Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

А.І.Кононенко, І.С.Храповицький, Л.І.Щелкунова

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тексти лекцій

Харків ХДТУБА 2010

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

А.І. Кононенко, І.С. Храповицький, Л.І. Щелкунова

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Рекомендовано
методичною радою університету
в якості текстів лекцій
для студентів спеціальностей: 6.030502; 6.030504;6.030508; 6.030601

Харків 2010

К- 64
УДК 519.85

Рецензенти:
Ж.А. Крутовой, канд. техн.наук, професор каф. вищої математики Харківського державного університету харчування та торгівлі (ХДУХТ)
А.П. Харченко, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. вищої математики Харківського державного технічного університету будівництва та архітектури (ХДТУБА)

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 7 від 26.03.2009
Затверджено методичною радою університету,
протокол №1 від 30.09.09

Автори: А.І. Кононенко
І.С. Храповицький
Л.І. Щелкунова

К - 64 А.І. Кононенко, І.С. Храповицький, Л.І. Щелкунова. Математичне програмування: Тексти лекцій – Харків, ХДТУБА, 2010. – 114 с.

Викладено теоретичні та практичні основи розділів математичного програмування: лінійне, нелінійне, динамічне та стохастичне програмування. Наведено методи розв'язання економічних задач: симплекс-метод, двоїстий симплекс-метод, метод Гоморі, множників Лагранжа, рівняння Куна-Таккера, Беллмана. В текстах лекцій наведено приклади використання кожного методу. Теоретичний матеріал супроводжується питаннями для самоперевірки. Подано перелік варіантів завдань для самостійної роботи з окремих розділів курсу.

Призначено для студентів економічних спеціальностей, що навчаються за напрямами підготовки бакалаврів 6.030502; 6.030504;6.03058; 6.030601.

Іл.:8; Табл.:57; бібліогр.назв: 10.

Вступ

Нові досягнення математики з урахуванням розвитку персональних комп’ютерів знаходять широке застосування в економічних дослідженнях. Накопичений достатній досвід постановки і розв’язання таких задач математичними методами. Особливо успішно розвиваються методи оптимального планування та керування, які складають сутність математичного програмування. Математичне програмування складається з лінійного, нелінійного (опукле та квадратичне), динамічного та стохастичного програмування.

Окремі задачі лінійного програмування (ЛП) сформульовані і розв’язані в 1930р. економістом А.Н.Толстим і в 1931 р. угорським математиком Д.Егерварі, метод якого одержав назву "угорського" методу. Систематичне дослідження задач ЛП та розробка загальних методів їх розв’язання розпочаті в роботах Л.В.Канторовича (1939 р.), який запропонував загальний метод розв’язання таких задач – метод розв’язувальних множників. Він же сумісно з М.К.Гавуріним в 1949 р. розробив метод потенціалів розв’язання транспортних задач. У наступних роботах російських та українських математиків та економістів В.С. Немчінова, В.В.Новожилова, А.Л.Пурє, А.Брудно, А.Г. Агангебяна, Д.Б.Юдіна, Е.Г.Гольдштейна та інших одержали подальший розвиток як математична теорія ЛП, так і застосування її методів для дослідження різних економічних проблем.

Методам лінійного програмування присвячено багато робіт зарубіжних вчених. В 1949 р. американським вченим Хічкоком поставлена транспортна задача, Дж. Данцигом був розроблений симплекс-метод розв’язання задачі ЛП, Д.Гейлом, Г.У. Куном, А.У. Таккером сформульована теорема двоїстості та розроблена теорія розв’язання задач опуклого програмування. Крім того, французьким математиком Лагранжем та американцем Беллманом розроблені методи множників і теорія функціональних рівнянь розв’язання відповідно задач опуклого та динамічного програмування.

Проникненню ідей оптимізації і оптимального керування в багатьох галузях наукових досліджень в різні сфери керування соціально-економічними процесами сприяли два фактори.

По-перше, переважна більшість самих різних задач керування та оптимізації зводяться до "стандартної" математичної задачі: знайти серед елементів x з заданої множини X той елемент $x \in X$, який доставляє найменше (найбільше) значення заданій функції $f(x)$. Як бачимо, задачі, які виникають в цій області є, як правило, багатоваріантні.

По-друге, за останні роки розроблено багато ефективних методів розв’язання математичних задач оптимізації на ЕОМ для широких класів множини X і функцій $f(x)$.

Розділ 1 ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Предмет математичного програмування, його значення в розв'язанні задач оптимізації та керування

Математичне програмування (МП) – область математики, яка розробляє теорію і чисельні методи розв'язання багатовимірних екстремальних задач. Математично це зводиться до знаходження екстремуму функції кількох змінних з обмеженнями або без них на область визначення цих змінних.

Оскільки випускники вузів з економічних спеціальностей у подальшій практичній діяльності будуть зустрічатися з математичними методами оптимізації головним чином як користувачі, а не розробники, то в лекціях основна увага приділяється застосуванню математичних методів в економіці, а не їх теоретичному обгрунтуванню. Більш поглиблене математичне обгрунтування методів оптимізації можна знайти в спеціальній літературі.

При вивченні математичного програмування студент повинен володіти знаннями загальних розділів курсу вищої математики (лінійної алгебри, диференціального числення функції однієї та кількох змінних, невизначені інтеграли, теорії ймовірностей та математичної статистики), а також уміти користуватися ПЕОМ.

1.2 Поняття математичної моделі економічних задач та вимоги до неї

Математична модель – це абстракція реального економічного явища, яка записана в математичних символах, що встановлює співвідношення між сукупністю змінних – факторів керування явищем.

Модель задачі МП містить:

1) сукупність невідомих величин $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, діючи на які, можна удосконалювати дану економічну систему;

2) функцію, для якої треба знайти мінімальне або максимальне значення в умовах економічних та технологічних можливостей і яку називають **цільовою** (функцією цілі); вона є показником ефективності або критерієм оптимальності економічного процесу. Функцію цілі позначимо через *Z(X)*;

3) умови, які накладаються на невідомі змінні, утворюють **систему обмежень**. Вони випливають із умов виробничих та технологічних процесів. Математично обмеження виражаються у вигляді рівнянь та нерівностей.

Їх сукупність утворює область допустимих розв'язків (область економічних можливостей) вигляду: $\varphi_i(x)\left\{\le,\ge,=\right\}\ b_i(i=\overline{1,m})$.

Об'єднання всіх умов (обмежень), які накладаються на невід'ємні величини $x_1, x_2, ..., x_k$ задачі, позначимо символом Ω ($X < \Omega$).

За таких позначень математична модель задачі математичного програмування має вигляд: знайти

$$max\ (min)\ \ Z(X)\ ,\quad X = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.1}$$

при обмеженнях

$$\varphi_i(x)\left\{\le, \ge, =\right\}\quad b_i (i = \overline{1, m})\,. \tag{1.2}$$

Крім цих обмежень, в економічних задачах, як правило, на невідомі величини накладаються умови невід'ємності $x_j \ge 0$, $j = \overline{1, n}$ і цілочисловості.

Враховуючи все це, розв'язання задачі МП можна розбити на наступні етапи:

1) побудова математичної моделі;
2) знаходження оптимального розв'язку задачі одним із математичних методів;
3) економічне тлумачення одержаного результату.

Найбільш складний з цих етапів – побудова математичної моделі. Це викликано не тільки тим, що показник ефективності системи можна вибрати різним, залежно від керівника з його досвідченістю, вмінням та знаннями, але й слушного вибору та ув'язки між собою в умовах даного процесу всіх кількісних змінних, які впливають на систему.

Перед побудовою математичної моделі необхідно якісно вилучити найбільш важливі фактори x_j, які впливають на процес, а також установити закономірність, якій вони підпорядковуються. Часто з'являється бажання побудувати таку математичну модель, в якій враховувалось би велика кількість вхідних даних. Але, якщо вплив багатьох із них на процес незначний, то це тільки розширює вимірність задачі, що ускладнює знаходження її розв'язку і не дає кращого розв'язку.

1.3 Основні задачі оптимізації

За властивостями системи обмежень і цільової функції задачі оптимізації класифікують наступним чином:

1 Задачі безумовної оптимізації або задачі без обмежень – в них не накладаються обмеження на кількісні змінні.

2 Задачі умовної оптимізації або задачі з обмеженнями – в цих задачах на кількісні змінні накладаються обмеження.

3 Задачі оптимізації при неповних даних – в них функція цілі або система обмежень залежать від деякого параметру *р* (числового, векторного), значення якого повністю невизначено на момент розв'язання задачі.

В залежності від типу задачі застосовують різні методи її розв'язання. В задачах економіки частіше всього зустрічаються задачі умовної оптимізації. Тому далі всі міркування будуть відноситися до цього типу задач.

Наведемо приклад побудови математичної моделі економічної задачі.

1.4 Задача про найкращий розподіл ресурсів (задача про максимальну рентабельність підприємства)

Однією із задач оптимального виробничого планування є задача досягнення максимальної рентабельності підприємства при виробництві продукції із запасів сировини різних видів, яку має підприємство. Наведемо схему такої задачі.

Нехай для виготовлення кожного із *n* видів продукції використовується *m* видів сировини, при чому витрати *i*-го виду сировини $(i=\overline{1,m})$ на одиницю *j*-го виду продукції $(j=\overline{1,n})$ складає a_{ij} одиниць. Відому матрицю коефіцієнтів $A=[a_{ij}]$ називають **технологічною матрицею**. Кількість кожного виду сировини обмежена і складає відповідно $b_1, b_2, ..., b_m$ одиниць. Вектор $B=\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ називають **вектором ресурсів**. Відома також ціна реалізації $c_j (j=\overline{1,n})$ одиниці продукції *j*-го виду (прибуток від одиниці продукції).

Треба визначити, скільки одиниць кожного виду продукції повинно виробити підприємство, щоб забезпечити максимум обсягу реалізації (прибутку) при відомих обмеженнях ресурсів, які воно має.

Побудуємо математичну модель задачі.

Виходячи із складових математичної моделі, визначимо спочатку ті кількісні фактори, які впливають на кінцевий результат. Звичайно, це буде кількість виробленої продукції кожного виду. Тому позначимо через

x_1 – кількість одиниць продукції 1-го виду, виробленої підприємством;

x_2 – кількість одиниць продукції 2-го виду, виробленої підприємством;

……………………………………………………………………………

x_j – кількість одиниць продукції j-го виду, виробленої підприємством;

……………………………………………………………………………

x_n – кількість одиниць продукції *n*-го виду, виробленої підприємством.

Із умови задачі виходить, що показником ефективності роботи підприємства є максимум обсягу реалізації (прибутку) . Тому цільова функція має вигляд

$$Z(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_jx_j+...+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

де c_jx_j – вартість всієї продукції j-го виду.

Оскільки виробництво продукції проходить при обмежених ресурсах, то запишемо ці обмеження у математичному вигляді. Кількість одиниць сировини *i*-го виду, яка витрачена на виробництво всієї продукції j-го виду, дорівнює $a_{ij}x_j$. Кількість одиниць сировини *i*-го виду, яка витрачена на виробництво всіх видів продукції, дорівнює

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{ij}x_j+...+a_{in}x_n$$

і за умовою задачі обмежена b_i одиницями, тобто виконується нерівність

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n \le b_i.$$

Тому для кожного виду сировини повинні виконуватися нерівності:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m.$$

Крім того, зрозуміло, що всі кількісні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ невід'ємні, тобто $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$.

Таким чином, математична модель задачі про найкращий розподіл ресурсів, запишеться у вигляді: знайти максимум лінійної функції

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.3}$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0. \tag{1.5}$$

1.5 Загальна задача математичного програмування (МП) та її класифікація. Допустимі, опорні та оптимальні розв'язки

Як було зазначено, у загальному вигляді задача МП математично формулюється так: знайти максимум (мінімум) цільової функції Z(*X*) при обмеженнях $\varphi(x)\{\le, \ge, =\}\ b_i(i = \overline{1,m})$. Виходячи з економічних, фізичних або інших міркувань, на змінні $x_j(j = \overline{1,n})$ накладаються умови цілочисловості, невід'ємності та інше. Таким чином, математична модель загальної задачі МП формулюється так: знайти

$$\max\ (\min)\, Z(X); \tag{1.6}$$

$$\varphi_i(X)\,\{\le, \ge, =\}\, b_i\ (i = \overline{1,m}), \tag{1.7}$$

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \tag{1.8}$$

X – довільний.

У залежності від особливостей цільової функції Z(*X*) і функцій $\varphi_i(X)$, які задають обмеження, задачі МП поділяються на ряд типів:

1 **Задачі лінійного програмування** (ЗЛП), в яких цільова функція і система обмежень лінійні відносно змінних x_j, що входять в математичну модель задачі .

До задач лінійного програмування відносяться практично всі задачі оптимального планування та керування виробництвом:

а) задача про максимальну рентабельність підприємства;

б) загальна задача виробничого планування з врахуванням технологій;
в) задача про оптимальне використання обладнання;
г) задача про складання графіка ремонту інструмента (задача про постачальника);
д) задача про оптимальний розкрій матеріалів (мінімізація відходів);
е) транспортна задача;
ж) задача про призначення та інші.

2 Будь - яка інша задача МП, яка не є ЗЛП, має назву **задачі нелінійного програмування** (ЗНП).

Для неї характерно те, що або $Z(X)$, або яка - небудь $\varphi_i(X)$ є нелінійними функціями. Частіше всього зустрічаються задачі, в яких обмеження $\varphi_i(X)$ – лінійні функції, а цільова функція – квадратична функція змінних x_j $(j=\overline{1,n})$. Така задача МП називається **задачею квадратичного програмування**.

3 **Задачі динамічного програмування** – це задачі багатоетапних керованих процесів. До цих задач відносяться:
а) задача про раціональне використання ресурсів виробництва;
б) задача про оптимальний розподіл виробничих завдань між підприємствами;
в) задача визначення найкоротших відстаней по заданій сітці та інші.

4 **Задачі стохастичного програмування** – це задачі, в яких параметри, що входять в цільову функцію, або в обмеження є випадковими величинами, або якщо існує необхідність приймати рішення в умовах неповної або недостатньої інформації. До цих задач можна віднести задачі в умовах конфліктних ситуацій, неповної інформації та інші.

Дамо деякі означення, які відносяться до розв'язку задачі МП.

Означення . Сукупність чисел $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, які задовольняють обмеженням задачі, називається **допустимим розв'язком** (або планом).

Означення . Множина всіх припустимих розв'язків задачі МП називається **областю допустимих розв'язків** (область економічних можливостей).

Означення . Допустимий розв'язок $X=\{x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\}$, при якому цільова функція (1.6) приймає максимальне (мінімальне) значення, називається **оптимальним розв'язком (оптимальним планом).**

Розділ 2 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Загальна задача лінійного програмування (ЛП) ті її форми запису
2.2 Властивості розв'язків задачі ЛП
2.3 Графічний спосіб розв'язння задачі ЛП
2.4 Симплексний метод розв'язання задачі ЛП
2.4.1 Побудова початкового опорного розв'язку
2.4.2 Критерій оптимальності опорного розв'язку
2.4.3 Побудова наступного опорного розв'язку
2.5 Розширена М – задача

2.1 Загальна задача лінійного програмування (ЛП) та її форми запису

Загальною задачею ЛП (ЗЗЛП) називається задача, яка формулюється так: знайти максимум або мінімум лінійної функції

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,k_1}), \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{k_1+1,k_2}), \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad (i=\overline{k_2+1,m}), \tag{2.4}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n_1}), \tag{2.5}$$

$$x_j - \textit{довільні} \quad (j=\overline{n_1+1,n}), \tag{2.6}$$

де c_j, a_{ij}, b_j – задані дійсні числа, $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – план задачі.

Наведемо різні форми загальної задачі ЛП.

Симетрична форма ЗЛП

Задачу ЛП називають **симетричною (стандартною)**, якщо вона може бути записана у вигляді: знайти максимум лінійної функції

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.7}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{2.8}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}). \tag{2.9}$$

Канонічна форма ЗЛП

Задачу ЛП називають **канонічною**, якщо вона записана у вигляді:
знайти максимум лінійної функції

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.10}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{2.11}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}). \tag{2.12}$$

Зауваження. У тих випадках, коли необхідно знайти мінімум функції $Z(X)$, можна перейти до знаходження максимуму функції

$$Z_1 = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n,$$

тоді

$$\min Z(X) = -\max Z_1(X).$$

Канонічну ЗЛП можна записати у векторному вигляді: знайти максимум

$$Z(X) = CX \tag{2.13}$$

при обмеженнях

$$A_1X_1 + A_2X_2 + ... + A_nX_n = A_0 \tag{2.14}$$

$$X \ge 0, \tag{2.15}$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = (c_1, c_2, ..., c_n), \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} (j = \overline{1,n}), \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Для переходу від загальної задачі ЛП до канонічної треба обмеження - нерівності перетворити в обмеження-рівності . Це легко робиться введенням так званих допоміжних невід'ємних змінних. Якщо маємо обмеження в формі нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i,$$

то його можна записати у формі рівності :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i,$$

де x_{n+1} – допоміжна невід'ємна змінна ($x_{n+1} \ge 0$).

Якщо маємо обмеження

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i,$$

то його перетворюють на рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+2} = b_i,$$

де x_{n+2} – допоміжна невід'ємна змінна ($x_{n+2} \ge 0$).

Для того, щоб задача (2.1) – (2.6) мала розв'язок, за теоремою Кронекера - Капеллі система обмежень (2.2) – (2.4) повинна мати ранг $r \le n$. Якщо $r = n$, то система має єдиний розв'язок і нема проблеми вибору оптимального розв'язку. Нехай $r < n$. Тоді серед векторів $A_1, A_2, ..., A_n$ є підсистема лінійно-незалежних векторів – базис, через яку у вигляді лінійної комбінації можна подати кожний вектор системи. Таких базисів може бути не більш, ніж C_n^r. Можна, наприклад, припустити, що базисом є перші *r* векторів $A_1, A_2, ..., A_r$.Тоді цьому базису відповідають змінні $x_1, x_2, ..., x_r$.

Змінні задачі ЛП, які відповідають *r* векторам базису, називаються **базисними змінними** (БЗ), а інші ($n - r$) змінних називаються **вільними** (ВЗ).

2.2 Властивості розв'язків ЗЛП

Властивості розв'язків канонічної задачі ЛП пов'язані зі властивостями опуклих множин. Наведемо декілька означень, які відносяться до опуклих множин.

Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ – довільні точки евклідового простору R_n.

Означення. Опуклою лінійною комбінацією цих точок зветься сума

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n, \quad де \quad \alpha_i \geq 0 \quad та \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Означення. Множина називається **опуклою**, якщо разом з будь-якими двома своїми точками вона містить і їх довільну опуклу лінійну комбінацію.

Наприклад, множина на площині є опуклою, якщо для будь-яких X_1 та X_2, які належать множині, їй належать і всі точки відрізка, який з'єднує X_1 та X_2.

Означення. Точка *X* опуклої множини зветься **кутовою**, якщо вона не може бути зображена у вигляді лінійної опуклої комбінації яких-небудь двох інших різних точок цієї множини.

Теорема 1. Множина допустимих розв'язків канонічної задачі ЛП є **опуклою** (якщо вона непуста).

Означення. Непуста множина допустимих розв'язків канонічної ЗЛП називається **многогранником розв'язків**, а всяка кутова точка многогранника – **вершиною**.

Теорема 2. Якщо канонічна задача ЛП має оптимальний розв'язок, то максимальне (мінімальне) значення цільової функції Z(*X*) досягається в одній із вершин многогранника розв'язків. Якщо цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення більш, ніж в одній вершині, то вона приймає його в будь-якій точці опуклої комбінації цих вершин.

Вектори $A_1, A_2, ..., A_n$, які входять в обмеження канонічної задачі ЛП, є *m* – вимірними (*m*<*n*), тому серед них базисними можуть бути не більше, ніж *m* векторів. Нехай базисними векторами є $A_1, A_2, ..., A_m$. Тоді їм відповідають базисні змінні (БЗ) $x_1, x_2, ..., x_m$.

Означення. Допустимий розв'язок $X = (x_1, x_2, ... x_m, 0, ..., 0)$ називається **невиродженим опорним** , якщо всі *m* базисних змінних відмінні від нуля.

Означення. Опорний розв'язок називається **виродженим**, якщо він має менш за *m* відмінних від нуля компонент.

Теорема 3. Якщо лінійно незалежним векторам $A_1, A_2, ..., A_k$ $(k \leq m)$ відповідають додатні БЗ $x_1, x_2, ..., x_k$, то точка $X = (x_1, x_2, ... x_k, 0, ..., 0)$ є вершиною многогранника розв'язків.

Теорема 4. Якщо $X = (x_1, x_2, ... x_k, 0, ..., 0)$ – вершина многогранника розв'язків, то вектори $A_1, A_2, ..., A_k$, які відповідають додатним базисним змінним, є лінійно незалежними.

Сформульовані вище теореми дозволяють зробити такі висновки:

1 Непуста множина розв'язків (планів) канонічної задачі ЛП утворює опуклий многогранник, кожна вершина якого визначає опорний розв'язок (план).

2 В одній з вершин многогранника розв'язків цільова функція приймає мінімальне або максимальне значення. Якщо функція приймає мінімум або максимум більш, ніж в одній точці, то вона приймає це значення в будь-якій точці, яка є лінійною опуклою комбінацією даних вершин.

2.3 Графічний спосіб розв'язання задачі ЛП

Геометрична інтерпретація економічних задач дає можливість наочно зобразити їх структуру, виявити їх особливості і відкриває шлях дослідження більш складних задач.

Графічно можна розв'язати:

1) симетричну задачу ЛП з двома або з трьома змінними (але у випадку з трьома змінними цей процес буде складніший і наочність зображення, як правило, невеликою);
2) канонічну задачу ЛП, яка містить дві вільні змінні (ВЗ), тобто $n - r = 2$, де n – число змінних, r – ранг матриці системи обмежень.

Наведемо геометричні зображення області допустимих розв'язків у випадку 1) (якщо задача ЛП має розв'язок).

На рис. 2.1 зображено випадок, коли максимальне значення цільової функції досягається в одній вершині многокутника розв'язків (у кутовій точці С).

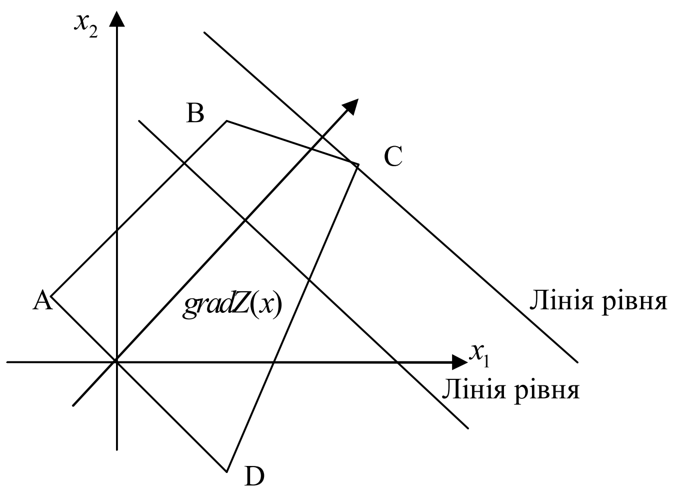

Рис 2.1

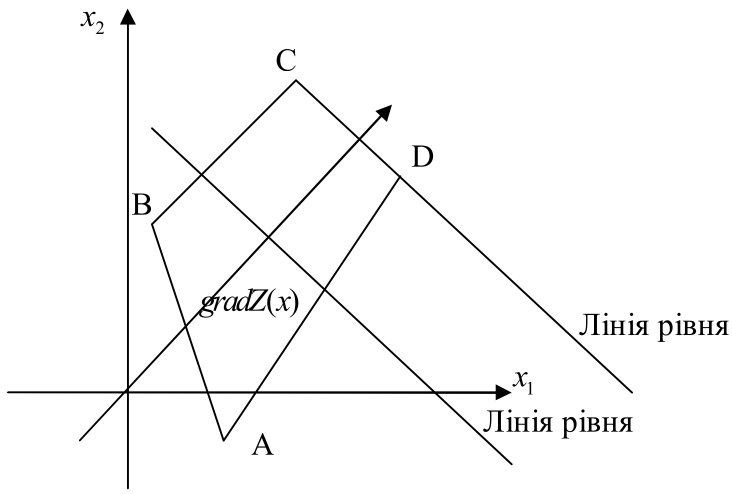

Рис 2.2

На рис.2.2 зображено випадок, коли цільова функція $Z(X)$ досягає максимального значення у двох вершинах C і D, а значить, у всіх точках їх опуклої лінійної комбінації (на рис.2.2 у всіх точках прямої, яка сполучає кутові точки C і D). На рис. 2.3 зображено випадок, коли цільова функція не обмежена зверху на многограннику розв'язків, тому $Z_{max} = +\infty$.

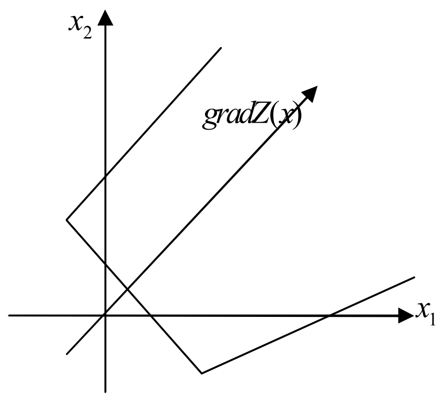

Рис 2.3

Розглянемо симетричну задачу ЛП: знайти максимум лінійної функції

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Графічний спосіб розв'язання задачі ЛП з двома змінними на основі геометричної інтерпретації області допустимих розв'язків містить наступні етапи :

1 Будують прямі, рівняння яких одержуються заміною в обмеженнях знаків нерівностей на знаки рівностей.

2 Оскільки прямі в п. 1 поділяють площину на дві півплощини, то знаходять півплощину, у кожній точці якої задовольняється дане обмеження.

3 Знаходять многокутник розв'язків, як перетин всіх півплощин (з п. 2).

4 Будують вектор $\vec{c} = \{c_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}; c_2 = \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\}$, тобто $\vec{c} = gradZ(X)$ – вектор напряму зростання цільової функції Z(X).

5 Будують пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ - лінію рівня цільової функції (h – будь-яке число).

6 Пересувають лінію рівня в напрямі вектора $\vec{c}$ паралельно самій собі, внаслідок чого або знаходять точку (точки), в якій цільова функція приймає максимальне значення (рис. 2.1 або 2.2), або встановлюють її необмеженість зверху (рис. 2.3).

7 Визначають координати точки (точок), в якій цільова функція набуває максимального значення (тобто знаходять оптимальний розв'язок) і обчислюють значення цільової функції в цій точці.

Приклад. Знайти максимум цільової функції

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 4, \\ -2x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання . 1-3. Оскільки за умовою $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, то область допустимих розв'язків буде розташована у першому квадраті.

Будуємо прямі:

$$\begin{aligned} &12x_1 + 4x_2 = 12, \\ &3x_1 + 4x_2 = 4, \\ &-2x_1 + 2x_2 = 1 \end{aligned}$$

та визначаємо півплощини, для яких задовольняються відповідні обмеження (на рис. 2.4 показані стрілками).

Зробимо рисунок області допустимих розв'язків.

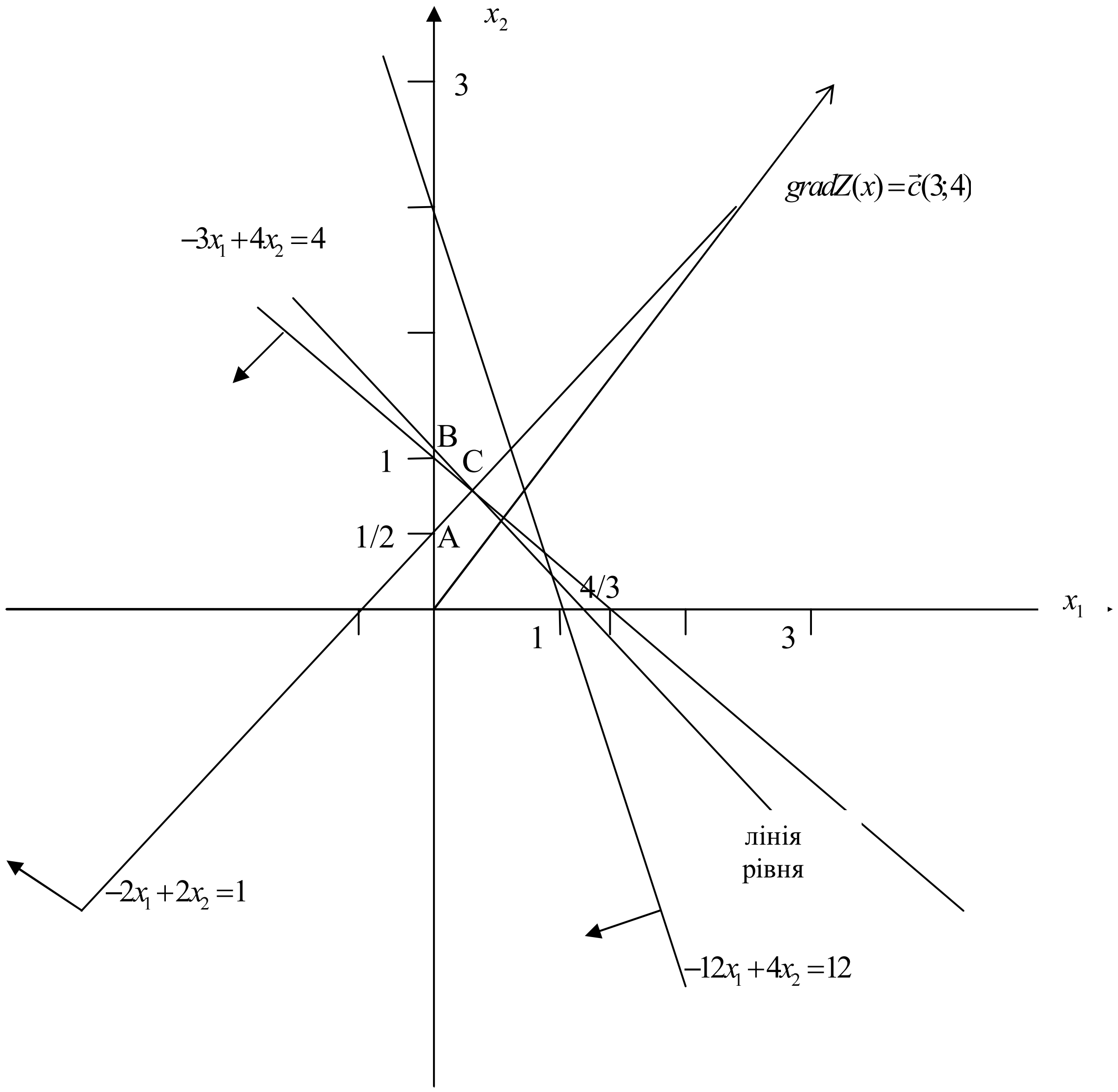

Рис.2.4

Трикутник ABC є областю допустимих розв'язків (ОДР).

