# Функториальность и взаимность[1]

Роберт Ленглендс

Я очень благодарен Профессору Паршину и тоже Профессору Лебедеву за приглашение посетить Институт Математичных Наук Имени Стеклова в Москве и особенно за то, что я дал Колмогоровские Лекции. Как я уже написал в другом месте, я очень уважаю математика А. Н. Колмогорова.

Я также пишу по-англиски статью с таким же заглавием, Functoriality and Reciprocity. Эта статья похожа на ту статью, написанную отчасти раньше отчасти позже, но я хочу обьяснять то одну стороны темы то другую так, чтобы эти две статьи различаются. Тем не менее в обеих я хочу объяснить строение теории которую мы хотим развить, но которой создали пока только обломки. Как статья Functoriality and reciprocity, эта статья будет оставаться на долгое время предварительной. Осталось многое, чего я ещё не понимаю.

Есть два вида общих целей: математические цели; умственные цели. Разумеется, что математика умственная область с её собственными целями, которые только математики понимают, точнее люди с несколькими познаниями математики. Тем не менее, нужно оценить её цели и достижения в подходящих рамках, в частности в исторических рамках. Я объясню это позже. Я хочу сперва объяснить математические цели.

Молодому или даже опытному читателю нельзя ожидать, что эта статья является введенением в теорию автоморфных представлений. Я посвятил много лет автоморфными представлениям и подробностям их теории, рядам Ейзенстейна, перемене базы, эндоскопии. В этих лекциях я предполагаю, что эти теории знакомы и что их развитие завершено, хотя это и не так. Я также не стараюсь припоминать забытые мной подробности. Я предпринимаю другую задачу, понять характер теории автоморфных предтавлений, которую мы стараемся строить, и её отношения к арифметике, геометрии и физике. Мне кажеця, что возможная сложность этих отношений часто не правильно понята.

Моя цель здесь не строить доказательства, хотя я ищу путь к доказательствам. Даже в тех частях функториальностей и взаимностей, в которых утверждения которые мы ищем ясно сформулированы, их доказательствам не только много лет и усилия многих математиков нужны будут но также и построение нескольких не лёгких дополнительных теорий. Насколько я могу, я описываю благоприятные возможности. Это мне кажется полезным. Читатель может сам оценивать пользу для себя.

Первая глава с заглавием Основные понятия и несколько вопросов введение не только в взаимность, но и в функториалность, которые многие математики, особенно специалисты теории чисел, смешивают, одну с другой. Будет нужно

---

[1] 30-ье сентября, 2011

объяснить разницу между ими. Специалисты теории чисел часто чрезмерно находятся под влянием франко-амерканской теории Артина-Чевалле и недостаточно знакомы с теорией представления, введенной в теории чисел Дедекиндом и Фробениусом и развитой как аналитическая теория главным образом Хариш-Чандра. Но его аналитическая теория недостаточна. Она теория умеренных (по-английски tempered) представлений а, как мы уже знаем из теории рядов Ейзенштейна, неумеренные представления появляются в аналитической теории автоморфных представлениях как важный элемент. Нужно этого не забывать.

В главе Локальная арифметическая теория я не стараюсь объяснять все нерешённые вопросы. Можно решать несколько в рамках теории умеренных представлений, но для других нужно будет развить дополнительную теорию.

В главе Формула следа и функториальность я стараюсь объяснять как я ожидать исследовать вопросы функториальностей и взаимностей. Нужно развить теорию, которая много труднее чем теория циклической замены базиса ([BC]) пользующаяся для теоремы Ферма и гипотезы Сато-Тейта. Для этой теории нужно будет ответить не только на много аналитических вопросов но также на много трудных арифметических вопросов. В статье [ST] я не старался решить эти вопросы. Мне кажется, что несколько математиков стараются заниматся этими вопросами без нужного приготовления.

В следующей главе Геометрическая теория для группы $GL(1)$, я хочу объяснять геометрическую теорию для группы $GL(1)$ как следствие классической теории дифферентиалов над поверхности Римана но я ещё не всё понимаю. Последние главы я надеюсь писать позже, но мне нужно много приготовления. Для глав Общая геометрическая теория и $p$-адическая теория нужно будет изучать, но для главы Глобальная арифметическая взаимность нужно будет много раздумывать о способах и об утверждениях потому, что до сих пор никто не занимался всерьёз этими вопросами.

Из этого взгляда на вопросы которые нам нужно решить, мы можем понимать одну слабость современной математики, её специализирование. Может быть, что это специалзирование связано с современным общественным строением профессии. Всемирное употребление американского языка способствует и поддерживает сосредоточение многих математиков из многих стран на одной теме.

Теперь уже не нужно понимать исследования соседов. Можно говорить с коллегой из Калифорнии. Последовательная ограниченность прискорбно. Но утрата математики прошлого, которая написана в языке который сейчас в математике не использована, на пример немецкий язык, хуже. По-моему, это особенно важно в теории автоморфных представлений, для которых, на пример, статьи Дедекинда и Фробениуса очень важны. Я сам это только поздно понял. Потеря важных частей немецкой математики девятьнадцатого века, особенно аналитических частей алгебраической теории числа, сопровождает преувеличенным употреблением пучков. Это употребление очень выгодно и очень важно, но оно аналитические методы не заменяет.

Следовательно я очень рад, что я, чтобы забавляться, учился немецкой язык. Мне, как математик, очень полезно свободно по-немецки читать. По таких причинах, я хочу свободно читать и писать по-русски. Конечно, это тоже важно по литературных и культурных причинах. Я уже старый человек, но тем не менее я очень благодарен за приглашение посетить Москву и за возможность немножко лучше познакомиться с русским языком.

Мне кажется что я должен тоже объяснить мой выбор темы и даже извиниться. Как я сказал, я уже довольно пожилой и я проводил много времени с теорией представлений, размерность которых обычно бесконечна, и алгебраической теории чисел, которые соединяются в теории автоморфных представлений. Хотя теория представлений с бесконечной размерностей была в начале главным образом тема московских математиков, сегодня это не так. С другой стороны, есть в Москве много важных математиков, которые занимаются алгебраической теорией чисел. Тем не менее, может быть что эта тема также не пригодна для колмогоровских лекций. Однако, даже если я знал бы, что я дал такие лекции, я выбрал бы ту же тему, функториальность и взаимность. Хотя, вопреки многам усилиям, мне не удалось много доказать, мне кажется, что я сейчас лучше понимаю то, что нужно доказать в этой области и как приступать к этим вопросам. Для меня очень важно объяснить это прежде чем слишком поздно.

Я хотел бы написать нечто похожее для ренормализации и перколации, что было бы подходящее для колмогоровских лекций, но это был бы труднее, даже слишком трудно для меня. Возможно что я удамся написать нечто скромное, но только позже и только после много приготовления.

## I. Основные понятия и несколько вопросов

Для математиков слово “взаимность” прежде всего означает “квадратичную взаимность”. Квадратический закон взаимности был открыт в восемнадцатом веке Эйлером, исследован Лежандром и доказан Гауссом. После Гаусса в девятнадцатом и начале двадцатого веках это понятие было развито как часть теории полей классов. С этим развитием математический смысл слова взаимность изменился. Это изменение продолжается. В этих лекциях я объясню его современное более широкое значение в теории автоморфных представлений. Смысл слова функториальность в этой теории и обычный категорический смысл тоже различны. В теории категорий функториальность формальное свойство. В теории представлений, это не так. Её доказательство самая трудная часть теории с самыми важными следствами. Мы ещё ищем общее доказательство. Я объясню тоже где и как я ожидаю его найти, насколько мои идеи уже ясны.

Есть несколько отдельных теорий, каждая из которых соответсвует выбору основного поля. Это поле может быть глобальным или локальным. Есть три рода глобальных полей $F$ и соответствующих локальных полей $F_v$: (1) конечное алгебраическое числовое поле; (2) функциональное поле одной переменной над конечным полем; (3) функциональное поле одной переменной над полем $\mathbb{C}$. Всего есть шесть разных теорий, хотя каждая локальная теория соответствует одной глобальной. Для алгебраических числовых полей или функциональных полей одной переменной над конечным полем локальная теория теория представлениях групп $G(F_v)$. Глобальная теория теория автоморфных представлений. Мы часто упомянем эти теории, особенно глобальные теории, как арифметические теории. Третья глобальная теория - геометрическая теория. Для её локальная теория мало развита. У второй и третьей теории есть несколько общих свойств.

Для всех этих теорий необходимо ещё одна составная часть. Эта редуктивная алгебраическая группа $G$ над полем $F$, которое может быть локально или глобально. К этой группе присоединяем группу ${}^LG$ над полем $\mathbb{C}$. Я не хочу давать здесь определение этой группы. Теория $L$-группы объяснена в [BC]. Если $G = GL(n)$, ${}^LG = GL(n, \mathbb{C})$; если $G = SL(n)$, ${}^LG = PGL(n, \mathbb{C})$; если $G = PGL(n)$, ${}^LG = SL(n, \mathbb{C})$. Вообще ${}^LG$ группа комплексных точек редуктивной алгебраической группы над $\mathbb{C}$, которая может быть несвязной. Если $\hat{G}$ её свазная компонента, есть такое конечное расширение Галуа $K$ от $F$ и такой гомоморфизм ${}^LG \to \mathrm{Gal}(K/F)$, что последовательность

$$\{1\} \to \hat{G} \to {}^LG \to \mathrm{Gal}(K/F) \to \{1\}$$

точна. Мы можем всегда пользоваться коммутативной диаграмой

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{G} \arrow[r] \arrow[d] & {}^LG_L \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(L/F) \arrow[r] \arrow[d] & \{1\} \arrow[d] \\
\{1\} \arrow[r] & \hat{G} \arrow[r] & {}^LG_K \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K/F) \arrow[r] & \{1\}
\end{tikzcd}$$

чтобы заменить $K$ конечным расширением Галуа $L \supset K$ поля $F$. Группа ${}^LG$ может быть или ${}^LG_K$ или ${}^LG_L$. Выбор этого поля зависит от рассматриваенного вопроса.

Вообще взаимность для арифметической теории показывается как отношением или связью между арифметической алгебраической геометрией и автоморфными представлениями. Согласно с принципами Гротендика [?,?,DM] это отношение выражается с помощью мотивов и с категорий Таннаки. Как я буду объяснять, мне кажется, что понятие мотива ещё не определяно в нужном нам виде. Следовательно я не хочу пользоваться точным определением ни мотива ни категория Таннак. Я говорю о поддельных категориях Таннаки. Подобно категории представлений групп, в этих категориях есть суммы и произведения, но давать точное определение здесь я не хочу и не могу.

Быбирая поле $F$, которое может быть глобальным арифметическим полем, характеристика которого равна нуль или простому числы $p$, либо геометрическим полем, или одним из соответственных локальных полей, для каждой редуктивной группы $G$ над $F$ мы можем вводить либо теорию представлений $G(F)$, если $F$ локально, либо теорию автоморфных представлений $G(\mathbb{A}_F)$, если $F$ глобально. Мы обсудим позже определение представлений над локальными и глобальными геометрическими полями.

Функториальность и простой вид взаимности были ввесёны одновременно в 1967 году в связи с афтоморфными $L$-функциями, но их смысл и следствия только медленно признавались. На пример, нужно было сперва признать разницу между сопряжением и стабильным сопряжением и между характерами и стабильными характерами. Характер, как он был введён Дедекиндом и Фробениусом, есть функция классов сопряжённых элементов а стабильный характер — это функция классов стабильно сопряжённых элементов. Если $F$ локальное или глобальное поле, то два элементы $g_1$ и $g_2$ из $G(F)$ стабильно сопряжёны если есть такое $g \in G(\bar{F}^{\mathrm{sep}})$, что $g_2 = g^{-1}g_1g$. Неприводимые стабильные характеры $\chi^{\mathrm{st}}$ такие конечные суммы характеров

$$\chi^{\mathrm{st}} = \chi_{\pi^{\mathrm{st}}} = \sum_{\pi^{\mathrm{st}}} a_\pi \chi_\pi, \qquad a_\pi \neq 0 \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где множество $\pi^{\mathrm{st}}$ $L$-пакет. Теория стабильных характеров является частей теории эндоскопии, но эта теория, в которой нужна знаменитая фундаментальная лемма, ещё не вполне развита. В частности, понятие $L$-пакета не вполне определенным. Пока есть только несколько примеров, но и они очень интересны. Тем не менее, нужно понимать, что даже для локальной теории над полем $\mathbb{R}$ есть вопросы, на которые мы до сих пор не имеем ответа.

Как следствие теории эндоскопии функториальность выражается в рамках квази-расщепимых групп и стабильных характеров. Но нельзя забывать, что общей теории пока нет и что эта теория будет обладать несколько неожиданными свойствами ([ABV]).

Пусть $H$ и $G$ две квази-расщепимых группы и

$$\begin{tikzcd} {}^L H_L \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & {}^L G_L \arrow[dl] \\ & \mathrm{Gal}(L/F) & \end{tikzcd} \tag{2}$$

коммутативная диаграмма. Такое $\phi$ называется допустимым. Конечно $\phi$ — это алгебраический гомоморфизм алгебраических групп. Согласно локальной и глобальной теориям, которые мы хотим развить, этой диаграмме соответствует отображение $\phi_\Pi : \pi_H^{\mathrm{st}} \mapsto \pi_G^{\mathrm{st}}$, которое приписывает $L$-пакет $\pi_G^{\mathrm{st}}$ представлений $G$ к $L$-пакет $\pi_H^{\mathrm{st}}$ представлений $H$. Я буду объяснять в этих лекциях как мы надеемся делать это глобально с помощей формулы следа. Локально над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ эта задача частично решена в рамках теории Хариш-Чандра, но это можно только для умеренных представлений. Для неумеренных представлений из класса Артура общее теория нужна. Мы ещё никак не понимаем общей локальной теории над неархимедовыми полями. В этих лекциях нужно будет обсудить недостаточность локальной теории. Я подчёркиваю, что локальная теория лёгче чем глобальная теория! В следующей главе я обьясню локальные трудности и в третьей главе я предлагаю чрезвычайно сложный и трудный метод для построения глобальной теории функториалности.

Предположим, что у нас есть такая локальная или глобальная теория. Тогда мы можем ввести поддельные категории Таннаки связанные со стабильными глобальными или локальными $L$-пакетами. Я предлагаю построение следующего вида. Нужно однако тоже подчеркнуть, что я описываю возможные следствия трудных исследований, которые станут задачами для многих математиков.

Нам не нужна категория, которая содержит в себе все возможности. Для каждого вопроса, нам нужно рассмотреть только конечное число стабильных $L$-пакетов. Эти пакеты определёны вопросам. Пусть они будут $\pi_1^{\mathrm{st}}, \dots, \pi_n^{\mathrm{st}}$, где $\pi_i^{\mathrm{st}}$ — $L$-пакет для квази-расщепимой группы $G_i$. С каждой из этих групп связана $L$-группа ${}^LG_i = \hat{G}_i \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$. Пусть

$$\phi_i : {}^LG_i \to GL(n_i, \mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(K/F)$$

допустимое алгебраическое вложение. Пусть $G = \prod G_i$. Тогда

$${}^LG = \prod_{\mathrm{Gal}(K/F)} {}^LG_i = \hat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F), \qquad \hat{G} = \prod_i \hat{G}_i,$$

и вложения $\phi_i$ определяют вложение $\phi_G : {}^LG \to GL(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(K/F)$. Группа $GL(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(K/F)$ это $L$-группа для $GL(n)$. Множество представлений $\otimes_{i=1}^n \pi_i$, $\pi_i \in \pi_i^{\mathrm{st}}$ определяет $L$-пакет $\pi_G^{\mathrm{st}}$ для группы $G$. Согласно функториальности $L$-пакет $\pi_G^{\mathrm{st}}$ и гомоморфизм $\phi_G$ определяют $L$-пакет $\pi$ для $GL(n)$. Потом нам нужно будет пользоваться идеями из [LP] чтобы доказать, что есть такая группа $H$ самой малой размерности, вложение $\phi_H : {}^LH \to GL(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(K/F)$ и такой $L$-пакет $\pi_H^{\mathrm{st}}$, что образом пакета $\pi_H^{\mathrm{st}}$ будет пакет $\pi$. Тогда категория Таннаки, которую мы можем использовать, это категория представлений группы ${}^LH$. Это описание неточно, но я хочу подчеркнуть, что мы не можем формулировать взаимность без этих поддельных категорий Таннаки или без функториальности.

Если мы посмотраем большее множество стабильных представлений,

$$\pi_1^{\mathrm{st}}, \dots, \pi_i, \pi_{i+1}^{\mathrm{st}}, \dots, \pi_j^{\mathrm{st}}$$

тогда мы получаем ${}^LH' \to GL(n', \mathbb{C})$, $n' \geq n$, и гомоморфизму ${}^LH' \to {}^LH$. Категория представление группы ${}^LH$ подкатегория категории представлений группы ${}^LH'$. Если хотим, мы можем пройти к обратному пределу, но это не полезно.

Для шести родов полей есть не только теория представлений, которую мы называем афтоморфой теорией или просто теорией представлений, есть также мотивная теория. Нам нужно понять для всех родов полей что такое, “мотив”ы и что такое “взаимность”. Самые простые случаи встречаются если $F$ локальное арифметичецкое поле. Но и эти случаи часто плохо объяснены. Мы хотим развить теорию, которая представит аналитическое, арифметическое и геометрическое как связные понятия. В таком развитии, нужно предвидеть много трудностей, локальных и глобальных. Я сам до сих пор не осознал их все. Эти трудности ясно видны, когда мы стараемся описывать взаимность, но они оказались ещё раньше в теории рядов Эйзенштейна и формулы следа.

В этих лекциях взаимность появляется как сравнение двух поддельных категорий Таннаки. Для локального арифметического поля одна из этих категорий это категория представлений редуктивных групп $G(F)$, существование которой - следствие функториалностей. Но нам нужно понимать не только какими представлениями пользоваться но также смысл функториалностей. Эти представления должны быть неприводимыми и мы используем понятие эквивалентности, которое подходяще для этих теорий. Это понятие знакомо из исследований Хариш-Чандра и других математиков. Можно, на пример, рассматривать теорию всех неприводимых представленияй. Хотя эта теория для геометрических и аналитических целей менее полезна, чем теория некоторых унитарных классов, она часто встретается. Мы можем тоже рассматривать все унитарные представления, но, по-моему, возможно что для этого класса нет ни теории взаимностей ни функториальностей. Тем не менее, для унитарных представлений есть больше одной теории, но эти теории для двух специальных классов унитарных представлений. Первый из этих класс умеренных представлений, который ввёл Хариш-Чандра. Они важны также для локальной формулы Планшереля. Второй класс представлений содержит умеренные представления и представления как тривиальное представление, которые нужны для теории автоморфных форм. Этот класс представлений является в теории рядов Эйзеншнатей а был формально определен и введен Артуром [A1,A2] позже и рассмотрен в книге [ABV] для поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Мы можем называть его классом Артура. Даже над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, теория этого класса ещё неполна но книга [ABC] содержит много убедительных теорем.

