

# Dimensionierung analoger Schaltungen mit formalen Methoden

Andreas Lemke, Lars Hedrich, Erich, Barke, Institut für Mikroelektronische Systeme, Universität Hannover

## Kurzfassung

Es wird ein Ansatz zur optimierungsbasierten Dimensionierung analoger Schaltungen unter Berücksichtigung von Parameterschwankungen dargestellt. Durch die Verwendung formaler Methoden werden garantierte Schranken des Worst-Case-Verhaltens berechnet und das globale Optimum des Dimensionierungsproblems deterministisch bestimmt. Dazu werden ein spezieller Newton-Operator und AC-Analysen in affiner Arithmetik eingesetzt. Mit Hilfe einer Prototypenimplementierung werden die Berechnung garantierter Worst-Case-Schranken für DC- und AC-Eigenschaften und die globale Optimierung an einem Beispiel gezeigt.

## 1 Einleitung

Die Dimensionierung ist eine der Hauptaufgaben bei der Synthese analoger Schaltungen. Bisher veröffentlichte Ansätze lassen sich in zwei Klassen einteilen: Wissensbasierte und optimierungsbasierte Ansätze.

Wissensbasierte Dimensionierungswerkzeuge zeichnen sich zwar durch einen geringen Rechenaufwand aus, es ist jedoch eine aufwändige Vorbereitung erforderlich, da für jede neue Schaltungstopologie Expertenwissen erfasst und programmiert werden muss. Außerdem reicht die Genauigkeit der eingesetzten Heuristiken meist nicht aus, um mit einem Schaltungssimulator validierbare Ergebnisse zu erhalten.

Optimierungsbasierte Ansätze bieten Flexibilität, weil jede Analyseverfahren zur Ermittlung der Schaltungseigenschaften eingesetzt werden kann. Jedoch müssen Genauigkeit, Geschwindigkeit, globale Konvergenz und zusätzlicher Modellierungsaufwand gegeneinander abgewogen werden.

Der Zeitaufwand zur Vorbereitung einer neuen Dimensionierungsaufgabe zur Lösung mit einem automatischen Dimensionierungswerkzeug sollte unter dem der manuellen Lösung liegen. Hinsichtlich der Genauigkeit müssen die verwendeten Modelle denjenigen entsprechen, die zur Validierung eingesetzt werden. Es hat sich gezeigt, dass diese Anforderungen nur von einem optimierungsbasierten Ansatz unter Verwendung bereits vorhandener Bauelementemodelle mit Schaltungssimulator-Genauigkeit erfüllt werden.

Bei der Verwendung eines optimierungsbasierten Ansatzes muss globale Konvergenz sichergestellt sein. Der für diesen Zweck am häufigsten eingesetzte Algorithmus ist Simulated Annealing. Es lässt sich jedoch nicht beweisen, dass er das globale Optimum in einer endlichen Anzahl von Iterationen findet, sondern nur, dass der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit eins ist, wenn die Zahl der Iterationen gegen unendlich geht [12]. In der Praxis sind daher viele Iterationen erforderlich, um quasi-globale Konvergenz zu erzielen.

Damit die dimensionierte Schaltung auch bei schwankenden Umgebungs- und Herstellungsprozessparametern funktioniert, müssen diese Schwankungen

in die Spezifikation eingeschlossen werden. Die meisten Ansätze zur automatischen Dimensionierung beschränken sich jedoch auf den Nominalpunkt. Wie in [11] dargelegt, sind schlechte Robustheit und geringe Herstellungsausbeute die Folge. Zur Berücksichtigung von Parameterschwankungen muss bei optimierungsbasierten Ansätzen in der Analyse der *Worst-Case* der Schaltungseigenschaften bestimmt werden, wodurch sich der Rechenaufwand erhöht. Der wesentliche Nachteil von Worst-Case-Abschätzungsmethoden, die auf reeller Arithmetik beruhen, besteht darin, dass die exakten Worst-Case-Eigenschaften unterschätzt werden können. Die damit erzielten Ergebnisse sind zu optimistisch, so dass das Dimensionierungsergebnis die Spezifikationen verletzen kann.

Die hier dargestellte Methode garantiert die Einhaltung der Spezifikation und globale Konvergenz durch formale Methoden. Die formalen Methoden stützen sich auf affine Arithmetik. Sie ist eine Weiterentwicklung der Intervallarithmetik. Beide sind in mehreren Ansätzen zur Automatisierung im Analogschaltungsentwurf erfolgreich eingesetzt worden [7, 6, 3]. Ein erster Ansatz zur Dimensionierung von linearen Analogschaltungen mit intervallararithmetischen Methoden ist bereits in [8] veröffentlicht worden. Die theoretischen Grundlagen des hier beschriebenen Ansatzes sind für den Fall nichtlinearer statischer Schaltungen ausführlich in [9] beschrieben worden. Im vorliegenden Beitrag werden darüber hinaus die Erweiterungen für den Frequenzbereich beschrieben.