4 Для нашої задачі $c_1 = 3,\ c_2 = 4$ (коефіцієнти при x_1 *та* x_2 цільової функції Z(X)). Будуємо точку з координатами (3;4) та вектор $\vec{c}$, початковою точкою якого є початок координат.

5 Лінія рівня $3x_1 + 4x_2 = h$ перпендикулярна вектору $\vec{c}$.

6 Пересуваємо лінію рівня в напрямку вектора $\vec{c}$. Бачимо, що остання точка, в якій лінія рівня торкається ОДР, є точка С. Тобто координати точки С визначають оптимальний розв'язок.

7 Обчислюємо координати точки С як точки перетину двох прямих

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Знаходимо $x_1 = \dfrac{2}{7}, \quad x_2 = \dfrac{11}{14}.$

Точка $(\frac{2}{7};\frac{11}{14})$ є точкою максимуму цільової функції, причому

$$max\ Z(X) = Z_{\max} = 3\cdot\frac{2}{7} + 4\cdot\frac{11}{14} = 4, \quad Z_{\max} = 4\,.$$

Зауваження.

1 У випадку знаходження мінімуму цільової функції $Z(X)$ у графічному способі розв'язання задачі змінюється тільки дії п. 6 – лінію рівня пересувають у напрямку вектора $-\vec{c}$ і визначають точку, в якій цільова функція $Z(X)$ приймає мінімальне значення, якщо вона обмежена знизу.

2 Канонічну задачу ЛП, яка містить дві вільні змінні, графічно розв'язують так. Спочатку в системі обмежень, яка містить не більш двох вільних змінних, за схемою Жордана – Гаусса виділяють базисні змінні, після чого, відкидаючи їх, одержують задачу ЛП в симетричній формі і далі діють так само, як для розглянутої вище задачі.

Загальні вказівки до графічного розв'язання задач лінійного програмування:

1 Графічно можна розв'язувати: **а**) задачі, які задані в симетричній (стандартній) формі (нерівності в обмеженнях типу $\geq$, $\leq$), та містять дві змінні; **б**) задачі, які задані в канонічній формі, де n – r = 2, де n – число змінних, r – ранг системи обмежень; **в**) задачі загального вигляду, які після зведення до канонічної форми будуть містити дві вільні змінні.

2 Основною формою для графічного розв'язання є задачі виду а). Тому задачі типів б) і в) попередньо зводяться до задач типу а).

3 Розв'язання задачі типу а) виконується в два етапи: побудова області допустимих розв'язків і знаходження в ній оптимального розв'язку. При цьому можливі наступні вигляди області допустимих розв'язків: а) ОДР – є пустою і тоді задача не має розв'язку; б) ОДР - це опуклий многокутник і задача має оптимальний розв'язок; в) ОДР є необмеженою і в залежності від вектора grad$Z$ задача може мати або не мати розв'язку ($Z_{max} \to \infty$; $Z_{min} \to -\infty$).

2.4 Симплексний метод розв'язання ЗЛП
Симплексний метод розв'язання ЗЛП у канонічній формі

Нехай задача ЛП має оптимальний розв'язок і кожний її опорний розв'язок є невиродженим. Симплексний метод розв'язання задачі ЛП побудований на переході від одного опорного розв'язку до другого, при якому значення цільової функції збільшується (зменшується). Вказаний перехід можливий, якщо відомі будь-які початкові опорні розв'язки. Тому необхідно вказати, по-перше, спосіб знаходження початкового опорного розв'язку, по-друге, правило побудови наступного опорного розв'язку, при якому значення цільової функції більше (менше), ніж на попередньому розв'язку, по-третє, зазначити умови отримання оптимального розв'язку (критерій оптимальності).

Тобто алгоритм розв'язання ЗЛП можна зобразити наступним чином (рис.2.5):

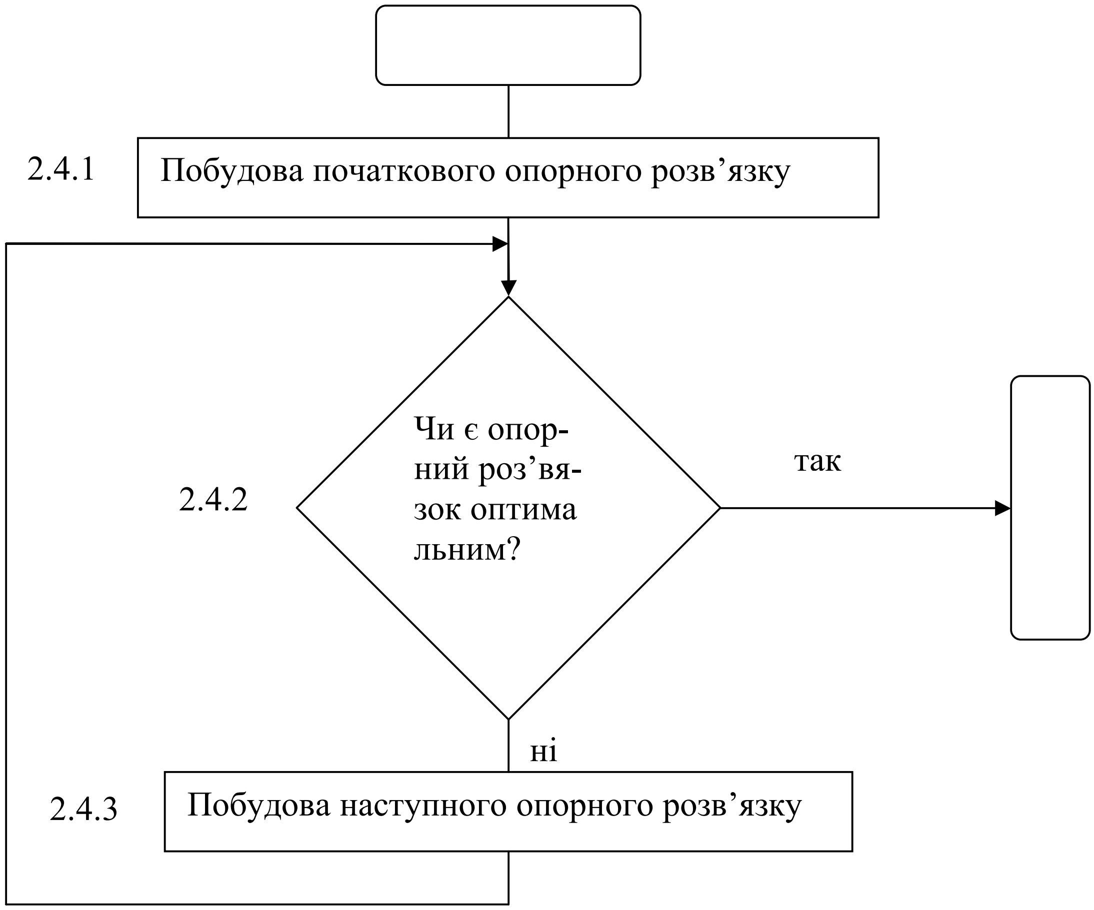

Рис.2.5

Симплексний метод застосовується до задачі ЛП, записаної тільки в канонічній формі, а саме знайти максимум цільової функції

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \tag{2.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{2.17}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{2.18}$$

або у векторному вигляді: знайти максимум

$$Z(X) = CX \,, \tag{2.19}$$

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_n X_n = A_0 \,, \tag{2.20}$$

$$X \geq 0 \,. \tag{2.21}$$

2.4.1 Побудова початкового опорного розв'язку

Розглянемо систему обмежень, яка задана у вигляді

$$A_1X_1 + A_2X_2 + ... + A_nX_n = A_0.$$

Для побудови початкового опорного розв'язку необхідно виконати наступні дії:

1) серед векторів $A_1, A_2, ..., A_n$ за схемою Жордана – Гаусса визначають m базисних векторів. Нехай це перші m векторів $A_1', A_2', ..., A_m'$. В алгебраїчній формі система обмежень буде мати вигляд

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1', \\ \quad x_2 \qquad + \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m'; \end{cases} \tag{2.22}$$

2) знаходять опорний розв'язок X_{on}, який за означенням дорівнює $X_{on} = (x_1, x_2, ...x_m, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-m})$, де $x_1, x_2, ..., x_m$ – базисні змінні, а всі вільні змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ дорівнюють нулю;

3) з системи обмежень (2.22) при $x_{m+1} = 0$, $x_{m+2} = 0$, ..., $x_n = 0$ одержують, що $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, ..., x_m = \beta_m$. Якщо всі $\beta_i \geq 0$, то початковий опорний розв'язок має вигляд

$$X_{n.on.} = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0\}. \tag{2.23}$$

Як бачимо з наведених міркувань, знаходження початкового опорного розв'язку зводиться до вилучення в системі обмежень, які задані у вигляді рівностей (канонічна форма), базисних змінних. Ця процедура спрощується, якщо система обмежень має так звані **рівняння з перевагою**, тобто рівняння з невід'ємною правою частиною, які містять змінну з одиничним коефіцієнтом, причому до інших рівнянь ця змінна входить з нульовим коефіцієнтом .

Наприклад, розглянемо наступну систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 \qquad\; + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 \qquad + 4x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння має перевагу, оскільки змінна x_2 входить тільки в це рівняння. Іншими словами, змінна x_2 є базисною.

Висновки. 1 Якщо система обмежень не має вилученого одиничного базису, то методом Жордана – Гаусса визначають базисні вектори $A_1, A_2, ..., A_m$ і відповідні їм базисні змінні.

2 Початковий опорний розв'язок знаходять, покладаючи у перетвореній системі вільні змінні рівними нулю, а базисні змінні – рівними відповідно значенням правих частин перетвореної системи обмежень.

Розглянемо задачу ЛП у симетричній формі:

знайти максимум цільової функції

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2.25}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.26}$$

Перетворимо її у канонічну форму, додаючи в кожну нерівність невід'ємну змінну, тобто допоміжні змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$, які в цільову функцію Z(X) ввійдуть з коефіцієнтами, рівними нулю. Одержимо наступну задачу ЛП: знайти максимум цільової функції

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + ... + 0 \cdot x_{n+m}, \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2, \\ \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m, \end{cases} \tag{2.28}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n+m}). \tag{2.29}$$

Кожне рівняння системи (1.28) має перевагу, тому змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ є базисними. Початковий опорний розв'язок для задачі (2.27) – (2.29) має вигляд

$$X_{п.оп.} = \left\{ \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, b_1, b_2, ..., b_m \right\}.$$

Оптимальний розв'язок задачі (2.27) – (2.29) є оптимальним і для задачі (2.24) – (2.26) за наступною теоремою.

Теорема. Кожному допустимому розв'язку $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ задачі (2.24) – (2.26) відповідає визначений допустимий розв'язок $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, x_{n+1}^0, ..., x_{n+m}^0)$ задачі (2.27) – (2.29) і навпаки, кожному допустимому розв'язку задачі (2.27) – (2.29) відповідає допустимий розв'язок $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ задачі (2.24) – (2.26).

Із теореми випливає, що підхід до розв'язку задач у симетричній та канонічній формах є однаковим.

2.4.2 Критерій оптимальності опорного розв'язку

Будь-яку канонічну задачу ЛП за допомогою методу Жордана – Гаусса можна записати в еквівалентному вигляді.

Розглянемо задачу ЛП: знайти максимум функції

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{2.30}$$

при обмеженнях

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{2.31}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.32}$$

Виразимо із рівностей (2.31) базисні змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ через вільні змінні $x_{m+1}, ..., x_n$ і підставимо їх в цільову функцію Z(*X*). Одержимо

$$Z(X) = (c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + ... + c_m\beta_m) - \Big\{\Big[(c_1\alpha_{1,m+1} + c_2\alpha_{2,m+1} + ... + c_m\alpha_{m,m+1}) - c_{m+1}\Big] \cdot x_{m+1} +$$
$$+\Big[(c_1\alpha_{1,m+2} + c_2\alpha_{2,m+2} + ... + c_m\alpha_{m,m+2}) - c_{m+2}\Big] \cdot x_{m+2} + ... + [(c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + ... + c_m\alpha_{mn}) -$$
$$-c_n] \cdot x_n \Big\}.$$

Введемо позначення

$$A_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}, \quad C_Б = (c_1, c_2, ..., c_m).$$

Позначимо через

$$\Delta_j = (c_1\alpha_{1j} + c_2\alpha_{2j} + ... + c_m\alpha_{mj}) - c_j = C_Б A_j - c_j,$$

тобто

$$\Delta_j = C_Б A_j - c_j; \tag{2.33}$$

$$\Delta_0 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + ... + c_m\beta_m$$

або

$$\Delta_0 = C_Б A_0. \tag{2.34}$$

Величини Δ_j назвемо **оцінками вільних змінних**.
Зважаючи на приведені вище позначення, цільову функцію Z(*X*) подамо у вигляді

$$Z(X) = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j.$$

Таким чином, задачу (1.30) – (1.32) перепишемо у вигляді

$$\max Z(X) = \max(\Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j), \tag{2.35}$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \qquad x_1, x_2, ... x_m - \text{БЗ}, \ j = \overline{1,m}, \tag{2.36}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \qquad x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n - \text{ВЗ}. \tag{2.37}$$

Теорема. (критерій оптимальності опорного розв’язку).

Якщо для деякого опорного розв’язку задачі (2.16) – (2.18) усі оцінки Δ_j $(j = \overline{1,n})$, які обчислюються за формулою (2.33) , невід’ємні, то такий опорний розв’язок є оптимальним.

Тут $C_Б$ – вектор-рядок, який складається з коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних; c_j – коефіцієнти цільової функції; A_j – вектор-стовпець системи обмежень при змінній x_j.

Дійсно, $\max Z(X) = \max(\Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j)$ при $\Delta_j \geq 0$ досягається лише тоді, коли $\sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = 0$, тобто коли вільні змінні $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$, тобто опорний розв’язок $X_{оп.} = \{\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_m, 0,\ 0, \ldots,\ 0\}$ є оптимальним.

Зауваження. Якщо задача ЛП розв’язується на мінімум, то опорний розв’язок буде оптимальний тоді, коли оцінки $\Delta_j \leq 0\ (j = \overline{1,n})$.

Знаходження оптимального розв’язку симплекс-методом здійснюється за допомогою симплекс-таблиці (табл..2.1), яка для канонічної задачі, де перші *m* векторів $A_1, A_2, \ldots, A_m$ є базисними, має вигля

Таблиця 2.1

Номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_n
				c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n
				A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_j	...	A_n
0	x_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	x_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	c_m	b_m	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mj}	...	a_{mn}
	$\Delta_j = z_j - c_j$		Δ_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_j	...	Δ_n

Тут вектор A_0 складається із правих частин системи обмежень, якщо вона має одиничний базис; вектор A_j складається із коефіцієнтів системи обмежень при змінній x_j; вектор $C_Б$ складається із коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних; $z_j = C_Б A_j$; $\Delta_0 = C_Б A_0$; c_j – коефіцієнти цільової функції.

Приклад. Побудувати сиплекс-таблицю для задачі ЛП:

знайти максимум цільової функції

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 6, \\ 7x_2 + x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_2 + x_3 + 5x_5 = 20, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Т
а

Таблиця 2.2

Номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				2	1	1	3	5
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_1	2	6	1	1	0	0	-3
	x_4	3	70	0	7	0	1	10
	x_3	1	20	0	-4	1	0	5
	$\Delta_j = z_j - c_j$		242	0	18	0	0	25

З побудованої симплекс- таблиці (табл.2.2) видно, що система обмежень, яка складається з трьох рівнянь, має три базисні змінні x_1, x_3, x_4. Отже, опорний розв'язок можна записати у вигляді $X_{опор} = (6;\ 0;\ 20;\ 70;\ 0)$.

Проведемо розрахунки оцінок змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$\Delta_1 = C_Б A_1 - c_1 = (2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0) - 2 = 0$,

$\Delta_2 = C_Б A_2 - c_2 = (2\cdot 1 + 3\cdot 7 + 1\cdot(-4)) - 1 = 18$,

$\Delta_3 = C_Б A_3 - c_3 = (2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1) - 1 = 0$,

$\Delta_4 = C_Б A_4 - c_4 = (2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0) - 3 = 0$,

$\Delta_5 = C_Б A_5 - c_5 = (2\cdot(-3) + 3\cdot 10 + 1\cdot 5) - 4 = 25$,

$\Delta_0 = C_Б A_0 = 2\cdot 6 + 3\cdot 70 + 1\cdot 20 = 242$.

Добутки $C_Б \cdot A_j$, $C_Б \cdot A_0$ є скалярними добутками векторів $C_Б, A_0, A_j$. Оскільки всі оцінки $\Delta_j \ge 0$, то цільова функція досягає максимального значення при $X_{опт.} = \{6;\ 0;\ 20;\ 70\}$ і $\max Z(X) = 2\cdot 6 + 1\cdot 0 + 1\cdot 20 + 3\cdot 70 + 4\cdot 0 = 242$.

Зауваження 1. Якщо система обмежень не має одиничного базису, то його виділяють методом Жордана - Гаусса, а потім заповнюють симплекс-таблицю.

Зауваження 2. Формули $\Delta_j = C_Б A_j - c_j$, $\Delta_0 = C_Б \cdot A_0$ доцільно використовувати тільки на 0-й ітерації. У подальшому їх застосовують для контролю обчислень при переході до іншого опорного розв'язку, якщо попередній не був оптимальним.

2.4.3 Побудова наступного опорного розв'язку

1 Якщо для побудованого опорного розв'язку існують від'ємні оцінки Δ_j>0 для деяких j (тобто опорний розв'язок не є оптимальним), то знаходять індекс *j*, якому відповідає максимальна за модулем від'ємна оцінка. Нехай цей максимум досягається при *j = k*.

2 Знаходять мінімальне симплексне відношення $\min\limits_i \frac{b_i}{a_{ik}}$ для всіх a_{ik}>0.

Якщо всі $a_{ik} \le 0$,то цільова функція задачі не обмежена зверху і максимуму не існує. Нехай мінімум досягається при i = l, тобто $\min\limits_i \frac{b_i}{a_{ik}} \min\limits_i \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_l}{a_{lk}}$. Елемент a_{lk} називають розв'язувальним елементом, а l-ий рядок і $к$-ий стовпець, на перетині яких він знаходиться, називають відповідно розв'язувальним рядком і стовпцем.

3 Елементи наступної симплекс-таблиці a'_{ij} (яка визначає наступний опорний розв'язок) обчислюють за формулами жорданових перетворень

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{lk}} a_{ik},\ i \ne l, \tag{2.38}$$

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{lk}},\ i = l,\ \text{ де } j = \overline{1,n}. \tag{2.39}$$

Алгоритм симплекс-метода

Алгоритм симплекс-метода розглянемо на наступному прикладі. Сформулюємо економічний зміст задачі і розв'яжемо її симплекс-методом.

Приклад. Для виготовлення двох видів бетонів $Б_1$ та $Б_2$ використовуються його складові частини – цемент, пісок і гравій. На виготовлення однієї одиниці бетону $Б_1$ витрачають відповідно дві одиниці цементу, одну одиницю піску і сім одиниць гравію; для одиниці бетону $Б_2$ відповідні складові дорівнюють – 4, 8, 4. Підприємство має такі запаси сировини: цементу – 120 одиниць, піску – 280 одиниць, гравію – 240 одиниць. Прибуток від реалізації однієї одиниці бетону $Б_1$ складає 10 грн., для бетону $Б_2$ - 1 гривня. Визначити, скільки треба виробити бетону кожного типу, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний.

Побудуємо математичну модель задачі. Спочатку введемо змінні задачі. Припустимо, що підприємству треба виготовити x_1 одиниць бетону типу $Б_1$ і x_2 одиниць бетону типу $Б_2$.

Тоді математичну модель задачі запишемо у вигляді: знайти максимум

$$Z(X) = 10x_1 + x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 240, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання.

1 Зведемо задачу до задачі ЛП в канонічній формі . Запишемо систему обмежень у вигляді рівностей з допоміжними змінними x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 120, \\ x_1 + 8x_2 + x_4 = 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + \quad + x_5 = 240, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Цільова функція при цьому буде мати вигляд

$$Z(X) = 10x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 .$$

2 Побудуємо симплекс-таблицю (табл.2.3)

Таблиця 2.3

номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				10	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	0	120	2	4	1	0	0
	x_4	0	280	1	8	0	1	0
	x_5	0	240	7	4	0	0	1
	$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-10	-1	0	0	0

Серед від'ємних оцінок Δ_j вибираємо максимальну за модулем. Такою оцінкою є $\Delta_1 = -10$ (оскільки $\max\{|-10|;|-1|\} = 10$), тобто стовпець A_1 є розв'язувальним**.** Це означає, що в базисні змінні треба ввести змінну x_1.

3 Для визначення, яку змінну треба вивести із базисних, обчислимо відношення коефіцієнтів стовпця A_0 відповідно до додатних коефіцієнтів стовпця A_1(який відповідає змінній x_1). Такі відношення називають **симплексними.** Серед усіх симплексних відношень знайдемо мінімальне $\min\left\{\frac{120}{2};\frac{280}{1};\frac{240}{7}\right\} = \frac{240}{7}$. Це означає, що змінну x_5, яка відповідає такому відношенню, треба вивести з базисних, а відповідний рядок називається **розв'язувальним**. Отже, число 7, яке знаходиться на перетину розв'язувальних стовпця та рядка, є **розв'язувальним елементом**.

4 Будуємо наступну симплекс – таблицю (табл.2.4), використовуючи формули жорданових перетворень (2.38) – (2.39).

Таблиця 2.4

Номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1 / 10 / A_1	x_2 / 1 / A_2	x_3 / 0 / A_3	x_4 / 0 / A_4	x_5 / 0 / A_5
1	x_3	0	360/7	0	20/7	1	0	-2/7
	x_4	0	1720/7	0	52/7	0	1	-1/7
	x_1	0	240/7	1	4/7	0	0	1/7
	$\Delta_j = z_j - c_j$		2400/7	0	33/7	0	0	10/7

5 Оскільки всі оцінки Δ_j невід’ємні, то опорний розв’язок $(x_1 = \frac{240}{7}; x_2 = 0; x_3 = \frac{360}{7}; x_4 = \frac{1720}{7}; x_5 = 0)$ є оптимальним, і йому відповідає максимальне значення цільової функції $max\, Z(X) = \frac{2400}{7}$.

Задача розв’язана.

Сформулюємо **алгоритм симплекс-метода у загальному вигляді** для розв’язання задачі ЛП на максимум.

1 Будують симплекс-таблицю з вилученим одиничним векторним базисом.

2 Для побудованої симплекс - таблиці знаходять оцінки $\Delta_j = C_Б A_j - c_j \ (j = \overline{1,n})$, які відповідають змінним x_j, а також $\Delta_0 = C_Б A_0 = Z_0$– значення цільової функції.

3 Якщо всі оцінки $\Delta_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$, то опорний розв’язок є оптимальним і задача розв’язана. Якщо існує хоча б одна від’ємна оцінка $\Delta_j < 0$, то переходять до побудови нового опорного розв’язку (п.4).

4 Серед від’ємних оцінок Δ_j вибирають $\max\limits_{j(\Delta_j \prec 0)} \left|\Delta_j\right| = \Delta_k$. Оцінка Δ_k відповідає змінній x_k, яку треба ввести в базис.

5 З базису виключають змінну, яка відповідає номеру мінімального відношення елементів стовпця A_0 до додатних елементів стовпця A_k, тобто $\min\limits_{i(a_{lk} \succ 0)} \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\}$. Нехай мінімальне симплексне значення відповідає номеру l, що означає, що змінну x_l треба вивести з базису.

6 Роблять крок жорданових перетворень за формулами (2.38) – (2.39), включаючи стовпець A_0 і рядок, який відповідає оцінкам Δ_j. Одержують новий опорний розв’язок, координати якого знаходяться в стовпці A_0 (для перевірки правильності проведених жорданових перетворень використовують формули з п.2). Дії повторюють, починаючи з п. 3, до отримання оптимального розв’язку.

Зауваження. При розв'язанні задачі на мінімум умова оптимальності $\Delta_j \ge 0$ замінюється на $\Delta_j \le 0$, тобто перехід до нового опорного розв'язку здійснюється за умовою існування хоча би однієї додатної оцінки $\Delta_j > 0$.

2.5 Розширена М-задача

У попередньому параграфі вважалося, що система обмежень задачі ЛП містить одиничну матрицю, з якої можна складати первісний базис.
Якщо система обмежень задачі ЛП не має одиничної матриці, то використовують різні методи побудови початкового опорного розв'язку.

Розглянемо так званий метод штучного базису або М - метод, який об'єднує знаходження початкового (первісного, вихідного) опорного та оптимального планів задачі ЛП.

Нехай задача ЛП записана у вигляді: знайти максимум функції

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.40}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \quad (b_j \ge 0,\ i = \overline{1,m}) \tag{2.41}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.42}$$

Приведемо задачу до канонічного вигляду, для цього в систему обмежень введемо додаткові невід'ємні змінні $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$,які в цільову функцію $Z(X)$ ввійдуть з нульовими коефіцієнтами. Тоді задача матиме вигляд:

знайти максимум функції

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \tag{2.43}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{2.44}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1, n+m}. \tag{2.45}$$

Але, на відміну від попередньої задачі ЛП, змінні $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ не є базисними, тому що в противному випадку одержують, що $x_{n+1} = -b_1 \le 0,\ldots,x_{n+m} = -b_m \le 0$, що неможливо за обмеженням (2.45).

Для визначення базису в системі (2.44) вводять так звані **штучні змінні** $w_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m})$. До цільової функції $Z(X)$ штучні змінні w_i входять з коефіцієнтом –М при розв'язанні задачі на максимум і з коефіцієнтом М – при розв'язанні задачі на мінімум, де М – скіль - завгодно велике додатне число.

Тоді задача (2.40) – (2.42), а значить і задача (2.43) – (2.45) запишеться у вигляді: знайти максимум функції

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + ... + 0 \cdot x_{n+m} - Mw_1 - ... - Mw_m \qquad (2.46)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} + w_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} + w_2 = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} + w_m = b_m, \end{cases} \qquad (2.47)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad w_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (2.48)$$

Задача (2.46) – (2.48) зветься **розширеною М-задачею**. Розширена М задача має одиничний векторний базис. Виникає питання: який розв'язок задачі (2.46) – (2.48) є оптимальним для задачі (2.40) – (2.42). Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема1. Якщо в оптимальному розв'язку $\overline{X^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_{n+m}^*, w_1^*, ..., w_m^*)$ задачі (1.46) – (1.48) всі штучні змінні w_i дорівнюють нулю $(w_i = 0, \ i = \overline{1,m})$, то розв'язок $\overline{X^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_{n+m}^*)$ є оптимальним для задачі (2.43 – (2.45).

Теорема 2. Якщо в оптимальному розв'язку М-задачі хоча би одна із штучних змінних відмінна від нуля, то початкова задача не має допустимих розв'язків, тобто її умови несумісні.

Таким чином, суть методу штучного базису полягає в тому, що виходячи з відомого штучного базису за допомогою перетворень симплексного методу переходять до других базисів, послідовно звільняючись від усіх векторів, які складали штучний базис. Внаслідок цього повертаються до умов вихідної задачі, але діставши для неї базис. Для отримання оптимального розв'язку далі застосовують звичайний симплекс - метод. Отже, розв'язки вихідної задачі є також розв'язками розширеної М-задачі.

Приклад. Знайти мінімум функції

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 5x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3.$$

Спочатку зведемо задачу до канонічної форми. Оскільки система обмежень має нерівність у вигляді $\geq$, то будуємо М-задачу: знайти мінімум функції

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + Mw,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 + w_1 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad w_1 \geq 0.$$

Складаємо симплекс-таблицю (табл.2.5)

Таблиця 2.5

номер ітера-ції	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1
				-2	1	5	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_4	0	4	1	1	-1	1	0	0
	w_1	M	5	1	-5	1	0	-1	1
	Δ_j		5M	M-2	-5M-1	M-5	0	-M	0
1	x_1	2	4	1	1	-1	1	0	0
	w_1	M	1	0	-6	2	-1	-1	1
			M+8	0	-6M+1	2M-1	-M+2	-M	0
2	x_1	2	9/2	1	-2	0	1/2	-1/2	
	x_3	5	1/2	0	-3	1	-1/2	-1/2	
	Δ_j		23/2	0	-10	0	-5/2	-3/2	

Оскільки всі оцінки $\Delta_j \le 0$ та всі штучні змінні дорівнюють нулю, то третій опорний розв'язок розширеної М - задачі $X = (\frac{9}{2};0;\frac{1}{2};0;0;0)$ є оптимальним і йому відповідає мінімальне значення цільової функції $min\ Z(X) = \frac{23}{2}$.

Отже, оптимальний розв'язок початкової задачі має вигляд $X_{опт.} = (\frac{9}{2};0;\frac{1}{2})$, при цьому $min\, Z(X_{опт}) = \frac{23}{2}$.

Зауваження. Якщо в процесі використання симплекс-метода штучна змінна виводиться з базису, то відповідний йому стовпець викреслюється з подальших обчислень.

Запитання для самоперевірки

1 Що таке математична модель задачі, з яких понять вона складається?
2 Які основні задачі оптимізації Ви знаєте?
3 Сформулювати математичну модель загальної задачі математичного програмування
4 Що називається допустимим, опорним та оптимальним розв'язком задачі ЛП?
5 Як формулюється загальна задача ЛП?
6 Як формулюється симетрична задача ЛП?
7 Як формулюється канонічна задача ЛП?
8 Як загальна задача ЛП зводиться до канонічної?
10 Яка комбінація точок простору R_n зветься опуклою?
11 Яка множина є опуклою?
12 Яка точка опуклої множини зветься кутовою?

13 Сформулюйте теорему про множину допустимих розв'язків канонічної задачі ЛП.
14 В якій точці цільова функція досягає оптимального значення?
15 Який допустимий розв'язок задачі ЛП зветься опорним невиродженим, а який – виродженим?
16 При яких умовах можливе розв'язання задачі ЛП графічним способом?
17 Із яких етапів складається алгоритм графічного розв'язання задачі ЛП?
18 У чому полягає симплекс - метод розв'язання задачі ЛП?
19 Як знаходиться початковий опорний план задачі ЛП?
20 Як формулюється критерій оптимальності опорного розв'язку задачі ЛП?
21 У чому полягає *М*- метод?
22 Які змінні є штучними?