Мы опишём позже трудности, которые нужно преодолеть чтобы вполне создать локальную теорию умеренных представлений и чтобы начать строить представлений класса Артура. Для этих двух классов представлений нужно тоже создать теорию функториальности. Как мы объяснили, лоцально как глобаль, существо категории Таннаки следствие функториалности, но локально мы ожидаем, что возможно описать эти категории конкретно. Обычно это описание как категория представления группы. Нужно дать группу. Глобально невозможно дать эти группы конкретно.

Есть уже предположения о поддельных категориях Таннаки связанных локальными теориями. Для умеренных представлений над полем $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ эта категория (непрерывных конечномерных вполне приводимых комплексных— эти условия я не буду повторять) представлений группы Вейля $W_F$ а для представлений класса Артура над теми же полями эта категория представлений расширенной группы Вейля $\mathbb{W}_F = WA_F = SL(2,\mathbb{C}) \times W_F$. Если $F = F_v$ неархимедово локальное поле эти две группы замененные $\mathbb{W}_F = SL(2,\mathbb{C}) \times W_F$ и дважды расширенной $\mathbb{WA}_F = SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}) \times W_F$.

Мы будем рассматривать гомоморфизмы $\sigma$ группы $W_F$, $WA_F = \mathbb{W}_F$ или $\mathbb{WA}_F$ в ${}^LG$. Над подгруппой $SL(2,\mathbb{C})$ или над подгруппой $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ эти представления будут алгебраическими. Мы можем также требовать, как часто делается, что образ $W_F$ относительно компактный. Таким образом мы получаем для локально автоморфной (или теоретико-представленной) теории несколько подделенных категорий Таннаки.

Для взаимности нужны две соответствующие поддельные категории, одна для автоморфной теории, одна для мотивной теории. Обе должны быть категориями Таннаки, которые связаны с векторными пространствами над одним и тем же полем. (Я не буду всё время прибавлять имя прилагательное “поддельный”, значение которого только в том, что я не знаю как точно определить такие категории.) Для локальных арифметических полей автоморфная (или теоретико-представленческая) категория - категория векторных пространств над $\mathbb{C}$ но если $F$ неархимедово, то мотивная категория это категория над $\mathbb{Q}_\ell$ или $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Это нужно объяснить. Нужно также объяснить какое отношение может иметь одна этих категорий к другой. К тому же, необходимо понять почему есть столько родов автоморфных и мотивных категорий. Пока на многие вопросы ответа нет. Для взаимности, есть два руководящих соображения: равенство $L$-функций и локальная/глобальная совместность.

Сначала, рассмотрим архимедово поле $F$. Тогда определение мотивной категории состоит в том, что она является категорией комплексных представлений группы $W_F$ или группы $\mathbb{W}_F$. Согласно предложению это тоже локальная автоморфная категория. Следовательно для архимедового поля взаимность выражается как изоморфизм категорией Таннаки над тем же самим полем $\mathbb{C}$. Но есть не меньше четырех возможных автоморфных категорий: (i) категория соотствующая множеству всех неприводимых представлений; (ii) категория соотствующая множеству всех неприводимых унитарных представлений; (iii) категория соотствующая множеству всех умеренных неприводимых представлений; (iv) категория соотствующая множеству всех параметров (или представлений) Артура. Эти категории гипотетические, потому что они существуют только если доказана функториальность для соответствующего класса представлений. Как я уже объяснил, мне кажется, что это неправдоподобно для второго класса, а именно для класса всех унитарных представлений. Прибавлю также, что теория параметров и представлений Артура находится в очень ранней стадии развития.

Мы вернёмся к этой теме позже в отдельной главе, а сейчас мы рассмотрим самый простой пример. Пусть группа $G$ будет $GL(2, F)$ так, что ${}^LG = GL(2, \mathbb{C})$. Параметры для (стабильных классов) представлений первого рода суть гоморфизмы $\psi : W_F \to {}^LG$; параметры для умеренных представлений это те гоморфизмы, для которых образ относительно компактен. Представления четвёртого рода являются объединением двух классов: класса всех умеренных неприводимых представлений и маленького класса тех представлений, размерность которых равна 1. Параметр Артура представления $\pi$ первого класса

$$\varphi = \sigma \times \psi : \, s \times w \in SL(2, \mathbb{C}) \times W_F \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \psi(w) \in GL(2, \mathbb{C}),$$

где $\psi : W_F \to GL(2, \mathbb{C})$ - параметр представления $\pi$. Если размерность $\pi$ равна 1, то $\pi(g) = \chi(\det g)$, где $\chi$ - характер группы $F_v^\times$ или группы $W_F$. Параметр

Артура представления $\pi$ равен

$$\sigma \times \psi : \, s \times w \in SL(2, \mathbb{C}) \times W_F \mapsto \chi(w)s. \tag{3}$$

Вообще в параметре Артура второй сомножитель $\psi$ относительно компактен. Итак, характер $\chi$ унитарен. Следовательно представление $\pi$ тоже унитарно. Однако оно не умеренно.

Конечно представление четвёртого рода является представлением также и первого рода, но у него есть единственная $L$-функция, хотя определения для двух родов различны. Для параметра (3) локальная $L$-функция имеет вид:

$$L_v(s, \pi, \rho) = L_v(s - 1/2, \chi) L_v(s + 1/2, \chi),$$

где $\rho$ - определяющое (или тавтологическое) представление $L$-группы ${}^LG = GL(2, \mathbb{C})$, то есть

$$\rho : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Как представление рода (i) параметр представления имеет вид:

$$w \mapsto \begin{pmatrix} \chi_1(w) & 0 \\ 0 & \chi_2(w) \end{pmatrix},$$

где $\chi_1(w) = |x|^{1/2}\chi(w)$, $\chi_2(w) = |x|^{-1/2}\chi(w)$, если $x$ это образ элемента $w$ при гомоморфизме $W \to F^\times$. $L$-функция соответствующая этому параметру и представлению $\rho$ будет равна:

$$L_v(s, \pi, \rho) = L_v(s, \chi_1) L_v(s, \chi_2).$$

Эти две функции равны.

Действительно, для локальных архимедовых полей второй параметр излишен, если мы не различаем умеренные представления от неумеренных. Дополнительный параметр ицпользуется в рамках локальной/глобальной теорий и их отношения. Для локальной теории неархимедовых полей один из двух дополнительных сомножителей тоже излишен в этом смысле но один необходим. Для группы $GL(2)$ специальные представления умеренны и их параметры даются формулой (3), но значение $\sigma$ для специальных представлений отличается от значения для одномерных представлений, которые неумеренны. Параметр одномерного представления равен

$$\sigma_1 \times \sigma_2 \times \psi : \, s_1 \times s_2 \times w \mapsto s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \chi(w);$$

параметр специального представления равен

$$\sigma_1 \times \sigma_2 \times \psi : \, s_1 \times s_2 \times w \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot s_2 \cdot \chi(w).$$

Перед тем, как рассмотреть соотношение между локальными и глобальными параметрами, рассматрим соотношение между локальными автоморфными параметрами и локальными мотивными параметрами. Нам будет нужно различать первый дополнительный параметр $\sigma_1$, параметр Артура, от второго параметра $\sigma_2$, который появляется уже в теории умеренных представлений.

Можно предположить, что для неархимедового поля есть одна локальная мотивная категория и что эта категория $\ell$-адических представлений. Такие представления описаны в [T]. Пусть $\ell$ не равно характеристике поля вычетов, $\ell \neq p$. Теория $p$-адических представлений очень важна, но мы не будем рассматривать её в этой статье. Я сам её ещё плохо понимаю.

В статье [T] подстановка Фробениуса это такой элемент $\Phi$ в группе Галуа, что $\Phi^{-1}(x) = x^q$ над полем вычетов, содержаещим $q$ элементов. Тогда можно писать каждый член группы Галуа как произведение $\Phi^n\iota$, где $\iota$ член группы инерции. Есть гомоморфизм группы инерции на $\prod_{\ell\neq p}\mathbb{Z}_l$ переводящий $\sigma$ б $\prod t_l(\sigma)$. В статье [T] введёно понятие $\ell$-адического $WD$-представления или представления группы Вейля-Делиня (WD или $\mathrm{WD}_F$) на конечномерном $\ell$-адическом векторном пространстве. Насколько я понимаю, не нужно ввести такую группу, нужно только ввести её представления, потому что такое представление это только такая пара $(r, N)$, что $N$ нильпотентное линейное преобразование конечномерного пространства $V$ над $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ и $r$ представление группы $W_F$, ядро которого открытно в $W_F$. Сверх того, предположим, что для каждой подстановки Фробениуса,

$$r(\Phi)Nr(\Phi^{-1}) = q^{-1}N. \tag{4}$$

Читая описание этих пар в статье [T], я понял что мы можем предполагать, что выполнены некоторые различные доползительные условия. Мы можем, на пример, предполагать что образ этого представления $r$ относительно компактен. Мы скажем тогда, что представление WD-группы компактно. Мы можем также предполагать, что его замыкание в топологии Зариского редуктивно. Согласно первым страницам статьи [T], каждое представление WD-группы, образ которого относительно компактен или не относительно компактен, определяет такое $\ell$-адическое представление $\rho$ группы $\mathrm{Gal}_F$, что

$$\rho:\, \Phi^n\iota \mapsto r(\Phi^n\iota)\exp(t_l(\iota)N), \tag{5}$$

где $\iota$ - элемент группы инерции. Значит, есть эквивалентность между $\ell$-адическими представлениями, образ которых относительно компактен, и компактными представлениями WD-группы.

Я привлекаю внимание читателя к нескольким особенностям изложения в [T]. Сначала, как я уже заметил, определёна не сама WD-группа, а только представления WD-группы. Хотя есть возможность заменить представление WD-группы представлением этой же группы, которое полупросто в томсмысле, что образ подстановки Фробениуса полупрост, это условие не было сформулировано явно. Мне кажется что лучше его ввести и, таким образом, требовать, чтобы замыкание $G_r$ образа представления $r$ в топологии Зариского было редуктивным. Следовательно, мы пользуемся каноническим полупростым видом представления.

Хотя объяснения в [T] довольно прозрачны, я хочу добавить несколько слов. Ограничение представления $r$ на группу инерции является представлением конечного фактора этой группы. Следовательно, если $\Phi$ - подстановки Фробениуса, то есть такое $m \in \mathbb{Z}$, что $r(\Phi^m \iota) = r(\iota \Phi^m)$, для всех $\iota$ в группе инерции. Но если $r(\Phi)$ равно $\Phi_{\mathrm{ss}}\Phi_{\mathrm{un}} = \Phi_{\mathrm{un}}\Phi_{\mathrm{ss}}$, где $\Phi_{\mathrm{ss}}$ полупростое и $\Phi_{\mathrm{un}}$ унипотентное, тогда

$$\Phi_{\mathrm{ss}}^m r(\iota) = r(\iota)\Phi_{\mathrm{ss}}^m, \qquad \Phi_{\mathrm{un}}^m r(\iota) = r(\iota)\Phi_{\mathrm{un}}^m.$$

Из второго уравнения мы заключаем, что $r(\iota)\Phi_{\mathrm{un}} = \Phi_{\mathrm{un}} r(\iota)$. Следовательно, мы можем определить новое представление $r_{\mathrm{ss}}$, для которого $r_{\mathrm{ss}}(\iota) = r(\iota)$, если $\iota$ в группе инерции, и $r_{\mathrm{ss}}(\Phi) = \Phi_{\mathrm{ss}}$. Представление $r_{\mathrm{ss}}$ это канонический полупростый вид представления $r$. По-моему это представление только представление группы Вейла. Можно что оно не является представлением группы Галуа.

Мы можем также заменить гомоморфизм $r$ гомоморфизмом WD-группы в $L$-группу ${}^LG$, но над полем $\mathbb{Q}_\ell$ или $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, то есть заменить $GL(n)$ группу группой ${}^LG$. Это кажется мне ненужным. Тем не менее, я опишу следующее построение в таком общем виде. Я предполагаю что $r$ полупросто или что его замкнутость в топологии Зариского редуктивна. Такие предположения введены для формальной ясности.

Я хочу использовать теорему Джекобсона-Морозова в том виде, в котором она изложена в книге [K2], но не только над полем $\mathbb{C}$, а также и над полем $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Пусть $N$ нильпотентный элемент в алгебре Ли ${}^L\mathfrak{g}$ редуктивной группы ${}^LG$. Тогда существует такой $H \in \operatorname{ad} N(\mathfrak{g})$, что $[H, N] = 2N$. К тому же, для каждого такого $H$, найдется единственное $N'$, что $[H, N'] = 2N'$, $[N, N'] = H$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{s} = \{N', H, N\}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}(2)$. Пусть $\sigma$ изоморфизм

$$\sigma: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto N, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto H, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto N'.etsya$$

группы $\mathfrak{sl}(2)$ с группой $\mathfrak{s}$.

Согласно уравнению (4), есть такой характер $\chi$ группы $\mathrm{Gal}_F$, что

$$r(\iota) N r(\iota)^{-1} = \chi(\iota) N, \quad \forall g \in \mathrm{Gal}_F\,.$$

На группе инерции $\chi(\iota) = 1$

Пусть $\mathfrak{h}$ - централизатор образа группы инерции в алгебре Ли ${}^L\mathfrak{g}$ группы ${}^LG$. Мы применим теорему Джекобсона-Морозова к алгебре $\mathfrak{h}$ вместе с элементом $N$. Этот элемент находится в $\mathfrak{h}$. Пусть $H$ - централизатор образа группы инерции в ${}^LG$ и $S$ подгруппа группы $H$, которая соответствует алгебре $\mathfrak{s}$. Группа $S$ содержит одномерную подгруппу, алгебра Ли которой содержит $H$, и эта подгруппа содержит такое $P$, что $\mathrm{Ad}(P)(N) = q^{-1}N$, $P = q^{-H/2}$. Пусть для $\iota$ в группе инерции

$$r_1(\Phi^n \iota) = P^{-n} r(\Phi^n \iota).$$

Множество $\{\Phi^n \iota\}$ равно группе Вейла и $r_1$ является представлением этой группы. Если $\iota$ член группы инерции, то $r_1(\iota) = r(\iota)$ и

$$\mathrm{Ad}(r_1(\iota))N = N, \quad \mathrm{Ad}(r_1(\iota))H = H, \quad \mathrm{Ad}(r_1(\iota))N' = N'.$$

Более того,

$$\mathrm{Ad}(r_1(\Phi))N = N, \quad \mathrm{Ad}(r_1(\Phi))H = H.$$

Поэтому $\mathrm{Ad}(r_1(\Phi)N'$ удовлетворяет условиям теоремы Джекобсона-Морозова и $\mathrm{Ad}(r_1(\Phi))N' = N'$. Следовательно, мы можем использовать в качестве представления $WD$-группы представление $(\sigma, \psi)$, где $\psi$ - ограничение представления $r_1$, расширенной группы Вейла. Я предпочитаю это.

Если дано вложение $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$, тогда не только $N$ и $\psi$, которое ограничение представления $r_1$ на группу Вейла, но также и подгруппа $S$ группы Артура определёны над $\mathbb{C}$. Над $\mathbb{C}$, гомоморфизм $\sigma \times \psi$ это параметр в смысле (3). Следовательно, представление группы Вейля-Делина даёт параметр Артура, но возможно, образ этого параметра не относительно компактным в $\mathbb{C}$, даже если его образ относительно компактен в $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

Мне кажется, что для локальной взаимности есть две возможности. Мы можем сперва, в мотивой категории, признавать представления $WD$-группы над $\mathbb{Q}_\ell$ даже такие представления для которых образ гомоморфизма $\psi$ не относительно компактны. Следователь мы можем допустить в локальной автоморфной категории в качестве параметров и такие гомоморфизмы $\sigma \times \psi$ расширенной группы Вейля для которых образ $\psi$ над $\mathbb{C}$ может не быть относительно компактный. Другими словами, мы пользуемся параметры Ленглендса всех представленим. Пока для общей группы $G$ над неархимедовым полем такой теории нет. Однако такая теория обоснована для группы $GL(n)$ в [HT].

Теория параметров Ленглендса, даже для неархимедовых полей следствие теория Хариш-Чандра ([Si]). Эта теория содержит не только теорию умеренных представлений но также много других основых теорем, доказанных Хариш-Чандра. Тем не менее классификация Ленглендса, в основом, следствие теории умеренных преставлений, особенно теория умеренных каспидальных представлений, то есть теория взаимности для их. По-моему, классификация представлений которые ввёл Артур, но которые мы еще не объяснили, нуждается в новых соображениях.

Но прежде чем мы рассматриваем вопросы поднённые Артуром, мы возвращаемся к вопросам об отношении между представлениями алгебраических групп и $\ell$-адическими представениями, итак к локальной взаимности. Одна из целей этих лекций понимать, чего мы ожидаем от взаимностей. Есть не меньше двух видов взаимностей. Мы уже описывали один вид.

Чтобы описывать второй вид $\ell$-адических или комплексных представлений расширенной группы Вейла. Мы фиксируем вложения $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ и $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell$. Определения будут независимы от этих выборов. В множестве $\bar{\mathbb{Q}}$, есть подмножество, $\mathbb{S}_1$, тех числах $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ так, что для каждого сопряженного числа $\beta$, $|\beta| = 1$.

Рассматриваем параметр $(\sigma, \psi)$ над $\mathbb{C}$ или над $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Мне кажется, что можно предполагать сперва, что, для каждого представления $\rho$ группу ${}^LG$ и каждого $w \in W_F$, собственные значение преобразования $\rho(\psi(w))$ содержаны в $\bar{\mathbb{Q}}$. Мы можем требовать что есть такой гомоморфизм

$$\xi : GL(1) \to {}^LG, \tag{6}$$

что

(i) образ $\xi$ коммутатирует с образом гоморфизма $\sigma$ и образом гоморфизма $\psi$;

(ii) для каждой подстановки Фробениуса $\Phi$ и каждого член $\iota$ группы инерции и для каждого представления $\rho$ группа ${}^LG$ все собственные значения элементов $\xi(p^{-m/2})\rho(\psi(\Phi^m))\rho(\iota)$ находятся в $S_1$.

Это второе условие независимое от выбора квадратного корня $p^{1/2}$.

Над $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ эти параметры дают подмножество множества $\ell$-адических представлений, которой важность показана предположением Вейла. Соответственно пока не доказанной взаимностей, эти параметры дают над $\mathbb{C}$ не только параметры большого множества умеренных представлений, потому что образ в $\mathbb{C}$ или в $\mathbb{Q}_\ell$ представления $\psi$ над группой инерции обязательно конечен, но тоже много не унитарных представлений. Унитарность отсутствует по простых причинах, связанных с присутствия не тривиального гоморфизма $\xi$ и с гипотеза Вейла. Для глобальной взаимности, это отсутствие унитарностей важно.

Во всяком случае, второй вид взаимности частичен. Образ мотивной категории собственная подкатегория автоморфной категории. Но этот вид взаимности соответсвует виду глобальной взаимности, который мы позже опишем.