## 2 Das Dimensionierungsproblem

Bei der Dimensionierung von Analogschaltungen werden Entwurfsparameter  $d \in D$ , wobei  $D \subset \mathbb{R}^{n_d}$  der Entwurfsraum ist, für eine gegebene Schaltungstopologie und einen gegebenen Herstellungsprozess gesucht, so dass die Spezifikation erfüllt wird.

Der Herstellungsprozess wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung seiner statistischen Parameter  $s \in \mathbb{R}^{n_s}$  beschrieben. Wie in mehreren Veröffentlichungen vorgeschlagen [11], wird ein maximales Toleranz-

gebiet  $S \subset \mathbb{R}^{n_s}$  für die Prozessparameter angenommen.

Die Betriebsparameterbereiche  $T \subset \mathbb{R}^{n_t}$  definieren die maximal zulässigen Schwankungen der Betriebsbedingungen. Im folgenden werden sämtliche Schwankungen und Toleranzen zu  $Q = T \times S$  zusammengefasst.

Die Spezifikation setzt sich aus Nebenbedingungen, die erfüllt werden müssen, und Zielfunktionen, die zu minimieren (oder zu maximieren) sind, zusammen.

Nebenbedingungen gelten für den gesamten Betriebsbereich und alle zulässigen Prozesstoleranzen. Jegliche Nebenbedingungen können in der folgenden kanonischen Form ausgedrückt werden:

$$g(d, q) \leq 0 \quad \forall q \in Q \quad \text{mit} \quad g : D \times Q \rightarrow \mathbb{R}^{n_g} \quad (1)$$

Zielfunktionen müssen unter Einhaltung der Nebenbedingungen (1) minimiert (oder maximiert) werden. Zielfunktionen sind gegeben durch:

$$f : D \times Q \rightarrow \mathbb{R}^{n_f} \quad (2)$$

Im folgenden wird angenommen, dass alle Komponenten von  $f$  zu minimieren sind. Soll ein  $f_i$  maximiert werden, so ist es durch  $-f_i$  zu ersetzen. Falls  $n_f > 1$ , handelt es sich um ein Optimierungsproblem mit mehreren Zielfunktionen. Ein verbreiteter Ansatz, der hier verfolgt wird, ist, die Ziele zu vereinigen, indem ihnen Gewichte  $w_i$  zugewiesen werden und ihre Summe minimiert wird. Diese Summe muss weiterhin für alle  $q \in Q$  minimiert werden. Für das zu entwickelnde Werkzeug wird festgelegt, dass der Worst-Case jeder Zielfunktion, d. h. das Maximum jedes  $f_i$  auf  $Q$ , zu minimieren ist. Damit ergibt sich folgende vereinigte Optimierungsfunktion:

$$\text{ziel}(d) := \sum_{i=1}^{n_f} w_i \max_{q \in Q} f_i(d, q) \quad (3)$$

Die Lösung  $d_0$  des dieser Arbeit zugrunde zu legenden Dimensionierungsproblems lässt sich damit ausdrücken als:

$$d_0 = \operatorname{argmin}_{d \in D} \sum_{i=1}^{n_f} w_i \max_{q \in Q} f_i(d, q) \quad (4)$$

$$\text{mit: } g(d, q) \leq 0 \quad \forall q \in Q$$

Die Auswertung von  $g$  und der  $f_i$  beinhaltet bei der Dimensionierung von Analogschaltungen das Lösen eines nichtlinearen Algebra-Differentialgleichungssystems in Abhängigkeit von  $d$  und  $q$  (vgl. 4.3).

### 3 Affine Arithmetik

Um das Dimensionierungsproblem (4) zu lösen, ist es erforderlich, bestimmte Eigenschaften eines Lösungskandidaten  $d$  für alle Punkte eines Bereiches beweisen zu können. Bei Verwendung herkömmlicher Arithmetik ist dies nicht in einer endlichen Zahl an Schritten

möglich, da nur eine endliche Anzahl von Punkten des jeweiligen Bereiches untersucht werden kann. Mit Hilfe von Intervallarithmetik oder affiner Arithmetik ist es dagegen möglich, Eigenschaften von Mengen anstelle von Punkten zu berechnen. Ein zu untersuchender Bereich lässt sich damit durch eine endliche Zahl von Untermengen bearbeiten.

#### 3.1 Intervallarithmetik

Die Intervallarithmetik wurde von Moore [10] als Werkzeug zur Lösung von Bereichsproblemen entwickelt. Ein Intervall  $X$  ist definiert als Untermenge von  $\mathbb{R}$ :

$$X \equiv [x_u, x_o] := \{x \in \mathbb{R} : x_u \leq x \leq x_o\} \quad (5)$$

Die Menge aller reellen Intervalle wird mit  $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$  bezeichnet.

