# Λεξικό, Union – Find

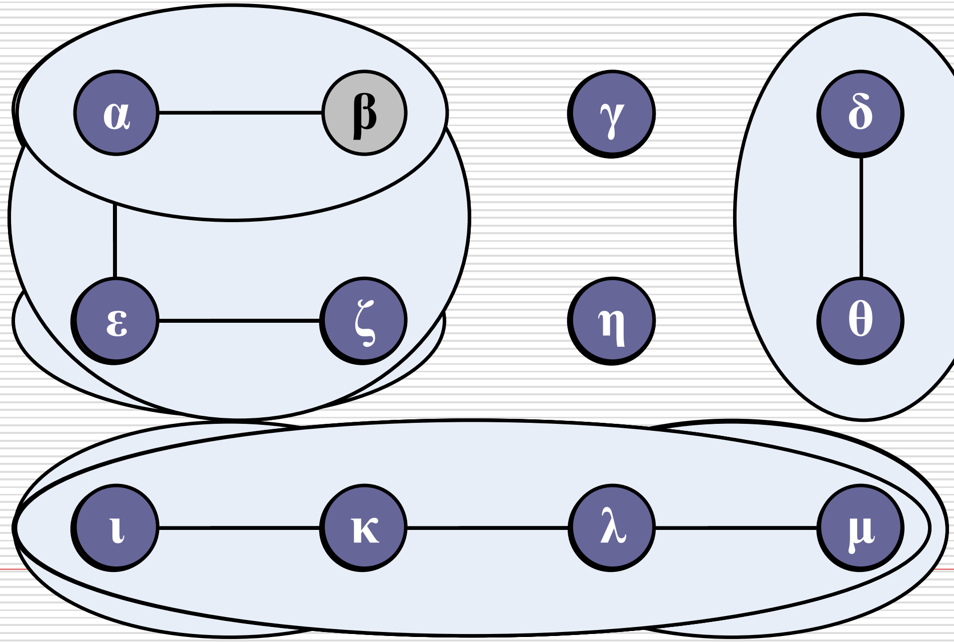
**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Διαχείριση Διαμερίσεων Συνόλου

- Στοιχεία σύμπαντος διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας που μεταβάλλονται δυναμικά με ένωση.
- Λειτουργίες:
  - Εύρεση find(x): αντιπρόσωπο κλάσης όπου ανήκει x.
  - Ένωση union(x, y): ένωση κλάσεων όπου ανήκουν x και y.