Мы ещё не объяснили цель просто расширенной группы Вейла. В 1967/68. г. Когда я начинал исследовать смысл свего писма на Вейла и его отношение к группе Вейла, спезиальные представления группы $GL(2, F_v))$ над локальном поле $F_v$ былы для меня загадка. Они — или оно, потому что если $\pi$ одно специалное представление, другые данные как $g \mapsto \chi(\det g)\pi(g)$ — не соответсвуют гомоморфизму $W_F \to GL(2, \mathbb{C})$. Читая статью Серра [S1], я узнал тотчас, что пропадающый параметр данный эллиптической кривой с нецелым инвариантом. Это замечание позже оформилано общим видом Делинем, который ввел ту группу, которая сейчас называется группой Вейла-Делиня, с намерением определять параметров для всех групп.

Для глобальной теории нужна будет вдвойне расширенная группа, которую мы тоже введем позже. В локальной теории этой глобальной группе соответсвует вдвойне расширенная группа Вейла

$$SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times W_{F_v}. \tag{7}$$

Эти группы введёна Артурам по важных причинах, связанных с формулой следа и с функториалностью. Я хочу объяснять некоторые из этих причины. Не забываем того, что я хочу достичь в этих лектзии. Я хочу не только объяснять множество предположений но тоже описывать возможные подходы к их разрешениям. Этих подходы требуют полное понимание рамок теории и отношений их составных частей. Артур обьяснил источники его принципов и его предположений в статьях [A1,A2]. Я их частично описываю, прибавлая несколько собственные взглады. Хотя мы искаем не только предположений но тоже доказательства, мне кажется, что возможно будет находить полные и удовлетворительные доказательства только в рамках общих вопросов. Конечно можно находить доказательства того или сего заявления, даже трудное, поразительное доказательство, без полного понятия общих вопросов. Но по-моему для самостоятельных исследований лучше понимать общие цели.

Самое начало предположениях Артура общее предложение Рамануджана, особенно для группы $GL(n)$. Дејствительно можно выражать это предложение в непосредственно постижимом виде только для $GL(n)$. Оно утверждает, что если $\pi = \prod_v \pi_v$ параболическое автоморфное представление группы $GL(n)$ над глобальним арифметическом полем, тогда $\pi_v$ умерено для всех точек $v$. Это предложение трудно и ещё не доказано. Его доказательство будет одно из важных следствий функториальности.

Эти параболические автоморфные представления составные части теории автоморфных представлений над группой $GL(n)$ и наконец над всеми группами. Для $GL(n)$ есть простое предположение Жакея, которое Меглин и Вальдсперже доказали. Предложение Жакея описывает преимущественно полный точечный авторморфный спектр группы $GL(n)$ но наконец польный автомрофный спектр этой группы при помощи параболического спектра.

Пусть $m = kl$ так, что

$$M = GL(k) \times \cdots \times GL(k)$$

подгруппа Леви группы $GL(m)$. Пусть $\pi_k$ параболическое представление группы $GL(k, \mathbb{A}_F)$. Пусть $\pi_{k;s}(g) = |\det g|^s \pi_k(g)$, $s \in \mathbb{C}$. Глобальное абсолютное значено $|x| = \prod_v |x|_v$, $x \in \mathbb{A}_F$, и локально абсолютное значено так нормировано, что $|x|_w = |\operatorname{N} x|_v$, $x \in E_w$ и $E_w/F_v$ конечное расширение. В поле $\mathbb{Q}_p$, $|p| = p^{-1}$. Представление $\pi_k$ унитарно но $\pi_{k;s}$ унитарно только если $s$ чисто мнимо. Пусть $I_l(\pi_k)$ представление группы $GL(m)$ индуцированное представлением

$$\pi_{k;(l-1)/2} \otimes \pi_{k;(l-3)/2} \otimes \cdots \otimes \pi_{k;(1-l)/2}. \tag{8}$$

У представления $I_l(\pi_k)$ есть единственное неприводимое частное $\pi_{k,l}$. Два представления $\pi_{k;l}$ и $\pi_{k,l}$ различны. Представление $\pi_{k,l}$ унитарно и оказывается в точечном спектре пространства

$$GL(m, F)\backslash GL(m, \mathbb{A}_F),$$

точнее в одномерном спектре, потому что с $\pi_{k,l}$ проявляются тоже представления $g \to \pi_{k,l}|\det g|^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Представление $\pi_{k,l}$ параболическо только если $l = 1$.

Мы уже объяснили, для локальных или глобальных арифметических полей, как было бы следствие функториальностей существование группы которой представления обеспечиваются той подделной категорией Таннака которая соответсует (автоморфним) представлениям глобальных или локальных групп $G(F)$. Конечно переход с функториальностей к этой группе или категории её представлений не будет лёгок. Глобальную функториальность саму мы надеемся доказывать формулой следа. По-моему для этого будет нужно предварительно исследовать локальную функториалность. Мы обсуждаем эти вопросы в главах, “локальная арифметическая теория” и “формула следа и функториальность”.

Если мы имеем глобальную теорию функториалностей в распоряжении, тогда, соответственно нашему вкусу есть либо обратный предель конечномерных редуктивных групп на $\mathbb{C}$ либо для конечного множества автоморфных представлений конечномерная редуктивная группа. Если мы рассматриваем только параболических представлений групп $GL(n)$, где размерность $n$ произвольна, мы обозначаем эту группу с знаком $\mathcal{G}_F$. Тогда согласно [A1] поддельная группа Таннака для глобальой автоморфной теории расширенная группа

$$SL(2,\mathbb{C}) \times \mathcal{G}_F. \tag{9}$$

Нужно объяснить как с этой расширенной группой мы можем параметризовать представления $\pi_{k,l}$.

Почти по определению представление $\pi_k$ соответсвовало бы представлению $\psi$ группы $\mathcal{G}_F$ в группе $GL(k,\mathbb{C})$. Это представление было бы неприводимо потому что $\pi_k$ параболическо.

Классификация унипотентных элементов группы $GL(n)$ или нилпотентных элементов алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ известна. Пусть

$$N_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

матрица с $l$ строками и $l$ столбецами. Пользуясь этими матрицами мы легко даём представителей классах нильпотентных матриц. Пусть

$$N_l(m) = N_l \oplus \cdots \oplus N_l$$

прямая сумма $m$ эксемпляров матрицы $N_l$. Тогда представления

$$N = N_1(m_1) \oplus N_2(m_2) \oplus \cdots \oplus N_l(m_l) \oplus \dots, \qquad m_1 + 2m_2 + \cdots = n.$$

представители нилпотентных классов.

Для каждого представителей $N_l$ есть такой гомоморфизм $\sigma_l : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(l)$, что

$$\sigma_l : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to N_l, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to N_l^{\mathrm{tr}},$$

и

$$\sigma_l : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} l-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l-3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -l+1 \end{pmatrix}$$

Параметр представления $\pi_{k,l}$ представление $\sigma_l \times \psi$. Вообще, если $m_1 + 2m_2 + \cdots = n$, есть гомоморфизмы

$$GL(l) \times GL(m_l) \to GL(lm_l), \qquad h \times g \mapsto h \otimes g,$$

и гомоморфизм

$$\prod_l GL(lm_l) \to GL(n), \qquad \prod g_l \mapsto \oplus g_l.$$

Итак если $\psi_l : \mathcal{G}_F \to GL(m_l)$, есть горморфизм

$$\varphi = \bigoplus_l \sigma_l \otimes \psi_l : SL(2) \times \mathcal{G}_F \to GL(m, \mathbb{C}). \tag{10}$$

Лёгко определить автоморфное представление $\pi_\varphi$ группа $GL(n, \mathbb{A}_F)$ которое соответсвует $\varphi$.

В основном построение представления $\pi_{l,k}$ локальное построение. Параболические представлени $\pi_k$ или $\pi_{k;s}$ произведения $\otimes\pi_{k,v}$ или $\otimes\pi_{k;s,v}$ локальных представлений и согласно гипотезе Рамануджана первые этих представлений все умерены. Вторые умерены только если $s$ чисто мнимое число. Представление

$$\pi_{k;(l-1)/2} \otimes \pi_{k;(l-3)/2} \otimes \cdots \otimes \pi_{k;(1-l)/2} = \prod_v \pi_{k;(l-1)/2,v} \otimes \pi_{k;(l-3)/2,v} \otimes \cdots \otimes \pi_{k;(1-l)/2,v}$$

и его частное

$$\pi_{k,l} = \prod_v \pi_{k,l,v}$$

где локальное представление $\pi_{k,l,v}$ частное Ленглендса представления

$$\pi_{k;(l-1)/2,v} \otimes \pi_{k;(l-3)/2,v} \otimes \cdots \otimes \pi_{k;(1-l)/2,v}.$$

Я ещё не прочитал всю книгу [ABV], но мне кажется что локальный парматр Артура этого представление $\sigma_l \otimes \psi_v$, где $\psi_v$ локальный параметр умеренного представления $\pi_{k,v}$. Точнее в книге [ABV] только группы над полем действительных или комплексных чисел осветится. Пока нет удовлетворительной локальной теории над неархимедновным полем! Вероятно что для группы $GL(n)$ нужные утверждения находятся в статье [Z]. Как параметр умеренного представления $\pi_{k,v}$, параметр $\psi_v = \sigma'_v \times \psi'_v$, где

$$(11)\quad \sigma'_v : SL(2,\mathbb{C}) \to GL(k,\mathbb{C}), \quad \psi'_v : W_{F_v} \to GL(k,\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(K_v/F_v),\ [K_v : F_v] < \infty.$$

Образы этих двух гомоморфизмов перестановичны. Я подчеркиваю, что $\sigma_v = \sigma$ не зависит от $v$ а $\sigma'_v$ может переменяться с точкой $v$. Следовательно характер двух дополнительных параметра $\sigma_v$ и $\sigma'_v$ различен.

Вопросы свазанные с параметрам мне кажутся затруднительными. Пусть на пример $G$ мултипликатывная группа алгебры кватернионов над $\mathbb{Q}$ и $\pi$ тривиальное представление $G(\mathbb{A}_F)$. Эта группа не квасирасщепляема. Параметры локальных представлений $\pi_v$ определены соответсвием Жаке-Ленглендса. Там где алгебра расщепляема параметр $\pi_v$ и параметр соотственного представления $\pi'_v$ равны и их параметры Артура

$$s_1 \times s_2 \times w \mapsto s_1$$

тоже равны, но там где алгебра не расщепляема, представление $GL(2,\mathbb{Q}_v)$ соответсвующое $\pi_v$ специальное представление $\pi'_v$ и его параметр

$$s_1 \times s_2 \times w \mapsto s_2.$$

Можно что тоже полезно напоминать отношение между спезиальным представлением и эллиптической кривой, чтобы лучше понимать отношение между $\ell$-адическими преставлениями группы Вейла-Делийна и преставлениями группы $GL(2)$. Нам нужна только поверхностное понятие теории эллиптисческих кривой, которая объяснена в [Sil].

Пусть $E$ эллиптическаы кривая над локальном поле $\mathbb{Q}_p$. Пусть инвариант этой кривой будет нецелый. Тогда — в этих лекциях, в противопололожность определениу книги [Sil] — $L$-функция этой кривой

$$(12)\qquad L_p(s,E) = \frac{1}{(1-\alpha/p^s)(1-\beta/p^s)},$$

где $\alpha$ и $\beta$ алгебраические числа. Можно что $\alpha = \beta = 0$, что $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, что $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, или что $\alpha \neq 0$, $\beta \neq= 0$. Если $\alpha\beta \neq 0$, тогда $\alpha\beta = p$ и $|\alpha|_p = |\beta_p| = p^{-1/2}$. Это обычный и самой известный случай. Последовательно, для соответствия подходящо вводить гомоморфизм (6) с

$$\xi(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

Но если такой гоморморфизм локально нужен почти всюду, он нужен не только глобально тоже локально всюду.

На пример, он нужен в таких местах, где

$$L_p(s,E) = \frac{1}{1 \mp 1/p^s}, \tag{13}$$

как в книге [Sil, p.360]. Эта $L$-функция выражение принципов статьи [T,§2], особенно нашего уравнения (5). Для эллиптических кривих, которих инвариант $j(E)$ ([Sil,p.46]) нецелый, $\ell$-адическое представление соответственное кривой определено парой $(r, N)$, для которой

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и

$$r(\sigma) = \begin{pmatrix} \mu_1(\sigma) & * \\ 0 & \mu_2(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{\mu_1(\sigma)}{\mu_2(\sigma)} = t_\ell(\sigma)$$

и $L$ функция $L_p(s,E)$ равна 1, если $\mu_1$ разветвлена, но $1/(1-\mu_1(\phi)/p^s)$, если $\mu_1$ неразветвленая. Число $\mu_1(\phi)$ рационально. Следовательно, оно не только определённое $\ell$-адическое число, оно тоже определённое комплексное число.

Мы уже объяснили, как переходить с параметра (5) на комплексный параметр (3), хотя этот параметр не будет параметр Артура но параметр в котором $\sigma_1$ тривиально и который соответсвует умеренному представлению. Для это переход нужно было выбирать гоморфизм $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathbb{C}$. В частности нужно было выбирать комплексную матрицу $q^{-H/2}$. Умеренное представление которое соответствует такому параметру специальное представление. Это представление описывано в многих местах, в частности в [JL, p.109], где его $L$-функтзия дана. Оно частное представление $\pi_p$, из неунитарного главного ряда группы $GL(2)$ с параметрами $\mu_1$ и $\mu_2$, которые для этой цели представляют комплексные характеры. Согласно уравнению (4)

$$\frac{\mu_1(\Phi)}{\mu_2(\Phi)} = \frac{1}{p},$$

так, что как комплексные числа $|\mu_1(\Phi)| < |\mu_2(\Phi)|$, и $L$-функция представления $\pi_p$ (соответственная представлению $\rho : g \mapsto g$ определяющому группу $GL(2)$)

$$L(s,\pi_p) = \frac{1}{1-\mu_1(\Phi)/p^s} \tag{14}$$

если $\mu_1$ неразветвленной характер, но $L(s,\pi) = 1$ если $\mu_1$ разветвлено. Благодаря уравнениям (13) и (14), взаимность совместима с определением $L$-функций.

Кроме этого специального представления группы $GL(2)$, мы ещё не осмотрели ни локальных параметров для неархимедового поля ни глобальных параметров для общих групп, и они до сих пор не определёны. Но с одной сторонй нужно предположить что они совместимы с функториальностей, так что первый дополнительный параметр, параметр Артура, постоян. Он не переменяется с точкой $v$. Однако кажется, что это условие не всегда удовлетворено, по крайне мере, не для не квази-расщепимых групп, на пример, не для мультипликативной группы алгебры кватернионов. С другой стороны, второй параметр свазаны с более глубокими свойствами соотсвенного $\ell$-адиского представления, если это существует. Для глобального представления он без сомнения почти всюду тривиален и переменяется изо места в место, как для представления, которое соответсвует эллиптической кривой $E$. Тогда второй параметр не тривиален на точке $v$ только если $j(E)$ не интегрально на $v$.

Мы уже ввели дополнительный параметр $\xi$ и заметили, что он свазан с гипотезой Вейла. Мне кажется, что для автоморфной теории и взаимности такой дополнительный параметр $\xi$ тоже нужен и для такой же причины. Если хотим мы можем тоже предполагать что образ гоморфизма находится в центре группы ${}^LG$ потому что все заявления сведются к заявлениям для централизатора образа $\xi$, которой будет подгруппа Леви.

Для глобалной взаимностей, нам нужна правильная мотивная категория. С этой категорией мы введим соответсвующую подделъную категорию $\mathcal{M}_{\mathrm{mot}}$. Векторные пространства присоединёны к этой категории будет категория над $\mathbb{Q}$ или над $\bar{\mathbb{Q}}$. Будет тоже категория $\mathcal{M}_\ell$ $\ell$-адических представления глобальной группы Галуа, которых мы ещё не обсуждили но которых присоединённые векторные пространста будут над полем $\mathbb{Q}_\ell$ или $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Будет наконец подделная категория $\mathcal{M}_{\mathrm{aut}}$ присоединёна к автоморфним представлениям, которой векторные пространста будут над полем $\mathbb{C}$. Мы ожидаем диаграммы

$$\mathcal{M}_{\mathrm{aut}} \leftarrow \mathcal{M}_{\mathrm{mot}} \otimes \mathbb{C}, \qquad \mathcal{M}_{\mathrm{mot}} \otimes \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathcal{M}_\ell, \tag{15}$$

но мы не ожидаем непосредственного отношения между категорией $\mathcal{M}_{\mathrm{mot}}$ и категорией $\mathcal{M}_{\mathrm{aut}}$.

Не трудно понимать дополнителельный параметр $\xi$, хотя он немножка неловок. В автоморфной категории лёгко освобождатся от этого параметра. Если образ гоморфизма $\xi$ находится в центре группа ${}^LG$, тогда, благодаря двойственности между весами $G$ и ковесами ${}^LG$, гомоморфизм $\xi$ опредаляет алгебраический характер $\chi$ группа $G$. Тогда $\chi$ определяет комплекснозначный характер $|\chi(g)|^{1/2}$ групп $G(F_v)$ и $G(\mathbb{A}_F)$. Для автоморфных представлений или для локальных представлений группы $G(F_v)$, условие (ii) становится условием, что представление

$$g \rightarrow |\chi(g)|^{-m/2}\pi(g)$$

унитарно. То есть, вводя дополнительный параметр $\xi$ мы можем без труда переходить от унитарных представлений к тем представлениям и к той теорие взаимностей, которые нужны для убедительной теории.

Я хочу привлекать внимание читателей к теоретико-спектралным сторонам наших рассмотрений. Для глобальной теории автоморфных представлении главные представления не унитарные представления но скорее представления которые могут появлять в $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$. Однако это понятие ещё неясно. Нужно всегда понимать не представление но устойчий класс представления и не представления произвольной группы но представления квази-расщепимой группы. Нужная локальная теория следствие теории эндоскопии а эта теория ещё не развивана.

Для абстрактных теоретико-спектралных вопросов, достаточно определить спектр до множества которого мера 0, но для конкретных вопросов, обычно определить спектра точно. На пример, как Хариш-Чандра доказал, для полупростых или редуктивных групп Ли и формулы Планчереля нужны умеренные представления и только умеренные представления. Это точно как в теории интеграла Фурье. Для частного $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ нужные и подходящие представление, те которые появляються в теории рядов Эйзенстейна. Благодаря Жакею, Меглин-Вальдсперже и Зелевинскому теория этих рядов развивана глобально и локально для группы $GL(n)$. Для других групп теория как обрисовала Артуром в [A1] ещё не в распоряжении, ни локально ни глобально.

Самый трудный вопрос определение категории $\mathcal{M}_{\text{mot}}$. Не только определение Гротендиком связано с очень трудними вопросами алгебраической геометрии и арифметики, как гипотезой Ходжа но тоже размер этого понятие не ясный. $L$-функции многобразия Шимура должны быть равны автоморфным $L$-функциям. Следовательно соответствующие геометрические предметы должны определить предметы в $\mathcal{M}_{\text{mot}}$, но мне не ясно, что они находятся в категории введённой Гротендиком.