Für jede Operation  $f : \mathbb{R}^{n_f} \rightarrow \mathbb{R}$  können entsprechende Intervallerweiterungen  $F : \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^{n_f} \rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$  definiert werden. Eine zentrale Eigenschaft von Intervallerweiterungen ist die Inklusionsisotonie:

$$x \in X \Rightarrow f(x) \in F(X) \quad \wedge \quad X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y) \quad (6)$$

Die Inklusionsisotonie garantiert, dass  $F(X)$  alle Werte von  $f(x)$  für alle  $x \in X$  beinhaltet.

Die Ergebnisintervalle von  $F$  können breiter sein als das exakte Ergebnis. Dieser Überschätzung genannte Effekt betrifft nahezu alle praktischen intervallarithmetischen Rechnungen. Die Ursache der Überschätzung liegt darin, dass Korrelationen zwischen Intervallen in Definition (5) keine Berücksichtigung finden. Deshalb müssen zwei Intervalle bei der Verknüpfung durch eine Rechenoperation grundsätzlich so behandelt werden, als seien sie unkorreliert. Wo dies nicht zutrifft, kann Ergebnisüberschätzung auftreten.

#### 3.2 Affine Arithmetik

Von mehreren Ansätzen, die Intervallarithmetik um die Nutzung von Korrelationsinformationen zu erweitern, stellt die *affine Arithmetik* [2] den neuesten dar. In affiner Arithmetik wird eine Größe  $x$  durch eine *affine Form*  $\hat{x}$  beschrieben:

$$\hat{x} := x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \quad \text{mit} \quad -1 \leq \varepsilon_i \leq 1, x_i \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Da alle  $\varepsilon_i$  global sind, können sie in allen affinen Formen gemeinsam verwendet werden. Ein  $\varepsilon_i$  wird genau dann von zwei affinen Formen  $\hat{x}$  und  $\hat{y}$  gemeinsam verwendet, wenn  $x_i \neq 0$  und  $y_i \neq 0$ . Dadurch lassen sich lineare Korrelationen von Größen ausdrücken. Nichtlineare Korrelationen müssen durch eine lineare Korrelation und einen nicht korrelierten Teil dargestellt werden. In diesem Fall tritt auch bei affiner Arithmetik Überschätzung auf.

Umwandlungen zwischen Intervalldarstellungen der Form (5) und affinen Formen werden durch die Operatoren AA (für die Umwandlung eines Intervalls in eine

affine Form) und IA (Umwandlung einer affinen Form in ein Intervall) ermöglicht [2].

Die im folgenden beschriebenen Ansätze eignen sich grundsätzlich für eine Implementierung mit Intervall- oder affiner Arithmetik. Bei Verwendung affiner Arithmetik lassen sich jedoch wegen der Ausnutzung von Korrelationsinformationen erheblich bessere Ergebnisse erzielen.

## 4 Dimensionierung mit formalen Methoden

### 4.1 Globale Optimierung

Während ein Optimierungsalgorithmus, der auf herkömmlicher Arithmetik basiert, nur einzelne Punkte untersuchen und daher das globale Optimum nicht deterministisch in endlicher Zeit finden kann, lassen sich mit affiner Arithmetik als Intervallvektoren gegebene endliche Partitionen (= Teilmengen) des Suchraumes gleichzeitig behandeln. So könnte eine Implementierung mit affiner Arithmetik *Ziel* der vereinigten Zielfunktion *ziel* (3) eine untere Schranke für eine Partition ergeben, die über einer oberen Schranke einer anderen Partition liegt. Vorausgesetzt, dass beide Partitionen die Nebenbedingungen (1) erfüllen, kann erstere für die Lage des globalen Optimums ausgeschlossen werden, weil die Schranken, die mit affiner Arithmetik ermittelt werden, aufgrund der Inklusionsisotonie garantiert sind. Dieser Ansatz ist als Branch-and-Bound-Verfahren im Gebiet der kombinatorischen Optimierung bekannt. Mit Hilfe von affiner Arithmetik kann die Branch-and-Bound-Optimierung in der beschriebenen Weise auch auf kontinuierliche Probleme angewendet werden. Entsprechende global konvergente Algorithmen auf der Basis von Intervallarithmetik existieren bereits für Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen [13, 5]. In dem hier beschriebenen Ansatz wird dieses Konzept auf das Dimensionierungsproblem mit Nebenbedingungen (4) und auf affine Arithmetik erweitert.