Розділ 3 ДВОЇСТІСТЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

3.1 Двоїсті задачі
3.2 Основні теореми двоїстості та їх економічеий зміст
3.3 Двоїстий симплекс-метод
3.4 Економічне тлумачення будь-якого кроку ітерації симплекс-таблиці

3.1 Двоїсті задачі ЛП

З кожною задачею ЛП можна поєднати деяку іншу задачу ЛП, яку називають **двоїстою.**

Пряму задачу називають **вихідною**. Розв'язок двоїстої задачі можна знайти, базуючись на розв'язку вихідної і навпаки.

Розглянемо поняття двоїстості на прикладі задачі оптимального використання сировини. Як вже відомо, якщо x_j – об'єм випуску j-ої продукції, то математична модель задачі має вигляд: знайти максимум

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3.1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Припустимо тепер, що с самого початку з'явилась можливість реалізації сировини іншому підприємству. В зв'язку з цим необхідно встановити примірні оцінки (ціни) на одиницю кожного виду сировини.

Позначимо оцінки через $y_1, y_2, ..., y_m$. Вони повинні бути встановлені, виходячи з вимог, які відображують неспівпадаючи інтереси двох підприємств:

1) підприємство, яке купує сировину, мінімізує її загальну вартість;

2) підприємство, яке продає сировину, згодне поступитися її тільки по таким цінам, при яких воно одержить за них прибуток, не менший за той, який можливо одержати при організації самостійного виробництва продукції.

Виходячи з цього, сформулюємо наступну математичну модель задачі ЛП.

Цільова функція має вигляд $f(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$ та визначає вартість усіх видів сировини;

вартість усіх видів сировини, витрачених на виробництво одиниці першого виду продукції дорівнює $a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m$, при цьому, виходячи с другої умови, повинно виконуватися нерівність $a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \ge c_1$, де c_1 – вартість одиниці першого виду продукції.

Таким чином, задача ЛП буде мати вигляд: знайти мінімум

$$f(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_n \tag{3.4}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots a_{m1} y_m \ge c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \ge c_2, \\ \vdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \ge c_n, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.6}$$

Змінні $y_i \ (i = \overline{1,m})$ звуться **двоїстими оцінками** або об’єктивно обумовленими оцінками (тіньовими цінами). Задача (3.4) – (3.6) називається **двоїстою до задачі** (3.1) – (3.3) і навпаки, тобто ці задачі є взаємнодвоїстими.

Розглянуті вихідну та двоїсту задачу можна інтерпретувати економічно наступним чином.

Вихідна задача. Скільки і якої продукції $x_j \quad (j = \overline{1,n})$ треба виробити, щоб при заданих вартостях $c_j \quad (j = \overline{1,n})$ одиниці продукції і розмірах наявних ресурсів $b_i \quad (i = \overline{1,m})$ максимізувати прибуток підприємства.

Двоїста задача. Якою повинна бути ціна одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих кількостях ресурсів b_i та величинах вартості одиниці продукції c_j мінімізувати загальну вартість витрат?

Порівнюючи пряму задачу (3.1) – (3.3) і двоїсту до неї (3.4) – (3.6) можна встановити наступні взаємозв’язки:

1 Якщо пряма задача розв’язується на max (min) Z(*X*), то двоїста до неї розв’язується на min (max) *f (У)*.

2 Коефіцієнти c_j цільової функції прямої задачі є вільними членами (правою частиною) системи обмежень двоїстої задачі.

3 Вільні члени b_i системи обмежень прямої задачі є коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.

4 Матриці системи обмежень прямої і двоїстої задач є транспоновані одна до іншої

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5 Число обмежень прямої задачі дорівнює числу змінних двоїстої, а число обмежень двоїстої дорівнює числу змінних прямої.

6 Всі змінні симетричних двоїстих задач невід’ємні.

7 У прямій симетричній задачі система обмежень зображена у вигляді нерівностей $\leq$, тоді як у двоїстої задачі її система обмежень має вигляд нерівностей типу $\geq$.

8 Для задачі з мішаними обмеженнями (ЗЗЛП) двоїста до неї складається з виконанням наступних правил:

а) якщо змінна x_j прямої задачі невід’ємна $(x_j \geq 0)$, то $j-a$ умова системи обмежень двоїстої задачі запишеться у вигляді нерівності і навпаки;

б) якщо на змінну x_j не накладена умова невід’ємності, то $j-a$ умова обмеження двоїстої задачі запишеться у вигляді рівності;

в) якщо пряма задача має обмеження – рівності, то на відповідну змінну y двоїстої задачі не накладається умова невід’ємності.

Запишемо різні форми взаємно двоїстих задач у вигляді таблиць (табл.3.1; табл.3.2; табл.3.3).

Загальна форма вихідної задачі Таблиця 3.1

Вихідна задача	Двоїста задача
$\sum\limits_{y=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_j, \quad i=\overline{1,l}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x = b_j, \quad i=\overline{l+1,n}$, $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,s},\ s \leq n$, $x_j - довільні, \quad j=\overline{s+1,n}$, знайти максимум $Z(X)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$.	$y_j \geq 0$, $\quad i=\overline{1,l}$, $y_i - довільні, \quad i=\overline{l+1,m}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j, \quad j=\overline{1,s}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \quad j=\overline{s+1,n}$, знайти мінімум $f(Y)=\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Симетричні двоїсті задачі Таблиця 3.2

Вихідна задача	Двоїста задача
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i=\overline{1,m}$, $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}$, знайти максимум $Z(X)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$.	$y_j \geq 0$, $\quad i=\overline{1,m}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \geq c_j , \quad j=\overline{1,n}$, знайти мінімум $f(Y)=\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Канонічна форма вихідної задачі Таблиця 3.3

Вихідна задача	Двоїста задача
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m}$, $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}$, знайти максимум $Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.	$y_i - довільні$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \ge c_j,\ j=\overline{1,n}$, знайти мінімум $f(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Приклад 1. Магазин оптової торгівлі реалізує три типи продукції $П_1, П_2, П_3$. Для цього використовують два обмежених ресурсу – корисна площа приміщень, яка з урахуванням обіговості складає 450 $м^2$ і робочу годину робітників магазину – 600 люд.-год. Необхідно скласти план товарообертаємості, при якому прибуток приймає максимальне значення. Витрати ресурсів на реалізацію і одержаний при цьому прибуток зображені в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Ресурси	Витрати ресурсів на реалізацію			Об’єм ресурсів
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Корисна площа	1,5	2	3	450
Робоча година	3	2	1,5	600
Прибуток	50	65	70	

Скласти математичну модель вихідної задачі і двоїстої до неї.

Розв’язання. Позначимо через

x_1 – кількість одиниць реалізованої продукції типу $П_1$;
x_2 – кількість одиниць реалізованої продукції типу $П_2$;
x_3 – кількість одиниць реалізованої продукції типу $П_3$.
Тоді задачу ЛП запишемо у вигляді: знайти максимум

$$Z(X) = 50x_1 + 65x_2 + 70x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \le 600, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо двоїсту задачу до прямої.
Позначимо:
y_1 – оцінка вартості одного $м^2$ корисної площі;
y_2 – оцінка вартості робочої години одного робітника.

Тоді на основі правил складання двоїстої задачі маємо наступну двоїсту до сформульованої вище задачу:
Знайти мінімум

$$f(Y) = 450y_1 + 600y_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1,5y_1 + 3y_2 \ge 50, \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 65, \\ 3y_1 + 1,5y_2 \ge 70, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0 \quad y_2 \ge 0 .$$

Приклад 2. Скласти задачу, двоїсту до наступної: знайти максимум

$$Z(X) = -x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 .$$

Розв'язання. 1 Оскільки вихідна задача розглядається на максимум, то всі обмеження задачі повинні бути зі знаком $\le$. Приведемо першу та четверту нерівності системи обмежень до цього знака. Одержимо:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 - x_2 \le -5. \end{cases}$$

2 Складемо розширену матрицю системи обмежень, доповнюючи її рядком цільової функції

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

На основі властивостей взаємно двоїстих задач сформулюємо двоїсту задачу до вихідної: знайти мінімум

$$f(Y) = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4} .$$

3.2 Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

При дослідженні взаємо двоїстих задач виникає питання, чи є зв'язок між їх оптимальними розв'язками. Відповідь на це питання дають теореми двоїстості.

Спочатку розглянемо допоміжне твердження.

Основна нерівність теорії двоїстості

Теорема. Для будь-яких допустимих розв'язків двоїстих задач $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ і $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ справедлива нерівність

$$Z(X)\le f(Y) \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \tag{3.7}$$

Доведення. Помножимо систему обмежень вихідної задачі відповідно на $y_1,y_2,...,y_m$ і просумуємо, тобто

$$+\begin{cases}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n)y_1\le b_1y_1,\\ \vdots\\ (a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n)y_m\le b_my_m,\end{cases}$$

одержимо нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \tag{3.8}$$

Аналогічно перетворимо і систему обмежень двоїстої задачі

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \tag{3.9}$$

Ліва частина нерівностей (2.13) і (2.14) містить один і той же вираз, а саме

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j y_i ,$$

отже

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Твердження доведено.

Достатня ознака оптимальності

Теорема. (Критерій оптимальності Канторовича)

Якщо $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ і $Y^*=(y_1^*,y_2^*,...,y_m^*)$ – допустимі розв'язки взаємно двоїстих задач, для яких виконується рівність

$$Z(X^*)=f(Y^*) \tag{3.10}$$

то X^* *і* Y^* – оптимальні розв'язки відповідних задач.

Доведення.

Нехай X_1 – будь-який допустимий розв'язок прямої задачі, тоді на основі нерівності (3.7) маємо $Z(X_1)\le f(Y^*)$. З іншого боку, $Z(X_1)\le Z(X^*)=f(Y^*)$. Значить, X^* - оптимальний розв'язок прямої задачі, оскільки X_1 – будь-який допустимий розв'язок.

Аналогічно доводиться, що і Y^* є оптимальний розв'язок для двоїстої задачі.

Для взаємно двоїстих задач виникають важливі питання:

1) чи завжди для кожної пари двоїстих задач існують оптимальні розв’язки;

2) чи можлива ситуація, коли одна із задач має розв’язок, а інша – не має;

3) чи існує взаємозв’язок між оптимальними розв’язками пари двоїстих задач, тобто, якщо розв’язана одна задача, то як указати оптимальний розв’язок двоїстої до неї, не розв’язуючи вихідну задачу.

Відповідь на ці питання дають перша (основна) та друга теореми двоїстості.

Перша (основна) теорема двоїстості

Теорема. 1 Якщо одна із взаємо двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то його має і друга задача, причому виконується рівність

$$\max Z(X) = Z(X^*) = \min f(Y) = f(Y^*), \tag{3.11}$$

(тут X*, Y*– оптимальні розв’язки двоїстих задач).

2 Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, то область допустимих розв’язків двоїстої задачі пуста.

З цієї теореми випливають:

1) необхідні і достатні умови існування хоча би одного допустимого розв’язку у кожної взаємо двоїстої задачі,

2) критерій оптимальності допустимих розв’язків X*, Y*, який полягає у виконанні рівності $Z(X^*) = f(Y^*)$.

Зауваження. Рівність (2.11) є не тільки достатньою умовою оптимальності, але і необхідною.

Економічний зміст першої теореми двоїстості

План виробництва $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і набір цін (оцінок) ресурсів $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ є оптимальними тоді і тільки тоді, коли прибуток *Z(X)* від реалізації продукції, який знайдено при відомих завчасно цінах $c_1, c_2, ...c_n$, дорівнює витратам *f(Y)* на ресурси за внутрішніми цінами $y_1, y_2, ..., y_m$, які визначаються тільки після розв’язання задачі.

Для всіх інших планів прибуток завжди менше витрат на ресурси.

Друга теорема двоїстості

Ця теорема встановлює зв’язок між первісними змінними однієї з двоїстих задач і допоміжними змінними другої задачі, який наведений в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

<table>
<tr><td colspan="2">Змінні початкової задачі</td></tr>
<tr><td>Первісні</td><td>Допоміжні</td></tr>
<tr><td>$x_1 \quad x_2 \cdots x_j \cdots x_n$
$\updownarrow \quad \updownarrow \cdots \updownarrow \cdots \updownarrow$
$y_{m+1} \quad y_{m+2} \cdots y_{m+j} \cdots y_{m+n}$</td><td>$x_{n+1} \quad x_{n+2} \cdots x_{n+j} \cdots x_{n+m}$
$\updownarrow \quad \updownarrow \cdots \updownarrow \cdots \updownarrow$
$y_1 \quad y_2 \cdots y_i \cdots y_m$</td></tr>
<tr><td>Допоміжні</td><td>Первісні</td></tr>
<tr><td colspan="2">Змінні двоїстої задачі</td></tr>
</table>

Теорема (без доведення). Додатнім компонентам оптимального розв'язку однієї із взаємо двоїстих задач відповідають нульові компоненти оптимального розв'язку іншої задачі, тобто для будь-яких $i = 1,2,...,m$ та $j = 1,2,...,n$, якщо $x_j^* > 0$, *то* $y_{m+j}^* = 0$; якщо $x_{n+i}^* > 0$, *то* $y_i^* = 0$, і аналогічно, якщо $y_i^* > 0$, *то* $x_{n+i}^* = 0$, якщо $y_{m+j}^* > 0$, *то* $x_j^* = 0$.

Розглянута теорема є наслідком наступної теореми, яка і є **другою теоремою двоїстості.**

Теорема . Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних лінійної функції вихідної задачі, яка записана через вільні змінні її оптимального розв'язку (оптимального кроку симплекс-таблиці).

Приклад.

Таблиця 3.6

Пряма задача	Двоїста задача
Знайти максимум $Z(X) = 2x_1 + 3x_2$, $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$.	Знайти мінімум $f(Y) = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4$, $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$ $y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}$.

Виходячи з розв'язку прямої задачі (табл. 3.6), знайдемо оптимальний розв'язок двоїстої задачі.
Наведемо кінцеву симплекс- таблицю розв'язання задачі (табл.3.7):

Таблиця 3.7

БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
x_1	2	6	1	0	-1/5	3/5	0	0
x_2	3	4	0	1	2/5	-1/5	0	0
x_5	0	1	0	0	-2/5	1/5	1	0
x_6	0	3	0	0	3/5	-9/5	0	1
Δ_j		24	0	0	4/5	3/5	0	0

Звідки випливають співвідношення:

$$x_1 = 6 + 1/5x_3 - 3/5x_4,$$
$$x_2 = 4 - 2/5x_3 + 1/5x_4,$$
$$x_5 = 1 + 2/5x_3 - 1/5x_4,$$
$$x_6 = 3 - 3/5x_3 + 9/5x_4,$$

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 24 - 4/5x_3 - 3/5x_4.$$

Оптимальний розв'язок прямої задачі

$$X^*_{опт} = (6;\ 4;\ 0;\ 0;\ 1;\ 3),$$

при цьому, виходячи з другої теореми двоїстості, оптимальний розв'язок двоїстої задачі (табл..3.8)

$$Y_{опт} = (\frac{4}{5};\ \frac{3}{5};\ 0;\ 0;\ 0;\ 0).$$

Таблиця 3.8

БЗ	$C_Б$	A_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
y_1	18	4/5	1	0	2/5	-3/5	1/5	-2/5
y_2	16	3/5	0	1	-1/5	9/5	-3/5	1/5
		24	0	0	-1	-3	-6	-4

$$y_1 = 4/5 - 2/5y_3 + 3/5y_4 - 1/5y_5 + 2/5y_6,$$
$$y_2 = 3/5 + 1/5y_3 - 9/5y_4 + 3/5y_5 - 1/5y_6,$$
$$f(Y) = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 = 24 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6;$$
$$Y^*_{опт} = (4/5;\ 3/5;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0), \text{ при цьому } X^*_{опт} = (6;\ 4;\ 0;\ 0;\ 1;\ 3).$$

Зважаючи на взаємозв'язок основних і допоміжних змінних двоїстих задачі, а також оцінок змінних останньої симплекс-таблиці, можна розв'язавши одну задачу, вказати оптимальний розв'язок іншої. Дійсно, за другою теоремою двоїстості встановлюємо наступний зв'язок між змінними прямої та двоїстої задачі.

$$\begin{array}{cccccc|l}
\multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hphantom{\Delta x_1 = 0 \quad \Delta x_2 = 0}}^{основні}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{\Delta x_3 = 4/5 \quad \Delta x_4 = 3/5 \quad \Delta x_5 = 0 \quad \Delta x_6 = 0}}^{допоміжні}} & \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \textit{задача на максимум} \\
\Delta x_1 = 0 & \Delta x_2 = 0 & \Delta x_3 = 4/5 & \Delta x_4 = 3/5 & \Delta x_5 = 0 & \Delta x_6 = 0 & \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \textit{задача на мінімум} \\
|\Delta y_5| = 6 & |\Delta y_6| = 4 & \Delta y_1 = 0 & \Delta y_2 = 0 & |\Delta y_3| = 1 & |\Delta y_4| = 3 & \\
\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\hphantom{|\Delta y_5| = 6 \quad |\Delta y_6| = 4}}_{допоміжні}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{\Delta y_1 = 0 \quad \Delta y_2 = 0 \quad |\Delta y_3| = 1 \quad |\Delta y_4| = 3}}_{основні}} &
\end{array}$$

Для оптимальних компонент запишемо співвідношення:

$$x_1 = |\Delta y_5| = 6;\ x_2 = |\Delta y_6| = 4;\ x_3 = \Delta y_1 = 0;\ x_4 = \Delta y_2 = 0;\ x_5 = |\Delta y_3| = 1;\ x_6 = |\Delta y_4| = 3;$$

$$X_{опт} = (6;\ 4;\ 0;\ 0;\ 1;\ 3);$$

$$y_1 = \Delta x_3 = \frac{4}{5};\ y_2 = \Delta x_4 = \frac{3}{5};\ y_3 = \Delta x_5 = 0;\ y_4 = \Delta x_6 = 0;\ y_5 = \Delta x_1 = 0;\ y_6 = \Delta x_2 = 0,$$

$$Y_{опт} = (\frac{4}{5};\ \frac{3}{5};\ 0;\ 0;\ 0;\ 0).$$

Теорема (без доведення) про доповнюючу нежосткість

Теорема. Для того, щоб плани X^* та Y^* були оптимальними для пари двоїстих задач, необхідно і достатньо виконання наступних умов, які звуться умовами про доповнюючу нежосткість

$$x_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) = 0, \qquad (3.12)$$

$$y_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) = 0 \qquad (3.13)$$

З умов (3.12) та (3.13) випливає наступне: якщо якесь обмеження однієї із задач її оптимальним планом перетворюється в строгу нерівність $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > b_i$, то відповідна компонента оптимального плану y_i^* повинна дорівнювати нулю ($y_i^* = 0$), і навпаки, якщо $y_i^* > 0$, то відповідне обмеження перетворюється в рівність $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$. Або, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, то $x_j^* = 0$, і якщо $x_j^* > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$.

Економічний зміст теореми

Двоїсті оцінки y_i можуть бути мірою дефіцитності ресурсів, тобто дефіцитний ресурс, який є повністю використаний ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$), має додатну оцінку $y_i > 0$, а ресурс надлишковий ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$) має нульову оцінку $y_i = 0$.

Третя теорема двоїстості (теорема про оцінки)

Значення змінних y_i^* в оптимальному розв'язку двоїстої задачі чисельно дорівнюють частинним похідним $\frac{\partial Z_{\max}}{\partial b_i}$ для прямої задачі (b_i – праві частини системи обмежень).

З цієї теореми випливає те, що при малих змінах Δb_i виконується наближена рівність

$$\Delta z \simeq \sum y_i * \Delta b_i .$$

При більш значних змінах вільних членів можна тільки стверджувати наступну оціночну нерівність

$$Y_1 * \Delta b_i \le \Delta z_{\max} \le Y * \Delta b_i ,$$

де $Y_1 *$– оптимальний розв'язок двоїстої задачі при змінених значеннях $b_i + \Delta b_i$.

3.3 Двоїстий симплекс-метод

Двоїстий симплекс-метод використовується для знаходження розв'язку задачі ЛП, яка в системі обмежень має одиничний базис, але серед вільних членів b_i є від'ємні (деякі $b_i < 0$). Така ситуація не дає можливості застосувати прямий симплекс-метод. Розв'язання такої задачі побудовано на наступних положеннях.

Означення. Розв'язок $X=(b_1,b_2,...,b_m,0,...,0)$ системи обмежень – рівностей (деякі $b_i<0$), яка має базисні змінні $x_1,x_2,...,x_m$, зветься **псевдорозв'язком,** якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на мінімум всі $\Delta_j \leq 0$).

Теорема 1. Якщо в псевдорозв'язку $X=(b_1,b_2,...,b_m,0,...,0)$ є хоча би одне $b_i<0$, для якого всі елементи a_{ij} рядка, відповідаючого цьому b_i, невід'ємні $(a_{ij}\geq 0)$, то початкова задача ЛП не має розв'язків.

Теорема 2. Якщо в псевдорозв'язку $X=(b_1,b_2,...,b_m,0,...,0)$ є такі від'ємні елементи $b_i\,(b_i<0)$, що для будь-якого з них існують $a_{ij}<0$, то можна перейти до нового псевдорозв'язку, при якому значення цільової функції задачі ЛП не зменшиться (для задачі на максимум).

Критерієм оптимальності опорного розв'язку є невід'ємність оцінок: $\Delta_j \geq 0$, при цьому всі $b_i>0$ (при розв'язанні задачі на максимум *Z*(*X*)).

Двоїстий симплекс-метод дозволяє розв'язувати задачі ЛП, системи обмежень яких при додатному базисі мають вільні члени будь-якого знака, а також задачу ЛП з додатковим обмеженням, коли оптимальний розв'язок задачі знайдено без нього. За допомогою цього методу можна зменшити кількість перетворень системи обмежень, а також розміри симплкес-таблиці.

Алгоритм двоїстого симплекс-метода

Нехай задача ЛП має псевдорозв'язок $X=(b_1,b_2,...,b_m,0,...,0)$, для якого всі $\Delta_j \geq 0$, але деякі $b_i<0$ (якщо всі $b_i>0$, то псевдорозв'язок буде оптимальним розв'язком).

1 Складають симплекс-таблицю задачі.

2 Візуально перевірюють можливість розв'язання задачі на основі теореми1, тобто наявність в рядку, де $b_i<0$, від'ємних коефіцієнтів $a_{ij}<0$.

3 Вибирають найбільше за модулем від'ємне b_i; нехай $b_k=\max\limits_i |b_i<0|$. *К*-й рядок зветься **розв'язувальним рядком**. Він вказує на те, що базисну змінну x_k, яка знаходиться в *к*-му рядку, треба виключити з базису.

4 Знаходять **розв'язувальний стовпець**, який відповідає мінімальному за модулем значенню відношення $-\dfrac{\Delta_j}{a_{ij}}$ (тільки для $a_{ij}<0$) для задачі на максимум і $\dfrac{\Delta_j}{a_{ij}}$ – для задачі на мінімум. Нехай мінімальне значення відповідає *l*-му стовпцю. Це вказує на те, що змінну x_l треба ввести в базис замість виведеної з базису змінної x_k і *l*- ий стовпець зветься розв'язувальним .

5 Застосовують метод Жордана – Гаусса і переходять до нового псевдорозв'язку. Якщо для нього всі $\Delta_j \geq 0$ і всі $b_i>0$, то він буде оптимальним. Якщо хоча б одна з оцінок $\Delta_j<0$, а всі $b_i>0$, то застосовують звичайний симп-

лекс-метод до отримання оптимального розв'язку. Якщо хоча б одна з оцінок $\Delta_j < 0$ і деяке $b_i < 0$, то продовжують розв'язання задачі, починаючи з п 2.

Зауваження. При розв'язанні задачі на мінімум всі оцінки Δ_j повинні бути недодатними, тобто $\Delta_j \le 0$.

Приклад. Знайти мінімум

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 5x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$$

Розв'язання. Перепишемо систему обмежень у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 = 5, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5, \end{cases}$$

де x_4 , x_5 – додаткові змінні.

Тоді задача ЛП приймає вигляд: знайти мінімум

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Таблиця 3.9

Номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	-2	1	5	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	4	1	1	-1	1	0
	x_5	0	-5	0	5	-1	0	1
	Δ_j		0	2	-1	-5	0	0
1	x_4	0	-1	0	6	-2	1	1
	x_1	2	5	1	-5	1	0	-1
	Δ_j		10	0	-11	-3	0	- 2
2	x_3	5	1/2	0	-3	1	-1/2	-1/2
	x_1	2	9/2	1	-2	0	1/2	-3/2
	Δ_j		23/2	0	-20	0	-3/2	-7/2

На першому етапі отримаємо псевдорозв'язок $X = (0;0;0;4;-5)$(табл.3.9). Цей розв'язок має один від'ємний елемент $b_2 = -5$, тому змінна x_5 виводиться з базису. Знайдемо мінімальне симплексне відношення

$$\min\left\{\left|\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right|\right\} = \min\left\{\left|\frac{2}{-1}\right|, \left|\frac{-5}{-1}\right|\right\} = \frac{-2}{-1},\ a_{ij} < 0,$$

яке відповідає змінній x_1. Це означає, що на другому етапі замість змінної x_5 вводимо в базис змінну x_1 і отримаємо псевдорозв'язок $X = (5;0;0;-1;0)$; третя симплекс-таблиця визначає опорний розв'язок $X = \left(\frac{9}{2};0;\frac{1}{2};0;0\right)$, який є оптимальним (оскільки всі $\Delta_j \le 0$ і всі $b_i \ge 0$), а також є розв'язком вихідної задачі. При цьому $\min Z(X) = Z(X_{опт}) = \frac{23}{2}$.

3.4 Економічне тлумачення будь-якого кроку ітерації симплекс-таблиці

Розглянемо економічне тлумачення елементів симплекс-таблиці на наступному прикладі.

Приклад. Для виготовлення різних виробів А, В і С підприємство використовує три різних видів сировини. Норми витрат сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А, В і С, а також запаси кожного виду сировини зображені в таблиці 3.10.

Таблиця 3.10

Вид сировини	Норми витрат сировини на один виріб			Запаси сировини
	А	В	С	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Ціна одного виробу (грн.)	9	10	16	

Треба скласти план виробництва, який забезпечує максимальну загальну вартість виготовленої продукції.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо через

x_1 – кількість одиниць виробів виду А, вироблених підприємством;

x_2 – кількість одиниць виробів виду В, вироблених підприємством;

x_3 – кількість одиниць виробів виду С, вироблених підприємством.

Тоді цільова функція, як загальна вартість виготовленої продукції, дорівнює

$$Z(X) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3.$$

Система обмежень має вигляд

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360,$$
$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192,$$
$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180$$

(кількість сировини кожного виду, витраченої на виготовлення всієї продукції, не перевищує вказаних запасів).

Таким чином, задача ЛП має вигляд: знайти максимум

$$Z(X) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \tag{3.14}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases} \tag{3.15}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Приведемо задачу ЛП до канонічного вигляду, для чого в кожну нерівність системи обмежень додамо невід'ємні доповнюючи змінні $x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0$, які в цільову функцію ввійдуть з нульовими коефіцієнтами. Тоді задача перепишеться у вигляді: знайти максимум

$$Z(X) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \tag{3.16}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}, \tag{3.18}$$

де x_4, x_5, x_6 – кількість недовикористанної сировини кожного виду, яка зрівнює витрати сировини та її запаси.

Для сформульованої задачі побудуємо симплекс-таблицю (табл. 3.11) и наведемо всі кроки симплекс-методу до знаходження оптимального розв'язку.

Таблиця 3.11

Номер ітера-ції	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
				9	10	16	0	0	0
0	x_4	0	360	18	15	12	1	0	0
	x_5	0	192	6	4	8	0	1	0
	x_6	0	180	5	3	3	0	0	1
	Δ_j		0	-9	-10	-16	0	0	0
1	x_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
	x_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
	x_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
	Δ_j		384	3	-2	0	0	2	0
2	x_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
	x_3	16	20	1/4	0	1	-1/8	5/24	0
	x_6	0	96	5/4	0	0	-1/16	-1/8	1
	Δ_j		400	5	0	0	2/9	5/3	0

В останній таблиці (ітерація 2) всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, тому відповідний опорний розв'язок є оптимальним, тобто $X_{опт.} = (0;8;20;0;0;96)$.

1Тлумачення нульового кроку симплекс-методу. Тут $x_4, x_5, x_6 - БЗ$, $x_1, x_2, x_3 - ВЗ$. Початковий опорний розв'язок має вигляд $X_{п.оп.} = (0;0;0;360;192;180)$, що відповідає наступному: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ означає, що підприємство нічого не виробляє, отже, сировина відповідно кожного виду не використовується і залишається у розмірі $x_4 = 360, x_5 = 192, x_6 = 180$ і значення цільової функції Z(X)=0. Оскільки існують від'ємні оцінки $\Delta_1 = -9$, $\Delta_2 = -10$, $\Delta_3 = -16$, то опорний розв'язок не є оптимальним. З іншого боку, від'ємність оцінок говорить про можливість збільшення вартості Z(X), причому оцінки вказують на те, наскільки збільшиться значення Z(X) при введенні в план одиниці тієї або іншої продукції. Так, число $\Delta_2 = -10$ означає, що введення в план виробництва одиниці виробу В (число –10 відповідає змінній x_2) забезпечує збільшення значення цільової функції Z(X) на 10 одиниць (гривень). Тому, з економічних міркувань, найбільш доцільним є введення в план виробу виду С, що з математичної точки зору, відповідає введенню в базис змінної x_3. Визначення базисної змінної, замість якої буде введена змінна x_3, означає, що даний вид сировини буде використано повністю (в нашому випадку виключена змінна x_5 – сировина 2-го виду), при цьому максимальна кількість виробів вигляду С дорівнює $\min\left\{\frac{360}{12};\frac{192}{8};\frac{180}{3}\right\} = 24$.

2 Тлумачення першого кроку симплекс-таблиці. Опорний розв'язок дорівнює $X_{оп.} = (0;0;24;72;0;108)$, тобто при цьому плані виробництва підприємство виготовляє тільки 24 одиниці виробів С, а 72 кг сировини першого виду і 108 кг сировини третього виду залишаються недовикористаними. Значення загальної вартості продукції дорівнює Z(X) = 384 (грн.). Вказаний опорний план не є оптимальним, оскільки серед оцінок є від'ємні: $\Delta_2 = -2$. Ця оцінка відповідає змінній x_2. З економічної точки зору це призводить до включення в план виробів В (2-го виду), при цьому максимальна кількість виробів дорівнює $\min\left\{\frac{72}{9};\frac{24}{1/2};\frac{108}{3/2}\right\} = 8$, а загальна вартість збільшиться на величину $8 \cdot 2(грн)$ $\left(2 = |\Delta_2|\right)$.

