaginärteil der komplexen Funktion $\ln(x_1 + ix_2)$ ist, macht *Volterra* den Ansatz

$$u_l = (a_l - x_\alpha \omega_{l\alpha}) \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_2/x_1 + (c_{l0} + c_{l\alpha} x_\alpha) \cdot \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (4,4)$$

und bestimmt die noch verfügbaren Konstanten c_{l0} und $c_{l\alpha}$ so, daß die Differentialgleichungen der Verschiebungen u_l des elastischen Körpers erfüllt sind. In Zusammenfassung dieser Betrachtungen gilt somit folgende Analogie: Die Deformationen ε_{ik} eines distordierten Körpers lassen sich als Spannungsfunktionen P_{ik}^0 derjenigen Dyname auffassen, deren Komponenten $M(0)_l$ und K_{lm} mit den ihnen entsprechenden Komponenten a_l und ω_{lm} der Distorsion übereinstimmen.

5. Zusammenfassung

Auf Grund des von *W. Günther* [1] angegebenen Zusammenhanges zwischen dem Tensor der Spannungsfunktionen und der Dyname der Oberflächenkräfte werden die Spannungsfunktionen eines durch eine Dyname beanspruchten Stabes untersucht. Ihr Tensor läßt sich als Deformationstensor eines Kontinuums deuten, das einer *Volterraschen* Distorsion unterworfen worden ist, wobei die 6 Komponenten der Distorsion mit den ihnen entsprechenden Komponenten der Dyname übereinstimmen.

Literatur

- [1] *W. Günther*, Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik. — Abh. d. Brschw. Wissensch. Ges., Bd. VI (1954).
 [2] *H. Schaefer*, Die Spannungsfunktionen des räumlichen Kontinuums und des elastischen Körpers. ZAMM 33, 10/11 (1953).
 [3] *V. Volterra*, Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ann. de l'École Normale Paris, 3. Série, 24 (1907) p. 401–517.