## II. Локальная арифметическая теория

Локальная арифметическая теория теория подходящого класса неприводимых представления групп над локальным арифметическим полем $F_v$. Есть три таких класса: (i) класс всех неприводимых представлений; (ii) класс умеренных неприводимых представлений; (iii) класс Артура. Представления двух последных классов унитарны. Даже для групп над полем $\mathbb{R}$, класс неприводимых унитарных представлений не понятен. На пример, мы не знаем, образ унитарного представления под функториальностей унитарен ли? Но для теории функториалностей и взаимностей этот большой класс не нужен. Над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, теория второго класса создана Хариш-Чандра. Классификация первого класса (классификация Ленглендса) следствие классификации второго класса. Даже над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, ни теория третьего класса как хорошо определённая и вполне обосновыванная теория, ни полная локальная теория функториалностей для второго класса ещё не существует. Постараемся описать как эти теории могут оказаться

Для поля $\mathbb{R}$ (или для поля $\mathbb{C}$) есть даже для третьего класса уже гипотеза по параметрам стабильных классов, но полная стабильная теория не только теория о параметризации разных классов. В этих лекции мы не рассматрываем вопросов эндоскопии, связанных с неустойчовости. По теориям, уже развиваны или ещё предположительны, параметры трёх классов представлений локальной группы $G(F)$ даны подходящими конечномерными представлениями группы Вейла $W_{\mathbb{R}}$ или один раз расширенной группы Вейла $\mathbb{W}_{\mathbb{R}}$. Нужно прибавлять, что, как объяснёно в [A1], понятие стабильностей в рамках класса Артура неуловимее чем для умеренных представлений.

Объяснимте сперва важную сторону теории второго класса, которая ещё не развита, даже на архимедовном поле $F$. Пусть $\phi : {}^LH \to {}^LG$ допустимый гоморфизм, где группы $H$ и $G$ квази-расщепимы. Тогда каждому стабильному умеренному классу $\pi_G^{\mathrm{st}}$ соответсвуеть класс $\pi_G^{\mathrm{st}}$,

$$\pi_G^{\mathrm{st}} = \phi_* \pi_H^{\mathrm{st}} \tag{16}$$

Характер $\chi^{\mathrm{st}}_{\pi_H}$ $(\chi^{\mathrm{st}}_{\pi_G})$ умеренная обобщенная функция или смягчённое распределение, по смыслу Л. Шварца и Хариш-Чандра, над $H(F)$ $(G(F))$. По-моему, для теории удовлетворяющей аналитические потребности теории автоморфных представлений нужно строить перенос, который похож на перенос, с которым мы знакомы из теории эндоскопией, но которий различен. Он определен стабильными орбитальными интегралами. Каждой гладкой функцие $f^G$ над $G(F)$ с компактным носителём этот перенос присоединяет такую функцию $f^H$ над $H(F)$, что

$$\operatorname{tr}\pi_H^{\mathrm{st}}(f^H) = \operatorname{tr}\pi_G^{\mathrm{st}}(f^G), \qquad \pi_G^{\mathrm{st}} = \phi_* \pi_H^{\mathrm{st}} \tag{17}$$

для каждого смягченного класса $\pi_H^{\mathrm{st}}$. Если группа $H$ неабельна, эта функция $f^H$ не однозначно определена. Однако её стабильные следы $\operatorname{tr}\pi_H^{\mathrm{st}}(f^H)$ должны быть определены. В статье [ST], я утвердил существование этого переноса для самого простого отображения $\phi$, для которого $G = GL(2)$ и $H$ мультипликативная группа квадратического расширения $K$ поля $F$. Итак

$$\begin{gathered} {}^LH = GL(1,\mathbb{C}) \times GL(1,\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(K/F). \\ G = \{1, \sigma\}, \quad \sigma(z_1, z_2) = (z_2, z_1). \end{gathered}$$

Чтобы доказать существование $\phi_*$ для общего гомоморфизма $\phi$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, можно что достаточно пользоваться теорией умеренных представлений созданной Хариш-Чандра, как Шелстада пользовалась ей для ендоскопического переноса.

Эта проблема не только важна но тоже доступна для кого-нибудь, который прилагает усилия. Однако есть вторая проблема для групп над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, которая кажется мне труднее, спектральная теория представлений класса Артура. Над неархимедовных полях, есть два класса представления, для которых общая теория ещё не существует, класс умеренных представлений и класс представлений, введённых Артура.

Для всех локальных полей и для этих двух классов, класса умеренных представлений и класса Артура, мы будем хотеть творить теорию переноса $\phi_*$. Я предполагаю, что, для класса Артура, если ограничения гомоморфизма

$$\phi : SL(2, \mathbb{C}) \times {}^L H \to L^G,$$

к группе $SL(2, \mathbb{C})$ дана, тогда похожый перенос $\phi_*$ существует. Основное свойство этого переноса будет уравнение (16), но к сожаление в первом описании теории Артуром в [A1] подчеркнулся, с тремя примерам, что образ $\phi_* \pi_H^{\mathrm{st}}$ может быть стабилен но может не всегда быть сумма стабильных следов. Итак стабильность достигана вне эндоскопии.

Не можно будет развивать общую теорию автоморфных представления без этих локальных теорий но я хочу тем не менее описывать возможности. Есть ещё одно локальное свойство, которое нужно вводить. Пусть $H$ и $G$ будут квазирасщепимы над локальном поле $F_v$ и расщепима над неразветвленном расширении $K_v$ этова поля. Тогда можно что локальные $L$-группы

$${}^L H = \hat{H} \rtimes \mathrm{Gal}(K_v/F_v), \qquad {}^L G = \hat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K_v/F_v)$$

где $\hat{H}$ и $\hat{G}$ связны. Пусть $\pi : SL(2, \mathbb{C}) \times {}^L H \to {}^L G$.

Стабильные классы неразветвленных представлений двух групп $H(F)$ и $G(F)$ даны характерами алгебр Гекке, $\mathcal{H}_H$ и $\mathcal{H}_G$. Эти алгебры изоморфны алгебре алгебраических функций над классам Фробениуса $\hat{H}_\Phi = \hat{H} \rtimes \Phi$ и $\hat{G} \rtimes \Phi$ в ${}^L H$ и $L^G$. Пусть $\kappa$ поле вычета поля $F$ и $|\kappa| = q$. Есть в группе $SL(2)$ отличённый сопряженный класс,

$$\{A_q\} = \left\{ \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Этот класс определяет гомоморфизм алгебры функций над сопряженных классах в $SL(2)$,

$$\xi : \mapsto \xi(A_q)$$

Следовательно он определяет гомоморфизм алгебры функций над сопряженных классах в $SL(2, \mathbb{C}) \times \hat{H}_\Phi$ в алгебру функций над сопряженных классах в $\hat{H}_\Phi$. Сверх того, $\phi$ определяет гомоморфизм алгебры функций над сопряженных классах в $\hat{G}_\Phi$ в алгебру функций над сопряженных классах в $SL(2, \mathbb{C}) \times \hat{H}_\Phi$. Итак $\pi$ определяет образование множества унитарных характеров алгебры Гекке $\mathcal{H}_H$ в множестве всех характеров $\mathcal{H}_G$. Другими словами, $\phi$ определяет образование множество неразветвленных умеренных представлений группы $H$ в множество неразветвленных представлений группы $G$. В [A1] Артур предложил, в частности, гипотезу, что эти представления неразветвлены. Мы можем тоже сказать, что $\phi$ определяет гомоморфизм $f^G \to f^H = \phi^* f^G$ алгебры Гекке над $G$ к алгебре Гекке над $H$. Следовательно, по меньше мере, мы можем находить функцию $f^H$ уравнения (17) для элементов $f^G = f_v^G$ алгебры Гекке.

В статье [ST], отображение $f^G \to f^H$ исследовано для $G = SL(2)$ и $H(F) = \{x \in E^\times \mid \mathrm{N}_{E/F}\, x = 1\}$, $[E : F] = 2$. Как другой простой пример, посмотримте произвольную квазирасщепимую группу $G$, тривиальную группу $H = \{1\}$, и главное вложение $\phi : SL(2) \hookrightarrow {}^L G$. Представление $\pi_H$ тривиально и его образ $\pi_G = \phi_* \pi_H$ тоже тривиально. Образ $\phi^* f^G$ функция $f^H$ над множестве с единственним членом, то есть комплексное число, которое равно

$$\int_{G(F)} f^G(g)dg.$$

В аналитической теорией автоморфных представлений тривиальное представление важно, потому что его поведение заслонит поведение других представлений.

Для всех этих теорий первая недостающая доставная часть спектральная теория подходящих преставлений и характеров. Над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в теории Хариш-Чандра, как в хорошо понятой всеми теории преобразования Фурье существено, что не только представленные функции но тоже представляющие функции и распределения определёны ясно и точно условиями роста и дифференциальными уравнениями. Сегодня, как в [HTT] дифференциальная уравнения или $\mathcal{D}$-модули заменяются превратными пучками, которые можно определять тоже над неархимедовских полях. Уже в [ABV] предложение Артура исследовано в этих рамках но в этой книге нет условий роста. Над локальных неархимедовских полях превратные пучки $\ell$-адические пучки.

Эти $\ell$-адические пучки появляются в теории автоморфных представлений, на пример в теории орбитальных интегралов, которую Валдспурже, Ломан, и Нго развивали, но эта теория не над локальном поле но над конечном кольце.

Мне кажется, что чтобы создать локальные теории соответсвующие требованиям теорий автоморфных представлений нужно будет разрабатывать все эти понятия и создавать в этих рамках орудия похожие на орудия Хариш-Чандра. Но я ещё не знаю как творить переходы $\alpha$ и $\beta$!

$$\begin{tikzcd}
\text{умеренные представления над } \mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \text{Класс Артура над } \mathbb{R} \arrow[d, "\gamma"'] \\
\text{умеренные представления над } F_v \arrow[r, "\delta"] & \text{Класс Артура над } F_v
\end{tikzcd}$$

Конечно много трудных вопросов подразумеваны в этом предложении. По моему мнению самое трудное препятствие найти замена для дифференциальных уравнений характеров.

## III. Формула следа и функториальность

Хотя нельзя полностью развивать формулу следа без локальной теории описанной в предшествующой главе, можно описать основные принципы исследования, которое я предвижу и несколько первых заключений этого исследования.

Можно, что полезно начать с теории для $GL(1)$, то есть с известной теории полей классов. Я предпочитаю обьяснить доказательство как оно обьяснённо в докладе Хассе ([Ha]). Как в этой знаменитой теории, в теории, которая предлаганна мной в этих лекции — и уже в теории предлаганна в более простом виде несколько десятилетий тому назад — два вида $L$-функции важны, автоморфные $L$-функции и $L$-функции Артина. Автоморфные $L$-функции показываються в формуле (6) в книге Хассе, ([Ha]).

$$\sum_{\mathfrak{p}\in H} \frac{1}{\mathrm{N}\,\mathfrak{p}^s} = \frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + f(s), \qquad \lim_{s\to 1} f(s) = f(1), \tag{18}$$

и $L$-функции Артина в формуле (7)

$$\sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{\mathrm{N}\,\mathfrak{p}_1^s} = \frac{1}{n}\log\frac{1}{s-1} + g(s), \qquad \lim_{s\to 1} g(s) = g(1). \tag{19}$$

Первая сумма (18) автоморфная сумма, потому что $H$ подгруппа конечного индекса $h$ в группе

$$GL(1,F)\backslash GL(1,\mathbb{A}_F) = F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times = F^\times\backslash I_F.$$

Для суммы (19), расширение Галуа $K/F$ относительной степеней $n$ данно и $\mathfrak{p}_1$ простой идеал поля $F$ которого простые сомножителей относительной степеней 1. Итак сумма (7) связана с алгебраическим уравнением. Я не хочу пользоваться такими рядами в таким же образом как Хассе, но я буду пользоваться подобными свойствами $L$-рядов.

Для нас перечет несколько множестов или решений несколько уравнений и сравнение их исходов будет важнее. Теория полей классов сравнение двух арифметических теорий над глобальном поле $F$. Первая теория теория уравнений с абелевной группой Галуа; вторая теория теория подгрупп конечного индекса в группе $F^\times\backslash I_F$. На пример, пусть $l$ простое число и $F$ такое поле, что все корни единицы $\ell$-ой степеней содержаны в $F$. Мы рассматриваем с одной стороны подгруппы группы $F^\times\backslash I_F$ индекса $\ell$, а с другой стороны раширения Галуа степени $\ell$ поля $F$, которые вце определёны уравнением $X^l - \mu = 0$, $\mu \in F^\times$.

Чтобы доказать, что есть взаимно однозначное отображение между этими множествами, мы рассматриваем раширения с данным кондукторам и подгруппы с тем же кондукторум. Эти два множества конечны. Мы строим сначала вложение первого множества в второе множесто, и потом мы доказываем, что число элементов в двух множествах равно. Нам нужно ожидать подобных трудностей для других групп $G$, но для них все вопросы труднее.

Как мы хочем рассматривать функториальность, центр наших соображений $L$-функции и формула следа. Как было объяснёно в [FLN,ST] лучше предполагать что группа $G$ квасирасщепляема и что её производная группа $G_{\mathrm{der}}$ односвязна. Сверх того, мы пользуемся стабильной формулой следа, хотя её теория ещё не вполне развита.

Можно пользоватся или функциями

$$L(s,\pi,\rho) = L_S(s,\pi^{\mathrm{st}},\rho) = -\prod_v L_v(s,\pi_v,\rho) \tag{20.a}$$

или их логарифмическими производними

$$-\frac{L'}{L}(s,\pi,\rho) = \sum_v \frac{L'_v}{L_v}(s,\pi_v,\rho). \tag{21.a}$$

Здесь $\rho$ представление $L$-группы ${}^LG$. Если множество $S$ точек $v$ конечно мы можем тоже пользоваться

$$L_S(s,\pi,\rho) = \prod_{v\notin S} L_v(s,\pi_v,\rho) \tag{20.b}$$

или

$$-\frac{L'_S}{L_S}(s,\pi,\rho) = -\sum_{v\in S} \frac{L'_v}{L_v}(s,\pi_v,\rho). \tag{21.b}$$

Для первого понимания метода и его прикладывания лучше пользоваться функциями (21), но чтобы решать аналитические трудности лучше пользоваться функциями (20).

С той поры как атоморфные $L$-функции и функториальность ввелись ([Pr]), был ясно что они связаны с общой гипотезой Рамануджана. Мы понимаем сейчас эту связь лучше. По-моему, ясно что нужно доказать гипотезы Рамануджана однременно с функториальностью. Следовательно можно предвидеть доказательство в котором гипотеза Рамануджана подразумеваена. Я такое доказательство предлагал в [BE].

Я напоминаю его источники. Пусть $\pi$ автоморфное представление группы $G$ или, лучше, пусть $\pi^{\mathrm{st}}$ стабильный $L$-пакет, которому $\pi$ принадлежит. Мы предполагаем как в [FLN] и [ST], что группа $G$ квазирасщепима и что его производенная группа $G_{\mathrm{der}}$ односвязна. Можно довести общий случай до этого случая и эти условия нужны чтобы пользоватся формулой следа для наших целей. Пусть $\rho : {}^LG \to GL(n,\mathbb{C})$ гомоморфизм $L$-группы в группу $GL(n)$. Мы осматриваем следствия функториальностей и гипотезы Рамануджана в её общого вида. Пусть $\pi_\rho$ образ пакета $\pi_G^{\mathrm{st}}$. $\pi_\rho$ автоморфное представление группы $GL(n)$, которому соответствующий $L$-пакет состоит из одного элемента. Пусть как в (10) или (11)

$$\varphi = \bigoplus_i \sigma_{l_i} \otimes \psi_{l_i}$$

параметр представление $\pi_\rho$, но здесь можно что $l_i = l_j$, $i \neq j$ и предполежено что представление с параметром $\psi_{l_i}$ параболическо. Тогда

$$\begin{aligned} L_S(s,\pi,\rho) &= L_S(s,\pi_\rho) \\ &= \prod_i \left( L_S(s+\frac{l_i-1}{2},\psi_{l_i}) L_S(s+\frac{l_i-3}{2},\psi_{l_i}) \dots L_S(s+\frac{1-l_i}{2},\psi_{l_i}) \right). \end{aligned}$$

где функция $L_S(s,\pi_\rho)$ $L$-функция для группы $GL(n)$, которую рассмотрели Тамагава и Годемен-Жаке и $L_S(s,\psi_l)$ $L$-функция параболического представления с параметром $\psi_l$. Вспоминайте что мы обсуждаем предположения и не доказанных утверждений.

Функция $L_S(s,\psi_{l_i})$ голоморфна для $\mathrm{Re}\, s > 1$. Следовательно первой полюс функции

$$L_S(s+\frac{l-1}{2}),\psi_l)L_S(s+\frac{l-3}{2},\psi_l)\dots L_S(s+\frac{1-l}{2},\psi_l)$$

в точке

$$s = 1+\frac{1-l}{2}.$$

Мы получаем самой важный пример когда представление $\pi_\rho$ тривиальное представление, так что первой полюс в точке $s = n+1/2$.

Мы конечно не можем рассматривать одного представления, потому что об одном представлении мы сначала ничего не знаем. Однако мы можем пользоваться стабильной формулой следа и рассматриваем сумму

$$\sum_{\pi^{\mathrm{st}}} L_S(s,\pi^{\mathrm{st}},\rho)$$

как в [BE,FLN,ST]. Я не хочу объяснять все технические трудности, которых самые важные деĕтвительно трудны а не разрешёны. Не только я сам но тоже другие математики задумаются над них. Нужно применять стабильную формулу следа к соответсвующой функцие

$$f = f_{s,\rho} = \prod_v f_{v,s,\rho} = \prod_v f_v$$

так, чтобы

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}^{\mathrm{st}}(f) &= \sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu_\pi^{\mathrm{st}}\, \mathrm{tr}\, \pi^{\mathrm{st}}(f)\\ &= \sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu_\pi^{\mathrm{st}} L_S(s,\pi^{\mathrm{st}},\rho) \prod_{v\in S} \mathrm{tr}\, \pi_v^{\mathrm{st}}(f_v).\end{aligned} \tag{22}$$

Стабильные кратности $\mu_\pi^{\mathrm{st}}$ ещё не полно поняты ([LL]). Конечно, почти для всех точек $v$ $f_v$ произведение $c_v f_v^0$, $c_v > 0$ где $f_v^0$ единичный элемент в алгебре Гекке и произведение

$$\prod_{v\notin S} c_v$$

абсолютно сходящоеся.

Применение формулы следа очень трудно. Я не знаю как решать эти трудности и я не ожидаю преодолеть всех трудностей один. Я объясняю в этих лекциях то что я с другами уже предложил. Мы начинаем с формулой (22).