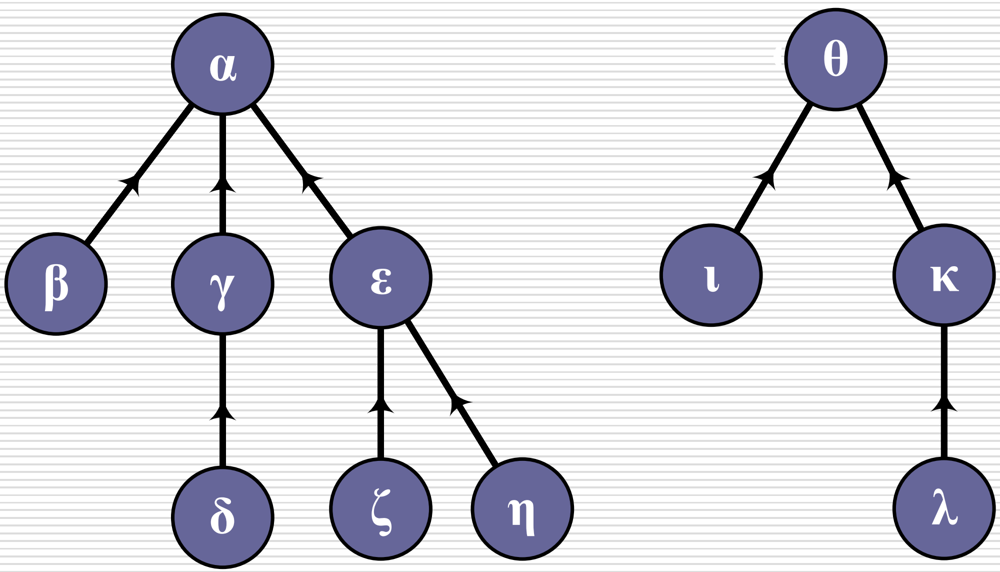


# Πρόβλημα Union – Find

- Στοιχεία $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ αρχικά σε $n$ κλάσεις.
  - Κάθε κλάση προσδιορίζεται από στοιχείο – αντιπρόσωπο.
- find(x): αντιπρόσωπος κλάσης όπου ανήκει x.
  - Διατηρούμε μοναδικό αντιπρόσωπο για κάθε κλάση.
- union(x, y): αντικατάσταση (αντιπροσώπων) κλάσεων x και y με κλάση που προκύπτει από ένωση.
  - Ελέγχουμε αν x και y ανήκουν σε διαφορετική κλάση.
  - Νέος αντιπρόσωπος από τους αντιπροσώπους κλάσεων x, y
  - Πάντα διαμέριση του $U$ σε κλάσεις.
  - $\leq n - 1$ ενώσεις (μετά από $n - 1$, μία μόνο κλάση).
- Δομή δεδομένων που ελαχιστοποιεί συνολικό χρόνο για ακολουθία $m$ ευρέσεων και $n - 1$ ενώσεων.

# Αναπαράσταση Δέντρου & Δάσους

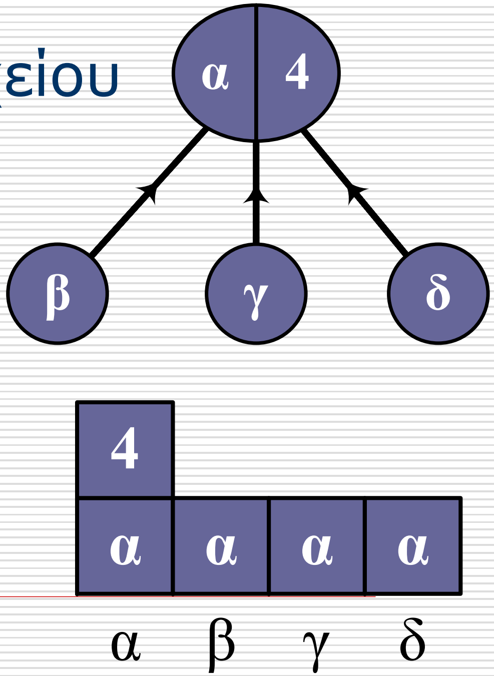
- Πίνακας γονέων A[1...n] για δέντρο με ρίζα και n κόμβους:
  - A[i] = j ανν j πατέρας του i στο δέντρο.
  - A[ρίζας] = ρίζα (ή -1).
  - Όμοια για δάσος όπου κάθε δέντρο έχει ρίζα.




| α | β | γ | δ | ε | ζ | η | θ | ι | κ | λ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | α | α | γ | α | ε | ε | θ | θ | θ | κ |

# Αναπαράσταση με Δέντρα

- Κλάση: **δέντρο** με **ρίζα** το στοιχείο-**αντιπρόσωπο**.
  - Όνομα ρίζας.
  - Μέγεθος κλάσης.
- Στοιχείο: **κόμβος** δέντρου με πεδία
  - Όνομα στοιχείου.
  - Όνομα γονέα: όνομα προηγούμενου στοιχείου στο μονοπάτι προς τη ρίζα-αντιπρόσωπο.
- Αναπαράσταση με πίνακα γονέων:
  - A[x] : γονέας στοιχείου x.
  - Ρίζα – στοιχείο αντιπρόσωπος έχει A[x] = x και επιπλέον πεδίο size.