Der Suchraum  $D$  eines Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen besteht aus Bereichen, die die Nebenbedingungen erfüllen, und solchen, die sie nicht erfüllen. Der Unterraum von  $D$ , der aus allen Bereichen, die die Nebenbedingungen erfüllen, besteht, wird als *Akzeptanzgebiet* bezeichnet. Da die Lösung des Dimensionierungsproblems (4) das globale Minimum von *ziel* im Akzeptanzgebiet ist, ist ein Hauptproblem, dieses zu identifizieren. Für diesen Zweck werden zwei Attribute *verifiziert* und *falsifiziert* für Teilintervalle von  $D$  definiert, die *wahr* ergeben, falls ihre Argumente beweisbar innerhalb bzw. außerhalb des Akzeptanzgebietes liegen. Es ist dabei zu beachten, dass *verifiziert*  $\not\Rightarrow$   $\neg$ *falsifiziert*, sondern dass *verifiziert* und *falsifiziert* sich gegenseitig ausschließen:

$$\begin{aligned} & \textit{verifiziert} \Rightarrow \neg \textit{falsifiziert} \\ \iff & \textit{falsifiziert} \Rightarrow \neg \textit{verifiziert} \end{aligned} \quad (8)$$

Es sei  $\mathcal{P}_{NF} \subset \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$  eine Menge nicht falsifizierter Partitionen, die Teilintervalle von  $D$  sind, so dass die Vereinigungsmenge aller  $P \in \mathcal{P}_{NF}$  eine Einschließung des Akzeptanzgebietes ist. Ausgehend vom Entwurfsraum  $D$  als einziger Partition in  $\mathcal{P}_{NF}$  werde  $\mathcal{P}_{NF}$  verfeinert, indem Partitionen unterteilt, falsifiziert und entfernt werden. Es werde ferner eine untere Schranke *g<sub>lmin</sub>* des globalen Minimums von *ziel* auf  $\mathcal{P}_{NF}$  berechnet, deren Wert jedes Mal neu bestimmt wird, wenn  $\mathcal{P}_{NF}$  verfeinert wird. Dadurch konvergiert *g<sub>lmin</sub>* gegen das globale Minimum von *ziel*, wenn die Partitionsgrößen verkleinert werden und  $\mathcal{P}_{NF}$  sich dem Akzeptanzgebiet nähert. Sobald eine Partition  $P_L$  gefunden wird, so dass die obere Schranke von *Ziel*( $P_L$ ) innerhalb einer spezifizierten Toleranzumgebung  $\epsilon_{tol}$  von *g<sub>lmin</sub>* liegt und *verifiziert*( $P_L$ ) zutrifft, terminiert der vorgeschlagene Algorithmus und gibt  $P_L$  zurück. Jeder Punkt in  $P_L$  löst das gestellte Dimensionierungsproblem innerhalb der Toleranzumgebung.

Der vorgeschlagene Algorithmus ist in Abbildung 1 als Pseudocode zusammengefasst.

```

glmin := min(Ziel(D))
PNF := {D}
until ∃ Ps ∈ PNF : (verifiziert(Ps)
    ∧ glmin ≤ max(Ziel(Ps)) < glmin + εtol) do
    P'NF := PNF
    ∀ P ∈ PNF do
        if (glmin ≤ max(Ziel(P)) < glmin + εtol
            ∨ min(Ziel(P)) = glmin)
            P'NF := P'NF \ {P}
            if (¬falsifiziert(P))
                (P1, P2) := teile(P)
                P'NF := P'NF ∪ {P1, P2}
            endif
        endif
    enddo
    PNF := P'NF
    glmin := minP ∈ PNF min(Ziel(P))
enddo
return Ps

```

Abbildung 1: Algorithmus zur globalen Optimierung

### 4.2 Worst-Case-Eigenschaftsberechnung

Unter Ausnutzung der Inklusionsisotonie der affinen Arithmetik lassen sich garantierte Schranken für die Worst-Case-Eigenschaften bestimmen. Dazu müssen Implementierungen in affiner Arithmetik *Ziel* und *G* herangezogen werden, um den Worst-Case-Bereich der vereinigten Zielfunktion *ziel* und der Nebenbedingungen *g* auf  $Q$  für ein Teilintervall von  $D$  zu berechnen. Da *Ziel* and *G* Intervalle oder affine Formen als Argumente erfordern, muss eine Intervalleinschließung  $Q^* \supseteq Q$  als Argument verwendet werden, damit die Inklusionsisotonie erhalten wird.

Mit Hilfe einer Implementierung mit affiner Arithmetik  $G$  für  $g$  lassen sich die Attribute *verifiziert* und *falsifiziert* für Intervallvektoren  $X \subseteq D$  und  $Y \subseteq Q^*$  definieren:

$$\text{verifiziert}(X, Y) := \max(G(X, Y)) \leq 0 \quad (9)$$

$$\text{falsifiziert}(X, Y) := \min(G(X, Y)) > 0 \quad (10)$$

Zwar werden durch die Inklusionsisotonie hinreichende Bedingungen erreicht, die die Einhaltung der Nebenbedingungen und das Erreichen des globalen Minimums innerhalb einer spezifizierten Toleranz (vgl. Abschnitt 4.1) zeigen. Überschätzungseffekte können jedoch verhindern, dass Lösungskandidaten über den gesamten Bereich  $Q^*$  verifiziert bzw. falsifiziert werden können. In diesem Fall muss  $Q$  in  $n_{qp}$  Partitionen  $Q_i$  mit  $Q = \bigcup_{i=1}^{n_{qp}} Q_i$  unterteilt werden, und es werden entsprechende Intervalleinschließungen  $Q_i^* \supseteq Q_i$  bestimmt.