Назначение сомножителя $\prod_{v\in S} \operatorname{tr} \pi^{\mathrm{st}}(f_v)$ отделять одно представление $\pi^{\mathrm{st}}$ от другого. Назначение произведения $\prod_{v\notin S} f_v$ давать функцию $L(s,\pi,\rho)$ не только для одного представления но для всех $\pi$ и следовательно отличать представления $\pi$ соответственно полям этих функции.

Напомните природы этих полей, настолько мы их понимаем согласно гипотезе Рамануджана и гипотеза Сато-Тейта, не только в их первоначальных видах которые знакомы арифметикам но в виде предпочитанном теми математиками которые знакомы с теорией автоморфных представлений. Эти гипотезы выражаются лучше как одно предложение. Пусть $\pi^{\mathrm{st}}$ стабильный класс автоморфных представление группы $G$. Мы уже знакомы с параметром

$$\varphi = \varphi_{\pi^{\mathrm{st}}} : SL(2) \times \mathcal{G}_F \to {}^L G \tag{23}$$

но это параметр ещё не предлагает конкретных возможностей исследования. Нужно рассматривать замыкание в смысле Зариского образа группы $\mathcal{G}_F$. Это замкнание алгебраическая группа ${}^\lambda H$, которая, как мы предполагаем по хорошим причинам, различается только слегка от $L$ группа ${}^L H$ редуктивной алгебраической группы $H$, которую находить одна наших задач. В этой стадии отличие между группами ${}^\lambda H$ и ${}^L H$ неважны. Следовательно, в этой статье встречается почтитолько обозначение ${}^L H$. Из формулы (23) мы выводим вложение

$$\phi : SL(2) \times {}^\lambda H \hookrightarrow {}^L G \tag{24}$$

и тоже из него следующое вложение $\psi : {}^\lambda H \hookrightarrow G$. Хотя мы можем полагать что класс изоморфизма группы $H$ однозначно определён мы не ожидаем что класс вложения $\psi$ однозначно определён. Можно что это связано с вопросами кратностей ([WS]), но эти вопросы до сих пор почти не исследованы. Наша первая задача находить способы определять ${}^\lambda H$ или ${}^L H$. Чтобы упростить объяснении, мы преполагаем, что ${}^\lambda H = {}^L H$. Вторая задача находить представление $\pi_H^{\mathrm{st}}$ группы $H$, которого образ под функториалностей представления $\pi^{\mathrm{st}} = \pi_G^{\mathrm{st}}$. Напоминаю, что соотсвенно предложениям Артура теория стабильностей для неумеренных представлений может быть труднее чем мы сейчас воображаем. Однако представление или $L$-пакет $\pi_H^{\mathrm{st}}$ должен быть умерено.

Рассмотрите функцию $L(s,\pi_G^{\mathrm{st}},\rho)$. Пусть

$$\rho \circ \phi = \sum_i \sigma_{l_i} \otimes \psi_i, \tag{25}$$

где $\sigma_l$ неприводимое представление группы $SL(2)$ размерностей $l$ и

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{n_i} \psi_{i,k}$$

прямая сумма неприводимых представлениях $\psi_{l,k}$ группы ${}^\lambda H$. Тогда теория функториальностей, которую мы стараемся развивать так, что

$$L_S(s,\pi_G^{\mathrm{st}},\rho)=\prod_i\prod_{k=1}^{n_i}\{L_S(s+\frac{l_i-1}{2},\pi_H^{\mathrm{st}},\psi_{i,k})\dots L_S(s+\frac{1-l_i}{2},\pi_H^{\mathrm{st}},\psi_{i,k})\} \tag{26}$$

Если мы рассмотриваем логарифмическую производную этой функции, мы получаем более простее формулу,

$$-\frac{L'_S}{L_S}(s,\pi_G^{\mathrm{st}},\rho)=-\sum_i\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j=0}^{l_i-1}\frac{L'_S}{L_S}(s+\frac{l_i-1-j}{2},\pi_H^{\mathrm{st}},\psi_{i,k}), \tag{27}$$

в которой находятся только функция с полюсами первого порядка.

Как мы будем понимать, для тех целей с большой алгебраической частей, как выведения функториальность из формулы следа, формула (27) лучше, но для первой аналитической обработки формулы следа нужно пользоватся формулой (26). Я ещё не вполне понимаю трудностей возникающих от этого, даже для группы $SL(2)$, но Питр Сарнак и Али Алтуг сейчас объясняют мне эти трудности и их частичное решение для этой группы. Ясно, что эти задачи не тотчас решатся.

Параметр (23) такой, что представление с этим параметром образ умеренного представления $\pi_H^{\mathrm{st}}$ группы $H$ под функториальностей связанной с гомоморфизмом (24). Следовательно согласно с общой гипотезой Рамануджана нет полюса функции $L(s,\pi_H^{\mathrm{st}},\psi)$ в области $\mathrm{Re}\,s>1$. Как мы знаем с теорией Гекке для группой $H=GL(2)$ полюсы на прямой $\mathrm{Re}\,s=1$ зависят от носителя $\pi_H^{\mathrm{st}}$. Пусть представление $\pi=\pi_H^{\mathrm{st}}$ параболическо. Поскольку нам известно есть две возможностей: $\pi$ соответсвует характеру $\chi$ квадратичного раширения поля $F$; $\pi$ не соответсвует такому характеру. В первом случае поля функций $L(s,\pi,\rho)$ зависят от полей функцией $L(s,\chi^n)$, $n\in\mathbb{Z}$, но для других $\pi$ и неприводимого $\rho$ с $\dim\rho>1$ общепринятно, что нет поля на прамой $\mathrm{Re}\,s=1$. Это общий вид гипотезы Сато-Тейта. В убедительной и удовлетворительной теории функториальности нужно ясно опознавать эти полные или, как мы можем сказать, хадронические автоморфные представления группы $G$, для которых все функции $L(s,\pi,\rho)$ с неприводимым и не тривиальным представлением $\rho$ целые функции переменной $s$. Гомоморфизм $\mathcal{G}_F\to{}^LH$ вывесён от определения ${}^\lambda H$ параметр пакета представлений $\pi_H^{\mathrm{st}}$ . Он такой, что замыкание его образа группа ${}^\lambda H$. Следовательно мы ожидаем, что пакет $\pi_H^{\mathrm{st}}$ полен.

Но эти определения ещё кружны. Они зависят от теории $L$-функций и от теории функториалностей, которые нам нужно развивать. Однако эти две теории не могут сами служить единственными орудиями своего развития. Действительно один из целей теории определятьэтот носитель и доказать что он существует. Чтобы развивать ищемую теорию нужны по крайней мере две дополнительных теорий: локальная теория неабеленского гармонического анализа как введена в второй главе и формула следа. Хотя формула следа развита Артуром, нам нужны не только его теория но продолжение той теории, которое нам позволяет развивать общую теорию автоморфных $L$-функций.

Есть почти случаӑная черта стабильной формулы следа, к которой внимание было привлечёно в статье [FLN]. Можно доводить все вопросы в теории автоморфных представлений до вопросов для групп которых производная группа односвязна. Тогда пространство, в смысле алгебраической геометрии, полупростых сопряженных классов аффинное пространство. На пример, если группа $G = SL(2)$ и $b = \lambda_1 + \lambda_2$, сумма собственных значений $g \in G$, аффинный параметр $b$. Для $G = SL(3)$, аффинные параметры $b = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ и $c = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j$. В статьях [FLN, ST] формула следа объединёна с формулой Пуассона. Некоторым математикам эта попытка кажется хваткой за соломнику. Несомненно что этим методам мы не решаем сразу глубоких вопросов. Аналитические и арифметические затрудннения на которые мы будем наталкиватся похожи на те, с которыми мы знакомы из теории чисел но труднее. Мне кажется что нужно быть предусмотрительно но тоже нужно исследовать следствия сочетания двух формул.

Прежде чем мы описаем трудности метода, мы описаем как мы ожидаем применять формулу следа создать функториальность. Нужно признать тотчас что мы ещё в начале этого предприратия. Нужно тоже признать, что я буду пропускать много трудностей формулы следа чтобы объяснять те, которые мне кажутся новыми и не решённами. Для теории формулы следа я отсылаю читателя к статьям Артура, прежде всево к книге [A3]. Здесь формула следа или стабильная формула следа превврачёна в искашение настоящой формулы,

$$\sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu_\pi^{\mathrm{st}} \operatorname{tr} \pi^{\mathrm{st}}(f) + * = \sum_{\gamma^{\mathrm{st}}} \mathrm{Orb}^{\mathrm{st}}(\gamma, f) + * \qquad f = f^G = \prod_v f_v^G, \tag{28}$$

где сумма направо сумма по регулярным стабиьным сопряженным классам. То что находится в суммах $*$ мы будем дать только насколько нужно. Сумма налево сумма по точечному спектру, в котором тривиальное представление важный член.

Для $s >> 0$ мы можем пользоваться как в формуле (21) такой функцией $f = f^G$, что

$$\sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu_\pi^{\mathrm{st}} \operatorname{tr} \pi^{\mathrm{st}}(f) = \sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu_\pi^{\mathrm{st}} \alpha_{\pi^{\mathrm{st}}}^S L_S(s, \pi^{\mathrm{st}}, \rho) \tag{29}$$

или

$$\sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu_\pi^{\mathrm{st}} \operatorname{tr} \pi^{\mathrm{st}}(f) = -\sum_{\pi^{\mathrm{st}}} \mu_\pi^{\mathrm{st}} \beta_{\pi^{\mathrm{st}}}^S \frac{L_S}{L_S'}(s, \pi^{\mathrm{st}}, \rho), \tag{30}$$

где сомножитель в (29)

$$\alpha_{\pi^{\mathrm{st}}}^S = \alpha_{\pi_G^{\mathrm{st}}}^S = \prod_{v \in S} \operatorname{tr} \pi_v^{\mathrm{st}}(f_v)$$

и подобный сомножитель в (30) важны только в конце аргументации, главном образом чтобы отличать одно представление от другого.

Асимптотическое поведение этих выражений мы будем осматривать с формулой следа. Это поведение может быть асимптотисче поведение суммы (29) или (30) как функции переменной $s$ когда $\mathrm{Re}\, s \searrow 1$, но нужно будет рассматривать поведение этих функций в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geq 1$. Сначала, мы знаем только, что функции определены в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s >> 1$. Поведение функтсии свазано с асимпототическим поведением коеффициентов членов $1/n^s$ в ряде дирихле, котором эти функции определены. Эти коеффициенты тоже суммы по стабильным автоморфным представлениям, которые мы иследоваем с помощью формулы следа.

Мы что ожидаем? Чтобы предвидеть это, нужно пользоваться гипотезой Рамануджана. Согласно этой гипотезе и формуле (26) и (27) полюсы $L$-функсии $L(s, \pi, \rho)$ в полуплоскости $s \geq 1$ в точках $\mathrm{Re}\, s = 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$. Точнее, гипотеза Рамануджана свазана с функториальность, которую мы стараемся доказать. Оказывается, что многие свойства автоморфных $L$-функций $L(s, \pi, \rho)$ следствия функториальность. Кажется однако, что гипотеза Римана, ни классическая гипотеза ни общая гипотеза, не доступнее будет с помосчей функториалностей. Мнимая часть полюсов $s$ по большей части произвольна потому что центральной характер произволен. На пример, для группы $G = GL(1)$ пусть $\pi(x) = \mathrm{N}\, x^{it} = |x|^{it}$ и $\rho(z) = z$, $z \in {}^L G = GL(1, \mathbb{C})$. Тогда $L$-функциа $L(s, \pi, \rho) = \zeta_F(s - it)$.

На тех полюсах $s$, которые находятся крайне справа, вычет функции $L'(s)/L(s)$ на точке $s$ несомненно равен вычету функции $L'_S(s)/L_S(s)$, но такое предположение не нужно. Пусть $\sigma = \phi \,|\, SL(2)$ и $\psi = \phi \,|\, {}^\lambda H$. Множество всех возможных вложений $\sigma : SL(2) \hookrightarrow {}^L G$ в (24) с точностью до изиморфизма конечно. Следовательно для данного $\rho$ множество всех чисел $l_i$ тоже конечно. Однако множество всех $\psi$ может быть как в [ST] бесконечно. Пусть $l$ самое большое число в множестве $\{l_1, l_2, \ldots\}$. Тогда первые полюсы с которыми мы встретимся если мы двигаемся справа на лево находятся на прамой $\mathrm{Re}\, s = 1 + (l-1)/2$ и вычет выражения (27) на точке $s = 1 + (l-1)/2 + it$ равен сумме

$$\sum_{\sigma} \sum_{\{i \,|\, l_i = l\}} \sum_{k=1}^{n_1} \mathrm{res}(-\frac{L'}{L}; 1 + it, \pi_H^{\mathrm{st}}, \psi_{i,k}). \tag{31}$$

Но сумма (31) неуклюжа. Лучше пользоватся не формулой (25), но отображением $\phi^*$ из второй главы. Чтобы пользоватся им с действенностей, мы замечаем, что согласно основному предположению докасательство, которого начала мы стараемся строить, есть то, что для каждого автоморфного представления $\pi^{\mathrm{st}} = \pi_G^{\mathrm{st}}$ существуют отображение (24) и полное (хадроническое) предложение $\pi_H^{\mathrm{st}}$ которого образ под $\phi$ представление $\pi^{\mathrm{st}}$. Определение хадронического представления такое, что характерное свойство хадронического представление $\pi_G^{\mathrm{st}}$ такое, что $L(s, \pi_G^{\mathrm{st}}, \rho)$ голоморфно в области $\mathrm{Re}\, s > 1$ и на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$, $s \neq 1$, и что порядок полюса в точке $s = 1$ кратность тривиального представления в $\rho$. Мы конечно стараем строить индуктивное докасательство среди которого индукционных предположений это существование находится.

Как мы уже заметили, если $\pi_G^{\mathrm{st}}$ дано, пара $(\phi, \pi_H^{\mathrm{st}})$ не однозначна, но мы рассчитиваем, что группа ${}^{\lambda}H$ и что ограничение $\phi|SL(2,\mathbb{C})$ однозначно и что класс изоморфизма группы ${}^{\lambda}H$ тоже однозначен. К сожелению, если мы не требуем чтобы $\pi_H^{\mathrm{st}}$ хадроническое, единственность класса изоморфизма ${}^{\lambda}H$ пропадает. Следовательно затруднения с пересчетом введуться. Эти затруднения я не хочу объяснять здесь, но я даю несколько примеров.

Мы встречаемся с ними уже для группы $G = SL(2)$ ([TS]) или $GL(2)$. Группы $\mathcal{G}_F$, мы ещё не можем определять, но глобальная группа Вейла $W_F$ её фактор-группа. Мы знакомы с примерами автоморфных представлений $\pi_G^{\mathrm{st}}$ соответсвующых гомоморфизмам $\psi$ группы $W_F$ в группе ${}^{L}G = GL(2)$, но ${}^{L}G$ тоже $GL(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(L/F)$, где $L/F$ расширение Галуа. Если образ гомоморфизма $\psi$ конечен, тогда он определен гомоморфизмом $\psi : \mathrm{Gal}(K/F) \to {}^{L}G$, $F \subset L \subset K$. Но $\mathrm{Gal}(K/F) = {}^{L}H$, $H = \{1\}$. Есть единственное автоморфное представление этой группы, тривиальное представление $\pi_H$, и это представление хадроническо. Если $\phi : s \times w \to \psi(w) = \psi(w) \times \varpi$, где $\varpi$ образ $w$ в группе $\mathrm{Gal}(K/F)$, тогда $\phi_* \pi_H = \pi_G^{\mathrm{st}}$. Если $E/F$ квадратичное расширение поля $F$, можно тоже, что $\psi$ разложиться

$$W_F \to W_{E/F} \to GL(2),$$

где вторая стрелка $\psi_{E/F} : W_{E/F} \to GL(2)$ и

$$\psi_{E/F} = \mathrm{Ind}_F^E \chi_E, \qquad \chi_E : I_E \to \mathbb{C}^{\times}.$$

Группа $I_E$ группа классов иделей. Можно тоже, что $\psi$ определено двумя различными полями или двумя различными характерами единственного поля или что такое $\psi$ тоже определено конечными расширениями Галуа. Эта многочисленность не обещает создавать трудностей в [ST] и я не ожидаю что она будет создавать трудностей для общой группы.

Мы прелогаем, что теория второй главой существует и мы возвращаемся к суммам (29) и (30), но скорее чем уравнениям (25), мы пользуемся отображениями $\phi^*$. Пусть $f^H = \prod_v f^H = \phi^* f_v^G = \prod_v \phi^* f_v^G$. Вне множества $S$, $f_v^G$ в алгебре Гекке и $f_v^H$ тоже в алгебре Гекке, как мы объяснили в второй главе. Внутри $S$ существование этой функции предположительно, но мы продолжаем исследовать следствия этого предположения.

Выражение $\mathrm{tr}\,\pi^{\mathrm{st}}(f) = \mathrm{tr}\,\pi_G^{\mathrm{st}}(f^G)$ которое находится в (29) и (30) равно следу $\mathrm{tr}\,\pi_H^{\mathrm{st}}(f^H)$. Мы умножаем выраженеи умножителем $\mu_{\pi_H}^{\mathrm{st}}$ и получаем

$$-\mu_{\pi_H}^{\mathrm{st}} \beta_{\pi_H^{\mathrm{st}}}^S \frac{L_S'}{L_S}(s, \pi_H, \rho \circ \psi) \tag{32}$$

Это проход от группы $G$ к группе $H$ можен только для выразения (30) и не для выражения (29) потому что (30) линеное выражение относительно но (29) мултипликативное. Значит что мултипликативное исследование функций $L(s, \pi, \rho) =$

$\prod_v L_v(s, \pi_v, \rho)$ не достаточно, но нужно более трудное аддитивное исследование функций

$$-\frac{L'}{L}(s, \pi, \rho) = -\sum_v \frac{L'_v}{L_v}(s, \pi_v, \rho),$$

как у закона простых чисел. Итак, кажется что функториальность как трудный арифметический вопрос, так и трудный аналитический вопрос. Однако, кажется тоже, чтобы решить трудные аналитические вопросы нужно сперва решить более лёгкие вопросы

Сумма (30) выражается как

$$\Sigma_G = \sum_{\pi_G^{\mathrm{st}}} \mu_G^{\mathrm{st}} \operatorname{tr} \pi_G^{\mathrm{st}}(f^G) = \sum_{\phi} \sum_{\pi_H^{\mathrm{st}}} \mu_H^{\mathrm{st}} \operatorname{tr} \pi_H^{\mathrm{st}}(f^H), \qquad \phi : SL(2) \times {}^{\lambda}H \to {}^{L}G. \tag{33}$$

Налево есть несколько вопросов. Сумма по $\phi$ сумма с точностью до эквивалентностей. На пример, можно что для данного $H$ и данного $\phi$, два представления $\pi_H^{\mathrm{st}}$ дают самое $\pi_G^{\mathrm{st}}$. Тогда умножитель нужен в знаменателе кратностей $\mu_H^{\mathrm{st}}$. Поскольку этот умножитель независимые от $\pi_H^{\mathrm{st}}$, мы можем заменить $\mu_H^{\mathrm{st}}$ частным $\mu_H^{\mathrm{st}}/\mu_\phi$. На пример, если $G = GL(2)$ и $H = \operatorname{Res}_{E/F} GL(1)$ группа полученная ограничением скаларов и

$$\phi : {}^{L}H = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \rtimes \operatorname{Gal}(E/F)$$

так, что

$$\phi : \begin{cases} (z_1, z_2) \rtimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, \\ (1,1) \rtimes \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{34}$$

тогда характеры $\chi$ и $\chi^{-1}$ группы $H(F) = E^\times$ дают такое же $\pi_G^{\mathrm{st}}$ и $\mu_\phi = 2$. Мы ещё не понимаем стабильной кратностей, хотя есть простой пример этого понятия в [LL]. Тем не менее вероятно, что стабильное кратность представления $\pi_G$ ет $\pi_H$ связаны и что отношение между ними тоже нужно для формулы (33).