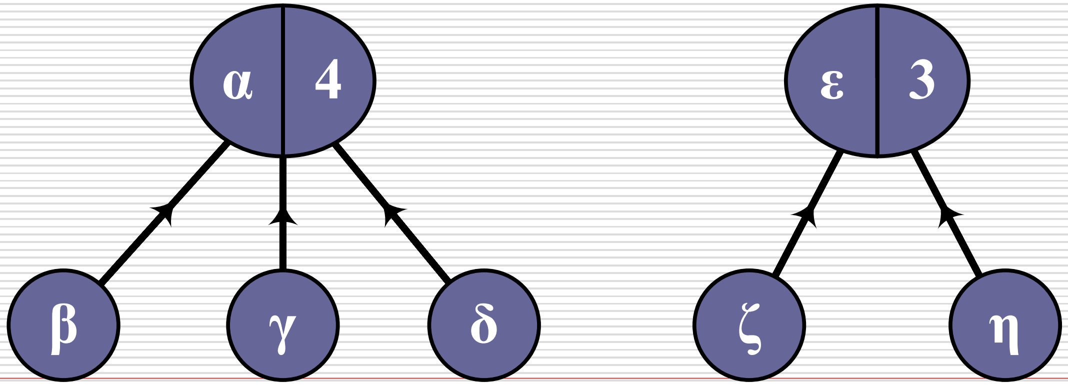


# Αναπαράσταση με Δέντρα

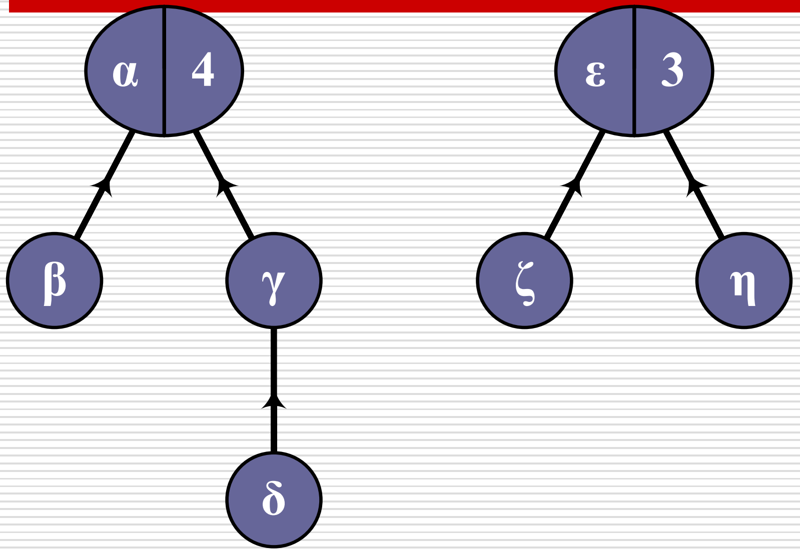
- find(x): ακολουθούμε δείκτες σε γονέα μέχρι τη ρίζα.

```
elem find(elem x) {
    while (x != A[x])
        x = A[x];
    return(x); }
```

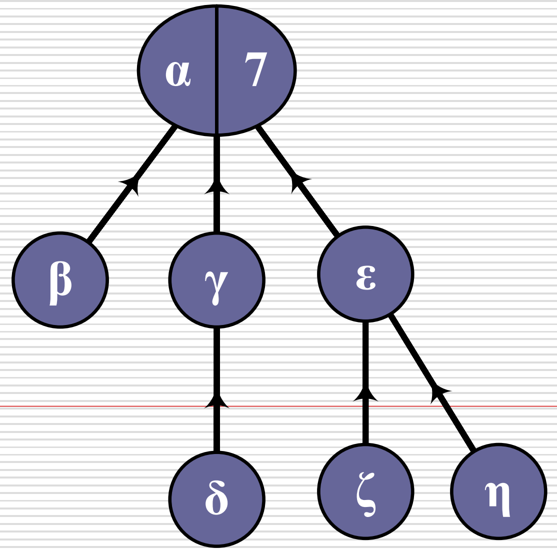
- union(x, y): x και y αντιπρόσωποι διαφορετικών συνόλων
  - Συνένωση δέντρων: ρίζα 1ου συν. γίνεται γονέας ρίζας 2ου συν.
  - Ενημέρωση μεγέθους