Значення елементів стовпця першого кроку симплекс-таблиці суттєво змінились, причому економічний зміст їх став більш складним. Наприклад, візьмемо стовпець, який відповідає змінній x_2 – (9; 1/2; 3/2). Проведемо економічне тлумачення кожного елемента.

Число 1/2 знаходиться на перетину рядка і стовпця, які відповідають змінним x_3 та x_2. Воно вказує на те, що на величину ½ (ум.од.)необхідно зменшити виробництво виробів типа С (відповідає змінній x_3), якщо запланувати виробництво одиниці виробу В (відповідає змінній x_2). Числа 9 і 3/2 вказують на те, скільки потребується при цьому відповідно сировини 1-го типу (відповідає x_4) і сировини 3-го типу (відповідає x_6). Таким чином, числа 9 і 3/2 є як би новими нормами витрат на виробництво одиниці виробу типа В. Такий же економічний зміст мають дані стовпця, який відповідає змінній x_1.

Наведемо економічне тлумачення стовпця, який відповідає змінній x_5 – (-3/2; 1/8; -3/8). Число 1/8 означає, що доповнююче збільшення сировини 2-го типу (відповідає x_5) на 1 кг призвело б до збільшення кількості виробів типа С (відповідає x_3) на 1/8 одиниць. Одночасно була б потреба в 3/2 (кг) сировини першого типу (відповідає x_4) і 3/8 (кг) сировини третього типу (відповідає змінній x_6). Число $\Delta_5 = 2$ означає, що збільшення кількості виготовлення виробів типу С на 1/8 одиниць призвело б до збільшення значення цільової функції на 2 (грн).

3 Тлумачення другого кроку. Опорний план $X_{оп.} = (0;8;20;0;0;90)$ є оптимальним, оскільки всі оцінки $\Delta_j \geq 0$. Цей план означає, що підприємство повинно виробляти 8 одиниць виробів типу В, 20 одиниць виробів типу С і при цьому сировина 1-го і 2-го виду буде використана повністю, а 3-го виду залишається у розмірі 90 кг. Максимальна вартість виготовлення продукції дорівнює 400 (грн). Стовпець, який відповідає змінній x_1 (виготовлення виробів А), тлумачиться таким чином:

$\Delta_5 = 5$ означає, що виробництво ї одиниці виробу типа А призвело б до зниження значення $Z(X)$ на 5 гривень. Число 1 означає, на скільки одиниць необхідно зменшити виготовлення виробів типа В (відповідає x_2), якщо запланувати виготовлення одиниці виробу типа А. Аналогічне тлумачення відноситься для числа 1/4 (відповідає виробам типа С). 5/4 означає, скільки треба сировини третього виду (відповідає x_6) для випуску одиниці виробу типа А.

Ознака нескінченної множини оптимальних розв'язків

При розв'язанні задач ЛП виникає питання, чи існує така ситуація, коли задача має не один, а нескінченну кількість оптимальних розв'язків. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема. Якщо в останній симплекс-таблиці, яка містить оптимальний розв'язок задачі, вільній змінній відповідає хоча би одна оцінка $\Delta_j = 0$, то задача ЛП має нескінченну множину оптимальних розв'язків.

Ознака необмеженості цільової функції

Теорема. Якщо в індексному стовпці симплекс-таблиці задачі ЛП при розв'язанні задачі на максимум існує від'ємна оцінка $\Delta_{j0} < 0$ і при цьому цей стовпець не містить жодного додатного елемента, то цільова функція на множині припустимих розв'язків задачі є необмеженою зверху.

Зауваження. Якщо в задачі ЛП на мінімум існує оцінка $\Delta_{j0} > 0$ і в стовпці, який відповідає змінній x_{j0} нема жодного додатного елемента, то цільова функція є необмеженою знизу.

Поняття про виродження ЗЛП

Означення. Задача ЛП називається **виродженою**, якщо серед її опорних розв'язків є хоча би один вироджений.

Означення. Базисний розв'язок задачі ЛП, записаний з перевагою змінних, називається **невиродженим**, якщо вільні члени всіх рівнянь додатні і **виродженим,** – якщо серед них є рівні нулю.

Для виродженої задачі характерно так зване зациклювання, тобто, переходячи від одного опорного розв'язку до іншого, значення цільової функції не змінюються.

Запитання для самоперевірки

1 Як формулюється двоїста відповідно до загальної задача ЛП?
2 Як формулюється двоїста відповідно до канонічної задача ЛП?
3 Як формулюються основні теореми двоїстості?
4 У чому полягає двоїстий симплекс – метод розв'язання задачі ЛП?

Розділ 4 СПЕЦІАЛЬНІ ЗАДАЧІЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1 Задачі цілочислового програмування
4.2 Транспортна задача
4.2.1 Постановка задачі ті її математична модель
4.2.2 Закрита ті відкрита моделі ТЗ
4.2.3 Побудова початкового опорного розв'язку
4.2.4 Метод потенціалів

4.1 Задача цілочислового ЛП

Задача цілочислового програмування відноситься до задач дискретного програмування, в яких на змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, які входять в цільову функцію і систему обмежень, накладаються умови цілочисловості (змінні повинні бути цілими), при цьому область допустимих розв'язків є скінченною. Це задачі з фізичною неподільністю змінних, наприклад, не можна побудувати 3,2 підприємства, виготовити 2,7 автомобіля і т.і. Дискретними є також такі задачі, в яких змінні приймають тільки два значення - нуль та одиницю.

Задача лінійного програмування, в якій на всі змінні накладена умова цілочисловості, називається **повністю цілочисловою** задачею лінійного програмування. Якщо ж умова цілочисловості накладена лише на частину змінних задачі, то вона називається **частково цілочисловою** задачею лінійного програмування.

Прикладами економічних задач цілочислового програмування є задачі про призначення (розподіл рейсів літаків), оптимального розкрою матеріалів, оптимального використання устаткування, комівояжера та інші.

Методи розв'язання задач цілочислового програмування можна поділити на три групи:

1) симплекс-метод, який не завжди може дати розв'язок у цілочисловому вигляді;
2) точні методи – це методи відсічення та комбінований метод гілок та меж;
3) наближені методи локальної оптимізації.

Ми розглянемо точний метод – метод відсічення, який ще носить назву **метода Гоморі**.

Суть метода відсічення полягає у наступному:

1 Початкова задача розв'язується без урахування обмеження цілочисловості, тобто застосовується симплекс-метод. Якщо одержаний оптимальний розв'язок є цілочисловим, то задача розв'язана. У противному випадку до обмежень початкової задачі додається нове обмеження, яке задовольняє наступним умовам:

а) одержаний нецілочисловий розв'язок порушує доповнююче обмеження;
б) будь-який допустимий цілочисловий розв'язок початкової задачі задовольняє це обмеження;

2 Задача розв'язується з урахуванням нового обмеження двоїстим симплекс-методом (причому кожен наступний етап з доповнюючим новим обмеженням) доти, поки розв'язок не стане цілочисловим.

Алгоритм Гоморі складається з перерахованих вище пунктів і, крім того, вказує на те, як побудувати доповнююче обмеження.

Нехай після знаходження оптимального нецілочислового розв'язку (пункт 1) система обмежень має вигляд

$$x_i = \beta_i - \sum \alpha_{ij} x_j, \;\; x_j \in \left(БЗ\right), \tag{4.1}$$

при цьому хоча б одне з β_i є дробовим.

Позначення $(ВЗ)$ відповідає множині вільних змінних, $(БЗ)$ – базисних змінних.

Нехай, наприклад, компонента β_{i_0} – не ціла.

Перепишемо відповідну рівність системи обмежень у вигляді

$$x_{i_0} = \beta_i - \sum_{x_j \in (БЗ)} \alpha_{ij} x_j \,. \tag{4.2}$$

Позначимо через $[\beta_{i_0}]$– найбільшу цілу частину числа β_{i_0}, але меншу, ніж саме число β_{i_0}, а через $\{\beta_{i_0}\}$– його дробову частину , тоді

$$\beta_{i_0} = [\beta_{i_0}] + \{\beta_{i_0}\}.$$

Наприклад, 3,2 = 3 + 0,2, -4,3 = -5 + 0,7.

В свою чергу, $\alpha_{i_0,j} = [\alpha_{i_0,j}] + \{\alpha_{i_0,j}\}, x_j \in \{БЗ\}$.

Тоді вираз (4.2) можна переписати у вигляді

$$x_{io} = ([\beta_{i_0}] - \sum_{x_j \in \{БЗ\}} [\alpha_{io,j}]x_j + (\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{БЗ\}} [\alpha_{io,j}]x_j \,. \tag{4.3}$$

Оскільки x_{i0} - координата допустимого цілочислового розв'язку задачі, то повинно виконуватися умова

$$\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{БЗ\}} [\alpha_{io,j}] x_j \le 0 . \quad (4.4)$$

Нерівність (4.4) визначає **правильне відсічення Гоморі**, тобто, по-перше, є лінійною, по-друге, не відтинає жодного цілочислового допустимого розв’язку задачі; по-третє, відтинає знайдений оптимальний нецілочисловий розв’язок. Ця нерівність й обирається за додаткове обмеження після перетворення на рівність за допомогою цілої невід’ємної допоміжної змінної.

Метод Гоморі дозволяє за скінченне число кроків знайти оптимальний цілочисловий розв’язок.

Алгоритм метода Гоморі складається з наступних етапів:

1 Розв’язують задачу цілочислового програмування, як задачу ЛП, без умови цілочисловості за допомогою симплекс-метода або двоїстим симплекс – методом.

2 Якщо всі β_i $(i = \overline{1,m})$ – цілі, то задача розв’язана. У протилежному випадку серед дробових значень $\{\beta_i\}$ вибирають значення $\{\beta_{i_0}\}$ з найбільшою дробовою частиною; якщо серед них є декілька однакових, то вибирають будь-яку. Для неї записують доповнююче обмеження $\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{БЗ\}} [\alpha_{io,j}] x_j \le 0$, яке призводять до вигляду рівності за допомогою введення доповнюючої змінної. Одержане обмеження записують в симплекс-таблиці окремим рядком перед рядком оцінок змінних.

3 Розв’язують одержану задачу двоїстим симплекс - методом.

2 Повертаються до виконання дій пункта 2.

Приклад. Знайти максимум

$$Z(X) = x_1 + x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} &-x_1 + 3x_2 \le 3, \\ &3x_1 - x_2 \le 3, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ &x_1, x_2 - цілі. \end{aligned}$$

Розв’язання.

Застосовуючи симплекс-метод, одержимо симплекс - таблицю останнього кроку (табл.4.1), при якому одержимо оптимальний розв’язок.

Таблиця 4.1

БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			1	1	0	0
x_2	1	3/2	0	1	3/8	1/8
x_1	1	3/2	1	0	1/8	3/8
Δ_j		3	0	0	1/2	1/2

З таблиці 4.1 зробимо висновок, що оптимальний розв’язок має вигляд $X_{опт} = (\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ 0;\ 0)$, який містить дробові компоненти: $x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}$. Оскільки їх дробові частини однакові, то за формулою (4.4) запишемо доповнююче обмеження, наприклад, для змінної x_1:

$$\{\frac{3}{2}\} - (\{\frac{1}{8}\}x_3 + \{\frac{3}{8}\}x_4) \le 0,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_4 \le 0,$$

$$\frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - x_5 = \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{8}x_3 - \frac{3}{8}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Запишемо це обмеження в таб.4.2.

Таблиця 4.2

БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			1	1	0	0	0
x_2	1	3/2	0	1	3/8	1/8	0
x_1	1	3/2	1	0	1/8	3/8	0
x_5	0	-1/2	0	0	-1/8	-3/8	1
Δ_j		3	0	0	1/2	1/2	0

Розв’яжемо одержану задачу двоїстим симплекс - методом, в результаті отримаємо таблицю 4.3:

Таблиця 4.3

БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			1	1	0	0	0
x_2	1	4/3	0	1	1/3	0	1/3
x_1	1	1	1	0	0	0	1
x_4	0	4/3	0	0	1/3	1	-8/3
Δ_j		7/3	0	0	1/3	1/2	4/3

Знайдений оптимальний розв’язок $X_{оп} = (1;\ \frac{4}{3};\ 0;\ \frac{4}{3};\ 0)$ знову неціочисловий, тому що містить дробові компоненти: $x_2 = 4/3$ і $x_1 = 4/3$. Отже, продовжуємо розв’язання задачі методом Гоморі до отримання оптимального цілочислового розв’язку (табл.4.4 , табл.4.5).

Таблиця 4.4

БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	1	0	0	0	0
x_2	1	4/3	0	1	1/3	0	1/3	0
x_1	1	1	1	0	0	0	1	0
x_4	0	4/3	0	0	1/3	1	-8/3	0
x_6	0	-1/3	0	0	-1/3	0	-1/3	1
Δ_j		7/3	0	0	1/3	0	4/3	0

Таблиця 4.5

БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	1	0	0	0	0
x_2	1	1	0	1	0	0	0	0
x_1	1	1	1	0	0	0	1	0
x_4	0	1	0	0	0	1	-3	0
x_3	0	1	0	0	1	0	1	-3
Δ_j		2	0	0	0	0	1	1

Як видно, з кінцевої симплекс-таблиці (табл.4.5), одержано оптимальний розв’язок цілочислового програмування: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, на якому цільова функція $Z(X)$ досягає максимуму $max\ Z(X) = 2$.

4.2 Транспортна задача лінійного програмування (ТЗЛП)

4.2.1 Постановка задачі та її математична модель

Нехай однорідний вантаж, який знаходиться у m постачальників $A_i\ (i = \overline{1,m})$, запаси якого відповідно рівні a_i одиницям, необхідно доставити n споживачам $B_j(j = \overline{1,n})$, потреби яких відповідно рівні b_j одиницям. Відома вартість c_{ij} перевезення одиниці однорідного вантажу від i-го постачальника до j - го споживача (в деяких випадках задають відстані від пунктів постачання до пунктів споживання).

Необхідно скласти такий план перевезення, який дозволить вивезти весь вантаж, повністю задовольняючий потреби споживачів і мінімізуючий вартість перевезень.

Якщо сумарний об’єм вантажу, який знаходиться у постачальників, дорівнює сумарному попиту споживачів, тобто виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad ,$$

то така модель ТЗ зветься **закритою**.

В інших випадках, тобто, коли запаси постачальників більше попиту споживачів

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

або запаси постачальників менше попиту споживачів

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

транспортна задача зветься **відкритою**.

Побудуємо математичну модель для закритої задачі.

Позначимо через x_{ij}, $(i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n)$ – кількість одиниць вантажу, який відправляється від i - го постачальника до j - го споживача. Тоді цільова функція приймає вигляд

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} .$$

Обмеження на вивіз всього продукту від постачальників A_i будуть задані рівностями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}) .$$

Обмеження на задовольняючі потреби споживачів B_j мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}) ,$$

де

$$x_{ij} \geq 0 .$$

Таким чином, математична модель закритої ТЗ має вигляд:

знайти мінімум функції

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} , \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \tag{4.7}$$

$$x_{ij} \geq 0 . \tag{4.8}$$

Матрицю

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \cdots x_{2n} \\ \vdots & \\ x_{m1} & x_{m2} \cdots x_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

називають **матрицею перевезень**, а матрицю

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21}\cdots c_{1n} \\ c_{12} & c_{22}\cdots c_{2n} \\ \vdots & \\ c_{1m} & c_{2m}\cdots c_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

матрицею тарифів.

Транспортну задачу часто зображують у вигляді таблиці, яка зветься **розподільною таблицею** (табл. 4.6). Вона використовується і під час розв’язання ТЗ

Таблиця 4.6

B_j / A_i	B_1	B_2	…	B_n	запаси a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	a_m
потреби b_j	b_1	b_2	…	b_n	

4.2.2 Закрита та відкрита моделі ТЗ

Відкриту модель можна привести до закритої шляхом упровадження штучного постачальника або штучного споживача.

Наприклад, нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тоді впроваджують штучного споживача B_{n+1} з попитом вантажу у розмірі

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j$$

і вартістю перевезень

$$c_{i,n+1}=0 \quad (i=\overline{1,m}).$$

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то впроваджують штучного постачальника A_{m+1} із запасом продукту

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$$

і вартістю перевезень

$$c_{m+1,j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Наведемо приклад приведення ТЗ до задачі із закритою моделлю. Нехай маємо наступну розподільну таблицю ТЗ (табл.4.7).

Таблиця 4.7

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запаси a_i
A_1	7	1	3	14	2	50
A_2	4	5	1	6	13	30
A_3	8	10	2	4	1	20
A_4	3	9	4	12	5	70
потреби b_j	10	40	20	30	50	170 150

Як бачимо з таблиці, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 170$, а $\sum_{j=1}^{n} b_j = 150$, тобто виконується нерівність $\sum_{i=1}^{4} a_i > \sum_{j=1}^{5} b_j$. Отже, маємо задачу з відкритою моделлю. Введемо допоміжного споживача B_6 з попитом $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 170 - 150 = 20$ ум.од. продукту з вартістю перевезень $c_{I,n+1} = c_{hi,6} = 0$ $(i = \overline{1,4})$. Побудуємо нову розподільну табл. 4.8

Таблиця 4.8

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	запаси a_i
A_1	7	1	3	14	2	0	50
A_2	4	5	1	6	13	0	30
A_3	8	10	2	4	1	0	20
A_4	3	9	4	12	5	0	70
потреби b_j	10	40	20	30	50	20	170 170

Таким чином, одержали задачу з закритою моделлю.

4.2.3 Побудова початкового опорного розв'язку

Теорема про існування допустимого розв'язку

Означення. Сукупність чисел x_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, задовольняючих обмеженням (4.6) – (4.8) ТЗ, називається **допустимим розв'язком** транспортної задачі.

Теорема. Для того, щоб ТЗ мала допустимий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ТЗ була задачею із закритою моделлю.

Теорема про ранг матриці системи обмежень (4.6) – (4.8).

Теорема. Ранг r матриці системи обмежень (4.6) - (4.8) ТЗ на одиницю менше числа рівнянь, тобто $r=m+n-1$.

Мають на увазі, що оскільки кількість рівнянь дорівнює $(m+n)$, то на основі цієї теореми можна стверджувати, що ТЗ має безліч допустимих розв'язків. Але нас цікавлять лише ті розв'язки, які мають $(m+n-1)$ додатних компонент, а всі інші їх компоненти дорівнюють нулю. Тому для ТЗ існують свої методи її розв'язання. Нижче ми розглянемо деякі з них.

Нехай якимось чином побудований допустимий розв'язок – матриця X. Отже, в розподільній таблиці ТЗ окремі клітки будуть заповнені кількістю вантажу.

Означення. Клітина розподільної таблиці ТЗ, в якій $x_{ij}\neq 0$, зветься **завантаженою**. В протилежному випадку вона зветься **вільною**.

Означення. Циклом у розподільній таблиці ТЗ зветься замкнена ломана лінія, вершини якої розташовані в завантажених клітинах, окрім однієї, а ланки паралельні стовпцям і рядкам таблиці.

У кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а інша в стовпці. Якщо ломана лінія, яка утворює цикл, перетинається, то точки самоперетину не є вершинами циклу. Цикл має завжди парне число вершин.

При вірній побудові опорного розв'язку для будь-якої вільної клітини можна побудувати тільки один цикл.

Означення. Перехід від одного опорного розв'язку до іншого називають **циклом перерахування**.

Алгоритм побудови циклу перерахування розглянемо в розділі 4.2.4.

Означення. Допустимий розв'язок X транспортної задачі зветься **опорним** тоді і тільки тоді, коли в ньому відсутні цикли.

Опорний розв'язок зветься невиродженим, якщо він містить $(m+n-1)$ завантажених клітин.

Якщо кількість завантажених клітин менш за $(m+n-1)$, то опорний розв'язок зветься виродженим.

ТЗ зветься виродженою, якщо вона має хоча би один вироджений розв'язок.

Теорема. ТЗ (4.5) – (4.8) є виродженою тоді і тільки тоді, коли сумарний запас вантажу у деяких постачальників (не всіх) дорівнює сумарній потребі деяких споживачів (не всіх).

Зауваження. Транспортна задача є задачею лінійного програмування, тому її можна розв'язати симплексним методом. Але цей процес, з одного боку, є трудомісткий в силу великого числа змінних $(m \cdot n)$, з іншого боку, не враховує той факт, що багато змінних x_{ij} дорівнюють нулю. Тому для ТЗ розроблені свої методи розв'язання, які, природно, починаються з побудови початкового опорного розв'язку.

Існує немало методів побудови початкового опорного розв'язку: метод північно-західного кута, мінімального елемента в рядку або стовпці матриці тарифів С, мінімального елемента всієї матриці тарифів С, метод Фогеля і т.і. Ми розглянемо найбільш прості з них – метод північно-західного кута та метод мінімального елемента матриці тарифів С.

Метод північно-західного кута

Нагадаємо, що в розподільній таблиці a_i – запаси вантажу у постачальників A_i, b_j – потреби у вантажу споживачів B_j.

Алгоритм метода північно – західного кута містить наступні етапи:

1 Починаючи з клітини (1.1), розташованій в розподільній таблиці в лівому верхньому куту (північно-західне розташування), завантажують її кількістю вантажу у розмірі $x_{ij} = \min(a_1; b_1)$.

2 Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і далі перший стовпець, який відповідає споживачу B_1, в розрахунках участі не бере. Після цього рухаючись по рядку до клітини (1;2) завантажують її кількістю вантажу у розмірі $x_{12} = \min[(a_1 - b_1); b_2]$. Якщо $a_1 - b_1 < b_2$, то $x_{12} = a_1 - b_1$ і запаси постачальника A_1 вичерпані, отже, перший рядок далі в розрахунках участі не бере. Переходять до розподілу вантажу постачальника A_2.

3 Якщо $b_1 > a_1$, то $x_{11} = a_1$, і перший рядок, який відповідає постачальнику A_1 далі в розрахунках участі не бере. Переходять до другого постачальника A_2, тобто до клітини (2;1). Цю клітину завантажують кількістю вантажу у розмірі $x_{21} = \min(a_2; b_1 - a_1)$ і т.і., поки не заповнюють всю розподільну таблицю.

Розглянемо використання метода на конкретному прикладі.

Приклад. Побудувати початковий опорний розв'язок для наступної ТЗ (дані задачі зображені в розподільній таблиці 4.9).

Таблиця 4.9

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3 800	5	6	800
A_2	7 200	2 500	4	700
A_3	4	3 600	5 400	1000
A_4	6	4	7 500	500
b_j	1000	1100	900	

Порівняємо $a_1 = 800$ і $b_1 = 1000$. Одержимо $x_1 = 800$. Відкреслюємо постачальника A_1. Споживачу B_1 потрібно ще 200 одиниць вантажу, який може доставити постачальник A_2. Заповнюємо клітину (2;1) вантажем у розмірі $x_{21} = 200$. Споживач B_1 одержав 1000 одиниць вантажу і далі участі в розрахунках не бере.

Другий крок. Переходимо до клітини (2;2) – до другого споживача, якому потрібно 1100 одиниць вантажу. У другого постачальника осталося 700 – 200 = 500 одиниць вантажу, які перейдуть до споживача B_2, тобто $x_{22} = 500$. Постачальник A_2 вичерпав себе. Переходимо до клітини (3;2). Споживачу B_2 потрібно вантажу у розмірі 1100 – 500 = 600 одиниць, які може задовольнити постачальник A_3, тобто $x_{32} = 600$ і споживач B_2 одержав необхідні 1100 одиниць вантажу і далі участі в розрахунках не бере. Переходимо до споживача B_3(клітина (3;3)), якому постачальник A_3 може дати 1000 – 600 = 400 одиниць вантажу, тобто $x_{33} = 400$ і постачальник A_3 свої запаси вичерпав. Переходимо до постачальника A_4. Заповнюємо клітину (4;3) вантажем у розмірі в 500 одиниць. Таким чином, початковий опорний розв'язок має вигляд

$$X_{поч.оп.} = \begin{pmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 200 & 500 & 0 \\ 0 & 600 & 400 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix},$$

при якому

$$Z(X_{поч.оп.}) = 800 \cdot 3 + 200 \cdot 7 + 500 \cdot 2 + 600 \cdot 3 + 400 \cdot 5 + 500 \cdot 7 = 12100 (\text{ум.одиниць}).$$

Метод мінімального елемента матриці тарифів

Суть цього методу полягає в тому, що з усієї таблиці вартостей вибирають найменшу і в клітину $(i\ ,\ j\ )$, де вона міститься, записують менше з чисел a_i або b_j. Після цього не розглядають рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю вичерпано, або стовпець, що відповідає споживачу, попит якого повністю задоволено, або й рядок, і стовпець, якщо вичерпано запаси постачальника й задоволено попит споживача.

Алгоритм методу розглянемо на попередньому прикладі (табл.4.9).

1 Знаходимо клітину розподільної таблиці ТЗ з мінімальним значенням тарифу. В нашому випадку це клітина (2;2), для якої $c_{22} = 2$. В цю клітину записуємо вантаж у розмірі $\min(a_2; b_2)$, тобто $\min(700;1100) = 700, x_{22} = 700$. Постачальник A_2 вичерпав себе, другий ряд далі в розрахунках участі не приймає. Споживачу B_2 потрібно ще 1100 – 700 = 400 одиниць вантажу.

2 Переходимо до вибору наступного мінімального елемента матриці тарифів після викреслення в ній другого рядку. Це буде або клітина (1;1), де $c_{11} = 3$, або клітина (3;2), де $c_{33} = 3$. Можна взяти будь-яку з цих клітин, наприклад, (1;1). В цю клітину записуємо вантаж у розмірі $\min(800;1100) = 800, x_{11} = 800$ одиниць і перший рядок викреслюємо з розподільної таблиці. Споживачу B_1 потрібно 1000 – 800 = 200 одиниць продукту.

3 В залишеній матриці тарифів мінімальний елемент знаходиться в клітині (3;2), де $c_{32} = 3$. Споживачу B_2 потрібно 400 одиниць вантажу, які може доставити постачальник A_3, тобто $x_{32} = 400$, причому у нього залишається 1000 – 400 = 600 одиниць вантажу. Споживач B_2 з подальшого розгляду викреслюється.

4 Наступною клітиною з мінімальним значенням матриці тарифів буде клітина (3;1), де $c_{31} = 4$. Споживач B_1 одержить 200 одиниць вантажу від постачальника A_3, $x_{31} = 200$, у якого залишиться 600 – 200 = 400 одиниць продукту. Отже, споживач B_1 вичерпав себе.

5 В розподільній таблиці залишилося дві клітини: (3;3), де $c_{33} = 5$ і (4;3), де $c_{43} = 7$. Завантажимо клітину (3;3) вантажем у розмірі 400 одиниць, які залишилися у постачальника A_3, тобто $x_{33} = 400$. Споживачу B_3 потрібно 900 – 400 = 500 одиниць вантажу, які він одержить від постачальника A_4.

Таким чином, розподільна таблиця буде мати вигляд (табл.4.10

Таблиця 4.10

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3 800	5	6	800
A_2	7	2 700	4	700
A_3	4 200	3 400	5 400	1000
A_4	6	4	7 500	500
b_j	1000	1100	900	

Отже, початковий опорний розв'язок має вигляд

$$X_{поч.оп.} = \begin{pmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 \\ 200 & 400 & 400 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix},$$

а вартість перевезень на цьому розв'язку дорівнює:

$$Z(X_{поч.оп.}) = 800 \cdot 3 + 700 \cdot 2 + 200 \cdot 4 + 400 \cdot 3 + 400 \cdot 5 + 500 \cdot 7 = 11300$$

Порівнюючи значення цільової функції $Z(X)$ на одержаних початкових опорних розв'язках для обох методів (12100 та 11300), бачимо, що метод мінімального елемента дав кращий результат, але цей факт не можна вважати завжди обов'язковим.

4.2.4 Метод потенціалів

Для визначення оптимального розв'язку ТЗ розглянемо метод потенціалів. Суть методу потенціалів полягає в наступному: спочатку знаходять опорний розв'язок ТЗ, а потім його послідовно поліпшують до отримання оптимального розв'язку.

Зауваження. Як бачимо, загальний принцип визначення оптимального розв'язку ТЗ методом потенціалів аналогічний принципу розв'язання задачі ЛП симплекс – методом. Отже, алгоритм розв'язання ТЗ методом потенціалів можна зобразити тією ж схемою, що й при застосуванні симплекс - методу (рис.2.5).

Методи побудови початкового опорного розв'язку розглянуто в п.4.2.3 , тому наведемо, як визначають оптимальний розв'язок.

Критерій оптимальності опорного розв'язку ТЗ

ТЗ є задачею лінійного програмування, тому можна сформулювати двоїсту до неї. Введемо деякі попередні позначення і поняття.

Позначимо через u_i двоїсту оцінку для постачальників, через v_j - двоїсту оцінку для споживачів. Числа u_i та v_j в транспортній задачі звуться **потенціалами.**

Сформулюємо двоїсту задачу до ТЗ.

Знайти максимум функції

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \qquad (4.11)$$

при обмеженнях

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad (i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n}). \qquad (4.12)$$

Позначимо оптимальний розв'язок задачі (4.11) – (4.12) через $y^* = (u^*, v^*)$, а через X^*- оптимальний розв'язок прямої задачі лінійного програмування. На основі першої теореми двоїстості має місце рівність $\min Z(X^*) = \max f(u^*, v^*)$, за теоремою про доповняючу нежосткість виконуоються умови $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ для $x_{ij}^* > 0$ и $u_i^* + v_j^* \le c_{ij}$ для $x_{ij}^* = 0$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$. Цей факт дозволяє сформулювати критерій оптимальності опорного розв'язку ТЗ.

Теорема. Для того, щоб опорний розв'язок $X^* = [x_{ij}^*]_{m \times n}$ ТЗ був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб йому відповідала послідовність із $(m+n)$ чисел u_i^*, v_j^*, задовольняючих умовам

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0 \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}), \tag{4.13}$$

$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0. \tag{4.14}$$

Із сформульованої теореми випливає, що для отримання оптимального розв'язку ТЗ необхідно виконання умов:

1) кожній завантаженій клітині в розподільній таблиці відповідає рівність

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}); \tag{4.15}$$

2) кожній вільній клітині відповідає нерівність

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \ge 0. \tag{4.16}$$

Нерівність (4.16) є умовою **оптимальності опорного розв'язку**. Рівності (4.15) відповідає система із $(m+n-1)$ рівнянь, яка призначена для знаходження $(m+n)$ невідомих потенціалів u_i та v_j.