В этой формуле направо мы требобаем что параметр представления $\pi_H^{\mathrm{st}}$ хадронический, то есть отображение $\mathcal{G}_F \to {}^{L}H = {}^{\lambda}H$ хадроническое. Иначе говоря, замыкание в смысле Зариски его образа группа ${}^{L}H$. С этом предположением, группа ${}^{L}H$ и группа $H$ должны быть определёны. Однако, отображение $\phi$ и стабильное представление $\pi_H^{\mathrm{st}}$ не полно определёны. Я предполагаю, что эта неопределённость испрявлены кратностями.

Как другой пример, пусть

$$\Gamma = \{\pm 1, \pm r, \pm s, \pm t \,|\, r^2 = s^2 = t^2 = -1,\, rs = -st\}$$

кватернарная группа. Есть представление $\psi_\Gamma : \Gamma \to GL(2,\mathbb{C})$,

$$\psi_\Gamma : \pm 1 \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad r \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $H = \{1\}$, тогда ${}^L H = \Gamma$ возможный выбор как $L$-группа группы $H$. Пусть $K/F$ такое расширение Галуа, что $\mathrm{Gal}(K/F) = \Gamma$. Тогда $[K : F] = 8$ и поле $K$ содержает три квадратических расширения $E$, поля инвариантов отображений $r$, $s$ и $t$. Для каждого есть такой характер $\chi$, которого порядок 4, что представление группы Вейла $\mathrm{Ind}_E^F \chi$ еквивалентно $\Gamma$. В сумме (33) мы выбираем $H = \{1\}$ и $\phi = \psi_\Gamma$, чтобы определять соответственное представление $\pi_G^{\mathrm{st}}$.

Наша цель создать теории автоморфных представлений для всех групп $G$ над поле $F$, то есть доказать функториальность и гипотезу Рамануджана. Мы можем пользовател индукцией. То есть, мы можем предполагать, что мы понимаем $L$-функции всех групп $H$, которых размерность меньше чем $\dim G$. В частности мы можем предполагать, что для них гипотеза Рамануджана правильна, то есть, для тех представлений $\pi_H = \prod \pi_v$ которые такие, что первой сомножитель $\phi|SL(2,\mathbb{C})$ параметра $\phi$ тривиален, каждый сомножитель $\pi_v$ умерен.

В сумме $\Sigma_G$ налево в уравнении (33) есть, согласно на нашое предложение, $\phi = \sigma \times \psi$ для которых $\sigma$ нетривиально и $\phi = \psi$. То есть, налево сумма по полномы дискретному спектре. Пользуясь формулой следа мы можем находит формулу для её. Хотя не будет лёгко применять эту формулу, нужно надеяться что с течением времени будет можно. Направо, для каждого данного отображения $\phi$ сумма по группам $H$ и по отображением $\psi$ для которых представление $\pi_H^{\mathrm{st}}$ хадроническое. Итак сумма направо пишется

$$\sum_\phi \sum_H \Sigma'_H = \Sigma'_G + \sum_{\dim H < \dim G} \Sigma'_H$$

где

$$\Sigma'_H = \Sigma'_H(f^H) = \sum_{\pi_H^{\mathrm{st}}} \mu_H^{\mathrm{st}} \operatorname{tr} \pi_H^{\mathrm{st}}(f^H), \qquad \pi_H^{\mathrm{st}} \text{ хадроническо} \tag{35}$$

Как индукционная гипотеза мы можем предполагем, что для кашдой группы $H$, такой что $\dim H < \dim G$ есть тоже формула для суммы $\Sigma'_H$ по хадроническим представлением $\pi_H^{\mathrm{st}}$. Следователь есть тоже формула для

$$\Sigma'_G = \Sigma_G - \sum_{\{\phi, H\} \mid \dim H < \dim G} \Sigma'_H. \tag{36}$$

Можно что формула (36) точно в этом виде не полезно. Но есть по крайне мере формула, которую мы можем прикладывать. Соответсвенно формуле (30),

$$\Sigma'_G = -\sum_{\pi_G^{\mathrm{st}}} \mu_{\pi_G}^{\mathrm{st}} \beta_{\pi_G^{\mathrm{st}}}^S \frac{L'_S}{L_S}(s, \pi_G^{\mathrm{st}}, \rho).$$

Для исследования этого выражение в области $\operatorname{Re} s1$, вопрос не сходимость суммы. Можно преполагать что она конечна. Вопрос поведение рядов Дирихле,

$$\frac{L'_S}{L_S}(s, \pi_G^{\mathrm{st}}, \rho).$$

Так как эти ряды аддитивные по представлениям $\rho$, можно предполагать что $\rho$ неприводимо. Гипотеза Рамануджана основно еквивалентна заявлению, что для всех параметр $\phi = \psi : {}^\lambda H \to G$ и хадронического $\pi_H$, функция $L(s, \pi, \rho)$ голоморфна в области $\operatorname{Re} s > 1$. В частности, что это так если $H = G$. Индуктивная гипотеза еквивалентна заявлениые, что для тех $f^G$ которые являются в (30), выражение $\Sigma'_G(f^G)$ голоморфно в области $\operatorname{Re} s > 1$. Из функториальностей мы выводим, что ест полюс в точке $s = 1$ только если неприводимое представление $\rho$ тривиально. Конечно, если $\rho$ тривиально $L(s, \pi, \rho) = \zeta_F(s)$. Чтобы доказать гипотезу Рамануджана достаточно доказать эти свойства функций $L_S(s, \pi_G^{\mathrm{st}}, \rho)$ как следствия формулы для (36) вывешёна из формулы следа и индуктивной гипотезы.

Можно что представление $\rho$ неприводимо и нетривиаль, но что $\rho \circ \phi|^\lambda H$ приводимо с тривиальными компонентами. Тогда есть полюсы функции

$$\frac{L'}{L}(s, \pi^{\mathrm{st}}, H)$$

в области $\operatorname{Re} s > 0$ или в точке $s = 1$. Чтобы они не являются как полюсы функции $\Sigma'_G = \Sigma'_G(s)$, нужно что оне являются тоже как полюсу функции $\Sigma_G$. Но благодаря присутствию произвольных сомножителей $\prod_{v \in S} f_v^G$, это можно только если $\phi_* \pi_H^{\mathrm{st}} = \pi_G^{\mathrm{st}}$ находится в автоморфном спектре группы $G$. Мне кажется, что нам можно будет так доказать функториальность, но только после много усилий. Я опять подчёркиваю, что свойства образа $\phi_* \pi_H^{\mathrm{st}}$ не установены и не ясны.

Эти общие размышления ещё преждевремены, но без их трудно знать на какие определённые вопросы набрасываться. По моему, лучше начинать с локальными задачами второй главы и глобальными задачами для $SL(2)$ или $GL(2)$. Я уже утверждал, что единственный способ, который я знаю, чтобы развивать формулу следа как орудие для исследования автоморфных представлений, формула Пуассона. Я буду описывать общие принципы, как они объяснёны в [FLN,TS], но трудными аналитическими вопросами, которые оставаются сейчас в более молодых, более способных руках, я не буду заниматься

Главная часть формула следы сумма по стабильным регуларным полупростым сопряженным классам группы $G(F)$. Как было объяснано в [FLN] можно и нужно предполагать что коммутаторная группа $G_{\mathrm{der}}$ односвязна. Сумма по стабильным полупростым сопряженным классам группа $G_{\mathrm{der}}$ сумма по аффинному пространству и сумма по стабильным полупростым сопряженным классам группа $G$ двойная сумма. Внешная сумма на группе $G/G_{\mathrm{der}}$ и внутренная сумма на закрученному виду этого аффинного пространства. Вдаваться здесь в подробности этой суммы неполезно. Лучше предлагать, что $G = SL(n)$ или $GL(n)$.

Характеристический многочлен элемента $g \in SL(n)$

$$X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}X + 1,$$

и коэффициенты $a_1, \ldots, a_{n-1}$ произвольны. Следовательно очевидно, что множество стабильных регуларных полупростых сопряженных классов аффинное пространство. Характеристический многочлен элемента $g \in GL(n)$

$$X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}X + a_n, \qquad a_n \neq 0,$$

и $a_n$ образ элемента $g$ в $G/G_{\mathrm{der}} = GL(1)$.

В этой статье [FLN] мы назвали множество полупростых сопряженных классов базой Штейнберга-Гитчина. Это пространство расслоенно по пространству $G/G_{\mathrm{der}}$ и слои аффинние пространства. Мы пользуемся формулой Пуассона, чтобы исследовать суммы по слоям. Лучше и легче предполагать что $G = G_{\mathrm{der}}$. Иначе подробности щепетильны. Если $G = G_{\mathrm{der}}$ база не только аффинное пространство но векторное пространство с интегральной структурой почти всюду. Быть вполне аккуратно в отношение к этой структуре не очень полезно сейчас потому, что даже для самой простой группы, $SL(2)$, для которой структура векторного пространства или структура над $\mathbb{Z}$ ясны, важные аналитические вопросы ещё не осветёны.

Правильно, что сумма не по стабильным регуларным полупростым сопряженным классам группы но по стабильным регуларным эллиптическим полупростым сопряженным классам. Отсутствие других классов мешало нам пользоваться сразу формулой Пуассона. Я напоминаю как формула следа переработана была в [FLN,ST], но напоминаю тоже, что переработа была предварительна. Мне самому она кажется убедительна, но есть ещё много вопросов без ответов. Члены суммы по стабильным регуларным полупростым эллиптисческим сопряженным классам ([FLN, (3.17)])

$$\mathrm{meas}_{\mathrm{prod}}(T^+_\gamma(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)) \int_{T_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g) d\bar{g} \tag{37}$$

В статье авторы попытались пользоватся последовательной нотацией для мер, необременной наследованной теоретической предубеждением. Я буду продолжать пользоватся этой нотацией. Пользуясь несколькими когомолическими теоремами Коттвитза, мы перепишем формулу (37) и собираем члены, чтобы получать произведение постоянной величины $m_G\rho_G\tau(G)$, которая зависит только от группы $G$, и суммы по стабильным эллиптическим классам $\gamma$ стабильных орбитальных интегралов,

$$\sum_{\gamma_{\mathrm{st}}} \frac{\rho_T}{\rho_G} \prod_v \mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v), \tag{38}$$

где

$$\frac{\rho_T}{\rho_G} = \lim_{s \searrow 1} L(s, \sigma_{T/G}). \tag{39}$$

Подробности находятся в [FLN]. Важно что $L(s, \sigma_{T/G})$ бесконечное произведение $\prod_v L_v(s, \sigma_{T/G})$, которое мы, благодаря замечанию Ж. Геца, заменяем конечним произведением, $\prod_{v \in S'} L_v(s, \sigma_{T/G})$, $S \subset S'$, $S'$ конечно, чтобы пользоваться формулой Пуассона. Нужно тоже заменить сумму по всем классам $\gamma$ суммой по тем классам, которых параметры в аффинском пространстве целы почти всюду, на пример вне множества $S' \supset S$. В доказательстве, $S'$ растёт всё больше, поглащая все места $v$.

Это можно потому, что для данной функции $f = \prod_v f_v$, которой носитель компактен и для $\gamma \in G(F)$, $\gamma$ регулярное, $\gamma \to \prod_v \mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v) \neq 0$, только если образ $\gamma$ в базе Штейнберга-Гитчина целой вне множества $S' = S'(f)$.

Если тор $T$ не эллиптический, тогда предел в (39) не существует, но конечно произведение

$$\prod_{v \in S'} L_v(s, \sigma_{T/G})$$

существует. Следовательно мы можем прибавить эти члены к сумме (38), но когда мы перейдём к пределому над $S'$, которое подглотит по переход к пределу все точки $v$, нельзя забыть о этой бесконечностей.

Формула Пуассона справедлива для такой дискретной подгруппы $A_1$ группы $A_2$ и билинейной характера $\xi(x, y)$ $A_2$, что $A_1 \backslash A_2$ компактно и $A_1 \subset A_2$ самодвойствено относительно к $\chi$. Это основное свойство группы

$$A_1 = F \cap \prod_{v \in S'} F_v \prod_{v \notin S'} \mathcal{O}_v$$

в группе

$$A_2 = \prod_{v \in S'} F_v \prod_{v \notin S'} \mathcal{O}_v$$

и $\xi(x, y) = \chi(xy)$, где аделический характер $\chi$ такой, что $\chi(xy) = 1$ для всех $y \in F$ если и только если $x \in F$.

Пусть $V$ векторное пространство над $F$ с внутренным произведение $x \cdot y$. Тогда формула Пуассон справедлива для

$$\mathbb{V}_1 = V \otimes A_1, \qquad \mathbb{V}_2 = V \otimes A_2, \qquad \xi(x, y) = \chi(x \cdot y).$$

Можно, что лучше различать пространство $V$ от его дуального пространства $\hat{V}$ и $\hat{\mathbb{V}}_i$ от $\mathbb{V}_i$. Тогда внутренное произведение $x \cdot y$ не нужно и для базы Штейнберга-Гитчина такого внутренного произведения нет.

Для формулы Пуассона нужно тоже функция которая носитель находится в $A_2$ и котораы независаммая от координат вне множества $S'$. Хота для данной функции $f_v$, $\mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v)$ функция на локальной базе Штейнберга-Гитчина, мы не можем пользоваться функцией

$$\prod_{v \in S'} L_v(s, \sigma_{T/G}) \, \mathrm{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v)$$

потому, что её особенности слишком сильны. Нужно, как в [FLN], пользоваться

$$\theta_{S'}(a;s)) = \prod_{v\in S'} L_v(s,\sigma_{T/G})|\Delta_v(\gamma_{\mathrm{st}})| \operatorname{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v), \tag{40}$$

где функция $\Delta$ определена была в предложении 3.29 статьи [FLN] и где $a = \prod a_v$, которое находится в базе Штейнберга-Гитчина, произведение локальных образов классов $\gamma_{\mathrm{st}}$. Для регуларного $\gamma \in G(F)$, $\prod_v \Delta_v(\gamma) = 1$ потому, что $\gamma$ регуларно и мы можем преполагать что множество $S'$ такое, что $|\Delta_v(\gamma_{\mathrm{st}})| = 1$, $v \notin S'$. У функций

$$\theta_v(a_v;s)) = \theta_v(\gamma_{\mathrm{st}}) = L_v(s,\sigma_{T/G})|\Delta_v(\gamma_{\mathrm{st}})| \operatorname{Orb}(\gamma_{\mathrm{st}}, f_v)$$

есть тоже особенностей, но эти особенности довольно слабы, что можно прикладывать формулу Пуассона. Вернее, в статье [ST] проверено, что можно прикладывать формулу Пуассона если $G = SL(2)$. Нужно проверить это бообще. Хотя это не может быть очень трудно, оно очень интересный вопрос.

Пусть $\mathfrak{A}$ база Штейнберга-Гитчина, $\mathfrak{A}_v$ её локальный вид, и $\mathfrak{A}_{S'} = \prod_{v\in S'} \mathfrak{A}_v$. В формуле Пуассона, мы рассматриваем суммы

$$\sum_{a\in\mathfrak{A}_{S'}} \theta_{S'}(a:s) \tag{41}$$

и

$$\sum_{b\in\hat{\mathfrak{A}}_{S'}} \hat{\theta}_{S'}(b;s). \tag{42}$$

База Штейнберга-Гитчина ввестилась в §3.3 статьи [FLN] с тот же самыми координатами. Этими координатами мы определяем ввестилась сопряжное векторное пространство.

Много вопросов сопровождающих пользование формулу Пуассона ещё не разрешены.

(i) Носитель функций $\theta_{S'}$ компактный но можно что есть особые точки функции. Нужно доказать что тем не менее сумма (42) сходится. Пока есть такое доказательство только для группы $SL(2)$, но вопрос несомненно интересен и доступен.

(ii) Функции $\theta_v(a;s)$ содержает параметр $s > 1$. Нужно перейи к пределу $s = 1$. Но чтобы прикладывать формулу Пуассона, мы прибавляем нееллиптические члены, которые нужно тоже вычитать. Для их этот предел не существует. Сопровождающие трудности частично разрешены в разностых как (36). Для группы $SL(2)$, это объяснено в статье [ST]. Тем не менее, нужно быть внимательны!

(iii) Первая трудность с исследованиям аналитического поведения $L(s,\pi,\rho)$ или $L'/L(s,\pi,\rho)$ ест та, что первой полюс с которам мы встречимся, когда $s$ передвинует справо налево данный тривиальным представлениям и, поэтому, не очень интересен. Тем не менее его поведение заслоняет поведение всех других представлений. Последовательно нужно понимать его вклад и устранять его. В статье [FLN] доказано, хотя доказательство несколько поспешно, что его вклад первой член суммы (42).

$$\lim_{s\searrow 1}\lim_{S'\to\infty}\theta'_S(0;s).$$

Будет очень интересно, понимать где в двоственной сумме Пуассона находятся вклады других неумеренных представлений. Мне кажется, что этот вопрос тоже, хотя сейчас нет вообще доступен, несомненно доступен для несколько групп.

(iv) Самой важной вопрос прикладывание формулы следа и формулы Пуассона к функциями $f$ в выражениях (29) и (30). Кажется что для функций (30) вопрос труднее, чем для функций (29), но обе вопросы очень трудны аналитические вопросы. Функция $f$ безконечниые ряды Дирихле,

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n^s},\qquad f=f_\rho,\qquad f_n=f_{n,\rho}.$$

Носитель функции $f_n$ вырастает с $n$. Для группы $SL(2)$ этот вопрос исследовается сейчас Али Алтугам и я не хочу объяснять его выводы преждевременно.

(v) Нужно не только понимать асимптотическое поведение выражений (29) и (30) но нужно тоже знать с чем их сравнивать. Как я объяснил в статье СТ, по-моему нам нужно будет исследования по теории уравнений. Но интерес этих исследований до сих пор не оценен многими. В этом отношении статья [JY], на которую Антоний Пулидо обратил моё внимание, мне кажется полезна.

★★★ В следующой главе я хотел находит выражение геометрической теории для группы $GL(1)$ в смыщле первой главы, но я ещё не успел. То, что я до сих пор написал, не совершенно правдо. Эта работа продолжается!