# Ένωση




```
unionTree(elem x, elem y) {
    if (x == y) return;
    A[y] = x;
    A[x].size += A[y].size; }
```



# Απόδοση

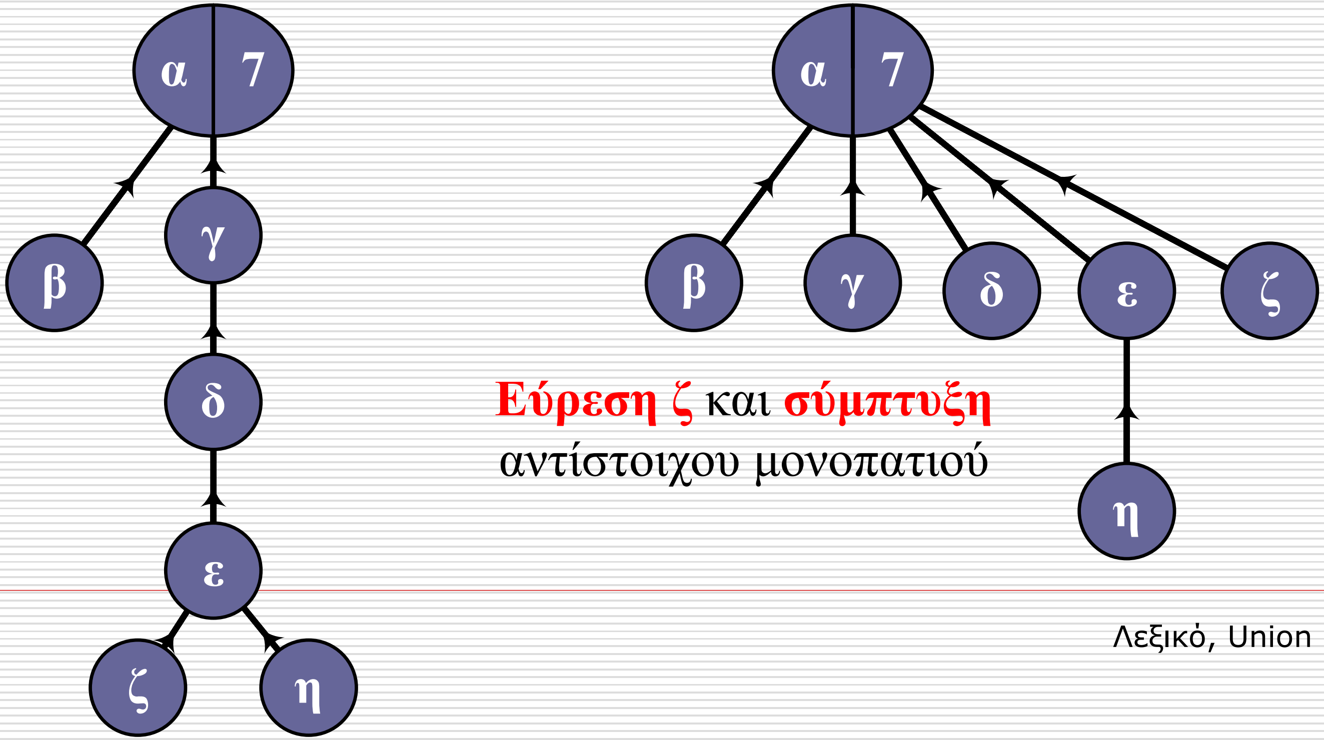
- Χρόνος χ.π. για *m* finds και *n* unions: $O(m\,n + n)$
  - Union : O(1) χρόνος.
  - Find : O(ύψος δέντρου)
    - Χειρότερη περίπτωση: ύψος = $n - 1$
      - union(n-1, n), union(n-2, n-1), union(n-3, n-2), union(n-4, n-3), …, union(3, 2), union(1, 2).
- Απλή δομή, εύκολη υλοποίηση, αλλά ακριβό find!