Definition (3) verlangt, dass für die vereinigte Zielfunktion *ziel* das Maximum jedes  $f_i$  auf  $Q$  bestimmt wird. Daher müssen ihre Schranken wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \min(\text{Ziel}(X)) &:= \sum_{i=1}^{n_f} w_i \max_{j=1}^{n_{qp}} \min(F_i(X, Q_j^*)) \\ \max(\text{Ziel}(X)) &:= \sum_{i=1}^{n_f} w_i \max_{j=1}^{n_{qp}} \max(F_i(X, Q_j^*)) \end{aligned} \quad (11)$$

wobei  $F_i$  eine Implementierung mit affiner Arithmetik für  $f_i$  ist.

### 4.3 Lösen der Netzwerkgleichungen

In einem Dimensionierungsproblem beziehen sich die meisten Nebenbedingungen und Optimierungsziele auf elektrische Eigenschaften, die aus den Knotenspannungen und Zweigströmen der Schaltung berechnet werden können. Daher müssen diese zuerst aus  $d$  und  $q$  (vgl. Abschnitt 2) berechnet werden, um die Nebenbedingungen und Optimierungsziele auszuwerten. Es ist entscheidend, dass dabei durch Verwendung von Intervallen oder affinen Formen die Inklusionsisotonie gewährleistet wird (6), weil dies in Abschnitt 4.2 vorausgesetzt wurde.

#### 4.3.1 Nichtlineares statisches Verhalten

Um nichtlineares statisches Verhalten zu analysieren, wird der verbreitete Ansatz verwendet, das Algebra-Differentialgleichungssystem, das sich aus der Netzwerkanalyse ergibt, in ein nichtlineares Gleichungssystem umzuwandeln, indem alle Zeitableitungen entfernt werden. Im Allgemeinen ist ein solches System gegeben als  $f(x, d, q) = 0$  mit  $f: \mathbb{R}^{n_x} \times D \times Q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  und  $x$  als Vektor der Spannungen und Ströme. Im folgenden sei  $F$  eine Intervallerweiterung von  $f$ ,  $P$  eine Partition des Entwurfsraumes, die als Intervallvektor  $P \subseteq D$  (vgl. Abschnitt 4.1) gegeben ist,  $Y \subseteq Q^*$  (vgl. Abschnitt 4.2)

und  $X \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^{n_x}$ .  $X_L \subset \mathbb{R}^{n_x}$  sei die exakte Lösung auf  $P$  und  $Y$ :

$$X_L := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \exists d \in P, q \in Y : f(x, d, q) = 0\} \quad (12)$$

Der vorgeschlagene Algorithmus berechnet eine einschließende Hülle  $X_H \supseteq X_L$ ,  $X_H \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^{n_x}$ .  $X_H$  wird dann zur Auswertung von  $G$  und der  $F_i$  in den Ausdrücken in Abschnitt 4.2 verwendet. Dadurch wird die Inklusionsisotonie gewährleistet.

Aus der Inklusionsisotonie von  $F$  lässt sich folgern:

$$\exists x \in X, d \in P, q \in Y : f(x, d, q) = 0 \Rightarrow 0 \in F(X, P, Y) \quad (13)$$

Das ist äquivalent zu:

$$0 \notin F(X, P, Y) \Rightarrow X \cap X_L = \emptyset \quad (14)$$

Diese Implikation kann als einfacher Test verwendet werden, der es ermöglicht, Teilintervalle von  $X_H$  zu verwerfen, die sich beweisbar nicht mit  $X_L$  schneiden.

Der Test (14) basiert auf Intervallarithmetik. Schärfere Bedingungen können mit Hilfe der affinen Arithmetik aufgestellt werden. Im folgenden wird ein Newton-Operator für affine Arithmetik abgeleitet, der eine mehrdimensionale Erweiterung des Gleichungslösungsalgorithmus ist, der für den eindimensionalen Fall in [2] vorgeschlagen worden ist.