## IV. Геометрическая теория для группы $GL(1)$

Я себя никогда не занимаюсь геометрической теорией, но мне кажется, что у неё есть много сторон, которые привлекательны не только, может быть не преимущественно, из-за их отношений к арифметической теории но из-за их отношений к классическам анализу и геометрии и к математической физике. Хотя теория для группы $GL(1)$ обыкновенно читана знатой, я хочу пересматривать её, чтобы заверяться в своём понимании всех утверждении, на пример тех из статей [CFT,CLG].

Пусть $X$ полная алгебраическия кривая над поле $\mathbb{C}$. Для меня в этои записи, линейное расслоение модифицирование тривиального расслоении $X\times\mathbb{C}$. Такое модифицирование $\mathcal{L}_d$ определено дивизорам $\delta$ на $X$,

$$\delta = \sum_{x \in X} d_x x, \qquad x \in X, \tag{43}$$

где $d_x \in \mathbb{Z}$ и $d_x = 0$ почти для всех $x$. Алгебраическая функция $f$ на $X$ голоморфное сечение расслоения $\mathcal{L}_\delta$ если порядок $f$ в каждой точке $x$ больше или равно $d_x$. Локальное сечение определёно таком же образом. Если два расслоения, $\mathcal{L}_\delta$ и $\mathcal{L}_{\delta'}$, изоморфны, тогда есть такая алгебраическая функция $h$ над $X$ что

$$\delta' = \delta + (h) \tag{44}$$

и отображение $f \mapsto f' = hf$ отображет сечение $f$ расслоения $\mathcal{L}_\delta$ к сечению $f'$ расслоения $\mathcal{L}_{\delta'}$. Мы можем тоже пользоваться уравнением (44) локально с $\delta \leq 0$, чтобы представлять сечения расслоения $\mathcal{L}_{\delta'}$ как $hf$, где $f$ сечение тривиального расслоения, другими словами, функция.

В геометрической теории глобальное поле $F$, поле голоморфных функции над $X$ и локальное поле в точке $x$, поле формальных рядов Лорана

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n, \tag{45}$$

с конечной главной частью. Параметр $z$ локальная координата в точке $x$. Если $a_k \neq 0$, $\mathrm{ord}_x(f) = k$ порядок функции или ряда $f$ в точке $x$. Если $k \leq 0$, порядок полюса $-k$. Кольцо

$$\mathcal{O}_x = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\}$$

и

$$\mathcal{O}_x^\times = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,|\, a_0 \neq 0\}.$$

Кольцо аделей,

$$\mathbb{A}_F = \mathbb{A}_X = \{\prod_{x \in X} a_x \,|\, a_x \in \mathcal{O}_x \text{ почти для всех } x.\}$$

Наконец грыппа иделей

$$\mathbb{I}_F = \mathbb{I}_X = \mathbb{A}_X^\times = \{\prod_{x \in X} a_x \,|\, a_x \neq 0 \text{ и } a_x \in \mathcal{O}_x^\times \text{ почти для всех } x.\}$$

и группа классов иделей

$$I_F = F^\times \backslash \mathbb{I}_F = F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times.$$

Характер $\chi$ группы $I_F$ неприрывный, если есть такой положительный делитель $\delta = \sum d_x x$, что $\chi$ тривиальнй на множестве

$$\{a = \prod_x a_x \mid \mathrm{ord}_x(a_x - 1) \geq d_x \ \forall \ x\}.$$

Взаимность для группы $GL(1)$ другое, математическо поучительное описание группы характеров. Для теории функториальности нужно рассматривать не единственную группу, как в этои главе, но множество всех редуктивных алгебраических групп $G$. Следовательно мы не рассматриваем функториальностей в этой главе, которая, глабным образом, просмотр знакомых понятий. Мне кажется, что для группы $GL(1)$ взаимность следствие классической теории дифференциалов Абеля первого, второго и третьего рода и формулы приписываенной Вейлу, котурую мы объясним, но пока я не успел найти удовлетворяющей теоремы. Читая статьи, Э. Френкела, я думал, что взаимностьможет выражатся с дифферентиалами (или перенесениями) с особонностями. Хотя это кажется мне перспективным, эстьчто-то, которого я ещё не понимаю.

Если $f$ алгебраическая функция над $X$ или член поля $F_x$, тогда $f$ определит локальное сечение расслоения $\mathcal{L}_\delta$ в $x$. Но можно, что этого сечения есть полюс в точке $x$. Порядок $f$ как сечение расслоения $\mathcal{L}_\delta$ равен $\mathrm{ord}_x(f) - d_x$. Следовательно свойствы регуларности сечения $f$ зависят от $\delta$.

Дифферентиальное уравнение определаяющое перенесение тривиального расслоения

$$\frac{df}{dz} = A(z)f, \tag{46}$$

где $z$ локальная координата в точке $x = x(0)$ и $f(0)$ произвольно., или

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dz} = A(z), \qquad \frac{df}{f} = A(z)dz, \qquad f(z) = \exp(\int_0^z A(w)dw)f(0).$$

Дифференциалная 1-форма перенесения $\omega = A(z)dz$.

Если $f' = hf$ локальное сечение расслоения $\mathcal{L}_\delta$, значит дивизор $(h)$ равен дивизору $\delta$ в окрестности точки $x$, тогда

$$\frac{1}{f'}\frac{df'}{dz} = A(z) + \frac{1}{h}\frac{dh}{dz} = A'(z), \qquad \frac{df'}{f'} = A(z)dz + \frac{dh}{h} = A'(z)dz. \tag{47}$$

Поэтому свойствы регуларности перенесения или дифференциала Абеля (47) тоже зависят от $\delta$. Have to say that you prefer not to work this way.

Наше задание находить геометрическо привлекательное описание группы характеров группы $I_F$. Пусть $\mathcal{O}_x^+ = \{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\}$. Тогда

$$F_x^\times / \mathcal{O}_x^+ \simeq \{az^n \mid a \in \mathbb{C}^\times, \, n \in \mathbb{Z}\}$$

и есть такой цепь

$$\{1\} \subset \mathcal{O}_x^+ \subset \mathcal{O}_x^\times \subset \mathcal{F}_x^\times,$$

что

$$\mathcal{O}_x^+ \backslash \mathcal{O}_x^\times \simeq \mathbb{C}^\times, \qquad \mathcal{O}_x^\times \backslash F_x^\times \simeq \mathbb{Z}.$$

Быбор локального параметра $z$ давает изоморфизм

$$\mathcal{O}_x^+ \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{Z}.$$

Быбор другого параметра $w = \eta z$ давает другой изоморфизм и различие

$$\begin{gathered}\alpha(z) \times b \times n \to \alpha'(w) \times b' \times n,\\ \alpha(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i, \quad \alpha'(w) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\eta^i} w^i, \quad b' = \frac{b}{\eta_n}.\end{gathered}$$

Пусть $\Omega_x$ аддитивная группа локальных дифференциалов $\omega = \omega_x = A(z)dz$ в точке $x$, которых вычет в этом точке находится в $\mathbb{Z}$. Итак, $\operatorname{res}_x \omega \in \mathbb{Z}$.

Есть частичное спаривание $(f, \omega) \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}_x^\times$, $\omega \in \Omega_x$. Пусть

$$\begin{gathered}f = \alpha_0 \exp(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots),\\ \omega = \frac{\beta_{-k+1}}{z^k} + \frac{\beta_{-k+2}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{\beta_{-1}}{z^2} + \frac{\beta_0}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k,\end{gathered} \tag{48}$$

тогда

$$\begin{gathered}\operatorname{res}(\omega \ln f) = \beta_0 \ln \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \beta_i,\\ (f, \omega) = \exp(\operatorname{res}(\omega \ln f)) = \alpha_0^{\beta_0} \exp(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \beta_i).\end{gathered} \tag{49}$$

Есть простие обстоятельства, которых важно не забывать. Локально и глобально функция $f$ и дифференциал $\omega$ абсолютны, но как сечение пучка или расслоения или как дифференциал над пучке оне не абсолутны. Они даны, локально или глобально, как сечение иле дифференциал тривиального пучка. Расслоение тоже дано раз и навсегда, но локальные или глобальные голоморфные сечения те сечения $f$, для которых $(f) \geq \delta$. Локально $(f) = nx$, $n \in \mathbb{Z}$. Можно, что для других не нужно объяснять такие придирчивие определения, но для себя нужно! В спаривании (49) расслоения нет!

В сущности, пока нет локального расслоения, то есть, мы только одним расслоениям пользуемся, тривиальным расслоениям. Но есть, для каждого числа $m \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, \dots$ есть расширение $F_x(z^{1/m}) = F_x^{(m)}$, которое не зависит от локального параметра $z$. Мы вводит тривиальное локальное расслоение над

$F_x^{(m)}$ как расслоение $\mathcal{L}_x^{(m)}$ над $F_x$. Посже, в глобальном определение, мы будем рассмотреть кривие над кривой $X$ и расслоения над этих кривых. Расслоение $\mathcal{L}_x^{(n)}$ локальный вид этого построения.

Тогда сечение расслоения $\mathcal{L}_x^{(n)}$ дано рядом

$$f = z^{n/m}\alpha_0 \exp(\alpha_1 z^{1/m} + \alpha_2 z^{2/m} + \dots),$$

но мы не интересуемся этиме сечениями, только сечениями

$$f = z^{nm/m}\alpha_0 \exp(\alpha_1 z^{m/m} + \alpha_2 z^{2m/m} + \dots),$$

итак подъёмом сечения тривиального расслоения над $F_x$. Для данного $m$, мы позволяем такие сечения

$$\omega = \frac{\beta_{-k+1}}{z^k} + \frac{\beta_{-k+2}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{\beta_{-1}}{z^2} + \frac{\beta_0}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k,$$

что $\beta_0 \in \mathbb{Z}/m$. Тогда

$$(f, \omega) = e^{2\pi i n \beta_0} \alpha_0^{m\beta_0} \exp(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \beta_i).$$

????????????????? Something is not quite right here.

$$f \times \theta \in F_x^{\times} \times \Theta_x : (f, \theta) = \alpha^n / \beta^m,$$
$$f = z^m \alpha(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots), \qquad \theta = z^n \beta(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots),$$

которое определено если $m = 0$ или $n = 0$. Есть тоже частичное спаривание

$$F_x^{\times} \times \Omega_x : \ (f, \omega) \to \exp\{\mathrm{res}_x(\omega \ln f) - \mathrm{ord}_x(f) \int_{x_0}^{x} \omega\}, ??????$$

где $\mathrm{res}_x$ вычет в точке $x$. Это спаривание определено только если $\mathrm{ord}_x(f) = 0$. К тому же в втором члене, есть интеграл, которого смысл нелокалньный.

Лучше ввести глобальный дифференциал Абеля $\omega$ над кривой $X$, которых локаьный вид $\omega_x$ и произведение $\theta = \prod_x \theta_x$, где $\theta_x = a = ax^0 \in \mathbb{C}^{\times}$ почти для всех $x$. Тогда

$$\begin{aligned} &(f, \omega) = e^{i\lambda}, \\ &\lambda = \sum_j \mathrm{res}_{q_j}(\omega \ln f) - \sum_i \mathrm{ord}_{p_i}(f) \int_p^{p_i} \omega \end{aligned} \tag{50}$$

уравненеями спаривание $(f, \omega)$ определено. Точки $q_1, q_2, \dots$ особые точки дифференциала $\omega$ и точки $p_1, p_2, \dots$ точки где идель $f = \prod f_v$ ни нуль ни бесконечен.

Чтобы определять паривание $(f,\omega)$ нужно что конечные множества $\{p_1,p_2,\dots\}$, $\{q_1,q_2,\dots\}$ не пересекаются. Нужно будет описать как определять точки $p$ и путь интегрирования.

Глобальное спаривание $(f,\theta)$ тоже произведение локального умножителей

$$(f,\theta)=\prod_x (f_x,\theta_x), \qquad \theta=\prod \theta_x, \tag{51}$$

где для почти всех $x$, $\theta_x$ образ $\alpha_x\in\mathbb{C}^\times$, но нужно опять предполагать, что множество точек где образ ряда $f_x$ не в множестве $\mathbb{C}^\times$ и множество точек где $\theta_x\notin\mathbb{C}^\times$ не пересекаются, чтобы $(f_x,\theta_x)$ определёно в каждой точке.

Мы быдем описать взаимность пользуяся спариваниями (50) и (51), но нужно сначала описать множество характеров $\chi$, которое мы хочем рассматривать. Удобно, фиксировать как в статье [FLN] идель, $f_0=\prod_x f_{0,x}$, с $\sum_v \mathrm{ord}_x(f_{0,x})=1$ и предполагать, что $\chi(f_0)=1$. Другими словами, мы рассматриваем характеры $\chi$ над множестве $I_F^0=F^\times\mathbb{I}_F^0$ классов иделей степени 0, но мы продолжаем их к таким характерам над $I$, что $\chi(f_0)=1$. Так как локальные группы $F_x^\times\subset\mathbb{I}_F\to I_F$ каждой характер $\chi$ определяет локальные характер $\chi_x$. Мы допускаем такой характер $\chi$, что

$$\chi_x: z^m\alpha(1+a_1z+a_2z^2+\dots)=z^m\alpha\exp(\alpha_1z+\alpha_2z^2+\dots)\to\beta^m\alpha^n\exp(\sum_{i=1}\alpha_i\beta_i), \tag{52}$$

где $n\in\mathbb{Z}$, $\beta\in\mathbb{C}^\times$ и $\beta_i=0$ для почти всех $i$. Итак рассмотриванные нами характеры даны локально алгебраическими и другими элементарними функтсиями и они не унитарны. Следовательно наше переформулирование классической теории как теория взаимностей несколько искуствено. Можно, что формулирование взаимностей для общих групп будет убедительне.

Пусть $D_f=\{x\mid \mathrm{ord}\,f_x\neq 0\}$ и $D_\theta=\{x\mid \mathrm{ord}\,\theta_x\neq 0\}$. Глобальное спариване

$$(f,\theta)=\frac{\prod_{x\in D_f}\theta_x(0)^{\mathrm{ord}_x(f)}}{\prod_{x\in D_\theta}f_x(0)^{\mathrm{ord}_x(\theta)}} \tag{53}$$

определено только если $D_f$ и $D_\theta$ не пересекаются. Чтобы давать общое определение этого спариваня нужна теорема Вейла. Пусть $f$ и $g$ быть такие алгебраические функции над $X$, что $D_f\cap D_g$ пусто. Тогда $(f,g)=(f,\theta)=1$, $g\mapsto\theta$. Это теорема доказывана в книге [GH] и мы вернёмся к ей позше, но мне самом она кажется странной, хотя для кривой $\mathbb{P}^1$, она очень проста. Пустьна пример $f=(x-a_1)(x-b_1)$, $g=(x-a_2)/(x-b_2)$, $a\neq b$. Тогда

$$(f,g)=\frac{g(a_1)}{g(b_1)}\frac{f(b_2)}{f(a_2)}=\frac{a_1-a_2}{a_1-b_2}\frac{b_1-b_2}{b_1-a_2}\frac{b_2-a_1}{b_2-b_1}\frac{a_2-b_1}{a_2-a_1}=1.$$

Вообще, чтобы определять$(f,\theta)$ для алгебраической функции $f$, мы находум такую алгебраическую функцию $g$, что $D_{\theta/g}$ и $D_f$ не пересекаются и мы постановляем $(f,\theta)=(f,\theta/g)$. Благодаря теореме Вел̆а, это определение не зависит от $g$. Так как спарение $(f,h)=(f,\theta)$, кососимметрическо, мы можем тоже определять$(f,g)$ для всех $g$ если $f\in F^\times$. Наконец, мы можем определять $(f,g)$ или $(f,\theta)$ для всякой пары $f,g,\ f,g\in\mathbb{I}_F$. Пусть $f=f_1f_2$, где $f_2\in F^\times$ и $D_{f_1}$ и $D_g$ не пересекаются. Тогда

$$(f,g)=(f_1,g)(f_2,g).$$

где $(f_1,g)$ определено формулой (52). Конечно $f\to(f,g)$ характер группы $\mathbb{I}_F$, и оно даже характер группы $I_F$ если $g\in F^\times$.

Чтобы лучше понимать это спаривание, рассмотримте строение групп $\mathbb{I}_F$ и $I_F$. Пусть

$$\mathbb{I}_F^{\mathrm{unr}}=\prod_x\mathcal{O}_x^\times,\qquad \mathbb{I}_F^{\mathrm{tr}}=\prod_x\mathcal{O}_x^{\mathrm{tr}},\qquad \mathcal{O}_x^+=\{1+a_1x+a_2x^2+\dots\}.$$

Тогда $F^\times\cap\mathbb{I}_F^{\mathrm{tr}}=\{1\}$ и $F^\times\cap\mathbb{I}_F^{\mathrm{unr}}=\mathbb{C}^\times$,

$$\{1\}\subset\mathbb{I}_F^{\mathrm{tr}}\subset\mathbb{I}_F^{\mathrm{unr}}\subset\mathbb{I}_F^0\subset I_F,$$

и

$$\{1\}\subset I_F^{\mathrm{tr}}\subset I_F^{\mathrm{unr}}\subset\mathbb{I}_F,\qquad I_F^{\mathrm{tr}}=\mathbb{I}_F^{\mathrm{tr}},\qquad I_F^{\mathrm{unr}}=\mathbb{C}^\times\backslash\mathbb{I}_F^{\mathrm{unr}}.$$

Строение групп $I_F^{tr}$, $I_F^{\mathrm{tr}}\backslash I_F^{\mathrm{unr}}$ и $I_F^{\mathrm{unr}}\backslash I_F$ и последовательно строение их групп характеров ясно.

Группа $I_F^{\mathrm{unr}}\backslash I_F$ группа дивизоров по модулю дивизоров линейно эквивалентных нулю.

$$I_F^{\mathrm{tr}}\backslash I_F^{\mathrm{unr}}=\mathbb{C}^\times\backslash\prod_x\mathbb{C}^\times, \tag{54}$$

где вложение $\mathbb{C}\hookrightarrow\prod_x\mathbb{C}$ дано $\alpha\to\prod_z\alpha$. Наконец $I_F^{\mathrm{tr}}=\mathbb{I}^{\mathrm{tr}}$. Легко определить группы характеров этих групп. Дуальная группа $\Xi(I_F^{\mathrm{unr}}\backslash I_F^0)$ не множество таких $\prod_x\alpha_x$, что $\prod\alpha_x^{d_x}=1$, если дивизор $\delta=\sum_x d_xx$ линейно эквивалентный нулю, но её фактор-группа по группе

$$\{\prod_x z\,|\,z\in\mathbb{C}^\times\}\simeq\mathbb{C}^\times.$$

Группа $I_F^{\mathrm{unr}}\backslash I_F^0$ группа точек якобиевного многообразия кривой $X$, но без её геометрической или топологической структуры. Следовательно, из классической точки зрения она менее интересна. Но для нас,

$$\Xi(I_F^{\mathrm{unr}}\backslash I_F^0)\subset\Xi(I_F^{\mathrm{unr}}\backslash I_F),$$

группа пучков Гекке. Однако, поскольку каждый этих характеров определяет пучок Гекке, их важность для современной теории автоморфных представлений несомнена. Мы встретимся позже с якобиевным многообразием в рамках характеров $I_F$. Сейчас мы замечаем первой признак двойственностей,

$$\Xi(I_F^{\mathrm{unr}}\backslash I_F^0) \subset \mathbb{C}^\times \backslash \prod_x \mathbb{C}^\times = I_F^{\mathrm{tr}}\backslash I_F^{\mathrm{unr}}.$$

Группа характеров группы $I_F^{\mathrm{tr}}\backslash I_F^{\mathrm{unr}}$ группа $\mathbb{I}_F^{\mathrm{unr}}\backslash \mathbb{I}_F^0$, $\prod_x z_x \to \prod_x z_x^{m_x}$, $m_x \in \mathbb{Z}$, $m_x = 0$ почти для всех $x$ и $\sum m_x = 0$. Это равенство тоже вид двойственностей.