На вище вказаній теоремі побудований метод знаходження оптимального розв'язку, який зветься методом потенціалів.

Алгоритм метода потенціалів

1 Нехай одним з указаних вище методів побудовано невироджений початковий опорний розв'язок. Для кожної завантаженої клітини (а їх кількість, у випадку невиродженості, дорівнює $(m+n-1)$) **визначають потенціали** u_i **та** v_j **із системи** $u_i + v_j = c_{ij}$, де c_{ij} - тарифи, які стоять в завантажених клітинах розподільної таблиці ТЗ. Але, оскільки число невідомих дорівнює $(m+n)$, а число рівнянь – $(m+n-1)$, то додається ще одне рівняння, наприклад, один якийсь потенціал, рівний нулю .

Якщо початковий опорний розв'язок є виродженим, то одну із вільних його клітин, з якої не можна утворити цикл, завантажують умовним продуктом ε (де ε - скільки завгодно мале додатне число, яке в оптимальному розв'язку вбачають рівним нулю), і, таким чином, опорний розв'язок становиться невиродженим.

2 Для кожної вільної клітини за знайденими потенціалами u_i та v_j **визначають оцінки** $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$**.** Якщо всі оцінки $\Delta_{ij} \geq 0$, то одержаний опорний розв'язок є оптимальним. Якщо деякі $\Delta_{ij} < 0$, то переходять до побудови нового опорного розв'язку (п.3).

3 Серед від'ємних оцінок Δ_{ij} знаходять максимальну за модулем. Для вільної клітини, яка відповідає цьому значенню, **будують цикл перерахування** і виконують зсув по циклу перерахування (**переходять до нового опорного розв'язку**). Якщо побудований опорний розв'язок є вироджений (тобто звільнились декілька зайнятих клітин), то умовно завантажують одну із звільнівшихся клітин.

Побудова циклу перерахування складається з наступних етапів:

1 Всі клітини циклу в одному напрямку (наприклад, проти руху стрілки годинника) позначають позмінно знаками "+" і " – " , починаючи з незавантаженої клітини.

2 Серед клітин, помічених знаком "–", знаходять найменший елемент x_{ij}. Нехай $\lambda = \min x_{ij}$.

3 В клітини зі знаком "+" додають вантаж у розмірі λ, а з клітин зі знаком "–" – віднімають .

Таким чином, одержують новий опорний розв'язок.

4 Переходять до дій пункту 2 і так доти, поки не буде знайдено оптимальний розв'язок.

Зауваження. Для кожного побудованого опорного розв'язку обчислюють значення цільової функції, яке повинне зменшуватися з кожним кроком (для здійснення контролю вірності процесу знаходження опорних розв'язків).

Розглянемо метод потенціалів на прикладі.

Приклад. З трьох складів A_1, A_2, A_3 необхідно доставити будівельні матеріали на 5 будівельних майданчиків B_1, B_2, B_3, B_4 *та* B_5. Потрібно закріпити склади за майданчиками таким чином, щоб загальна сума витрат на транспортування була мінімальною. Всі дані задачі зображені в розподільній табл. 4.11.

Таблиця 4.11

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	7	3	5	4	2	40
A_2	6	2		1	7	130
A_3	3	5	2	6	4	30
b_j	20	50	70	25	35	

Треба:

1 Скласти математичну модель задачі.

2 Побудувати початковий опорний розв'язок.

3 За допомогою методу потенціалів знайти оптимальний розв'язок.

4 Дати економічне тлумачення одержаного оптимального розв'язку.

Розв'язання.

1 Перед складанням математичної моделі ТЗ перевіримо, чи є ця задача закритою. Для цього знайдемо

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 20 + 50 + 70 + 25 + 35 = 200$$

і

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 130 + 30 = 200.$$

Оскільки виконується умова $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$, то ця ТЗ є задачею з закритою моделлю.

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць будівельних матеріалів, що відправляється зі складу A_i до будівельного майданчика B_j $(i = \overline{1,3}\,;\, j = \overline{1,5}\,)$.

Цільова функція $Z(X)$ досліджується на мінімум і дорівнює

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 7x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{15} + 6x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + 7x_{25} + 3x_{31} + 5x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34} + 4x_{35}.$$

Система обмежень має вигляд

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 40,\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 130,\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 30,\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20,\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50,\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70,\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} = 25,\\
&x_{15} + x_{25} + x_{35} = 30,\\
&x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,5}.
\end{aligned}$$

2 Методом північно-західного кута знайдемо початковий опорний розв'язок, внаслідок чого одержимо розподільну таблицю 4.12.

Таблиця 4.12

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	7 20	_ 3 20	5	4	+ 2	40
A_2	6	2 + 30	3 70	1 25	7 -- 5	130
A_3	3	5	2	6	4 30	30
b_j	20	50	70	25	35	

$$X_{поч.оп.} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $(m+n-1)$= (3 + 5 – 1) = 7 і число завантажених клітин дорівнює 7, то початковий опорний розв’язок є невироджений. Застосування методу для виродженого розв’язку розглянемо нижче.

Значення цільової функції на цьому розв’язку дорівнює

$$Z(X_{поч.оп.}) = 20\cdot7 + 20\cdot3 + 30\cdot2 + 70\cdot3 + 25\cdot1 + 5\cdot7 + 30\cdot4 = 650 \,(\text{ум.од.}).$$

3 Застосуємо метод потенціалів.

Спочатку складемо систему рівнянь для завантажених клітин за формулами (4.15) :

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_3 = 3, , \\ u_2 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_5 = 7, \\ u_3 + v_5 = 4, \end{cases}$$

звідки, покладаючи, наприклад, $u_2 = 0$, одержимо значення потенціалів:

$$\begin{array}{ll} & v_1 = 6, \\ u_1 = 1, & v_2 = 2, \\ u_2 = 0, & v_3 = 3, \\ u_3 = -3, & v_4 = 1, \\ & v_5 = 7. \end{array}$$

Обчислимо оцінки Δ_{ij} для вільних кліток.

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - (1+3) = 1,$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 4 - (1+1) = 2,$$
$$\Delta_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 2 - (1+7) = -6,$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 6 - (0+6) = 0,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 3 - (-3+6) = 0,$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - (-3+2) = 6,$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 2 - (-3+3) = 2,$$
$$\Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 6 - (-3+1) = 8.$$

Одержаний початковий опорний розв'язок не є оптимальним, оскільки існує від'ємна оцінка $\Delta_{15} = -6$, тобто не виконується умова оптимальності (4.16).

Перейдемо до нового опорного розв'язку, для чого побудуємо цикл перерахування. Цикл будуємо, починаючи з клітини (1,5). Позначимо цикл в табл.4.12. З клітки (1,5) розставляємо позмінно знаки "+", "-", тобто клітини (1,5), (2,2) помічаємо знаком "+", а клітини (1,2), (2,5) – знаком "–". Серед клітин зі знаком "–" знаходимо клітину з найменшим вантажем, який дорівнює 5 одиницям (λ = 5). Зробивши зсув по циклу перерахування, одержимо новий опорний розв'язок, який зображено в таблиці 4.13.

Таблиця 4.13

						u_i
	– 7 20	3 15	5	4	+ 2 5	$u_1 = 1$
	6	2 35	3 70	1 25	7	$u_2 = 0$
	3 +	5	2	6	4 --30	$u_3 = 3$
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$	$v_5 = 1$	

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 35 & 70 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \ Z(X_1) = 620.$$

Оскільки кількість змінних дорівнює $(m+n-1)$ = 7, то знайдений опорний розв'язок є невироджений.

Обчислимо оцінки

$$\Delta_{13} = 1;\ \Delta_{14} = 2;\ \Delta_{21} = 0; \Delta_{25} = 6;\ \Delta_{31} = -6; \Delta_{32} = 0;\ \Delta_{33} = -4; \Delta_{34} = 2.$$

Існують три від'ємні оцінки $\Delta_{31} = -6$; $\Delta_{33} = -4$, тому опорний розв'язок не є оптимальним. Переходимо до нового опорного розв'язку, для чого вибираємо $\max\limits_{\Delta_j<0} \left|\Delta_j\right| = 6$, який відповідає клітині (3,1). Починаючи з цієї клітини, здійснюємо цикл перерахування (в табл.4.13) і зобразимо в таблиці 4.14 наступний опорний розв'язок (по циклу пересувається вантаж у розмірі 20 одиниць).

Таблиця 4.14

						u_i
	7	– 3 15	5	4	+ 2 25	$u_1=1$
	6	2 + 35	3 -- 70	1 25	7	$u_2=0$
	3 20	5	2 +	6	4 -- 10	$u_3=3$
v_j	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=1$	$v_5=1$	

$$X_2=\begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 35 & 70 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},\ Z(X_2)=500\,.$$

Обчислимо оцінки:

$\Delta_{11}=6$; $\Delta_{13}=1$; $\Delta_{14}=2$; $\Delta_{21}=6$; $\Delta_{25}=6$; $\Delta_{32}=0$; $\Delta_{33}=-4$; $\Delta_{34}=2$

Отриманий опорний розв’язок X_2 (невироджений) знову не є оптимальним, оскільки серед оцінок Δ_{ij} є від’ємні.

Далі виконуємо розрахунки без пояснень (табл.4.15).

Таблиця 4.15

						u_i
	7	3 5	5	4	2 35	$u_1=1$
	6	2 40	3 60	1 25	7	$u_2=0$
	3 20	5	2 10	6	4	$u_3=-1$
v_j	$v_1=4$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=1$	$v_5=1$	

$$m+n-1=7\,;$$

$$\Delta_{11}=2;\ \Delta_{13}=1;\ \Delta_{14}=2;\ \Delta_{21}=2;\ \Delta_{25}=6;\ \Delta_{32}=4;\ \Delta_{34}=6;\ \Delta_{35}=4\,;$$

$$Z(X_3\ )=460\,.$$

Всі оцінки Δ_{ij} вільних клітин додатні, тому одержаний опорний розв’язок

є оптимальним

$$X_{опт}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 45 & 60 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому мінімальне значення цільової функції дорівнює 460 (ум.од.).

Економічний зміст математичного результату

Для отримання мінімальних витрат на перевезення у розмірі 460 (ум.од.) з першого складу A_1 треба доставити на 2-ий та 5-ий будівельні майданчики відповідно 5 та 35 умовних одиниць будівельних матеріалів; з другого складу A_2 треба доставити на 2-ий, 3-ий та 4-ий майданчики відповідно 45, 60 і 25 умовних одиниць вантажу; з третього складу A_3 треба доставити на 1-ий та 3-ій майданчики відповідно 20 та 10 умовних одиниць будівельних матеріалів.

Запитання для самоперевірки

1 Як формулюється транспортна задача?

2 Яка модель транспортної задачі називається відкритою?

3 Яка модель транспортної задачі називається закритою?

4 Як відкрита модель транспортної задачі зводиться до закритої моделі?

5 Як знаходиться початковий опорний план транспортної задачі методом північно-західного кута?

6 Як знаходиться початковий опорний план транспортної задачі методом мінімальної вартості?

7 Як знаходиться оптимальний розв'язок транспортної задачі методом потенціалів?

8 Що називається циклом переміщення?

9 Як знаходяться потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення?

10 Як знаходяться оцінки вільних клітинок?

11 За якою ознакою визначається оптимальність плану?

Розділ 5 ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1 Математичні основи опуклого програмування

5.2 Метод множників Лагранжа

5.3 Теорема Куна – Таккера

5.4 Алгоритм градієнтного методу для задач з обмеженнями типу нерівностей

5.5 Задача квадратичного програмування та її розв'язання

У загальному вигляді задача нелінійного програмування формулюється наступним чином:

знайти максимум або мінімум цільової функції

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X) \tag{5.1}$$

при обмеженнях

$$\varphi_i(X)\{\le, =, \ge\}\, b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.2}$$

$$X \ge 0 \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5.3}$$

де $f(X)$, $\varphi_i(X)$ – деякі відомі функції n змінних, b_i – задані числа.

Інакше, задачу (5.1) – (5.3) можна сформулювати так: знайти таку точку $X^* (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, координати якої задовольняють співвідношенням (5.2) – (5.3) і умовам

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (5.4)$$

або

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,. \qquad (5.5)$$

У математичному аналізу такі задачі мають назву задач на умовний екстремум функції багатьох змінних.

Для розв’язання сформульованої задачі в такій загальній постановці не існує універсальних методів. Однак, для окремих класів задач, в яких на функції $f(X)$ та $\varphi_i(X)$ накладені умови вгнутості або опуклості і область допустимих розв’язків, яка визначається обмеженнями (5.2) – (5.3) – опукла, існують ефективні методи їх розв’язання. Тому у подальшому розглянемо задачі опуклого програмування.

5.1 Математичні основи опуклого програмування

Введемо деякі поняття та наведемо теореми, які відносяться до цієї теми.

Означення. Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задана на опуклій множині X, називається **опуклою**, якщо для будь – яких двох точок і будь – якого $0 \leq \lambda \leq 1$ виконується співвідношення

$$f\left[\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right] \leq \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1)\,. \qquad (5.6)$$

Означення. Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задана на опуклій множині X, називається **вгнутою**, якщо для будь – яких двох точок і будь – якого $0 \leq \lambda \leq 1$ виконується співвідношення

$$f\left[\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right] \geq \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1)\,. \qquad (5.7)$$

Означення. Множина припустимих розв’язків задачі (4.1) - (4.3) задовольняє умові **регулярності,** якщо існує хоча б одна точка X, яка належить області припустимих розв’язків і така , що $\varphi_i(X) < b_i \quad (i = \overline{1,m})$.

Означення. Задача (4.1) - (4.3) зветься **задачею опуклого програмування**, якщо функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є вгнутою (опуклою), а функції $\varphi_i(X)$ $(i = \overline{1,m})$ – опуклі.

Означення. Точка $X^* \subset X$ є **локальним максимумом (мінімумом**) функції $f(X)$, якщо існує такий окіл точки X^*, що для всіх X, які належать цьому околу, виконується нерівність

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (5.8)$$

або

$$(\; f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,). \qquad (5.9)$$

Означення. Якщо в точці X^* виконуються нерівності (5.8), (5.9) для всіх точок множини X, то точка X^* зветься **глобальним максимумом** (або **глобальним мінімумом**).

Означення. Екстремум функції $f(X)$ зветься **сильним**, якщо в нерівностях (5.8) – (5.9) знаки “≤” і “≥” замінюються на знаки “<” і “>” відповідно.

Теорема 1. Функція $Z = f(X)$, яка задана у замкнутій обмеженій області, досягає в ній глобального максимуму або мінімуму.

Теорема 2. Будь-який локальний максимум опуклої функції або локальний мінімум вгнутої функції є одночасно глобальним.

Теорема 3. Сильний глобальний мінімум опуклої або сильний глобальний максимум вгнутої функції, заданої в опуклій області, може досягатися (а в замкненій обмеженій області – досягається) тільки на межі області.

Теорема 4. Необхідною умовою локального екстремуму диференційованої функції $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $X = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ є рівність нулю всіх частинних похідних першого порядку в цій точці:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \ \ j = \overline{1,n}. \tag{5.10}$$

Точки, в яких виконуються рівності (5.10), звуться **стаціонарними точками**. Однак, за теоремою 4 стаціонарні точки не обов'язково доставляють локальний максимум (або локальний мінімум) функції $Z = f(X)$, тому треба застосувати достатні умови, перевірка яких призводить до великих труднощів.

У деяких випадках можуть допомогти побічні прийоми, які спираються на теореми 1 – 3.

1 Якщо заздалегідь відомо існування глобального екстремуму даної функції (наприклад, на основі теореми 1), то достатньо знайти всі стаціонарні точки і порівняти значення функції в цих точках з екстремальними значеннями на межі області. Найбільше значення відповідає глобальному максимуму, а найменше – глобальному мінімуму. Визначення екстремумів на межі області зводиться до розв'язання задачі, аналогічної початковій, розмірність якої на одиницю менша за вихідну.

2 Якщо функція опукла (вгнута), а стаціонарна точка одержана з рівнянь (4.10) , то в цій точці досягається глобальний максимум (мінімум) (згідно з теоремою 2).

3 Для знаходження глобального мінімуму опуклої або глобального максимуму вгнутої функції достатньо провести дослідження тільки на межі області (згідно з теоремою 3).

5.2 Метод множників Лагранжа

Розглянемо класичну задачу оптимізації – задачу опуклого програмування: знайти максимум (мінімум) функції

$$U = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.11}$$

при обмеженнях

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.12}$$

Ця задача відрізняється від задачі (4.1) – (4.3) тим, що серед обмежень (5.12) відсутні обмеження типа нерівностей , а також умови невід'ємності змінних і $m < n$. Але при цьому вважається , що функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ неперервні і мають частинні похідні до другого порядку.

Означення. Функцією Лагранжа задачі (5.11) – (5.12) називається функція

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-\varphi(x_1,x_2,...,x_n)], \qquad (5.13)$$

де $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ називаються **множниками Лагранжа**.

Наведемо порядок розв'язання задачі (5.11) – (5.12) методом множників Лагранжа:

1) складають функцію Лагранжа за формулою (5.13);
2) знаходять стаціонарні точки функції Лагранжа, для цього розв'язують систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_j}=0, \ j=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0, \ i=\overline{1,m},\end{cases} \qquad (5.14)$$

тобто

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=b_i-\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)=0, \ i=\overline{1,m}.\end{cases} \qquad (5.15)$$

3) серед стаціонарних точок вибирають ті точки, в яких функція

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ має умовний локальний екстремум.

Приклад. Для отримання максимального прибутку знайти розподіл сировини, об'єми якої обмежені a ум. одиницями, між n споживачами, якщо прибуток, одержаний при розподілу j-му споживачу x_j одиниць сировини, обчислюється за формулою $c_j\sqrt{x_j}$, де c_j та a – відомі сталі величини.

Розв'язання.

Математична модель задачі: знайти максимум

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j\sqrt{x_j}$$

при обмеженнях

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n}x_j=a,\\ x_j\ge 0, \ j=\overline{1,n}\end{array}\right\}.$$

Складемо функцію Лагранжа

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_j\sqrt{x_j}+\lambda(a-\sum_{j=1}^{n}x_j),$$

а також систему обмежень за формулами (4.14):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{c_j}{2\sqrt{x_j}} - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = a - \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержимо оптимальний розв'язок

$$x_j^{(0)} = \frac{ac_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2} \quad (j = \overline{1,n}); \quad \lambda^{(0)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2 /(4a)}.$$

Економічне тлумачення розв'язку задачі: якщо j-му споживачу $(j = \overline{1,n})$ буде виділено $\dfrac{ac_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2}$ ум. од.сировини, то сумарний прибуток при цьому розподілу досягає максимального значення

$$\max f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \sqrt{x_j^{(0)}} = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2}}.$$

5.3 Теорема Куна - Таккера

В теорії нелінійного програмування центральне місце займає теорема Куна –Таккера, яка узагальнює класичний метод множників Лагранжа на випадок, коли в нелінійній задачі, окрім обмежень типу рівностей, містяться також і нерівності. Тобто, для задачі мінімізації функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при обмеженнях виду: $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1,m} \quad X = (x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$, де всі функції $f(X)$ і $\varphi_i(X)$ опуклі, теорема Куна – Таккера визначає зв'язок між оптимальним розв'язком задачі і сідловою точкою функції Лагранжа $L(X, \lambda)$.

Означення. Точка $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0)$ називається **сідловою точкою** функції Лагранжа, якщо для всіх $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,n})$, $\lambda_i \ge 0$ $(i = \overline{1,m})$ виконується нерівність

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \quad (5.16)$$

Припустимо, що існує вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$, такий, що $\varphi_i(X) \le b_i, \quad i = \overline{1,m}$.

Теорема (Куна – Таккера). Для того, щоб вектор $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ... x_n^{(0)})$, який належить допустимій області, був оптимальним, необхідно і достатньо існування такого вектора $\lambda_1^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ... \lambda_m^{(0)})$, що для всіх $X \ge 0$ і $\lambda \ge 0$ виконується нерівність (5.16).

Якщо функції $f(X)$ і $\varphi_i(X)$ є диференційовані, то нерівність (5.16) еквівалентна наступним умовам Куна – Таккера

$$\left.\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x}\right|_{(X^0,\lambda^0)} \geq 0, \qquad (5.17')$$

$$X^0 \cdot \left.\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x}\right|_{(X^0,\lambda^0)} = 0, \qquad (5.18')$$

$$X^0 \geq 0, \qquad (5.19')$$

$$\left.\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{(X^0,\lambda^0)} \leq 0, \qquad (5.20')$$

$$\lambda^0 \cdot \left.\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{(X^0,\lambda^0)} = 0, \qquad (5.21')$$

$$\lambda^0 \geq 0\ . \qquad (5.22')$$

Економічний зміст множників Лагранжа

Якщо в задачі (5.11) – (5.12) функцію $f(X)$ тлумачити як прибуток або вартість, а величини b_i - як об'єми деяких ресурсів, то множники Лагранжа λ_i вказують на те, як зміниться максимальний прибуток (мінімальна вартість), якщо кількість ресурсу *i*-го вигляду збільшиться на одиницю.

Зауваження. Метод множників Лагранжа можна застосовувати і в тому випадку, коли обмеження задаються у формі нерівностей. $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1,m}$. Тоді для розв'язання задачі виконують наступні дії:

1) знаходять стаціонарні точки функції $Z = f(X)$ з рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n} \qquad (5.23)$$

і вибирають серед них ті, які задовольняють нерівності

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) < b_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (5.24)$$

2)знаходять стаціонарні точки умовного екстремуму функції $Z = f(X)$ при обмеженнях $\varphi_i(X) = b_i, \quad i = \overline{1,m}$; для цього будують функцію Лагранжа і складають та розв'язують рівняння :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}, \qquad (5.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = b_i - \varphi_i(X), \ i = \overline{1,m}; \qquad (5.26)$$

3)стаціонарні точки, які знайдені в п.1) та п.2), досліджують так само, як і на безумовний екстремум.

Приклад. Знайти глобальний умовний екстремум функції

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2^2 \le 52.$$

Розв’язання. Область припустимих розв’язків є обмеженою та замкненою (рис. 5.1). Тому в цій області функція $Z = f(X)$ досягає глобального екстремуму.

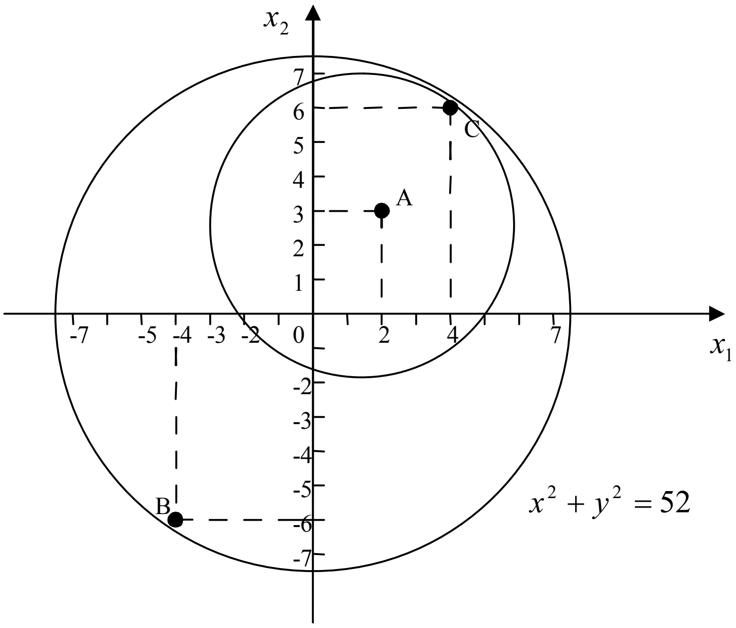

Рис. 5.1

1 Знайдемо стаціонарні точки для безумовного екстремуму з рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 2\ ,\ x_2 = 3.$$

Перевіримо, що точка (2;3) задовольняє обмеження. Дійсно,

$$2^2 + 3^2 = 13,\quad Z_A = (2 - 2)^2 + (3 - 3)^2\ ,\ Z_A = 0.$$

2 Побудуємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = Z(x_1, x_2) + \lambda(b - \varphi(x_1, x_2)) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(52 - x_1^2 - x_2^2).$$

Знаходимо стаціонарні точки з рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - 2\lambda x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) - 2\lambda x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 52 - x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Тобто отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими x_1 ;,x_2 ; λ :

$$\begin{cases} 2(x_1-2)-2\lambda x_1=0, \\ 2(x_2-2)-2\lambda x_2=0, \\ 52-x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}=0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на $x_2 \neq 0$, а друге – на $x_1 \neq 0$:

$$\begin{cases} 2(x_1-2)x_2-2\lambda x_1 x_2=0, \\ 2(x_2-2)x_1-2\lambda x_1 x_2=0, \\ 52-x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}=0. \end{cases}$$

З першого рівняння віднімемо друге, одержимо

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=0, \\ 52-x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}=0, \end{cases}$$

звідки

$$x_1=\frac{2}{3}x_2\,,\ 52 - \ \frac{4}{9}x_1^{\ 2}\ - x_2^{\ 2}\,.$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3}x_2, \\ \dfrac{13}{9}x_2^{\ 2}=52, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3}x_2, \\ x_2^{\ 2}=36, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=4, \\ x_2=6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-4, \\ x_2=-6. \end{cases}$$

Одержали дві стаціонарні точки B (-4;-6) і C (4; 6). Значення цільової функції в точках B і C дорівнюють Z_B = 117, Z_C = 13, причому точки B і C належать границі області. Таким чином, в точці B (-4; -6) досягається глобальний максимум, в точці A – глобальний мінімум, в точці C –- умовний локальний мінімум.

5.4 Алгоритм градієнтного методу для задач з обмеженнями типу нерівностей

Розглянемо задачу нелінійного програмування : знайти

$$\max f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

при обмеженнях

$$b_i-\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0, \quad i=\overline{1,m}\,.$$

Алгоритм градієнтного методу містить наступні етапи:

1 Складають функцію Лагранжа

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)]$$

2 Вибирають довільне початкове наближення (x^0,λ^0) (якщо апріорі відомий окіл, у якому знаходиться $\max f(x_1,x_2,...,x_n)$, то беруть x^0 із цього околу).

$X^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...x_n^{(0)})$, $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},...\lambda_m^{(0)})$, $k=0$ (k – номер ітерації).

3 Вибирають сталий шаговий множник $\rho \succ 0$, а також значення ε - точності обчислення глобального максимуму (*по* X *і* λ).

4 Основний цикл. Нехай при ітерації з номером k обчислені значення (x^k, λ^k), які не задовольняють точності обчислення ε.

Обчислюють $\overrightarrow{grad}_x L(x^k, \lambda^k) = \{\frac{\partial L}{\partial x_j}(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_m^k)\}$, $j = \overline{1,n}$ – тобто значення частинних похідних функції Лагранжа по змінних x_j в точці (x^k, λ^k).

Обчислюють $\overrightarrow{grad}_\lambda L(x^k, \lambda^k) = \{\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_m^k)\}$, $i = \overline{1,m}$ – тобто значення частинних похідних функції Лагранжа по змінних λ_i в точці (x^k, λ^k).

5 Обчислюють наступні наближення $x_j^{k+1}, \lambda_i^{k+1}$ за формулами:

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \rho \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^k, \lambda^k),\ j = \overline{1,n}$$

$$\lambda_i^{k+1} = \max\{0; \lambda_i - \rho \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^k, \lambda^k)\},\ i = \overline{1,m}.$$

6 Перевіряють виконання нерівностей

$$\left| x_j^{k+1} - x_j^k \right| \prec \varepsilon \quad j = \overline{1,n},$$

$$\left| \lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k \right| \prec \varepsilon \quad i = \overline{1,m}.$$

7 Якщо всі нерівності виконані, то глобальний максимум знайдемо, за його значення приймають $(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$; якщо хоча б одна нерівність не виконується, то переходимо до наступної ітерації починаючи з пункту 4.

Зауваження. У випадку обмежень типу рівностей

$$b_i - \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = \overline{1,m}$$

алгоритм градієнтного методу остається таким же, за виключенням пункту 5, в якому x_j^{k+1} *і* λ_i^{k+1} обчислюються за формулами

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \rho \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^k, \lambda^k),\ j = \overline{1,n},$$

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \rho \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^k, \lambda^k),\ i = \overline{1,m}.$$

5.5 Задача квадратичного програмування та її розв'язання

Математична модель задачі квадратичного програмування (ЗКП) має вигляд: знайти максимум або мінімум функції

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \tag{5.27}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{5.28}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{5.29}$$

Матриця $D = [d_{ij}]_{n \times n}$ є симетричною і невід'ємно визначеною. В цьому випадку цільова функція (5.27) є опуклою. Задача квадратичного програмування є частинним випадком задачі нелінійного програмування, коли цільова функція $f(X)$ є нелінійною (квадратичною), а система обмежень - лінійна.

З геометричної точки зору задача (5.27) – (5.29) зводиться до визначення точки опуклого многогранника розв'язків, через яку проходить лінія рівня поверхні $f(X)$, яка має найменше значення функції $f(X)$, при чому мінімум може прийматися як на границі многогранника, так і в його середині.

Складемо локальні умови Куна-Таккера задачі (5.27) – (5.29)

$$L(x,\lambda) = \sum c_j x_j + \sum\sum d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_{ij} x_j - b_i). \tag{5.30}$$

Тоді частинні похідні функції Лагранжа $L(X,\lambda)$ мають вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n}), \tag{5.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i \quad (i = \overline{1,m}). \tag{5.32}$$

Позначимо рівності (5.31) та (5.32) відповідно через $v_j (j = \overline{1,n})$ та $-y_i (i = \overline{1,m})$.

З урахуванням цих позначень умови Куна-Таккера мають вигляд

$$\left.\begin{array}{l} v_j \ge 0, \\ x_j v_j = 0, x_j \ge 0\ (j = \overline{1,n}), \\ -y_i \le 0, \\ \lambda_i(-y_i) = 0,\ \lambda_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,m}). \end{array}\right\} \tag{5.33}$$

Тобто одержали систему з $N = n + m$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $2N = 2(n+m)$ невідомими. Перепишемо умови (5.33) таким чином

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{5.34}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k - v_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i = c_j \quad (j = \overline{1,n}), \tag{5.35}$$

$$x_j \ge 0, v_j \ge 0\ (j = \overline{1,n});\ y_i \ge 0, \lambda_i \ge 0\ (i = \overline{1,m}), \tag{5.36}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \lambda_i = 0. \tag{5.37}$$

Отже, у відповідності до локальних умов Куна-Таккера розв'язок $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ є оптимальним для задачі (5.27) – (5.29) тоді і тільки тоді, коли сумісно з розв'язком $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ існують розв'язки

$\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ такі, що

$z = (x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_n, \lambda_1, ..., \lambda_m, y_1, ..., y_m)$ є розв'язком системи (5.34) – (5.36) за умовою виконання рівності (5.37).

