EIN PROBLEM AUS DER THEORIE DER DIOPHANTISCHEN APPROXIMATIONEN

Von MATSUSABURÔ FUJIWARA, in Sendai, Japan.

Es sei ω irgend eine irrationale Zahl und

$$[a_0 a_1 a_2 \cdots\cdots]$$

sei die Kettenbruchentwicklung von ω; ferner sei $P_n/Q_n = [a_0 a_1 \cdots\cdots a_n]$ der n-te Näherungsbruch. Setzt man

$$S_n = \left| Q_n^2 \left(\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right)\right|,$$

so kann man den klassischen Hurwitzschen Satz und die Ergänzungen dazu in der folgenden Form ausdrücken:

I. (Hurwitz-Borel). Mini $(S_{n-1}, S_n, S_{n+1}) < \frac{1}{\sqrt{5}}$ für jedes n.

II. (Hurwitz-Humbert-Fujiwara). Mini $(S_{n-1}, S_n, S_{n+1}) < \frac{1}{\sqrt{8}}$, wenn $a_{n+1} \geqq 2$ ist.

III. (Vahlen). Mini $(S_{n-1}, S_n) < \frac{1}{2}$ für jedes n.

Diese sämtliche Resultate habe ich[1] in 1917 und 1924 in einem Schlag bewiesen und verallgemeinert mit Herrn Morimoto in der folgenden Form:

$$\text{Mini } (S_n, S_m, S_l) < \left\{\left(\frac{Q_{nm}^2 + Q_{ml}^2 + Q_{nl}^2}{Q_{nm}\, Q_{ml}\, Q_{nl}}\right)^2 - \frac{4}{Q_{nl}^2}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

wo $m-n$, $l-m$ ungerade sind und

$$P_{pq}/Q_{pq} = [a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots\cdots, a_q].$$

Als ein spezieller Fall kann man daraus schließen daß

$$\text{Mini } (S_{n-1}, S_n, S_{n+3}) < \frac{5}{\sqrt{221}},$$

wenn $a_{n+1} \geqq 2$, $a_{n+2} = 1$ sind. Dies besagt daß, wenn ω nicht mit $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1+\sqrt{2}$ äquivalent ist, so gibt es unendlichviele Brüche P/Q derart daß

$$\left|\omega - \frac{P}{Q}\right| < \frac{5}{\sqrt{221}\, Q^2}.$$

Für komplexe irrationale Zahl ω ist meine Methode nicht hinreichend das Analogon des Hurwitzschen Satzes aufzufinden, während die Herren Ford

[1] Fujiwara, Tôhoku Math. Journ., 11 (1917), 14 (1918); Science Reports, Tôhoku University, 13 (1924); Proc. Imperial Academy of Japan, 2 (1926).

und Perron[1] dieses in den Körper $K(i)$ und $K\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, $K(\sqrt{-2})$ wirklich angegeben haben.

Jedoch kann ich durch meine Methode das Analogon des Vahlenschen Satzes angeben.

Wir legen nun einen beliebigen algebraischen Körper Ω zu Grund und betrachten irgend eine Kettenbruchentwicklung einer Zahl ω, welche nicht zu Ω gehört, wo die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $$|Q_{n-1}| < |Q_n| \to \infty \, (n \to \infty),$$

(2) Es existiert eine positive Zahl $k > 1$ von der Art, daß für jedes n $|\omega_n| \geqq k$, wo $\omega_n = [a_{n+1} a_{n+2} \cdots]$ bedeutet.

Dann kann man schließen:

Ist $\lambda_0 = k(k-1) / (1 + k(k-1))$, dann gilt

$$\text{Mini } (S_{n-1}, S_n) \leqq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Im Körper $R(i)$, wo R den rationalen Körper bedeutet, ist $k = \sqrt{2}$ nach Hurwitz;[2] daher ist

$$\text{Mini } (S_{n-1}, S_n) \leqq \frac{7}{4\sqrt{2}-2} = \frac{1}{0.5224} < 2.$$

Herr Prof. Perron[1] hat die Existenz unendlichvieler Paare P und Q, welche ganze Zahlen im $R(i)$ sind, derart daß

$$\left|\omega - \frac{P}{Q}\right| \leqq \frac{2}{|Q|^2}$$

bewiesen durch das klassische Schubladenverfahren von Dirichlet

Im Körper $R\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, ist $k = \sqrt{3}$, so daß

$$\text{Mini } (S_{n-1}, S_n) \leqq \frac{13}{9\sqrt{3}-3} = \frac{1}{0.968\cdots} < \frac{10}{9},$$

während Herr Prof. Perron gezeigt hat, daß es unendlichviele Paare P und Q, welche ganze Zahlen im Körper $R\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ sind, existieren von der Art daß

$$\left|\omega - \frac{P}{Q}\right| \leqq \frac{\sqrt{21}}{2} \frac{1}{|Q|^2}.$$

---

[1] Ford, Trans. American Math. Society, 27 (1925); Perron, Math. Annalen 103 (1930), 105 (1931), Münchner Berichte 1931, Math. Zeits. 37 (1933).

[2] Hurwitz, Acta Math. 11 (1887—88).