Die Schnittmenge von  $X$  und  $X_L$  lässt sich ausdrücken durch:

$$X \cap X_L = \{x \in X : \exists d \in P, q \in Y : f(x, d, q) = 0\} \quad (15)$$

Sie lässt sich gleichermaßen mit den affinen Formen  $\hat{x} = AA(X)$ ,  $\hat{p} = AA(P)$  und  $\hat{y} = AA(Y)$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} X \cap X_L &= \{x : \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in [-1, 1] : \\ &x = \hat{x} \wedge f(\hat{x}, \hat{p}, \hat{y}) = 0\} \end{aligned} \quad (16)$$

Wird  $f$  in (16) durch die Näherung  $\hat{f}$  (vgl. Abschnitt 3.2) ersetzt, ergibt sich die Einschließung  $X^* \supseteq X \cap X_L$ :

$$\begin{aligned} X^* &:= \{x : \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in [-1, 1] : \\ &x = \hat{x} \wedge \hat{f}(\hat{x}, \hat{p}, \hat{y}) = 0\} \end{aligned} \quad (17)$$

Die schmalste Intervalleinschließung  $X^{**} \supseteq X^*$  lässt sich berechnen durch:

$$X^{**} = x_0 + \sum_{i=1}^n [\varepsilon_i^{\min}, \varepsilon_i^{\max}] |x_i| \quad (18)$$

wobei die Grenzen für die  $\varepsilon_i$  gegeben sind durch:

$$\varepsilon_i^{\min, \max} = \min(\pm \varepsilon_i) \quad (19)$$

mit:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in [-1, 1] \wedge \hat{f}(\hat{x}, \hat{p}, \hat{y}) = 0$

Da  $\hat{f}$  einen Vektor aus affinen Form ergibt, ist (19) ein lineares Optimierungsproblem. Daher müssen  $2n_x$  lineare Optimierungsprobleme gelöst werden, um  $X^{**}$  zu bestimmen.

Das Kriterium:

$$X^{**} = \emptyset \Rightarrow X \cap X_L = \emptyset \quad (20)$$

ist eine Erweiterung von (14) auf die affine Arithmetik. Es ist der Version mit Intervallarithmetik überlegen, da Vektoren aus affinen Formen engere Einschließungen beschreiben können als Intervallvektoren [2].

Die Beziehung  $X^{**}(\text{AA}(X)) \supseteq X \cap X_L$  lässt sich verwenden, um  $X_H$  zu verkleinern oder um zu zeigen, dass ein Teilintervall von  $X_H$  sich nicht mit  $X_L$  schneidet. Ausgehend von einer Startereinschließung  $X_H^0 \supseteq X_L$ , die sich einfach aus trivialen Schranken für die Knotenspannungen und Zweigströme bestimmen lässt, können rekursiv nacheinander (14) und  $X^{**}$  angewendet werden und  $X_H$  in Teilintervalle aufgeteilt werden. Dadurch kann eine Konvergenz zu  $X_L$  erreicht werden. Diese Aufteilung wird so lange abwechselnd mit der in 4.1 dargestellten Aufteilung von  $P$  durchgeführt, bis das in 4.1 beschriebene Abbruchkriterium erfüllt ist.

Das beschriebene Vorgehen liefert mit  $X_H$  garantierte Schranken für die Schwankungen des Arbeitspunktes der Schaltung auf  $P$  und  $Y$ . Diese Schranken lassen sich sowohl zur Auswertung von Nebenbedingungen, die die Lage des Arbeitspunktes selbst einschränken, als auch für solche, die eine Abhängigkeit des Arbeitspunktes als Funktion einer Eingangs-, Betriebs- oder Umgebungsvariablen fordern, heranziehen. Dadurch lässt sich eine Schaltung so dimensionieren, dass eine gegebene statische Kennlinie eingehalten wird.

### 4.3.2 Dynamisches Kleinsignalverhalten

Zur Analyse des dynamischen Kleinsignalverhaltens im Frequenzbereich wird das sich aus der Netzwerkanalyse ergebende Algebro-Differentialgleichungssystem zunächst linearisiert. Im Gegensatz zu auf diskreten Arbeitspunkten basierenden Dimensionierungsverfahren kann bei dem hier beschriebenen Ansatz jedoch keine Linearisierung in einzelnen Arbeitspunkten vorgenommen werden, sondern es muss eine Linearisierung erzeugt werden, die garantiert auf ganz  $P$  und  $Y$  Gültigkeit hat, damit die Inklusionsisotonie erhalten wird. Dazu sind die in Abschnitt 4.3.1 berechneten Schranken für die Schwankungen des Arbeitspunktes heranzuziehen.

Aus der so erzielten Linearisierung werden durch Laplace-Transformation Kleinsignaleigenschaften wie Übertragungsfunktionen bestimmt. Die Spezifikation sieht meist Frequenzintervalle für die Kleinsignaleigenschaften vor. Diese Intervalle werden als Teil der Betriebsbereichsparameter  $T$  (vgl. Abschnitt 2) behandelt. Durch die Überführung in den Frequenzbereich ergibt sich ein lineares Gleichungssystem in komplexen Intervallen bzw. affinen Formen. Dieses sei für den intervallwertigen Fall gegeben als:

$$(A_{Re} + jA_{Im})(X_{Re} + jX_{Im}) = (B_{Re} + jB_{Im}) \quad (21)$$

Dabei sind  $A_{Re} \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$  der Realteil der intervallwertigen, komplexen Systemmatrix  $A$  und  $X_{Re}, B_{Re} \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}^n$  die Realteile des Lösungsvektors  $X$  und der rechten Seite  $B$ .