Умова (5.37) вимагає, щоб з кожних двох обмежених по знаку змінних x_i та v_j (відповідно хоча б одна з λ_i та y_j дорівнювалась нулю). Тобто не всі розв'язки системи (5.34), (5.35) задовольняють умові (5.37), а тільки ті, в яких в крайньому разі $(n+m)$ компонент дорівнюють нулю. Але таким властивостям задовольняють базисні розв'язки системи. Таким чином, розв'язки, які задовольняють умові (5.37), треба шукати серед базисних. Відомо, що з базисними розв'язками оперує симплексний метод. Скористаємося цим при розв'язанні системи (5.34) – (5.36).

Введемо позначення

$$A = \begin{pmatrix} a_n & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix}; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} d_n & \cdots d_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots d_{nm} \end{pmatrix},$$

A^T – транспонована до A матриця,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (5.34) – (5.35) перепишемо в матричній формі

$$\begin{pmatrix} A & E & O & O \\ 2D & O & -E & A^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}, \tag{5.38}$$

$$x'v + y'\overline{\lambda} = 0. \tag{5.39}$$

Позначимо через $z' = (x', y', v', \lambda')$ вектор, який входить до (5.38), а через $\tilde{z}$ вектор $\tilde{z} = (v^z, \lambda^z, x, y)$. Тоді

$$T = z'\tilde{z} = x'v + y'\lambda + v'x + \lambda'y = 2(x'v + y'\overline{\lambda})$$

і рівність (5.39) можна переписати в вигляді $T = 0$, а умову (5.36) у вигляді $z \geq 0$. Враховуючи це, перепишемо умови (5.38) – (5.39):

$$\begin{pmatrix} A & E & O & O \\ 2D & O & -E & A^T \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}, \tag{5.40}$$

$$Z \geq 0, \tag{5.41}$$

$$T = Z'\widetilde{Z} = 0. \tag{5.42}$$

Задача полягає в тому, щоб серед базисних розв'язків системи (5.40) – (5.41) знайти такий розв'язок Z^*, при якому опукла функція T дорівнює нулю.

Послідовний перебір базисних розв'язків можливий за допомогою симплексних перетворювань, але за спеціальним правилом.

Таким чином, задача зводиться до знаходження мінімуму функції $T = Z'\widetilde{Z}$, при умовах (5.40) – (5.41), за допомогою симплекс - метода. Початковий опорний розв'язок знаходиться з системи (5.40), якщо серед $2(n+m) = 2N$ невідомих за базисні вибрати перші $(n+m)$ невідомих.

Запитання для самоперевірки

1 Як формулюється задача нелінійного програмування у загальному вигляді?
2 У чому полягає метод множників Лагранжа?
3 Як формулюється теорема Куна – Таккера?
4 У чому полягає економічний зміст множників Лагранжа?
5 Як формулюється математична модель квадратичного програмування?

Розділ 6 ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

6.1 Постановка задачі
6.2 Рівняння Белмана
6.3 Задача вибору найкоротшого шляху
6.4 Задача про розподіл економічних ресурсів
6.5 Алгоритм оптимального розподілу ресурсів
6.6 Задача про заміну устаткування

6.1 Постановка задачі

Динамічне програмування – це розділ математичного програмування, в якому розглядаються задачі прийняття оптимальних рішень в багатоетапних керованих процесах. При цьому багатоетапність або відображає реальне протікання процесу в часі або вводиться штучно поділом процесу на окремі етапи.

Означення 1. Процес називається керованим, якщо можна в деякій мірі впливати на його хід.

Означення 2. Керуванням називається сукупність рішень, які приймаються на кожному етапі процесу.

Застосовується динамічне програмування для розв’язання різноманітних задач планування і управління (розподіл засобів між підприємствами, використання ресурсів протягом кількох років, заміна устаткування, управління запасами та ін.), а також ряду чисто технічних задач (проектування оптимальних конструкцій, трасування доріг та ін.) Крім того, динамічне програмування дало можливість сформулювати новий підхід до деяких задач варіаційного числення і теорії оптимального управління. В короткому курсі математичного програмування не можливо торкнутись всіх застосувань динамічного програмування. Зупинимось лише на застосуваннях його для розв’язання деяких економічних задач.

В економічних процесах керування полягає в розподілі і перерозподілі засобів на кожному етапі. Наприклад, випуск продукції підприємством – керований процес, бо він визначається складом обладнання, об’ємом сировини, об’ємом фінансування та ін., які можна змінювати. Під етапом можна розуміти декаду, квартал, господарський рік тощо.

В загальній постановці задача формулюється так. Нехай маємо керовану економічну систему S, яка знаходиться в початковому стані S_0. Змінюючись в результаті керування, система переходить в кінцевий стан $\overline{S}$. Припустимо, що керування можна розбити на n кроків, тобто рішення приймаються послідовно на кожному кроці. Тоді керування, яке переводить систему із початкового стану в кінцевий, буде являти собою сукупність n покрокових керувань. Позначимо через X_k керування на $к$-му кроці $(k = 1,2,...,n)$. Змінні X_k задовольняють деяким обмеженням і в цьому розумінні звуться допустимими.

Нехай $X(X_1, X_2,...,X_n)$ – керування, яке переводить систему із стану S в стан $\overline{S}$. Позначимо через S_k стан системи після $к$-ого кроку керування. Одержимо послідовність станів $S_1, S_2,..., S_{k-1}, S_k, S_{k+1},..., S_{n-1}, S_n = \overline{S}$ системи. Нехай ефективність керування характеризується деяким числовим критерієм Z. Зрозуміло, що цей критерій залежить від початкового стану системи і від вибраного керування:

$$Z = F(S_0, X). \qquad (6.1)$$

Необхідно із множини можливих управлінь X знайти таке управління X^*, яке дозволить перевести систему із початкового стану S_0 в кінцевий стан $\overline{S}$ так, що критерій Z прийме оптимальне значення Z^*.

При розв'язуванні задачі методом динамічного програмування приймаються такі припущення:

а) стан S_k системи в кінці $к$-ого кроку залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} і керування X_k на $к$-ому кроці і не залежить від всіх попередніх станів і керувань. Це припущення називається відсутністю післядії. Його можна записати у вигляді рівнянь

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k), k = 1,2,...,n, \qquad (6.2)$$

які називаються рівняннями станів.

б) цільова функція (1) є адитивною від показників ефективності кожного кроку, тобто, якщо показник ефективності $к$-ого кроку

$$Z_k = f_k(S_{k-1}, X_k), k = 1,2,...,n, \qquad (6.3)$$

то загальна ефективність

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k). \qquad (6.4)$$

Отже, задача полягає в знаходженні такого допустимого керування X, яке переводить систему із початкового стану S_0 в кінцевий стан $\overline{S}$ так, що цільова функція (6.4) приймає оптимальне значення, тобто найбільше або найменше.

В основі методу динамічного програмування лежать принцип оптимальності і принцип заглиблення.

Принцип оптимальності сформульований в 1953 році Р.Беллманом формулюється так: як би не прийшла система в даний стан, наступне управління повинно бути оптимальним, тобто таким, що дає оптимальний ефект.

Принцип заглиблення полягає в тому, що розв'язання задачі динамічного програмування не змінюється при зміні кількості кроків n, тобто форма такої задачі інваріантна відносно n. В цьому сенсі всякий конкретний процес з заданим числом кроків є немов би заглибленим в сімейство подібних йому процесів і може розглядатися з позиції більш широкого класу задач.

Реалізація вказаних принципів дає гарантію того, що керування, яке приймається на черговому кроці, є найкращим для всього процесу в цілому, а не тільки для даного етапу.

6.2 Рівняння Беллмана

Замість початкової задачі (6.1) – (6. 3) з фіксованою кількістю кроків n і початковим станом S_0 розглянемо послідовність задач, даючи n значення 1,2,..., при різних S, тобто однокрокову задачу, двокрокову задачу і т.д., користуючись принципом оптимальності.

На кожному кроці будь-якого стану системи S_{k-1} керування X_k треба вибирати з огляду на те, що цей вибір впливає на наступний стан S_k і подальші керування, які залежать від S_k. Це випливає з принципу оптимальності. Але є один крок, останній, який можна для будь-якого стану S_{n-1} планувати локально-оптимально, виходячи лише з інтересів цього кроку.

Розглянемо n-ий крок: S_{n-1} – стан системи до початку цього кроку, $S_n = \overline{S}$ – кінцевий стан, X_n – керування на цьому кроці, а $f_n(S_{n-1}, X_n)$ – цільова функція на цьому кроці. Згідно з принципом оптимальності X_n треба вибирати так, щоб цільова функція на цьому етапі досягла, наприклад, максимальне значення. Позначимо через $Z_n^*(S_{n-1})$ максимальне значення цільової функції на n-му кроці за умови, що до початку останнього кроку система була в довільному стані S_{n-1} і на останньому кроці керування було оптимальним. Функція $Z_n^*(S_{n-1})$ називається умовним максимумом цільової функції на n-му кроці:

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n), \tag{6.5}$$

де максимізація проводиться по всіх допустимих керуваннях X_n.

Керування X_n, при якому досягається $Z_n^*(S_{n-1})$, також залежить від S_{n-1} і зветься умовно-оптимальним керуванням на n-му кроці і позначається через $X_n^*(S_{n-1})$.

Таким чином, розв’язуючи одновимірну задачу локальної оптимізації за рівнянням (5.5), знайдемо для всіх можливих станів S_{n-1} дві функції $Z_n^*(S_{n-1})$ і $X_n^*(S_{n-1})$.

Розглянемо тепер двокрокову задачу, приєднавши до n-го кроку (n–1)-ий крок. Для будь-яких станів S_{n-2}, довільних керувань X_{n-1} і оптимальному керуванні X_n на n-му кроці значення цільової функції на двох останніх кроках дорівнює

$$f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}). \tag{6.6}$$

Згідно з принципом оптимальності для будь-яких станів S_{n-2} розв’язок треба вибирати так, щоб разом з оптимальним керуванням на останньому n-му кроці одержати максимум цільової функції на двох останніх кроках. Отже, треба знайти максимум суми (6.6) по всіх допустимих керуваннях X_{n-1}. Максимум цієї суми залежить від S_{n-2} і позначається $Z^*_{n-1}(S_{n-2})$ і називається умовно-оптимальним максимумом цільової функції при оптимальному керуванні на двох останніх кроках. Відповідне керування X_{n-1} на (n–1)-му кроці позначається через $X^*_{n-1}(S_{n-2})$ і називається умовно-оптимальним керуванням на (n–1)-му кроці. Отже,

$$Z^*_{n-1}(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z^*_n(S_{n-1}) \right\}. \tag{6.7}$$

Як бачимо, вираз (7) залежить тільки від S_{n-2} і X_{n-1}, бо стан S_{n-1} можна знайти з рівняння (6.2), поклавши $k = n - 1$:

$$S_{n-1} = \varphi_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}).$$

Таким чином, в результаті максимізації по одній змінній X_{n-1} за рівнянням (6.7) знову одержуємо дві функції $Z^*_{n-1}(S_{n-2})$ і $X^*_{n-1}(S_{n-2})$.

Далі розглядається трикрокова задача, де до двох останніх кроків приєднується $(n-2)$-й крок і т.д.

Запишемо рекурентні формули оптимізації цільової функції за $n-k+1$ кроків, починаючи з k-го до n-го кроку. До початку k-го кроку система знаходиться в стані S_{k-1}. Позначимо через $Z^*_k(S_{k-1})$ умовний максимум цільової функції на k-му кроці. Тоді

$$Z^*_k(S_{k-1}) = \max_{\{X_k\}} \left\{ f_k(S_{k-1}, X_k) + Z^*_{k+1}(S_k) \right\}, k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1. \tag{6.8}$$

Рівняння (6.8) називаються функціональними рівняннями Беллмана. Ці рекурентні співвідношення дозволяють знайти попереднє оптимальне значення цільової функції, якщо відомі наступні.

Процес розв’язання рівнянь (6.8) називають умовною оптимізацією.

В результаті умовної оптимізації одержуємо дві послідовності функцій: $Z^*_n(S_{n-1})$, $Z^*_{n-1}(S_{n-2}), \ldots$, $Z^*_2(S_1)$, $Z^*_1(S_0)$ і $X^*_n(S_{n-1})$, $X^*_{n-1}(S_{n-2}), \ldots$, $X^*_2(S_1)$, $X^*_1(S_0)$.

Використовуючи ці послідовності, можна знайти розв’язок цілого класу задач при різних даних n і S_0.

Розглянемо застосування методу динамічного програмування для розв’язування деяких економічних задач.

6.3 Задача вибору найкоротшого шляху

Нехай задана транспортна мережа, на якій вказані пункт відправлення A і пункт призначення B. Між ними є багато інших пунктів, деякі з них з’єднані між собою транспортною мережею. Відомі відстані між цими пунктами. Треба вибрати маршрут мінімальної протяжності від пункту A до пункту B.

Сформульована задача знаходить широке застосування в різних сферах діяльності. Аналогічними є задачі вибору оптимальних схем транспортних перевезень, радіорелейних і телевізійних мереж, меліоративних і іригаційних систем тощо.

Порядок розв'язання задачі розглянемо на прикладі транспортної мережі, наведеної на рис.6.1.

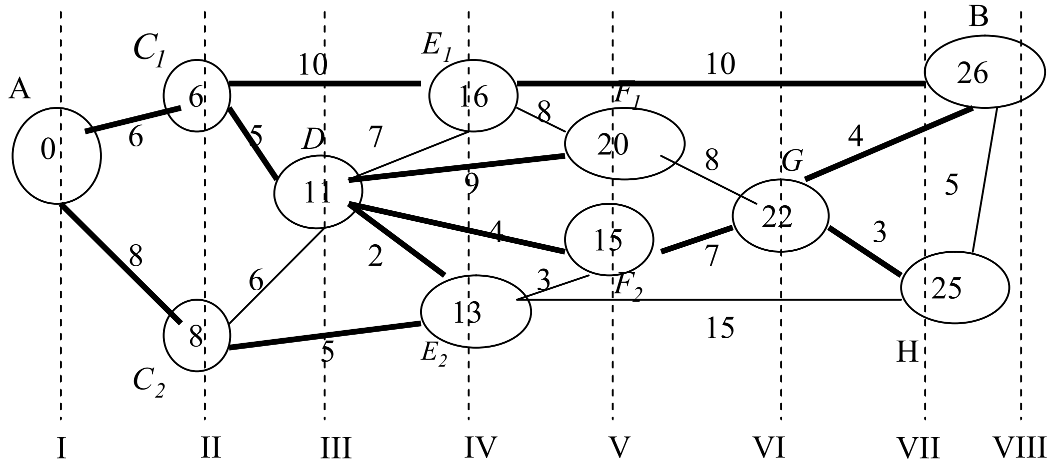

Рис. 6.1

Для того щоб розв'язати цю задачу методом динамічного програмування, введемо в неї штучно поетапність, розділивши весь шлях від A до B на 7 частин прямими I-VIII. Будемо вважати, що за один крок переміщаємося з однієї прямої до сусідньої прямої, причому повернення в пройдену смужку не можливе.

Із точки A можна потрапити в точки C_1 і C_2 на другій прямій. Мінімальний шлях 6км. Позначаємо його жирною лінією. На третю пряму в точку D можна потрапити із точок C_1 і C_2, пройшовши відповідно 5 і 6км. Мінімальний сумарний шлях від A до D 11км. Позначаємо його жирною лінією. В точку E_1 на четвертій прямій можна потрапити з точки C_1 і з точки D, пройшовши відповідно 10 і 7 км. Мінімальний сумарний шлях від A до E_1 16км. Позначаємо його жирною лінією. В точку E_2 на четвертій прямій можна потрапити з точки C_2 і з точки D, пройшовши відповідно 5 і 2 км. Мінімальний сумарний шлях від A до E_2 13км. Позначаємо його жирною лінією. В точку F_1 на п'ятій прямій можна потрапити з точки E_1 і з точки D, пройшовши відповідно 8 і 9 км. Мінімальний сумарний шлях від A до F_1 20км. Позначаємо його жирною лінією. В точку F_2 на п'ятій прямій можна потрапити з точки E_2 і з точки D, пройшовши відповідно 4 і 3 км. Мінімальний сумарний шлях від A до F_2 15км. Позначаємо його жирною лінією. На шосту пряму в точку G можна потрапити із точок F_1 і F_2, пройшовши відповідно 8 і 7км. Мінімальний сумарний шлях від A до G 22км. Позначаємо його жирною лінією. В точку H на сьомій прямій можна потрапити з точки E_2 і з точки G, пройшовши відповідно 15 і 3 км. Мінімальний сумарний шлях від A до H 25км. Позначаємо його жирною лінією. Нарешті в точку B на восьмій прямій можна потрапити з точки F_1, з точки G і з точки H, пройшовши відповідно 10, 4 і 5 км. Мінімальний сумарний шлях від A до B 26км. Позначаємо його жирною лінією. Отже, маршрут від A до B в 26км мінімальної довжини в 26км пролягає по ламаній $A\,C_1\,E_1\,F_1\;B$ або по ламаній $A\,C_1 D\,F_2 G\,B$.

6.4 Задача про розподіл економічних ресурсів

Припустимо, що ми маємо деяку кількість економічних ресурсів. Це можуть бути люди, машини, гроші, паливо, вода і т.п. Ресурси можна використати багатьма різними способами. Кожний такий можливий спосіб називається технологічним процесом або виробничим способом. У результаті використання всіх ресурсів або їх частини в кожному окремому процесі одержуємо деякий прибуток, який може вимірюватись в одиницях самих ресурсів (гроші можуть давати гроші) або в одиницях зовсім іншої природи (вода може забезпечувати підвищення врожайності, паливо може давати енергію і т.п.). Розмір прибутку залежить як від кількості використаних ресурсів, так і від вибраного процесу.

Зробимо такі основні припущення:

а) прибуток, одержаний від кожного процесу, можна виразити в одних і тих же одиницях;

б) прибуток, одержаний від будь-якого процесу, не залежить від того, яку кількість ресурсів виділено для інших процесів;

в) загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, одержаних від окремих процесів.

Розглянемо математичну модель поставленої здачі. Нехай маємо N процесів з номерами 1, 2, ..., N. Порядок нумерації процесів значення не має, але якось прийнятий, він повинен зберігатись потім. При цьому, коли мова йтиме про два процеси, то матимемо на увазі, що це процеси з номерами 1 і 2. Якщо ж мова йтиме про п'ять процесів, то це обов'язково процеси з номерами 1. 2. 3. 4. 5 і т.д.

Кожному процесу відповідає функція корисності $g_i(x_i)$, i=1, 2, ..., N. Ця функція виражає залежність прибутку в i-му процесі від виділеного для нього ресурсу в кількості x_i. Її графік показаний на рис.5.2. Форма кривої корисності обумовлюється двома важливими економічними умовами. По-перше, невелика кількість виділеного ресурсу, по суті, не дає ніякого прибутку, і по-друге, подальше збільшення цієї кількості ресурсів приводить, зрештою, до ефекту насичення (за „законом спадання прибутку").

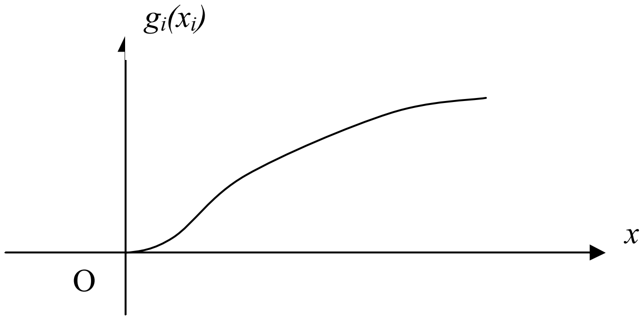

Рис. 6.2

Виходячи з припущення незалежності процесів і адитивності корисностей, для загальної корисності прийнятого розподілу ресурсу одержуємо вираз

$$R(x_1, x_2, ..., x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + ... + g_N(x_N). \qquad (6.9)$$

Оскільки в наявності, як правило, є лише обмежена кількість x ресурсів, то природно приходимо до умови:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = x, \tag{6.10}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N. \tag{6.11}$$

Отже, задача максимізації прибутку від прийнятого розподілу ресурсу між процесами зводиться до максимізації функції (6.9) за умов (6.10) – (6.11).

Займемося розв'язуванням сформульованої задачі методом динамічного програмування.

Основна ідея методу динамічного програмування полягає в тому, що замість однієї задачі з заданою кількістю ресурсу розглядається сукупність таких задач, в яких кількість x ресурсу може приймати довільне значення, а кількість N процесів може приймати довільне ціле значення. В процес розподілу ресурсу вводиться динамічність. Спочатку якусь кількість ресурсу виділяється N-му процесу, потім $(N-1)$-му і т.д.

Оскільки $R(x_1, x_2, \ldots, x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \ldots + g_N(x_N)$ залежить від кількості x ресурсу і кількості N процесів, то зробимо цю залежність явною, вводячи до розгляду послідовність функцій $f_N(x)$, заданих для N=1, 2, … і $x \geq 0$ рівностями:

$$f_N(x) = \max_{\{x_i\}} R(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

де $x_i \geq 0$ і $\sum_{i=1}^{N} x_i = x$.

Функції $f_N(x)$ виражають максимальний прибуток, одержуваний від розподілу ресурсу в кількості x між N процесами.

В двох окремих випадках послідовності функцій $f_N(x)$ приймають досить простий вигляд.

По-перше, очевидно, що

$$f_N(0) = 0, N = 1, 2, \ldots,$$

якщо $g_i(0) = 0$ для будь-якого i, що є розумним припущенням.

По-друге, також очевидно, що

$$f_1(x) = g_1(x), x \geq 0.$$

Легко знайти рекурентне співвідношення, яке зв'язує $f_N(x)$ і $f_{N-1}(x)$ для довільних N і x. Нехай x_N – кількість ресурсу, виділеного для N-го процесу. Тоді, яким би не було точне значення x_N, відомо, що решті $(N-1)$ процесам буде виділено ресурсу в кількості $x-x_N$. Оскільки максимальний прибуток в $(N-1)$ процесах від ресурсу в кількості $x-x_N$ за означенням дорівнює **Ошибка! Ошибка связи.**, то прибуток в N процесах буде рівним

$$g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N).$$

Очевидно, що оптимальним буде такий вибір x_N, який максимізує цю суму. Таким чином, одержуємо таке основне функціональне рівняння:

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} \left[g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N) \right], N = 2, 3, \ldots,$$

$$f_1(x) = g_1(x), \quad x \geq 0.$$

Дійсно,

$$f_N(x) = \max_{\sum_{s=1}^{N} x_l = x,\ x_i \ge 0} \left[g_N(x_N) + g_{N-1}(x_{N-1}) + \ldots + g_1(x_1) \right] =$$

$$= \max_{0 \le x_N \le x} \left[\max_{\sum_{s=1}^{N-1} x_l = x - x_N,\ x_i \ge 0} \left[g_N(x_N) + g_{N-1}(x_{N-1}) + \ldots + g_1(x_1) \right] \right] =$$

$$= \max_{0 \le x_N \le x} \left[g_N(x_N) + \max_{\sum_{s=1}^{N-1} x_l = x - x_N,\ x_i \ge 0} \left[g_{N-1}(x_{N-1}) + \ldots + g_1(x_1) \right] \right] =$$

$$= \max_{0 \le x_N \le x} \left[g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N) \right].$$

6.5 Алгоритм оптимального розподілу ресурсів

Оскільки не можливо перебрати всі значення x із сегмента $[0,x]$, то в методі динамічного програмування цей сегмент розбивається на m рівних частин, довжиною $h = \frac{x}{m}$, і розглядаються значення функцій $f_N(x)$ і $g_i(x)$ лише в точках 0, h, $2h$, ..., mh. Вибір h залежить від потрібної точності розв’язку і від необхідного для розв’язування задачі часу. Якщо потрібні будуть значення функцій в точках, відмінних від вказаних, їх можна одержати за допомогою інтерполяцій потрібної точності. Зрозуміло, що в процесі оптимізації x_N даються також лише вказані значення.

При N=1 функція $f_1(x)$ легко знаходиться із рівності

$$f_1(x) = g_1(x).$$

Табличні значення x і відповідні їм значення $f_1(x)$ записуються в таблицю (див. табл.6.1).

Таблиця 6.1

x	$f_1(x)$	$x_1(x)$	$f_2(x)$	$x_1(x)$	$x_2(x)$	…	$f_N(x)$	$x_1(x)$	$x_2(x)$	…	$x_N(x)$
0	$f_1(0)$	0	$f_2(0)$	0	0	…	$f_N(0)$	0	0	…	0
h	$f_1(h)$	h	$f_2(h)$	$x_1(h)$	$x_2(h)$	…	$f_N(h)$	$x_1(h)$	$x_2(h)$	…	$x_N(h)$
$2h$	$f_1(2h)$	$2h$	$f_2(2h)$	$x_1(2h)$	$x_2(2h)$	…	$f_N(2h)$	$x_1(2h)$	$x_2(2h)$	…	$x_N(2h)$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
mh	$f_1(mh)$	mh	$f_2(mh)$	$x_1(mh)$	$x_2(mh)$	…	$f_N(mh)$	$x_1(mh)$	$x_2(mh)$	…	$x_N(mh)$

При відомій $f_1(x)$ легко знайти $f_2(x)$ для N=2:

$$f_2(x) = \max_{0 \le x_N \le x} \left[g_2(x_2) + f_1(x - x_2) \right],$$

де x і x_N приймають значення 0, h, $2h$, ..., mh.

Обчислення розпочинаємо при x=0 і x_i=0. Одержимо $f_2(0) = g_2(0) + f_1(0)$ і запишемо це значення в табл.6.1. Потім приймемо $x=h$. Тоді x_2 може прийняти два значення x_2=0 і $x_2=h$, а $f_2(h)$ знайдеться із рівності:

$$f_2(h) = max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(h) \\ g_2(h) + f_1(0) \end{Bmatrix}.$$

Аналогічно, при $x=2h$ будемо мати:

$$f_2(2h) = max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(2h) \\ g_2(h) + f_1(h) \\ g_2(2h) + f_1(0) \end{Bmatrix}.$$

Нарешті, при $x=mh$ одержимо:

$$f_2(mh) = max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(mh) \\ g_2(h) + f_1((m-1)h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_2(mh) + f_1(0) \end{Bmatrix}.$$

Значення $f_2(x)$ і відповідні їм значення $x_1(x)$ і $x_2(x)$ записуються в табл.1.

Аналогічно обчислюються значення $f_3(x)$, $f_4(x)$ і т.д., поки не одержимо $f_N(x)$:

$$f_N(0) = g_N(0) + f_{N-1}(0),$$

$$f_N(h) = max\begin{Bmatrix} g_N(0) + f_{N-1}(h) \\ g_N(h) + f_{N-1}(0) \end{Bmatrix},$$

$$f_N(2h) = max\begin{Bmatrix} g_N(0) + f_{N-1}(2h) \\ g_N(h) + f_{N-1}(h) \\ g_N(2h) + f_{N-1}(0) \end{Bmatrix},$$

....

$$f_N(mh) = max\begin{Bmatrix} g_N(0) + f_{N-1}(mh) \\ g_N(h) + f_{N-1}((m-1)h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_N(mh) + f_{N-1}(0) \end{Bmatrix}.$$

Записавши знайдені значення в таблицю, остаточно одержимо табл.1, в якій легко знайти розв'язки цілого класу задач для N=1, 2, … і для x=0, h, $2h$, ..., mh.

Приклад 1. Три підприємства повинні випустити 32 одиниці продукції одного виду. Треба визначити, яку кількість продукції повинне випустити кожне підприємство, щоб сумарні витрати були найменшими, якщо план випуску на кожному підприємстві повинен бути кратним 8, а функції витрат рівні відповідно $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, значення яких вказані в табл.6.2.

Таблиця 6.2

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0	0	0	0
8	1	2	1
16	3	4	5
24	4	5	7
32	7	8	9

Розв'язання. Для знаходження розв'язку треба обчислити значення функції витрат:

$$f_N(x) = \min_{0 \le x_N \le x} \left(g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N) \right),$$

$$f_1(x) = g_1(x)$$

для N=1, 2, 3 в точках x = 0, 8, 16, 24, 32.

Значення функції витрат і плани $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, випуску продукції на кожному підприємстві будемо записувати в табл.5.3.

При N=1, тобто, коли продукція буде випускатися тільки на першому підприємстві, $f_1(x) = g_1(x)$ і $p_1(x) = x$, де x=0, 8, 16, 24, 32 (див. табл.6.3).

Таблиця 6.3

x	$f_1(x)$	$p_1(x)$	$f_2(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$f_3(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	8	1	8	0	1	8 0	0 0	0 8
16	3	16	3	16 8	0 8	2	8	0	8
24	4	24	4	24	0	4	24 16 8	0 0 8	0 8 8
32	7	32	6	24 8	8 24	5	24	0	8

Розглянемо випадок, коли продукцію будуть випускати перші два підприємства.

Очевидно, що $f_2(0) = 0, \quad p_1(0), \quad p_2(0)$.

При $x = 8$ можливі два способи розподілу:

1) перше підприємство випускає 8 одиниць продукції, а друге – 0;

2) перше підприємство випускає 0 одиниць продукції, а друге – 8.

Тому

$$f_2(8) = \min\left\{\frac{g_2(0) + f_1(8)}{g_2(8) + f_1(0)}\right\} = \min\left\{\frac{0+1}{2+0}\right\} = 1.$$

Отже, мінімальні витрати, рівні 1, будемо мати, якщо перше підприємство випустить 8 одиниць продукції, а друге – 0.

При $x = 16$ можливі три способи розподілу:

1) перше підприємство випускає 16 одиниць продукції, а друге – 0;

2) перше підприємство випускає 8 одиниць продукції, а друге – 8;

3) перше підприємство випускає 0 одиниць продукції, а друге – 16.

Тому

$$f_2(16) = \min\left\{\begin{array}{c} \underline{g_2(0) + f_1(16)} \\ \underline{g_2(8) + f_1(8)} \\ g_2(16) + f_1(0) \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{c} \underline{0+3} \\ \underline{2+1} \\ 4+0 \end{array}\right\} = 3.$$

Як бачимо тут мінімальні витрати, рівні 3, будемо мати в двох варіантах – в першому і другому. Можна вибрати будь-який з них або запам'ятати обидва як це зроблено в табл.6.3.