# Βεβαρυμένη Ένωση

- «Δεύτερο» σύνολο αυτό με τα λιγότερα στοιχεία.
  - Λογαριθμικό ύψος δέντρου : O(log $n$).
  - Βεβαρυμένη ένωση: δέντρο ύψους $h$ έχει $\geq 2^h$ στοιχεία.
- Απόδειξη με επαγωγή:
  - Ισχύει για h = 0 (δέντρο ενός στοιχείου).
  - Ένωση δέντρων $x$ και $y$ με ύψη $h_x$ , $h_y$ , και στοιχεία $s_x \geq s_y$
  - Επαγωγικά, υποθέτουμε $s \geq 2^h$ (για $x$ και $y$)
    - Ύψος ένωσης = $h_x$ : στοιχεία ένωσης $\geq 2^{\text{ύψος}}$
    - Ύψος ένωσης = $h_y + 1$ : στοιχεία ένωσης $\geq 2\, s_y \geq 2^{\text{ύψος}}$
- Χρόνος χ.π. για $m$ finds και $n$ unions: $O(m \log n + n)$
  - Απλή υλοποίηση και αποδεκτή απόδοση.

# Σύμπτυξη Μονοπατιών

- Find ακριβό γιατί στοιχεία μακριά από ρίζα.
- Σύμπτυξη μονοπατιού όταν find(x):
  - Όλοι οι πρόγονοι του x (και το x) γίνονται παιδιά ρίζας.
  - Δέντρο «κονταίνει» (όχι επιβάρυνση ασυμπτωτικού χρόνου).
  - Στο μέλλον, θα βρίσκουμε σύνολο των στοιχείων γρήγορα.

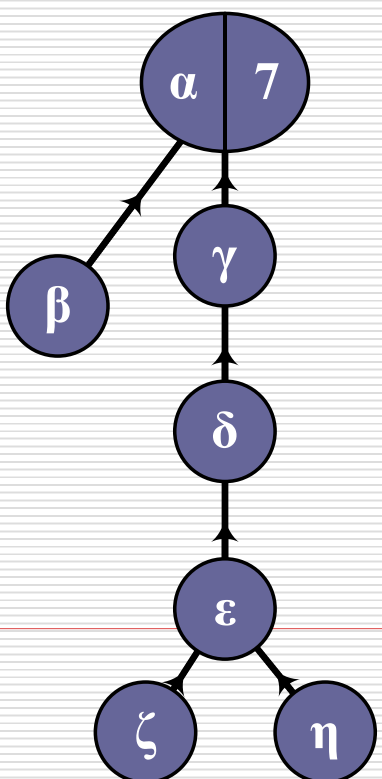


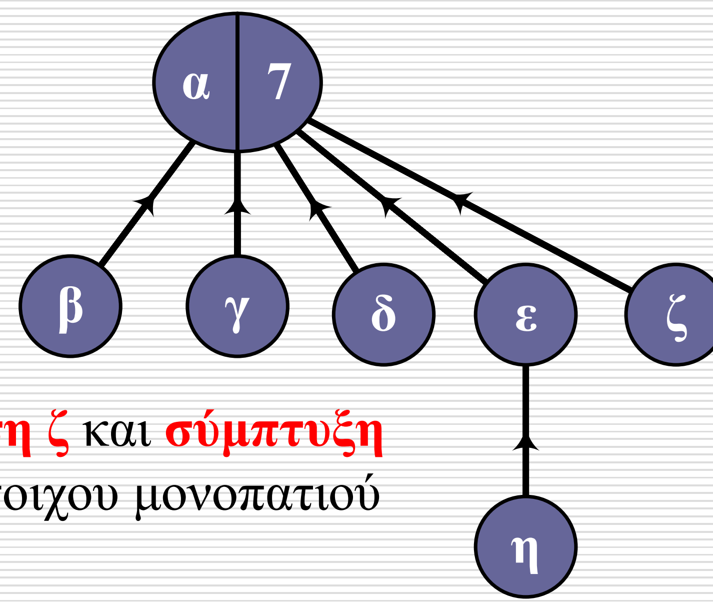

**Εύρεση ζ** και **σύμπτυξη** αντίστοιχου μονοπατιού

# Σύμπτυξη Μονοπατιών

```
elem findTreePathCompression(elem x) {
    if (x != A[x])
        A[x] = findTreePathCompression(A[x]);
    return(A[x]);    }
```

- Ανεβαίνουμε μέχρι ρίζα.
- Επιστρέφοντας μέχρι *x*, όλοι οι δείκτες γονέων τίθενται να δείχνουν στη ρίζα.