Entsprechendes gilt für die Imaginärteile. Zur Lösung mit Standardmethoden der linearen Algebra wird dieses komplexe Gleichungssystem in das nachfolgende reelle Gleichungssystem überführt [4]:

$$\begin{pmatrix} A_{Re} & -A_{Im} \\ A_{Im} & A_{Re} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{Re} \\ X_{Im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{Re} \\ B_{Im} \end{pmatrix} \quad (22)$$

### 4.3.3 Transientes Großsignalverhalten

Das in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene Vorgehen umfasst nicht die Analyse des dynamischen Großsignalverhaltens im Zeitbereich. Spezifikationsbedingungen für das transiente Verhalten, z. B. für Anstiegszeiten, müssen daher als explizite Analysegleichungen formuliert werden. Der dargestellte Ansatz kann jedoch prinzipiell auf allgemeine Spezifikationen im Zeitbereich ausgedehnt werden.

## 5 Beispiel

Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems wurde ein experimentelles Dimensionierungswerkzeug auf Basis unseres Ansatzes implementiert.

Im Folgenden wird die Dimensionierung eines zweistufigen Operationsverstärkers demonstriert. Die Topologie des Verstärkers ist in Abbildung 2 dargestellt.

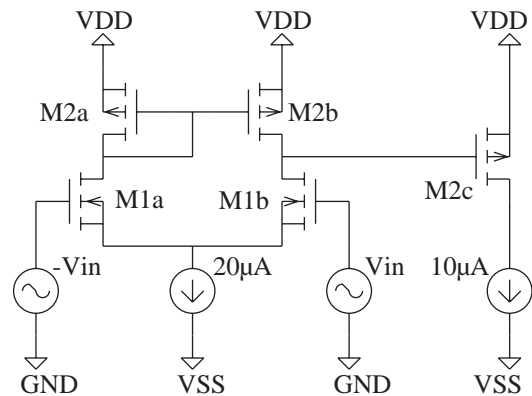


Abbildung 2: Zweistufiger Operationsverstärker

Die Transistoren sollen so dimensioniert werden, dass der Verstärker eine AC-Verstärkung  $A_0$  von mindestens 80 dB bei 0 Hz und einer Bandbreite von mindestens 1 MHz liefert. Das Frequenzintervall von 0 bis 1 MHz stellt damit einen Betriebsparameterbereich dar. Ferner soll die Transistorfläche auf maximal 5 % über dem globalen Minimum minimiert werden.

Der Bias-Strom aller Transistoren sei als 10 µA vorgegeben. Zur Vermeidung eines systematischen DC-Offset-Fehlers müssen dann nicht nur die Transistoren der Eingangsstufe  $M_{1a}$  und  $M_{1b}$  sowie  $M_{2a}$  und  $M_{2b}$  gleiche Abmessungen haben, sondern es müssen auch der Transistor  $M_{2c}$  der zweiten Stufe und  $M_{2a}$  bzw.  $M_{2b}$  gleiche Kanallängen und -weiten haben. Durch Ausnutzung der sich daraus ergebenden Nebenbedingungen sowie der Eigenschaften des verwendeten Spice-

Level-1-Transistormodells konnten die Entwurfsparameter auf die Kanalweiten  $W_1 = W_{1a}$  und  $W_2 = W_{2a}$  reduziert werden. Für die Kanallängen wurden Minimalabmessungen von  $10\ \mu\text{m}$  angenommen, da sich diese in Verbindung mit dem Level-1-Modell und dem vorliegenden Problem bei flächenoptimalem Entwurf automatisch einstellen. Damit lässt sich das resultierende Optimierungsproblem formal wie folgt darstellen:

$$[W_1, W_2] = \underset{W_1, W_2}{\operatorname{argmin}} (3\operatorname{area}(M_1) + 2\operatorname{area}(M_2))$$

$$\text{mit: } A_0 \geq 80\ \text{dB} \wedge \frac{A(f)}{A_0} \geq -3\ \text{dB} \quad \forall f \in [0, 1\ \text{MHz}] \quad (23)$$

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse für  $W_1$  und  $W_2$ . Die Zeilen  $A_0$ ,  $A(f)/A_0$  und  $\operatorname{area}/\operatorname{area}_{\min}$  geben in der Spalte *Formale Methoden* die garantierten Schranken an, die unser Werkzeug für die erreichte AC-Verstärkung bei 0 Hz, den Amplitudenabfall im spezifizierten Frequenzintervall und für die Abweichung vom globalen Minimum liefert. Den Zahlenwerten ist zu entnehmen, dass das Ergebnis garantiert die spezifizierten Nebenbedingungen und die geforderte 5%-Maximalabweichung vom globalen Minimum erfüllt. In der Spalte *Spice* sind zum Vergleich die Ergebnisse einer Spice-Simulation über die sich aus den Ergebnisintervallen für  $W_1$  und  $W_2$  ergebenden Ecken eingetragen. Im Gegensatz zu den von unserem Algorithmus erzielten Ergebnissen bieten diese jedoch aufgrund der Natur von Eckenanalysen keine Garantie.