Аналогічно одержимо:

$$f_2(24) = min\begin{Bmatrix} \underline{g_2(0) + f_1(24)} \\ g_2(8) + f_1(16) \\ g_2(16) + f_1(8) \\ g_2(24) + f_1(0) \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} \underline{0+4} \\ 2+3 \\ 4+1 \\ 5+0 \end{Bmatrix} = 4,$$

$$f_2(32) = min\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_1(32) \\ \underline{g_2(8) + f_1(24)} \\ g_2(16) + f_1(16) \\ \underline{g_2(24) + f_1(8)} \\ g_2(32) + f_1(0) \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 0+7 \\ \underline{2+4} \\ 4+3 \\ \underline{5+1} \\ 8+0 \end{Bmatrix} = 6.$$

Тепер знайдемо $f_3(x)$. Очевидно, $f_3(0) = 0$. При $x = 8$ можливі два способи розподілу:

1) перші два підприємства випускають 8 одиниць продукції, а третє – 0;
2) перші два підприємства випускають 0 одиниць продукції, а третє – 8.

Отже,

$$f_3(8) = min\begin{Bmatrix} \underline{g_3(0) + f_2(8)} \\ \underline{g_3(8) + f_2(0)} \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} \underline{0+1} \\ \underline{1+0} \end{Bmatrix} = 1.$$

Звідси робимо висновок, що мінімальні витрати, рівні 1, будемо мати, якщо перші два підприємства випустять 8 одиниць продукції, а третє – 0 або перші два підприємства випустять 0 одиниць продукції, а третє – 8. З табл.6.3 видно, що в першому способі перше підприємство повинно випустити 8 одиниць продукції, друге – 0 і третє – 0, а в другому способі перше підприємство повинно випустити 0 одиниць продукції, друге – 0 і третє – 8.

Аналогічно одержимо:

$$f_3(16) = min\begin{Bmatrix} g_3(0) + f_2(16) \\ \underline{g_3(8) + f_2(8)} \\ g_3(16) + f_2(0) \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 0+3 \\ \underline{1+1} \\ 5+0 \end{Bmatrix} = 2,$$

$$f_3(24) = min\begin{Bmatrix} \underline{g_3(0) + f_2(24)} \\ \underline{g_3(8) + f_2(16)} \\ g_3(16) + f_2(8) \\ g_3(24) + f_2(0) \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} \underline{0+4} \\ \underline{1+3} \\ 5+1 \\ 7+0 \end{Bmatrix} = 4,$$

$$f_3(32) = min\begin{Bmatrix} g_3(0) + f_2(32) \\ \underline{g_3(8) + f_2(24)} \\ g_3(16) + f_2(16) \\ g_3(24) + f_2(8) \\ g_3(32) + f_2(0) \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 0+6 \\ \underline{1+4} \\ 5+3 \\ 7+1 \\ 9+0 \end{Bmatrix} = 5.$$

Таким чином, найменші витрати, рівні 5, будуть тоді, коли перше підприємство випустить 24 одиниці продукції, друге – 0 і третє – 8 (див. табл.6.3).

6.6 Задача про заміну устаткування

Це важлива економічна задача. Відомо, що з часом устаткування зношується, старіє фізично і морально. Падає його продуктивність, ростуть експлуатаційні витрати. Виникає необхідність заміни устаткування.

Задачу про заміну устаткування можна сформулювати так. В процесі роботи устаткування дає щорічно прибуток, вимагає експлуатаційних витрат і має залишкову вартість. Ці характеристики залежать від терміну експлуатації устаткування. В будь-якому році можна устаткування зберегти або продати за залишковою ціною і придбати нове. В випадку збереження устаткування знижується його продуктивність, збільшуються експлуатаційні витрати. При заміні потрібні значні додаткові капітальні вкладення. Задача полягає в визначенні оптимальної стратегії заміни в плановому періоді з тим, щоб сумарний прибуток за цей період був максимальний.

Сформулюємо задачу математично. Позначимо через T тривалість планового періоду, через $r(t)$ – вартість продукції, виготовленої t-річним устаткуванням, через $u(t)$ – витрати, пов'язані з експлуатацією цього устаткування, через $s(t)$ – залишкову вартість t-річного устаткування, через p – покупну ціну нового устаткування. Нехай $F_k(t)$ – максимальний прибуток від t-річного устаткування за останні k років планового періоду, тобто $F_1(t)$ – за останній рік, $F_2(t)$ – за два останні роки і т.д., $F_T(t)$ – за останні T років, тобто за плановий період, $F_1(0)$ – максимальний прибуток за останній рік планового періоду на новому (0-річному) устаткуванні.

За принципом оптимальності проаналізуємо стратегію заміни устаткування від кінця до початку планового періоду.

Нехай на початок останнього року планового періоду ($k=1$) устаткуванню t років. Можливі два варіанти:

1) зберегти устаткування на T-й рік, тоді прибуток за останній рік буде дорівнювати $r(t)-u(t)$,
2) продати устаткування за залишковою ціною і купити нове устаткування, тоді прибуток буде дорівнювати $s(t)-p+r(0)-u(0)$.

Отже, максимальний прибуток дорівнює

$$F_1(t) = max\begin{Bmatrix} r(t)-u(t) \\ s(t)-p+r(0)-u(0) \end{Bmatrix}.$$

При $k=2$, тобто за 2 роки до кінця планового періоду, і t-річному устаткуванні прибуток при збереженні устаткування буде дорівнювати $r(t)-u(t)+F_1(t+1)$, а при заміні устаткування $s(t)-p+r(0)-u(0)+F_1(1)$. Отже, максимальний прибуток буде дорівнювати

$$F_2(t) = max\begin{Bmatrix} r(t)-u(t)+F_1(t+1) \\ s(t)-p+r(0)-u(0)+F_1(1) \end{Bmatrix}.$$

Аналогічно знайдемо

$$F_k(t) = max\begin{Bmatrix} r(t)-u(t)+F_{k-1}(t+1) \\ s(t)-p+r(0)-u(0)+F_{k-1}(1) \end{Bmatrix}.$$

При $k = T$ і $t = t_0$ матимемо остаточно:

$$F_T(t_0) = max\begin{Bmatrix} r(t_0) - u(t_0) + F_{T-1}(t_0 + 1) \\ s(t_0) - p + r(0) - u(0) + F_{T-1}(1) \end{Bmatrix}.$$

Приклад 2. Скласти оптимальну стратегію заміни устаткування за період T=10 років, якщо $s(t) = 2$, p=15. Значення $r(t)$ і $u(t)$ взяти з табл.6.4.

Таблиця 6.4

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	30	30	29	29	29	28	28	27	27	26	25
$u(t)$	10	10	12	13	14	16	18	20	22	24	25
$r(t) - u(t)$	20	20	17	16	15	12	10	7	5	2	0

Розв'язання. Розв'язок одержимо при t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 і k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, записуючи результати в табл.6.5.

Маємо:

$$F_1(t) = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) \\ 2 - 15 + 30 - 10 = 5 \end{Bmatrix}.$$

Отже,

$$F_1(0) = max\begin{Bmatrix} r(0) - u(0) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 = 20 \\ 5 \end{Bmatrix} = 20,$$

$$F_1(1) = max\begin{Bmatrix} r(1) - u(1) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 = 20 \\ 5 \end{Bmatrix} = 20,$$

$$F_1(2) = max\begin{Bmatrix} r(2) - u(2) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 12 = 17 \\ 5 \end{Bmatrix} = 17,$$

$$F_1(3) = max\begin{Bmatrix} r(3) - u(3) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 13 = 16 \\ 5 \end{Bmatrix} = 16,$$

$$F_1(4) = max\begin{Bmatrix} r(4) - u(4) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 14 = 15 \\ 5 \end{Bmatrix} = 15,$$

$$F_1(5) = max\begin{Bmatrix} r(5) - u(5) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 28 - 16 = 12 \\ 5 \end{Bmatrix} = 12,$$

$$F_1(6) = max\begin{Bmatrix} r(6) - u(6) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 28 - 18 = 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = 10,$$

$$F_1(7) = max\begin{Bmatrix} r(7) - u(7) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 27 - 20 = 7 \\ 5 \end{Bmatrix} = 7,$$

$$F_1(8) = max\begin{Bmatrix} r(8) - u(8) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 27 - 22 = 5 \\ 5 \end{Bmatrix} = 5,$$

$$F_1(9) = max\begin{Bmatrix} r(9) - u(9) \\ 5 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 26 - 24 = 2 \\ 5 \end{Bmatrix} = 5.$$

Зрозуміло, що в цей момент треба прийняти рішення про заміну устаткування.

Тепер можна знайти $F_2(t)$:

$$F_2(t) = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_1(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1) \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_1(t+1) \\ 2 - 15 + 30 - 10 + 20 = 27 \end{Bmatrix}.$$

Одержуємо:

$$F_2(0) = max\begin{Bmatrix} r(0) - u(0) + F_1(1) \\ 27 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 20 = 40 \\ 27 \end{Bmatrix} = 40,$$

$$F_2(1) = max\begin{Bmatrix} r(1) - u(1) + F_1(2) \\ 27 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 17 = 37 \\ 27 \end{Bmatrix} = 37,$$

$$F_2(2) = max\begin{Bmatrix} r(2) - u(2) + F_1(3) \\ 27 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 12 + 16 = 33 \\ 27 \end{Bmatrix} = 33,$$

$$F_2(3) = max\begin{Bmatrix} r(3) - u(3) + F_1(4) \\ 27 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 13 + 15 = 31 \\ 27 \end{Bmatrix} = 31,$$

$$F_2(4) = max\begin{Bmatrix} r(4) - u(4) + F_1(5) \\ 27 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 14 + 12 = 27 \\ 27 \end{Bmatrix} = 27,$$

$$F_2(5) = max\begin{Bmatrix} r(5) - u(5) + F_1(6) \\ 27 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 28 - 16 + 10 = 22 \\ 27 \end{Bmatrix} = 27.$$

Отже, в цей момент треба замінити устаткування.

Для $F_3(t)$ маємо такий вираз:

$$F_3(t) = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_2(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_2(1) \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_2(t+1) \\ 2 - 15 + 30 - 10 + 37 = 44 \end{Bmatrix}.$$

Таким чином,

$$F_3(0) = max\begin{Bmatrix} r(0) - u(0) + F_2(1) \\ 44 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 37 = 57 \\ 44 \end{Bmatrix} = 57,$$

$$F_3(1) = max\begin{Bmatrix} r(1) - u(1) + F_2(2) \\ 44 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 33 = 53 \\ 44 \end{Bmatrix} = 53,$$

$$F_3(2) = max\begin{Bmatrix} r(2) - u(2) + F_2(3) \\ 44 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 12 + 31 = 48 \\ 44 \end{Bmatrix} = 48,$$

$$F_3(3) = max\begin{Bmatrix} r(3) - u(3) + F_2(4) \\ 44 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 13 + 27 = 43 \\ 44 \end{Bmatrix} = 44.$$

Це означає, що прийшов час заміни устаткування.

Тепер знаходимо $F_4(t)$ за формулою:

$$F_4(t) = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_3(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_3(1) \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_2(t+1) \\ 2 - 15 + 30 - 10 + 53 = 60 \end{Bmatrix}.$$

Отже,

$$F_4(0) = max\begin{Bmatrix} r(0) - u(0) + F_3(1) \\ 60 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 53 = 73 \\ 60 \end{Bmatrix} = 73,$$

$$F_4(1) = max\begin{Bmatrix} r(1) - u(1) + F_3(2) \\ 60 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 48 = 68 \\ 60 \end{Bmatrix} = 68,$$

$$F_4(2) = max\begin{Bmatrix} r(2) - u(2) + F_3(3) \\ 60 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 12 + 44 = 61 \\ 60 \end{Bmatrix} = 61,$$

$$F_4(3)=max\begin{Bmatrix} r(3)-u(3)+F_3(4) \\ 60 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-13+44=60 \\ 60 \end{Bmatrix}=60,$$

$$F_4(4)=max\begin{Bmatrix} r(4)-u(4)+F_3(5) \\ 60 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-14+44=59 \\ 60 \end{Bmatrix}=60.$$

Зрозуміло, що треба замінити устаткування.

Для $F_5(t)$ одержимо вираз:

$$F_5(t)=max\begin{Bmatrix} r(t)-u(t)+F_4(t+1) \\ s(t)-p+r(0)-u(0)+F_4(1) \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} r(t)-u(t)+F_4(t+1) \\ 2-15+30-10+68=75 \end{Bmatrix}.$$

Отже,

$$F_5(0)=max\begin{Bmatrix} r(0)-u(0)+F_4(1) \\ 75 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 30-10+68=88 \\ 75 \end{Bmatrix}=88,$$

$$F_5(1)=max\begin{Bmatrix} r(1)-u(1)+F_4(2) \\ 75 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 30-10+61=81 \\ 75 \end{Bmatrix}=81,$$

$$F_5(2)=max\begin{Bmatrix} r(2)-u(2)+F_4(3) \\ 75 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-12+60=77 \\ 75 \end{Bmatrix}=77,$$

$$F_5(3)=max\begin{Bmatrix} r(3)-u(3)+F_4(4) \\ 75 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-13+60=76 \\ 75 \end{Bmatrix}=76,$$

$$F_5(4)=max\begin{Bmatrix} r(4)-u(4)+F_4(5) \\ 75 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-14+60=75 \\ 75 \end{Bmatrix}=75,$$

$$F_5(5)=max\begin{Bmatrix} r(5)-u(5)+F_4(65) \\ 75 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 28-16+60=72 \\ 75 \end{Bmatrix}=75.$$

Це означає, що прийшов час заміни устаткування.

Значення $F_6(t)$ обчислюємо за формулою:

$$F_6(t)=max\begin{Bmatrix} r(t)-u(t)+F_5(t+1) \\ s(t)-p+r(0)-u(0)+F_5(1) \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} r(t)-u(t)+F_5(t+1) \\ 2-15+30-10+81=88 \end{Bmatrix}.$$

Таким чином,

$$F_6(0)=max\begin{Bmatrix} r(0)-u(0)+F_5(1) \\ 88 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 30-10+81=101 \\ 88 \end{Bmatrix}=101,$$

$$F_6(1)=max\begin{Bmatrix} r(1)-u(1)+F_5(2) \\ 88 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 30-10+77=97 \\ 88 \end{Bmatrix}=97,$$

$$F_6(2)=max\begin{Bmatrix} r(2)-u(2)+F_5(3) \\ 88 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-12+76=93 \\ 88 \end{Bmatrix}=93,$$

$$F_6(3)=max\begin{Bmatrix} r(3)-u(3)+F_5(4) \\ 88 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-13+75=91 \\ 88 \end{Bmatrix}=91,$$

$$F_6(4)=max\begin{Bmatrix} r(4)-u(4)+F_5(5) \\ 88 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 29-14+75=90 \\ 88 \end{Bmatrix}=90,$$

$$F_6(5)=max\begin{Bmatrix} r(5)-u(5)+F_5(6) \\ 88 \end{Bmatrix}=max\begin{Bmatrix} 28-16+75=87 \\ 88 \end{Bmatrix}=88.$$

Це означає, що треба замінити устаткування.

Для $F_7(t)$ маємо вираз:

$$F_7(t) = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_6(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_6(1) \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_6(t+1) \\ 2 - 15 + 30 - 10 + 97 = 104 \end{Bmatrix}.$$

Отже,

$$F_7(0) = max\begin{Bmatrix} r(0) - u(0) + F_6(1) \\ 104 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 97 = 117 \\ 104 \end{Bmatrix} = 117,$$

$$F_7(1) = max\begin{Bmatrix} r(1) - u(1) + F_6(2) \\ 104 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 93 = 113 \\ 104 \end{Bmatrix} = 113,$$

$$F_7(2) = max\begin{Bmatrix} r(2) - u(2) + F_6(3) \\ 104 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 12 + 91 = 108 \\ 104 \end{Bmatrix} = 108,$$

$$F_7(3) = max\begin{Bmatrix} r(3) - u(3) + F_6(4) \\ 104 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 13 + 90 = 106 \\ 104 \end{Bmatrix} = 106,$$

$$F_7(4) = max\begin{Bmatrix} r(4) - u(4) + F_6(5) \\ 104 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 14 + 88 = 103 \\ 104 \end{Bmatrix} = 104.$$

Як бачимо, треба замінити устаткування.

Обчислимо $F_8(t)$:

$$F_8(t) = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_7(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_7(1) \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_7(t+1) \\ 2 - 15 + 30 - 10 + 113 = 120 \end{Bmatrix}.$$

Таким чином,

$$F_8(0) = max\begin{Bmatrix} r(0) - u(0) + F_7(1) \\ 120 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 113 = 133 \\ 120 \end{Bmatrix} = 133,$$

$$F_8(1) = max\begin{Bmatrix} r(1) - u(1) + F_7(2) \\ 120 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 108 = 128 \\ 120 \end{Bmatrix} = 128,$$

$$F_8(2) = max\begin{Bmatrix} r(2) - u(2) + F_7(3) \\ 120 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 12 + 106 = 123 \\ 120 \end{Bmatrix} = 123,$$

$$F_8(3) = max\begin{Bmatrix} r(3) - u(3) + F_7(4) \\ 120 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 13 + 104 = 120 \\ 120 \end{Bmatrix} = 120,$$

$$F_8(4) = max\begin{Bmatrix} r(4) - u(4) + F_7(5) \\ 120 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 14 + 104 = 119 \\ 120 \end{Bmatrix} = 120.$$

Отже, треба робити заміну устаткування.

Переходимо до обчислення $F_9(t)$. Маємо:

$$F_9(t) = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_8(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_8(1) \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + F_8(t+1) \\ 2 - 15 + 30 - 10 + 128 = 135 \end{Bmatrix},$$

отже,

$$F_9(0) = max\begin{Bmatrix} r(0) - u(0) + F_8(1) \\ 135 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 30 - 10 + 128 = 148 \\ 135 \end{Bmatrix} = 148,$$

$$F_9(1) = max\begin{Bmatrix} r(1) - u(1) + F_8(2) \\ 135 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 12 + 123 = 140 \\ 135 \end{Bmatrix} = 140,$$

$$F_9(2) = max\begin{Bmatrix} r(2) - u(2) + F_8(3) \\ 135 \end{Bmatrix} = max\begin{Bmatrix} 29 - 13 + 120 = 136 \\ 135 \end{Bmatrix} = 136,$$

$$F_9(3) = max\left\{\begin{matrix} r(3) - u(3) + F_8(4) \\ 135 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 29 - 14 + 120 = 135 \\ 135 \end{matrix}\right\} = 135 .$$

Зрозуміло, що треба робити заміну устаткування.

Нарешті обчислюємо $F_{10}(t)$. Маємо:

$$F_{10}(t) = max\left\{\begin{matrix} r(t) - u(t) + F_9(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_9(1) \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} r(t) - u(t) + F_9(t+1) \\ 2 - 15 + 30 - 10 + 140 = 147 \end{matrix}\right\},$$

отже,

$$F_{10}(0) = max\left\{\begin{matrix} r(0) - u(0) + F_9(1) \\ 147 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 30 - 10 + 140 = 160 \\ 147 \end{matrix}\right\} = 160 ,$$

$$F_{10}(1) = max\left\{\begin{matrix} r(1) - u(1) + F_9(2) \\ 147 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 30 - 10 + 136 = 156 \\ 147 \end{matrix}\right\} = 156 ,$$

$$F_{10}(2) = max\left\{\begin{matrix} r(2) - u(2) + F_9(3) \\ 147 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 29 - 12 + 135 = 152 \\ 147 \end{matrix}\right\} = 152 ,$$

$$F_{10}(3) = max\left\{\begin{matrix} r(3) - u(3) + F_9(4) \\ 147 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 29 - 13 + 135 = 151 \\ 147 \end{matrix}\right\} = 151 ,$$

$$F_{10}(4) = max\left\{\begin{matrix} r(4) - u(4) + F_9(5) \\ 147 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 29 - 14 + 135 = 150 \\ 147 \end{matrix}\right\} = 150 ,$$

$$F_{10}(5) = max\left\{\begin{matrix} r(5) - u(5) + F_9(6) \\ 147 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 28 - 16 + 135 = 147 \\ 147 \end{matrix}\right\} = 147 ,$$

$$F_{10}(6) = max\left\{\begin{matrix} r(6) - u(6) + F_9(7) \\ 147 \end{matrix}\right\} = max\left\{\begin{matrix} 28 - 18 + 135 = 145 \\ 147 \end{matrix}\right\} = 147 .$$

Це означає, що треба замінити устаткування.

У результаті одержуємо табл. 6.5.

Таблиця.6.5

$F_k(t)$	t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(t)$	20	20	17	16	15	12	10	7	5	5 V	5
$F_2(t)$	40	37	33	31	27	27 V	27	27	27	27	27
$F_3(t)$	57	53	48	44 V	44	44	44	44	44	44	44
$F_4(t)$	73	68	61	60	60 V	60	60	60	60	60	60
$F_5(t)$	88	81	77	76	75	75 V	75	75	75	75	75
$F_6(t)$	101	97	93	91	90	88 V	88	88	88	88	88
$F_7(t)$	117	113	108	106	104 V	104	104	104	104	104	104
$F_8(t)$	133	128	123	120	120 V	120	120	120	120	120	120
$F_9(t)$	148	140	136	135 V	135	135	135	135	135	135	135
$F_{10}(t)$	160	156	152	151	150	147	147 V	147	147	147	147

В табл. 6.5 галочка означає, що в даний момент зроблена заміна устаткування. Дані цієї таблиці дозволяють розв'язати цілий ряд задач з різними довжинами планового періоду і з різним віком устаткування. Розглянемо приклади.

Нехай маємо трирічне устаткування (t=3) і треба знайти оптимальну стратегію заміни устаткування на 10-річний період (N=10). В табл. 6.5 на перетині рядка $F_{10}(t)$ і стовпця $t = 3$ знаходимо $F_{10}(3) = 151$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Через рік устаткування постаріє на один рік і треба вибрати оптимальну стратегію заміни устаткування для 4-річного устаткування на решту 9 років. На перетині рядка $F_9(t)$ і стовпця $t = 4$ в табл. 5 знаходимо $F_9(4) = 135$, причому це значення стоїть за галочкою, а це означає, що устаткування треба замінити. Тепер за 8 років до кінця періоду матимемо 1-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_8(t)$ і стовпця $t = 1$ знаходимо $F_8(1) = 128$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 7 років до кінця періоду матимемо 2-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_7(t)$ і стовпця $t = 2$ знаходимо $F_7(2) = 108$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 6 років до кінця періоду матимемо 3-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_6(t)$ і стовпця $t = 3$ знаходимо $F_6(3) = 91$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 5 років до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_5(t)$ і стовпця $t = 4$ знаходимо $F_5(4) = 75$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 4 роки до кінця періоду матимемо 5-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_4(t)$ і стовпця $t = 5$ знаходимо $F_4(5) = 60$, причому це значення стоїть за галочкою, а це означає, що устаткування треба замінити. Отже, за 3 роки до кінця періоду матимемо 2-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_3(t)$ і стовпця $t = 2$ знаходимо $F_3(2) = 48$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Таким чином, за 2 роки до кінця періоду матимемо 3-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_2(t)$ і стовпця $t = 3$ знаходимо $F_2(3) = 31$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за рік до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_1(t)$ і стовпця $t = 4$ знаходимо $F_1(4) = 15$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати.

Таким чином, схема оптимальної стратегії заміни 3-річного устаткування за 10-річний період має такий вигляд:
1-й рік $\rightarrow$ збереження, 2-й рік $\rightarrow$ заміна, 3-й рік $\rightarrow$ збереження, 4-й рік $\rightarrow$ збереження, 5-й рік $\rightarrow$ збереження, 6-й рік $\rightarrow$ збереження, 7-й рік $\rightarrow$ заміна, 8-й рік $\rightarrow$ збереження, 9-й рік $\rightarrow$ збереження, 10-й рік $\rightarrow$ збереження.

При цьому прибуток за 10-річний період буде максимальним і дорівнювати 151 одиниці.

За табл. 6.5 можна знайти оптимальну стратегію заміни устаткування і для періоду меншої, ніж 10 років, довжиною. Нехай маємо дворічне устаткування (t=2) і треба знайти оптимальну стратегію заміни устаткування на 8-річний період (N=8). В табл. 6.5 на перетині рядка $F_8(t)$ і стовпця $t=2$ знаходимо $F_8(2)=123$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Через рік устаткування застаріє на один рік і треба вибрати оптимальну стратегію заміни устаткування для 3-річного устаткування на решту 7 років. На перетині рядка $F_7(t)$ і стовпця $t=3$ в табл. 6.5 знаходимо $F_7(3)=106$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Тепер за 6 років до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_6(t)$ і стовпця $t=4$ знаходимо $F_6(4)=90$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 5 років до кінця періоду матимемо 5-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_5(t)$ і стовпця $t=5$ знаходимо $F_5(5)=75$, причому це значення стоїть з галочкою, а це означає, що устаткування треба замінити. Отже, за 4 роки до кінця періоду матимемо 1-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_4(1)$ і стовпця $t=1$ знаходимо $F_4(1)=68$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 3 роки до кінця періоду матимемо 2-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_3(t)$ і стовпця $t=2$ знаходимо $F_3(2)=48$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Таким чином, за 2 роки до кінця періоду матимемо 3-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_2(t)$ і стовпця $t=3$ знаходимо $F_2(3)=31$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за рік до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 6.5 на перетині рядка $F_1(t)$ і стовпця $t=4$ знаходимо $F_1(4)=15$, причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати.

Таким чином, схема оптимальної стратегії заміни 2-річного устаткування за 8-річний період має такий вигляд:

1-й рік $\rightarrow$ збереження, 2-й рік $\rightarrow$ збереження, 3-й рік $\rightarrow$ збереження, 4-й рік $\rightarrow$ заміна,
5-й рік $\rightarrow$ збереження, 6-й рік $\rightarrow$ збереження, 7-й рік $\rightarrow$ збереження, 8-й рік $\rightarrow$ збереження.

При цьому прибуток за 8-річний період буде максимальним і дорівнювати 123 одиницям.

Запитання для самоперевірки

1 Як формулюється задача динамічного програмування в загальній постановці?

2 В чому полягає метод динамічного програмування?

3 Як формулюється принцип оптимальності Беллмана?

4 Як формулюється задача про розподіл економічних ресурсів?

5 Який вигляд має функціональне рівняння Беллмана для задачі про розподіл економічних ресурсів?

6 формулюйте алгоритм розв'язування задачі про розподіл економічних ресурсів.

7 Як формулюється задача про заміну устаткування?

8 Який вигляд має функціональне рівняння Беллмана для задачі про заміну устаткування?

Розділ 7 СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

В практиці планування нерідко зустрічаються задачі оптимізації, які враховують випадковий характер деяких параметрів. Задачі такого типу розв'язуються методами стохастичного програмування. В таких задачах випадковими можуть бути елементи матриці планування в транспортній задачі, об'єми потреб (праві частини обмежень), ціни та інші фактори. Їх випадковий характер пов'язаний з тим, особливо в задачах динамічного програмування, що не можливо при плануванні на тривалий період вказати значення всіх коефіцієнтів і нормативів з повною визначеністю. Вони можуть завжди змінюватися або з причини деяких не передбачуваних подій, або просто під впливом часу, причому на невідому величину.

Розглянемо застосування методів стохастичного програмування на прикладі роботи авторемонтного підприємства. На підприємство протягом року поступають замовлення на виконання тих або інших робіт. Заздалегідь невідомо коли, які і в якій кількості надійдуть замовлення. Здоровий глузд підказує, якщо набір верстатів на підприємстві малий, то воно зможе виконувати тільки обмежене коло робіт і буде виконувати їх повільно. В наслідок цього замовники віддадуть перевагу іншим, більш сучасним підприємствам, а дане підприємство буде терпіти збитки. Ці збитки вимірюються величиною прибутку, не одержаного внаслідок слабкості матеріальної бази. В той же час зрозуміло, якщо набір верстатів різноманітний і велика їх кількість, то протягом тривалого часу деякі верстати будуть простоювати бездіяльними. Отже, витрати на їх купівлю окупляться не скоро. Очевидно існує якесь проміжне рішення цієї проблеми. Воно, правда, не може трактуватись як вимога досягнення максимуму прибутку, оскільки прибуток за рік є випадковою величиною. В таких випадках за цільову функцію береться або математичне сподівання прибутку, яке обчислюється при відомій функції розподілу замовлень, або ймовірність того, що об'єм прибутку буде не меншим заданого. Доведено , що розв'язок проблеми в першому разі за умови лінійності обмежень зводиться до звичайної задачі лінійного програмування, в другому разі задача вимагає спеціальних методів дослідження.

В чому ж основні труднощі розв'язання задач стохастичного програмування? По-перше, далеко не завжди можна правильно сформулювати задачу, тобто досягти того, щоб ймовірностна модель добре описувала процес, що вивчається. По-друге, коли така модель побудована, треба розробити або правильно вибрати серед відомих метод її розв'язання. Все це привело до того, що стохастичне програмування є найменше розробленим серед методів розв'язання задач математичного програмування.

Наведемо дві можливі постановки задачі стохастичного програмування і можливі методи їх розв'язання.

Розглянемо першу задачу. В деяких ситуаціях є неприйнятним, щоб при будь-яких випадкових впливах, які можуть мати місце, порушувались задані обмеження. Подібні ситуації описуються такою моделлю:

Знайти вектор $X=\{X_1,X_2,...,X_n\}$, в якому досягається максимум математичного сподівання лінійної цільової функції

$$max\sum_{j=1}^{n}C_j(\theta)X_j \tag{7.1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\theta)X_j \le b_i(\theta), i=\overline{1,m}, \tag{7.2}$$

$$X_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{7.3}$$

де $a_{ij}(\theta), b_i(\theta), C_j(\theta)$ приймають випадкові значення в залежності від випадкового параметра θ.

Кожна реалізація θ визначає многогранник допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування. При будь-якій реалізації повинні задовольнятися обмеження (7.2) – (7.3), тому допустимим розв'язком можна вважати розв'язок, який належить всім можливим многогранникам допустимих розв'язків. Якщо перетин цих многогранників пустий, то задача не має допустимого розв'язку.

Така постановка задачі носить назву жорсткої або одно етапної задачі стохастичного програмування. Вибір розв'язку в ній повинен виконуватись заздалегідь з урахуванням всіх можливих реалізацій випадкового параметра θ в один етап.