**Εύρεση ζ** και **σύμπτυξη** αντίστοιχου μονοπατιού

# Απόδοση

- Δέντρα, βεβαρυμένη ένωση, και σύμπτυξη μονοπατιών.
- Χρόνος χ.π. για $m \geq n$ finds και $n$ unions: $O(m\ \alpha(n, m))$
  - α(n, m): αντίστροφη συνάρτηση Ackermann.
  - Μεγαλώνει εξαιρετικά αργά!
  - Στην πράξη, μπορεί να θεωρηθεί σταθερά.
- Απλή δομή, εύκολη υλοποίηση, και ουσιαστικά γραμμικός χρόνος!

# Πρόβλημα (ADT) Λεξικού

- Δυναμικά μεταβαλλόμενη συλλογή αντικειμένων που αναγνωρίζονται με «κλειδί» (π.χ. κατάλογοι, πίνακες ΒΔ).
- **Λεξικό** : συλλογή αντικειμένων με μοναδικό «κλειδί».
  - «Κλειδί»: αριθμός ή τύπος δεδομένων με ολική διάταξη.
  - Γενίκευση και για μη-μοναδικά κλειδιά.
- ADT λεξικού υποστηρίζει ακολουθίες λειτουργιών:
  - Αναζήτηση στοιχείου με κλειδί x
    - member(x): ελέγχει ύπαρξη στοιχείου με κλειδί x
    - search(x): επιστρέψει δείκτη σε θέσεις x
  - Εισαγωγή στοιχείου με κλειδί x
  - Διαγραφή στοιχείου με κλειδί x

# Λειτουργίες Λεξικού

- Λεξικό υποστηρίζει λειτουργίες:
  - Αναζήτηση/εισαγωγή/διαγραφή στοιχείου με κλειδί *x*
  - Εκτύπωση στοιχείων σε αύξουσα / φθίνουσα σειρά
  - Προηγούμενο και επόμενο στοιχείο.
  - Μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.
  - k-οστό μικρότερο στοιχείο
  - Βοηθητικές λειτουργίες ...

# Υλοποιήσεις Λεξικού

- Μη-ταξινομημένη διασυνδεδεμένη λίστα:
  - Εισαγωγή: O(1)
  - Αναζήτηση / τυχαία διαγραφή: O(*n*)
  - Κατάλληλη όταν συχνές εισαγωγές, σπάνιες αναζητήσεις / διαγραφές μεμονωμένες ή στο τέλος (π.χ. log file).
- Ταξινομημένος πίνακας:
  - (Δυαδική) αναζήτηση: O(log *n*)
  - Στατική συλλογή : «εισαγωγή» O(log *n*) / στοιχείο
    Χρόνος ταξινόμησης : O(*n* log *n*)
  - Δυναμική συλλογή : εισαγωγή / διαγραφή O(*n*)
  - Κατάλληλη όταν συχνές αναζητήσεις και δεδομένα μεταβάλλονται σπάνια (π.χ. αγγλο-ελληνικό λεξικό).

# Υλοποιήσεις Λεξικού

- Ζυγισμένο (Δυαδικό) Δέντρο Αναζήτησης:
  - Αναζήτηση / εισαγωγή / διαγραφή: O(log $n$)
  - Μέγιστο / ελάχιστο / προηγούμενο / επόμενο / $k$-οστό: O(log $n$)
  - Range queries σε γραμμικό χρόνο.
  - Πλήρως δυναμική – επιπλέον χώρος για δείκτες!
- Πίνακας Κατακερματισμού (hashing):
  - Αναζήτηση / διαγραφή : O(1)
  - Εισαγωγή : O(1) expected amortized,<br>O(log $n$) (ακόμη και O(1)) whp., O($n$) χ.π.
  - Δεν υποστηρίζει αποδοτικά άλλες λειτουργίες.
  - Δυναμική – επιπλέον χώρος στον πίνακα (util ≈ 50%)