	Formale Methoden	Spice
$W_1/\mu\text{m}$	[15.46, 15.54]	
$W_2/\mu\text{m}$	[39.32, 39.66]	
$A_0/\text{dB}$	> 80.01	(>) 80.02
$A(f)/A_0/\text{dB}$	> -2.95	(>) -2.81
$\operatorname{area}/\operatorname{area}_{\min}$	< 1.033	
Newton-Operationen	357 024	

Tabelle 1: Ergebnis der Dimensionierung

## 6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde ein neuartiger Ansatz zur Dimensionierung analoger Schaltungen unter Berücksichtigung von Parameterschwankungen dargestellt. Es wurde ein Algorithmus vorgeschlagen, der formale Methoden auf Basis affiner Arithmetik verwendet. Zur Lösung der nichtlinearen Netzwerkgleichungen mit Parameterschwankungen wurde ein neuartiger mehrdimensionaler Newton-Operator für affine Arithmetik definiert. Zur Linearisierung des Differentialgleichungssystems wurde ein neuer, arbeitsbereichsweiser Ansatz eingeführt. Die linearisierten Systeme werden im Frequenzbereich mit den Methoden der affinen Arithmetik gelöst.

Der vorgeschlagene Algorithmus erzeugt Ergebnisse, die die Spezifikation auf dem gesamten Arbeitsbereich und für alle zulässigen Herstellungsprozess-toleranzen garantiert erfüllen. Dadurch wird die Robustheit gegenüber einer Nominalpunktdimensionierung verbessert. Nach dem Wissen der Autoren ist dieses der erste Ansatz, der das globale Optimum eines Dimensionierungsproblems deterministisch findet, ohne die Art der Modellierung einzuschränken. Das im vorigen Abschnitt gezeigte Beispiel demonstriert die Funktionsfähigkeit des Ansatzes.

## Literatur

- [1] COMBA, J. L. D. ; STOLFI, J. : Affine Arithmetic and its Applications to Computer Graphics. In: *Anais do VI Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens (SIBGRAPI'93)*, 1993, S. 9–18
- [2] DE FIGUEIREDO, L. H. ; STOLFI, J. : *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, Brazil, 1997 (Brazilian Mathematics Colloquium monographs)
- [3] FEMIA, N. ; SPAGNUOLO, G. : True Worst-Case Circuit Tolerance Analysis Using Genetic Algorithms and Affine Arithmetic. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* 47 (2000), September, Nr. 9, S. 1285–1296. – ISSN 1057–7122
- [4] GOLUB, G. H. ; LOAN, C. F. V. : *Matrix Computations*. 3rd Edition. Johns Hopkins University Press, 1996
- [5] HANSEN, E. : Global Optimization Using Interval Analysis–The Multi-Dimensional Case. In: *Numerische Mathematik* 34 (1980), Nr. 1, S. 247–270. – ISSN 0029–599X
- [6] HEDRICH, L. ; BARKE, E. : A Formal Approach to Verification of Linear Analog Circuits with Parameter Tolerances. In: *Design, Automation and Test in Europe*, 1998. – ISBN 0–8186–8359–7, S. 649–654
- [7] LEENAERTS, D. M. W. : Application of Interval Analysis for Circuit Design. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 37 (1990), Juni, Nr. 6, S. 803–807. – ISSN 0278–0070
- [8] LEMKE, A. ; HARTONG, W. ; BARKE, E. : Dimensionierung analoger Schaltungen unter Verwendung intervallarithmetischer Verfahren. In: *5. ITG/GMM-Diskussionssitzung Entwicklung von Analogschaltungen mit CAE-Methoden*, 1999. – ISSN 0944–3819, S. 279–283
- [9] LEMKE, A. ; HEDRICH, L. ; BARKE, E. : Analog Circuit Sizing Based on Formal Methods Using Affine Arithmetic. In: *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design*, 2002. – ISBN 0–7803–7607–2, S. 486–489
- [10] MOORE, R. E. : *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966
- [11] OCHOTTA, E. S. ; MUKHERJEE, T. ; RUTENBAR, R. A. ; CARLEY, L. R. : *Practical Synthesis of High-Performance Analog Circuits*. Kluwer Academic Publishers, 1998. – ISBN 0–7923–8237–4
- [12] ROMEO, F. ; SANGIOVANNI-VINCENTELLI, A. F. : A Theoretical Framework for Simulated Annealing. In: *Algorithmica* 6 (1991), Nr. 3, S. 302–345. – ISSN 0178–4617
- [13] SKELBOE, S. : Computation of Rational Interval Functions. In: *BIT* 14 (1974), Nr. 1, S. 87–95