Группа $\mathbb{I}^{\mathrm{tr}}$ почти(!) автодуальна. Пусть

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 + a_1 z_x + a_2 z_x^2 + \ldots = \exp(\alpha_1 z_x + \alpha_2 z_x^2 + \ldots) \\ \eta_2 &= 1 + b_1 z_x + b_2 z_x^2 + \ldots = \exp(\beta_1 z_x + \beta_2 z_x^2 + \ldots), \end{aligned} \tag{55}$$

два члена этои группы. Мы предполагаем, что $\beta_i = 0$ если $i >> 0$. Тогда

$$(\eta_1, \eta_2) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i)). \tag{56}$$

Эта функция переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ не алгебраическая но она элементарная. Локальные выражения (55) и (56) мы перепишем в виде более сходном виду выражения (??49). Пусть $f_x = \eta_1$ так, что

$$\ln f_x = \alpha_1 z_x + \alpha_2 z_x^2 + \ldots. \tag{57}$$

Пусть дифферентиал Абеля

$$\omega_x = \frac{\beta_0}{z_x} + \frac{\beta_1}{z_x^2} + \frac{\beta_2}{z_x^3} + \ldots$$

так, что

$$\mathrm{res}_x(\omega \ln f_x) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots \tag{58}$$

и

$$(\eta_1, \eta_2) = \exp(\mathrm{res}_x(\omega_x \ln f_x)).$$

Если $f_x(0) \neq 1$, тогда есть в (57) дополнительный член $\alpha_0 = f_x(0)$ ??????? и в (58) дополнительный член $\alpha_0 \beta_0$. С этим сведением мы можем определять группы характеров группы $I_F^0$, но только в нашем смысле, что локальный вид характера дан выражением (52).

Чтобы развить последствия этих размышления нам нужна втораы формула похошхая на формулу Вей ла. Пусть $\omega$ дифферентиал Абеля над кривой $X$ с особыми точками в точках $D_\omega = Q = \{q_1, q_2, \ldots\}$ и $f$ алгебраическая функция над $X$ ц особыми точками в точках $D_f = P = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Мы предполагаем, что

$P \cap Q = \emptyset$ и что вычет $\omega$ в каждой особой точке целое число. Я хотел доказать, что сумма выражения (???49)

$$\sum_j \operatorname{res}_{q_j}(\omega \ln f_j) - \sum_i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \int_p^{p_i} \omega \in 2\pi i\mathbb{Z}, \tag{59}$$

с доказательствам сходным на доказательво формулы Вейла. К сожаления, это не можно. Мы припоминаем себе доказательство формулы Вейла из [GH].

Нам нужна их диаграмма на странице 242, обычное изображение римановой поверхноштей как плоская область $\Delta$ с отождествёнными сторонами,

$$\delta_1, \delta_{g+1}, \delta_1^{-1}, \delta_{g+1}^{-1}, \delta_2, \ldots$$

Мы фиксироваем точку $p$ на границе этой областей и непересекающиеся пути интегрирований $\alpha_i$ с $p$ до $p_i$ или $\beta_j$ с $p$ до $q_j$, где $D_f = \{p_1, p_2, \ldots\}$ и $D_g$ или $D_\omega = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Мы можем предполагать, что точки $p_i$ и $q_j$ не находятся на границе областей $\Delta$.

Пусть $\Delta'$ область $\Delta$ резана по путям $\alpha_i$ с $p$ до $p_i$, но не резана по путям $\beta_j$. Мы рассматриваем интеграл

$$\int_{\partial\Delta'} \ln f d \ln g = \ln f \frac{dg}{g}.$$

Согласно теореме вычетов, этот интеграл равен

$$2\pi i \sum_j \operatorname{ord}_{q_j}(g) \ln f(q_j). \tag{60}$$

Но он тоже равен

$$\sum_k \int_{\delta_k + \delta_k^{-1}} + \sum_k \int_{\delta_{g+k} + \delta_{g+k}^{-1}} + \sum_i \int_{\alpha_i + \alpha_i^{-1}}.$$

Для двух отождествённых точек $p \in \delta_k$, $p' \in \delta_k^{-1}$,

$$\ln f(p') = \ln f(p) + \int_{\delta_{g+k}} d \ln f. \tag{61}$$

По этому,

$$\int_{\delta_k + \delta_k^{-1}} \ln f \frac{dg}{g} = -\left(\int_{\delta_k} d \ln g\right)\left(\int_{\delta_{g+k}} d \ln f\right) \tag{62}$$

и, по такой же причине,

$$\int_{\delta_{g+k} + \delta_{g+k}^{-1}} \ln f \frac{dg}{g} = \left(\int_{\delta_{g+k}} d \ln g\right)\left(\int_{\delta_g} d \ln f\right) \tag{63}$$

Наконец, для $p$ на $\alpha_i$ и соответсвующого $p'$ на обратном путе $\alpha_i^{-1}$

$$\ln f(p') - \ln f(p) = -2\pi i \operatorname{ord}_{p_i}(f). \tag{64}$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha_i + \alpha_i^{-1}} \ln f \frac{dg}{g} = 2\pi i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \int_p^{p_i} d\ln g$$

и

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\alpha_i + \alpha_i^{-1}} \ln f \frac{dg}{g} &= 2\pi i \sum_i \operatorname{ord}_{p_i}(f)(\ln g(p_i) - \ln g(p)) \\ &= 2\pi i \sum_i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \ln g(p_i). \end{aligned} \tag{65}$$

Как следствие уравнений (60), (62), (63), и (65) мы заключаем уравнением

$$\begin{aligned} &2\pi i \{ \sum_j \operatorname{ord}_{q_j}(g) \ln f(q_j) - \sum_i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \ln g(p_i) \} \\ &= \sum_k \left\{ \left( \int_{\delta_g} d\ln f \right) \left( \int_{\delta_{g+k}} d\ln g \right) - \left( \int_{\delta_k} d\ln g \right) \left( \int_{\delta_{g+k}} d\ln f \right) \right\}. \end{aligned} \tag{66}$$

Каждый интеграл направо находится в $2\pi i\mathbb{Z}$. Следовательно

$$\sum_j \operatorname{ord}_{q_j}(g) \ln f(q_j) - \sum_i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \ln g(p_i) \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Это утверждение теорема Вейла.

Чтобы подтверждать формулу (59) мы повторяем это вычисление, но заменя $dg/g = d\ln g$ дифференциалом $\omega$. Пусть $\varphi = \omega \ln f$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta'} \omega \ln f &= 2\pi i \sum_j \operatorname{res}_{q_j} \varphi \\ &= 2\pi i \sum_j \operatorname{res}_{q_j} \omega \ln f(q_j). \end{aligned} \tag{67}$$

Это уравнение и уравнение (68) оправдывают определение спаравание $(\eta_1, \eta_2)$ Конечно, уравнения (61) и (64) ещё верны так, что

$$\int_{\alpha_i + \alpha_i^{-1}} \varphi = 2\pi i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \int_p^{p_i} \omega$$

Мы цобираем члены как раньше с такими же заключениеми,

$$\int_{\delta_i + \delta_i^{-1}} \varphi = \left( \int_{\delta_i} \omega \right) \left( - \int_{\delta_{g+i}} d\log f \right), \qquad \int_{\delta_{g+i} + \delta_{g+i}^{-1}} \varphi = \left( \int \delta_{g+i} \omega \right) \left( - \int_{\delta_i} d\log f \right).$$

Заключение то, что

$$2\pi i \sum_j \left( \operatorname{res}_{q_j}(\omega) \log f(q_j) - \sum_i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \int_p^{p_i} \omega \right)$$

равно

$$\sum_{k=1}^{g} \left( \int_{\delta_k} d\log f \cdot \int_{\delta_{g+k}} \omega - \int_{\delta_k} \omega \cdot \int_{\delta_{g+k}} d\log f \right). \tag{68}$$

■ В каждом члене направо в уравнении (68), четыра интеграла интегралы форм которых все вычеты целы. Кроме того, все интегралы по замкнутым кривим. Но из этог мы не можем заключать, что все интегралы целое кратное $2\pi i$ и что отношение (59) подтвердено. Следовательно следующий абзац тоже бесполезен.

Если $f = \prod_x f_x$ произвольный элемент из $\mathbb{I}_F^0$ и если $D_f \cap D_\omega = \emptyset$, тогда выражение

$$(f, \omega) = \exp(\sum_j \operatorname{res}_{q_j}(\omega \ln f_{q_j}) - \sum_i \operatorname{ord}_{p_i}(f) \int_p^{p_i} \omega) \tag{69}$$

независимое от $p$. Если $f \in F^\times$ тогда, согласно утверждеию, (59) $(f, \omega) = 1$. Так как для произвольного члена $f \in \mathbb{I}_F$ ест всегда такое $f_1 \in F^\times$, что $D_{ff_1} \cap D_\omega = 1$, мы можем ползоваться (69) чтобы определять характер $f \mapsto (f, \omega)$ группы $I_F^0$. ■

Если локальное разложение $\omega$ в точке $x$,

$$\omega_x = \frac{\beta_{k-1}}{z^k} + \frac{\beta_{k-2}}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_0}{z} + \ldots, \qquad \beta_0 \in \mathbb{Z},$$

тогда согласно уравнению (58), локальный вклад точки $x$ к выражению (69)

$$(\eta_1, \eta_2) \exp(\beta_0 \ln f_x(0)) = (\eta_1, \eta_2) f_x^{\beta_0}(0).$$

Нам нужно одно утверждение. Главные части мероморфного дифферентиала Абеля равны нулю в почти всех точках и сумма их вычетов равна нулю, но в остальном они произвольны. Мы вспоминаем его доказателство. Пусть $\Omega$ каноническая свазка. Тогда, $\deg \Omega = 2g - 2$, где $g$ род кривой $X$. Согласно теореме Римана-Роха,

$$\dim H^0(\mathcal{L}) - \dim H^0(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1}) = \deg \mathcal{L} - (g - 1). \tag{70}$$

В частности,

$$\dim H^0(\Omega) - 1 = 2g - 2 - (g - 1) \longrightarrow \dim H^0(\Omega) = g,$$

то есть, размерность пространства голоморфных дифференциалов равна $g$.

Пусть $\delta$ положительный дивизор и пусть $\Omega_\delta = \mathcal{L}_{-\delta}$. Тогда

$$\deg \Omega_\delta = \deg \Omega + \deg \delta = 2g - 2 + \deg \delta.$$

Если $\delta = \{x\}$ единственная точка, тогда $\Omega \otimes \Omega_\delta^{-1} = \mathcal{L}_\delta$ и $\dim H^0(\mathcal{L}_\delta) = 0$. Следовательно

$$\dim H^0(\Omega_\delta) = \deg \Omega_\delta - (g-1) = 2g - 1 - (g-1) =,$$

так, что если мы позволяем единственный полюс, мы не увеличиваем размерностей пространства возможных дифференциалов. Но после того, всякий раз, когда мы прибавляем одну точку к дивисору $\delta$, уравнение

$$\dim H^0(\mathcal{L}_\delta) = 0$$

остается верно но $\deg \Omega_\delta$ увеличивается на одно. Следовательно $\dim H^0(\Omega_\delta)$ увеличивается на одно.

Как заключение мы получаем, что ограничения характеров $f \mapsto (f, \omega)$ к $I_F^{\mathrm{tr}}$ множество всех характеров этой группы с допустимым локальным видом. Мы получаем даже, что ограничение этих характеров к группе $I_F^{\mathrm{unr}}$ множество всех её характеров, опять с допустимым локальным видом. Ядро первого ограничения множество дифференциалов третьево рода, но ядро второго ограничения множество дифференциалов первого рода. Они определуются характеров фактор-группы $I_F^{\mathrm{unr}} \backslash I_F^0$.

Есть для меня важная трудность. Над группе $I_F^{\mathrm{tr}}$ или даже над группе характер $I_F^{\mathrm{unr}}$ лёгко понимать характер $f \mapsto (f, \omega)$, но над группе $I_F^0$ можно определять его только ползуясь теоремой Вейла и неопределённым выбором.

Есть между $(f, \omega)$ и $(f, \theta)$ важная разница. Как характер $I_F^0$, первой определен для всех $\omega$ но второй определен только для некоторых $\theta$. Есть вторая разница. Характер $f \mapsto (f, \omega)$, характер фактор-группа $I_F^{\mathrm{unr}} \backslash I_F^0$. Если $\omega$ первого рода.

$$(f, \omega) = \exp(-\sum_x \mathrm{ord}_x(f) \int_p^x \omega)$$

где $x$ неважно, потому $\sum_x \mathrm{ord}_x(f) = 0$. Если $\theta = \prod_x \theta_x$, $\theta_x = a_x$, характер $f \mapsto \prod_x \theta_x$ дан выражением $\prod_x a_x^{-\mathrm{ord}_x(f)}$.

---

Есть ещё три главы. В настоящее время мне не можно писать эти главы. Мне кажется, что после нужного приготовления, после изучения наличных статей мне будет можно сочинить пятую и шестую главу в полезьном виде. Но в противноположность вопросам второй, третей и четвёртой глав для решения которых у меня есть отчётливие представления того, что нужно делать, даже если пока я не знаю как преодолевать большое количество препятствий с которыми мы встречаемся, ы меня самого нет опыта с вопросама этих двух глав. Я хочу учится тому, которое другие математики открыли.

Последная глава представляет совсем другие трудности. Чтобы сочинить её нужны не только ясное понимание всех вопросов других глав но тоже ясное понимание арифметических и топологических сторон алгебраической геометрии, и её ещё не разрешённых вопросов и гипотез, на пример гипотезы Ходжа или гипотеза Тейта. Эти вопросы нахожутся за функториальностью. Я не ожидаю, что я буду писать эту главу. Я даже не знаю, как начинаться. Хотя теория многообразий Шимура нам много учила, её важность для окончательной теории взаимностей не ясна.

Конечно, восьмая глава по нулям функций $L(s,\pi,\rho)$ или $L(s,\pi)$, где $\pi$ автоморфное представление группы $GL(n)$, тоже отсутсвует. Хотя понятие функториальностей предлагало нам большое множество рядов Дирихле, поведение которых мы ожидаем быть сходно поведению $\zeta$-функции Римана, посколько я знаю, никто никогда не предлагал, что может быть полезно исследовать знаменитую гипотезу Римана в этих более просторных рамках, ни для всех новых функций ни для единственной функстии, функции Римана самой.

---

## V. Общая геометрическая теория

## VI. $p$-адическая теория

## VII. Глобальная арифметическая взаимность

## References

[ABV] Jeffrey Adams, Dan Barbasch, David A Vogan, *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups.*

[A1] James Arthur, *On some problems suggested by the trace formula*, Lie group representations II.

[A2] ———, *Unipotent automorphic representations:conjectures*; *Unipotent automorphic representations: global motivation.*

[A3] ———, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups.*

[BBD] Beilinson, Bernstein, Deligne.

[BC] A. Borel и W. Casselman.

[CL] Earl A. Coddington и Norman Levinson, *Theory of ordinary differential equations.*

[???] Collingwood.

[DM] P.Deligne и J. Milne.

[QFS] P. Deligne et al., *Quantum fields and strings: A course for mathematicians.*

[CFT] E. Frenkel, *Lectures on the Langlands program and conformal field theory.*

[CLG] ———, *Langlands correspondence for Loop groups.*

[GT] ———, *Gauge theory and Langlands duality*, Sém. Bourbaki, 61ème année **1010** (2008—2009).

[FG] E. Frenkel and B. Gross, *A rigid irregular connection on the projective line.*

[FLN] E. Frenkel, R. Langlands, и Ngô Bao Châu.

[GH] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry.*

[G] Benedict H. Gross, *Irreducible cuspidal representations with prescribed local behavior.*

[Ha] Helmut Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I: Klassenkörpertheorie, Teil II: Reziprozitätsgesetz*, Physica Verlag, Würzburg – Wien, 1965.

[HT] Michael Harris и Richard Taylor.

[HTT] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi and Toshiyuki Tanisaki, *D-Modules, perverse sheaves, and representation theory.*

[JL] H. Jacquet and R. Langlands, *Automorphic forms on $GL(2)$.*

[JY] Christian U. Jensen and Noriko Yui, *Quaternion extensions*, Algebraic geometry and commutative algebra, in Honor of Masayoshi Nagata, 1987, pp. 155-182.

[K1] Anthony Knapp, *Representation theory of semisimple groups: An overview based on examples*, Princeton University Press.

[K2] Anthony Knapp, *Lie groups beyond an introduction.*

[LL] Jean-Pierre Labesse and Robert Langlands, *L-indistinguishability for $SL(2)$*, Can. Jour. Math..

[Pr] *Problems in the theory of automorphic forms.*

[BC] *Base change for $GL(2)$.*

[STF] *Les débuts d'une formule des traces stable.*

[BE] *Beyond endoscopy.*

[H] *Review of Hida's book.*

[SP] *Reflexions on receiving the Shaw prize.*

[ST] *Singularités et transfert.*

[Le] S. Lefschetz, *Algebraic geometry.*

[LP] M. Larsen and R. Pink, *Determining representations from invariant dimensions*, Invent. Math. **102** (1990), 377398.

[MW] C. Mœglin в J.-L. Waldspurger.

[N] Ngô Bau Chaô, *lemme fondamental.*

[Na] D Nadler, *Microlocal branes are constructible sheaves.*

[NZ] D. Nadler and E. Zaslow, *Constructible sheaves and the Fukaya categories.*

[S1] Jean-Pierre Serre, *Groupes de Lie ℓ-adiques attachées aux courbes elliptiques*, Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, Éditions du Centre national de la recherche scientifique, 1964.

[S2] ———, *Groupes algébriques et corps de classes.*

[Si] Alan Silberger.

[Sil] Joseph H. Silverman, *The aithmetic of elliptic curves.*

[T] R. Taylor.

[Wa] Jean-Loup Waldpsurger.

[WS] Wang Song, *http ://www.mcm.ac.cn/people/ws.aspx.*

[Z] A. Zelevinski, *Induced representations of reductive p-adic groups II: On irreducible representations of $GL(n)$*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **13** (1980), 165-210.