Метод розв'язання такої задачі полягає в наступному. Спочатку стохастична задача (7.1) – (7.3) зводиться до детермінованої задачі:

знайти

$$max\sum_{j=1}^{n}\overline{C_j(\theta)}X_j \tag{7.4}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{k}(\theta) X_j \le b_i^k(\theta),\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,\ell}, \tag{7.5}$$

$$X_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{7.6}$$

де $\overline{C_j(\theta)}$ − середнє значення для всіх реалізацій випадкової величини $C_j(\theta)$,

ℓ − кількість всіх можливих реалізацій,

$a_{ij}^k(\theta), b_i^k(\theta)$ − значення $a_{ij}(\theta), b_i(\theta)$, які відповідають *k*-й реалізації.

Якщо число ℓ велике, то труднощі в розв’язанні задачі полягають в її великій розмірності. У разі нескінченної кількості реалізацій застосовується скінченновимірна апроксимація.

Одноетапна модель не завжди адекватно описує реальну ситуацію. Часто є бажаним і можливим коректувати допустимий розв’язок після того, як стають відомими реалізації, $a_{ij}^k(\theta), b_i^k(\theta), C_j(\theta)$. Тому користуються також другою постановкою задачі стохастичного програмування, яка носить назву двоетапної задачі стохастичного програмування. Розглянемо цю постановку на прикладі задачі планування сільськогосподарського виробництва в умовах невизначеності.

Нехай маємо поле площею *S* гектарів, яке планується засіяти двома культурами з урожайностями a_1 ц/га і a_2 ц/га. Відомі ціни на ці культури − c_1 грн/ц і c_2 грн/ц. Передбачена можливість зрошення поля. Перша культура для нормального росту обов’язково повинна одержувати b_1 $м^3$/га води, друга − b_2 $м^3$/га води. Вода попадає в грунт частково після дощу, частково з системи зрошення. Припустимо, що можливий один з двох варіантів: літо вологе, коли випадає d_1 $м^3$/га води і літо сухе, коли випадає d_2 $м^3$/га води, причому ймовірність вологого літа дорівнює *p*, сухого − (1− *p*). За таких умов треба скласти план сівби, тобто визначити площу під кожну культуру, і зрошення, що забезпечує максимум сумарного середнього прибутку, тобто максимум математичного сподівання прибутку.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через *x* площу, відведену під першу культуру, тоді під другу культуру буде відведено *S*–*x* гектарів. Стратегія зрошення, тобто кількість кубометрів води, яку потребує додатково 1га поля, визначається для першої культури величинами y_1^1 у вологе літо, y_1^2 у сухе літо, а для другої культури величинами y_2^1 у вологе літо, y_2^2 у сухе літо.

Таким чином, потреби культур у воді такі:

	перша культура	друга культура	
вологе літо	$d_1 + y_1^1 = b_1$	$d_2 + y_2^1 = b_2$	
сухе літо	$d_1 + y_1^2 = b_1$	$d_2 + y_2^2 = b_2$.	(7.7)

Цільова функція − математичне сподівання чистого прибутку складається з прибутку від реалізації обох культур за відомими цінами одного центнера культури без середніх витрат на зрошення, обчислених за умов вологого і сухого літа має вигляд

$$Z\left(x, y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2\right) = c_1 a_1 x + c_2 a_2 (S - x) - \\ - \left[p\left(x y_1^1 \alpha + (S - x) y_2^1 \alpha\right) + (1 - p)\left(x y_1^2 \alpha + (S - x) y_2^2 \alpha\right)\right], \tag{7.8}$$

$$0 \le x \le S. \tag{79}$$

Задача полягає в знаходженні максимуму цільової функції (7.8) за умов (7.7) і (7.9).

Зазначимо, що в загальному разі ця двоетапна задача може бути зведена до задачі опуклого програмування. Якщо ж вона має лінійну структуру, то її можна звести до блочної задачі лінійного програмування.

До двоетапної задачі зводиться задача управління запасами при неповній інформації про попит. В динамічному програмуванні стохастичні задачі застосовують тоді, коли не можна точно визначити стан системи на кожному етапі, тобто змінні, які характеризують стан системи є випадковими величинами з відомою функцією розподілу. При плануванні на довгий період не можливо точно знати значення всіх нормативів, коефіцієнтів, бо вони можуть змінюватись під впливом непередбачуваних причин тощо.

ДОДАТОК А

Для наступних задач лінійного програмування треба:
А) Скласти математичну модель задачі.
Б) Розв’язати задачу графічним способом.
В) Розв’язати задачу симплекс-методом.
Г) Дати економічне тлумачення оптимального розв’язку.

1.

Під час виготовлення продукції двох видів $П_1$ і $П_2$ використовується чотири види сировини: C_1, C_2, C_3 і C_4, умовні одиниці запасів якої та норми її витрат для випуску одиниці продукції наведено в таблиці А1. Прибуток від реалізації одиниці продукції $П_1$ дорівнює 7 ум. од., а для $П_2$ – 5 ум. од. Скласти такий план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

Таблиця А1

Сировина	Продукція		Запаси сировини
	$П_1$	$П_2$	
C_1	2	8	19
C_2	2	1	13
C_3	0	3	15
C_4	3	0	18
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	5	

2.

Для надання двох видів послуг $П_1$ і $П_2$ використовується обладнання трьох видів *A, B, C*. . Норми витрат часу і загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також економія сировини, яка припускається при наданні послуги за новою технологією (у %) наведено в таблиці А2. Скласти такий план надання послуг $П_1$ і $П_2$, який забезпечує максимальну економію сировини.

Таблиця А2

Тип обладнання	Послуги		Загальний фонд робочого часу (верст.-год)
	$П_1$	$П_2$	
A	1	1	6
B	3	10	26
C	1	11	20
економія сировини (%)	1	2	

3.

Під час виготовлення двох видів будівельних конструкцій використовується два сорти цементу, запаси якого дорівнюють відповідно 17 і 21 ум. од.і вартість одиниці кожної з них відповідно дорівнює 4 і 3 ум. од. Визначити, яку кількість конструкцій кожного виду треба виготовити, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним, якщо виготовлення одиниці конструкції 1-го типу потребує 1 ум. од. цементу 1-го сорту та 2 ум. од. – 2-го сорту, а для виготовлення одиниці конструкції 2-го типу необхідно 2 ум. од. цементу 1-го сорту та 1 ум. од. 2-го сорту.

4.

Для виготовлення залізобетонних конструкцій двох типів $П_1$ і $П_2$, вартість одиниці яких дорівнює 25 та 15 ум. од. відповідно, використовуються металеві конструкції трьох типів: $К_1$, $К_2$ та $К_3$. Запаси конструкцій кожного типу на виробництві дорівнюють відповідно 40, 65 та 80 ум. од. Для виготовлення одиниці конструкції $П_1$ необхідні 2 ум. од. конструкцій типу $К_1$, 3 ум. од. – типу $К_2$ і 4 ум. од. – типу $К_3$, а для виготовлення одиниці конструкції $П_2$ необхідні 1 ум. од. конструкцій типу $К_1$, 2 ум. од. – типу $К_2$ і 2 ум. од. – типу $К_3$. Скласти такий план випуску залізобетонних конструкцій, який би забезпечив підприємству максимальний прибуток.

5.

На обладнанні, яке є на підприємстві, за зміну можна виготовити або 400 виробів типу $П_1$, або 100 виробів типу $П_2$, вартість одиниці кожного з яких відповідно дорівнює 18 та 54 ум. од. Скласти такий план випуску продукції, який би забезпечив максимальний прибуток, якщо цех фарбування може за зміну обробити не більш ніж 300 виробів будь-якого типу (вважається, що вироби можуть виготовлятися одночасно).

6.

Для виробництва двох типів бетонних сумішей $Б_1$ і $Б_2$ використовується сировина, яку добувають у трьох кар'єрах $С_1$, $С_2$ і $С_3$, потужність яких відповідно дорівнює 34, 42 і 60 ум. од. Виготовлення 1 ум. од. бетонної суміші $Б_1$ потребує 3 ум. од. сировини з кар'єру $С_1$, 1 ум. од. сировини - з $С_2$ та 4 ум. од. сировини – з $С_3$. Для бетонної суміші $Б_2$ ці показники дорівнюють, відповідно, 1, 4 і 5 ум. од. Скласти такий план випуску бетонних сумішей, який забезпечує максимальний прибуток, якщо 1 ум. од. $Б_1$ коштує 3 ум. од., а $Б_2$ – 5 ум. од.

7.

Завод залізобетонних конструкцій виготовляє продукцію двох типів $Б_1$ і $Б_2$, при цьому за добу він виготовляє або 40 примірників типу $Б_1$, або 60 – типу $Б_2$. Цех транспортування може вивезти тільки 80 одиниць продукції будь-якого типу. Скласти такий план випуску продукції, який би забезпечив максимум прибутку, якщо одна конструкція $Б_1$ коштує 25 ум. од., а одна конструкція $Б_2$ – 18 ум. од.

8.

Завод випускає два види продукції: велосипеди та мотоцикли, при цьому цех для складання велосипедів має потужність 100 тис. шт. за рік, цех для складанняУмотоциклів – 30 тис. шт. за рік. Одна група цехів може виробляти або деталі для 120 тис. велосипедів, або деталі для 40 тис. мотоциклів. Друга група виробляє деталі або для 80 тис. велосипедів, або для 60 тис. мотоциклів. У результаті реалізації кожної тисячі велосипедів завод отримує прибуток у розмірі 2 тис. грн, а від реалізації кожної тисячі мотоциклів – 3 тис. грн. Знайти план випуску велосипедів та мотоциклів для забезпечення максимального прибутку заводу.

9.

Для виготовлення двох видів виробів *A* та *B* використовується токарне, фрезерне та зварювальне обладнання. Витрати часу на обробку одного з виробів, загальний фонд робочого часу для кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду наведено в таблиці А3.

Таблиця А3

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу (верстато-годин)		Загальний фонд робочого часу обладнання (годин)
	A	*B*	
фрезерне	2	4	120
токарне	1	8	280
зварювальне	7	4	240
Прибуток	10	14	

Визначити, скільки виробів кожного виду потрібно виготовити, щоб одержати максимальний прибуток.

10.

Кондитерська фабрика для виготовлення на новому обладнанні двох видів карамелі *A* і *B* використовує три види сировини: цукор, патоку та фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду (на виготовлення 1 т карамелі даного виду), її загальна кількість, яка може бути використана фабрикою, а також приріст продуктивності праці на 1 т карамелі даного виду наведено в таблиці А4. Знайти такий план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний приріст продуктивності праці на новому обладнанні.

Таблиця А4

Види сировини	Норми витрат (т) на 1 т карамелі		Загальна кількість сировини (т)
	А	В	
цукор	0,8	0,5	800
патока	0,4	0,4	600
фруктове пюре	-	0,1	120
Приріст продукції на 1 т сировини (%)	108	112	

11.

Цех виробляє печиво двох ґатунків: *A* і *B*. Для виготовлення тіста використовуються цукор та борошно. На одну товарну одиницю печива виду *A* використовується 5 т цукру та 2 т борошна. Добова норма витрат цукру не повинна перевищувати 20 т. Для виготовлення аналогічної партії печива виду *B* використовується 6 т цукру та 12 т борошна. Добова норма борошна не повинна перевищувати 72 т. Прибуток від реалізації 1 т печива виду *A* дозволяє виплатити заробітну платню 8-ми працівникам, а від реалізації 1 т печива виду *B* – 6-ом працівникам. Визначити план виробництва печива двох видів для виплати заробітної платні максимальній кількості працівників (для визначення максимально можливого персоналу цеху).

12.

Є три види сировини *A*, *B* і *C*, які використовуються для виробництва двох видів продукції $П_1$ і $П_2$. У розпорядженні знаходиться 500 одиниць сировини виду *A*, 750 одиниць сировини виду *B* і 200 одиниць сировини виду *C*. Продукція $П_1$ виготовляється з однієї одиниці сировини *A* і двох одиниць сировини *B*. Продукція $П_2$ виготовляється із двох одиниць сировини *A*, однієї одиниці сировини *B* і однієї одиниці сировини *C*. Одна одиниця продукції $П_1$ дозволяє отримати 4 одиниці нової продукції в суміжному виробництві, а одна одиниця продукції $П_2$ – 5 одиниць нової продукції. Скільки одиниць кожної продукції треба виробити для максимального виробництва нової продукції в суміжному виробництві?

13.

На виготовлення двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ витрачається три види ресурсів – A_1, A_2, A_3. Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в табл. А5. Знайти такий план виробництва, який би забезпечував найбільший прибуток підприємству.

Таблиця А5

Види ресурсів	Продукція		Запаси ресурсів
	$П_1$	$П_2$	
A_1	1	2	800
A_2	6	2	2400
A_3	0	2	640
Прибуток від реалізації одиниці продукції	10	35	

14.

Для виготовлення різних виробів *A* і *B* використовується три види сировини. Для виготовлення одного виробу *A* треба потратити сировини першого виду 16 кг, сировини другого виду – 8 кг, сировини третього виду – 5 кг. Для виготовлення одного виробу *B* треба потратити сировини першого виду 4 кг, сировини другого виду – 7 кг, сировини третього виду – 9 кг. Виробництво забезпечено сировиною першого виду у розмірі 784 кг, сировиною другого виду – 552 кг, сировиною третього виду – 567 кг. Витрати людино-годин на виготовлення одиниці готового виробу *A* дорівнюють 4 люд.-год, а виробу *B* – 6 люд.-год. Скласти план виготовлення виробів *A* і *B* за умовою максимального використання працівників для забезпечення зайнятості персоналу.

15.

У процесі вирощування двох культур *A* і *B* використовуються 3 види добрив. На вирощування однієї тонни культури *A* треба витратити 9 кг добрив першого виду, 7 кг добрив другого виду , 4 кг добрив третього виду. На вирощування однієї тонни культури *B* ці показники відповідно дорівнюють: 5 кг, 8 кг, 16 кг. Господарство забезпечено добривами першого виду у кількості 1431 кг, другого виду – 1224 кг, третього виду – 1328 кг.

Обидві культури використовуються у вигляді корму на тваринницькій фермі. При цьому кожна тонна культури *A* дає приріст ваги тварин у розмірі 3 кг за добу, а культура *B* – 2 кг за добу. Скласти оптимальний план виробництва культур *A* і *B* для забезпечення на фермі максимального приросту ваги тварин.

16.

На виготовлення двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ - витрачається три види ресурсів – A_1 , A_2 , A_3 . Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в табл. А6. Знайти такий план виробництва, який би забезпечував максимальний прибуток підприємству.

Таблиця А6

Види ресурсів	Продукція		Запаси ресурсів
	$П_1$	$П_2$	
A_1	6	2	2400
A_2	0	3	960
A_3	1	2	800
Прибуток від реалізації одиниці продукції	10	45	

17.

Для виробництва двох видів високопробної неіржавіючої сталі *A* і *B* використовується три види добавок до руди. Для виробництва 1 т сталі виду *A* треба затратити 12 кг добавок першого виду, 10 кг добавок другого виду і 3 кг добавок третього виду. Для виробництва 1 т сталі виду *B* ці показники відповідно дорівнюють: 3 кг, 5 кг, 6 кг. Завод забезпечений добавками першого, другого і третього виду у кількості 684 кг, 690 кг, 558 кг відповідно.

Обидва види сталі використовуються для виробництва нових різців при модернізації виробництва. Економія металу (за рахунок збільшення строку служби нових різців) під час обробки новими різцями на 1 тис. виробів складає 6 т при застосуванні сталі виду *A*, при використанні сталі виду *B* ця економія складає 2 т. Знайти такий план виробництва сталі видів *A* і *B*, який забезпечує максимальну економію металу на виробництві.

18.

Для виготовлення двох видів виробів *A* та *B* використовується три види обладнання – C_1, C_2, C_3. Витрати часу на обробку одного з виробів для кожного з типів обладнання наведено в таблиці А7. У ній же вказані загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця А7

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу (ветстато-годин)		Загальний фонд робочого часу обладнання (годин)
	A	*B*	
C_1	2	1	16
C_2	1	3	18
C_3	3	0	21
Прибуток від реалізації одного вироба	2	4	

Визначити, скільки виробів кожного виду треба виготовити, щоб одержати максимальний прибуток.

19.

Для виготовлення столів та шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси: деревину ($м^2$) першого виду, деревину ($м^2$) другого виду і працеємкість робітника в годину. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, загальна кількість ресурсів кожного виду, а також площі, які звільнюються (в $дм^2$) на складі деревини кожного виду під час виготовлення одного стола та шафи, наведено в таблиці А8.

Таблиця А8

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	Шафа	
Деревина ($м^2$) 1 виду	0,2	0,1	40
Деревина ($м^2$) 2 виду	0,1	0,3	60
Працеємкість(люд. год.)	1,2	1,5	371,4
Площа, яка звільнюється при виготовленні одного виробу	6	8	

Визначити, скільки треба виготовити столів і шаф, щоб максимально звільнити площу на складі для розміщення нової партії деревини.

20.

Для виробництва двох видів виробів *A* і *B* використовується токарне, фрезерне та шліфувальне обладнання. Норми витрат часу для кожного з типів обладнання на один виріб даного виду, загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також економія металу, яка допускається у процесі обробки за новою технологією (у %) наведено в таблиці А9. Знайти такий план випуску виробів *A* і *B*, який забезпечує максимальну економію металу.

Таблиця А9

Тип обладнання	Витрати часу (верст.-год.) на обробку одного виробу		Загальний фонд робочого часу на обладнання (верст.-год.)
	A	B	
фрезерне	10	8	168
токарне	5	10	180
шліфувальне	6	12	144
економія металу (%)	14	18	

21.

На звірофермі можуть вирощувати лисиць та песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, яку повинні щоденно отримувати лисиці та песці, загальна кількість корму кожного виду, яка може бути використана звірофермою та кількість хутрових заготівок (деталей хутрової одежі) з однієї шкурки лисиці та песця наведено втаблиці А10.. Визначити, скільки лисиць та песців треба вирощувати на звірофермі для максимального виробництва хутрових заготівок.

Таблиця А10

Види корму	Кількість одиниць корму, яку щоденно повинні отримувати		Загальна кількість кормів
	лисиця	песець	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Кількість хутрових заготівок з однієї шкурки	16	12	

22.

Для виробництва двох видів виробів *A* і *B* підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одного виробу *A* і *B*, загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, та економія енергоресурсів у кВт/г у процесі використання одного виробу кожного виду у виробництві нових верстатів наведено в таблиці А11. Скласти такий план виробництва виробів *A* і *B,* який забезпечує максимальну економію енергоресурсів у процесі їх виготовлення.

Таблиця А11

Види сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Економія енергоресурсів на один виріб	30	40	

23.

Металургійний цех виробляє два види виробів *А* і *В*. Прибуток від тонни виробленої продукції кожного виду складає відповідно 3 тис.грн і 2 тис.грн. В цеху є необхідне обладнання, кожний тип якого має свій фонд робочого часу та продуктивності праці (дані наведено в таблиці А12). Скласти такий план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток металургійного цеху.

Таблиця А12

Тип обладнання	Продуктивність (т/год) виду продукції		Фонд часу (год)
	А	В	
Піч обжигу	8	3	864
Травильний агрегат	7	6	864
Прокатний стан	4	9	945

24.

На виготовлення двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ витрачається три види ресурсів – A_1 , A_2 , A_3 . Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в табл. А13. Знайти такий план виробництва, який би забезпечував максимальний прибуток підприємству.

Таблиця А13

Види ресурсів	Продукція		Запаси ресурсів
	$П_1$	$П_2$	
A_1	1	3	18
A_2	2	1	16
$А_3$	0	1	5
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

25.

Для виготовлення двох видів виробів *А* та *В* використовується три види обладнання – $С_1$, C_2, C_3. Витрати часу на обробку одного з виробів для кожного з типів обладнання , загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду наведено в табл.А14.

Таблиця А14

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу (верстато-годин)		Загальний фонд робочого часу обладнання (годин)
	A	*B*	
C_1	2	1	16
C_2	1	3	18
C_3	3	0	21
Прибуток від реалізації одного виробу	2	4	

Визначити, скільки виробів кожного виду треба виготовити, щоб одержати максимальний прибуток.

ДОДАТОК Б

Методом штучного базису (M – задача) за даними табл. Б1 розв’язати задачу лінійного програмування: знайти екстремум функції

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

при обмеженнях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2.$$

Таблиця Б1

Варіант	Коефіцієнти системи обмежень										Коефіцієнти цільової ф-її				*extr*
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$в_1$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$в_2$	c_1	c_2	c_3	c_4	
1	-1	2	1	2	16	2	1	-2	1	18	4	-1	1	2	*max*
2	2	1	-1	3	15	1	4	3	-2	10	3	2	-1	2	*max*
3	3	-2	2	1	24	1	4	3	-2	15	2	2	3	2	*min*
4	3	-2	2	-1	-12	4	-3	-2	3	12	3	4	1	-2	*min*
5	2	1	-2	1	20	1	2	-1	1	14	3	0	1	2	*max*
6	-2	1	1	2	-8	1	-1	1	3	12	2	-3	4	-1	*min*
7	-1	3	2	-2	-21	2	1	1	-2	14	3	3	2	2	*max*
8	2	3	4	5	30	-2	-1	4	-2	-10	1	-2	2	1	*min*
9	5	2	3	1	40	1	3	1	-1	10	2	2	2	2	*max*
10	2	-2	1	4	14	2	1	2	3	20	-1	0	1	2	*max*
11	1	-1	-1	2	18	-1	4	2	3	26	4	3	2	1	*max*
12	0	2	3	4	20	1	2	4	-2	18	3	2	1	0	*min*
13	-2	1	-2	-1	-26	2	1	-3	1	20	-3	-2	-1	2	*max*
14	3	2	1	0	18	4	0	2	3	30	-2	1	2	3	*max*
15	2	2	2	1	40	-2	-1	2	3	30	-1	1	1	0	*min*
16	1	-3	-2	-1	-18	2	2	1	3	36	2	-3	4	1	*max*
17	1	3	1	-1	12	2	1	-2	1	40	4	-1	1	2	*min*
18	2	1	2	3	14	-2	1	1	2	14	3	2	-1	2	*max*
19	-1	4	2	3	12	-1	3	2	-2	18	2	2	3	2	*min*
20	1	2	4	-2	14	2	3	4	5	20	3	4	1	-2	*max*
21	2	1	-3	1	-10	5	2	3	1	-26	3	0	1	2	*max*
22	4	0	2	3	10	2	-2	1	4	18	2	-3	4	-1	*max*
23	3	2	-1	2	25	1	-1	-1	2	40	3	3	2	2	*min*
24	-3	-2	-1	5	-18	0	2	3	4	36	2	-1	3	0	*max*
25	3	2	-1	6	32	0	2	3	4	46	2	-1	3	0	*max*

ДОДАТОК В

На виготовлення двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ витрачається три види ресурсів – A_1, A_2, A_3. Запаси ресурсів, норми їх затрат і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в табл. В1. Знайти такий план виробництва, який би забезпечував максимальний прибуток. Скласти двоїсту задачу до вихідної і виписати її оптимальний план з останньої симплекс – таблиці її оптимального розв'язку. Дати економічний зміст оптимальних розв'язків двоїстих задач.

Таблиця В1

Варіант	Затрати ресурсів на одиницю продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	A_1		A_2		A_3		A_1	A_2	A_3	$П_1$	$П_2$
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$					
1	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6	14	15	1	2	9	5	400	49	220	21	18
7	11	6	1	2	15	14	324	60	500	10	7
8	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9
9	3	8	7	2	1	1	187	143	29	10	6
10	2	7	1	1	6	1	126	30	120	20	15
11	9	4	3	2	2	2	175	65	60	15	10
12	2	3	2	2	3	2	80	58	75	10	12
13	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	10
14	3	2	4	1	7	8	65	70	235	30	20
15	2	2	7	2	3	8	58	143	197	15	21
16	1	1	12	5	1	4	37	360	100	12	9
17	2	1	2	5	3	4	34	105	91	9	7
18	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
19	14	15	2	1	6	11	500	60	324	14	10
20	14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18
21	3	2	2	2	2	3	75	58	80	15	18
22	5	2	4	3	3	6	98	84	91	18	10
23	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
24	2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12
25	18	15	5	11	13	4	591	335	379	12	22

ДОДАТОК Г

Розподільна таблиця Г транспортної задачі містить задані витрати c_{kl} $(k=\overline{1,4},\ l=\overline{1,5})$ на перевезення одиниці вантажу від постачальників A_1, A_2, A_3, A_4 до споживачів B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, запаси a_k постачальників $A_к$ і потреби b_l споживачів B_l (*i, j* – перша та друга цифра номера варіанта) .

Таблиця Г1

Постачальник	Споживач					a_k
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$7+i$	$19+j$	$21-i$	$9+j$	$9+i$	$85+10j$
A_2	$6+j$	$20-i$	$20-j$	$8+i$	$7+j$	$220-10j$
A_3	$18-i$	$8+j$	$7+i$	$20-j$	$21-i$	$105+5j$
A_4	$19-j$	$6+i$	$8+j$	$20-i$	$17-j$	$200-j$
b_l	$70+10i$	$80+5i$	$60+5i$	$190-10i$	$210-10i$	610

Треба:

1. Скласти математичну модель транспортної задачі.
2. Побудувати початковий опорний розв’язок методом мінімального елемента.
3. Розв’язати транспортну задачу методом потенціалів.
4. Дати економічну інтерпретацію оптимального розв’язку.

ДОДАТОК Д

Чотири підприємства повинні випустити 7d одиниць продукції одного виду. Треба визначити, яку кількість продукції повинно випустити кожне підприємство, щоб сумарні витрати були найменшими, якщо план випуску на кожному підприємстві повинен бути кратним *d*, а функції витрат рівні відповідно $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$. Значення $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ взяти з табл. 6, при цьому треба вибрати *i*-й варіант $g_1(x)$, *j*-й варіант $g_2(x)$, *k*-й варіант $g_3(x)$, *m*-й варіант $g_4(x)$. Значення *i, j, k, m* і *d* взяти з табл.Д1.

Таблиця Д1

	Варіанти $g_1(x)$				Варіанти $g_2(x)$				Варіанти $g_3(x)$				Варіанти $g_4(x)$			
x	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	3	2	1	4	1	2	3	4	1	3	2	4	2	3	4	1
2d	4	5	2	6	5	4	7	6	3	6	3	5	4	5	6	3
3d	7	8	6	9	7	5	9	8	6	9	5	8	8	7	9	5
4d	10	11	9	13	9	8	12	14	8	13	9	14	11	10	13	8
5d	14	13	11	15	12	11	14	16	10	15	12	17	13	14	16	10
6d	17	15	16	18	15	13	17	19	14	17	16	19	15	18	19	13
7d	21	19	19	22	19	18	20	23	18	21	19	24	18	21	23	18

ДОДАТОК Е

Скласти оптимальну стратегію заміни устаткування за період T=8 років, якщо покупна ціна нового устаткування дорівнює $p=d$, залишкова вартість t-річного устаткування дорівнює $s(t)=m$, прибуток від реалізації продукції, виготовленої t-річним устаткуванням, дорівнює $v(t)=r(t)–u(t)$, де $r(t)$ – вартість продукції, виготовленої t-річним устаткуванням, $u(t)$ – витрати, пов'язані з експлуатацією цього устаткування. Значення величин d, m, $v(t)$ взяти з табл. Е1.

Таблиця Е1

№	v(0)	v(1)	v(2)	v(3)	v(4)	v(5)	v(6)	v(7)	v(8)	i	j	k	m	d
1	22	22	20	18	17	14	9	3	0	1	3	4	2	5
2	19	19	17	16	15	12	7	2	0	2	4	1	3	4
3	21	21	19	17	16	13	8	3	0	4	1	2	3	3
4	18	18	16	15	14	11	6	2	0	3	2	4	1	6
5	20	20	18	16	15	12	7	3	0	1	3	2	4	5
6	16	16	14	13	12	9	6	2	0	3	1	4	2	7
7	19	19	17	15	14	11	6	2	0	4	2	3	1	4
8	23	23	21	19	18	15	9	4	0	2	4	1	3	6
9	18	18	16	15	14	11	6	2	0	1	2	3	4	5
10	20	20	18	16	15	12	7	3	0	3	4	2	1	7
11	17	17	15	14	13	10	5	1	0	4	3	1	2	6
12	19	19	17	15	14	11	6	2	0	2	1	3	4	4
13	20	20	18	16	15	12	7	3	0	1	4	2	3	5
14	16	16	14	13	12	10	5	1	0	3	2	4	1	8
15	21	21	19	17	16	13	8	3	0	4	3	1	2	6
16	19	19	17	15	14	11	6	2	0	2	1	3	4	7
17	16	16	14	13	12	9	5	1	0	3	2	4	1	5
18	20	20	18	16	15	12	7	2	0	1	4	3	2	6
19	17	17	15	14	13	10	5	1	0	2	1	4	3	4
20	22	22	20	18	17	14	9	3	0	4	3	2	1	6
21	19	19	17	15	14	11	6	2	0	2	4	1	3	7
22	17	17	15	14	13	10	5	1	0	3	1	4	2	4
23	21	21	19	17	16	13	8	3	0	1	2	3	4	6
24	19	19	17	15	14	11	6	2	0	4	3	2	1	5
25	22	22	20	18	17	14	9	4	0	2	1	4	3	8

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.:Высшая школа, 1986.

2 Кузнецов Ю.И., Кузубов В.И., Волошенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.

3 Зуховский С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.:Наука, 1967.

4 Карпелевич Ф.И.., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.

5 Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.

6 Бугір М.К., Якімов Ф.П. Посібник по розв'язуванню задач з лінійного програмування. – Тернопіль: Поліграфіст, 1997.

7 Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике.– М.: ЮНИТИ, 1999.

8 Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Вышейшая школа, 1994.

9 Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С. Руководство к решению задач по математическому программированию. –Минск: Вышейшая школа, 1978.

10 Беллман Р. Динамическое программирование. –М: Издательство иностранной литературы, 1960.

ЗМІСТ

Навчальне видання

КОНОНЕНКО Анатолій Іванович
ХРАПОВИЦЬКИЙ Іван Степанович
ЩЕЛКУНОВА Любов Іванівна

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тексти лекцій

Відповідальний за випуск О.О.Аршава

Редактор Л.І. Христенко

План 2010р., поз.3. Формат 60х84 1/16. Папір друк. №2.
Підп. до друку Обл.-вид. арк. 5,8. Безкоштовно.
Надруковано на ризографі. Умов. друк. арк. 5,6
Тираж 50 прим. Зам. № 1712.

ХДТУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського державного технічного університету будівництва та архітектури