Un cours « Africain » sur les formes modulaires

Emmanuel « Alassane » Royer [a]

4 avril 2013

a. Une version préliminaire et partielle de ce cours a été donnée aux Universités de Tunis et Bizerte (Tunisie) dans le cadre d'un projet de coopération franco-tunisienne subventionné par le Cnrs et la Dgrsrt. Sa totalité a été donnée sous cette forme à l'université de Bamako (Mali) dans le cadre du projet européen *Edulink/Ramses*. L'auteur est partiellement financé par le projet *Modunombres* de l'Agence nationale de la recherche. Ce texte est dédicacé au petit garçon qui m'a prêté son prénom. À l'heure où je rédige cette mise à jour, le Mali subit simultanément une guerre et un coup d'été militaire. Je ne peux qu'apporter tous mes encouragements aux collègues et amis rencontrés à Bamako et encourager le lecteur à suivre les événements par exemple sur le site `http://www.slateafrique.com/`.

Ce texte est une version très préliminaire. Merci de rapporter les erreurs à emmanuel.royer@math.univ-bpclermont.fr

Table des matières

1 Introduction **6**
- 1.1 Une étonnante égalité . . . 6
- 1.2 Les propriétés de coefficients issus d'un produit . . . 10
- 1.3 Fonctions arithmétiques . . . 11
  - 1.3.1 Généralités . . . 11
  - 1.3.2 Fonction de Möbius . . . 13
  - 1.3.3 Fonctions sommes de diviseurs . . . 13

2 Formes modulaires sur le groupe modulaire **17**
- 2.1 Définition et structure linéaire . . . 17
- 2.2 Opérateurs de Hecke . . . 44
  - 2.2.1 Opérateurs de Hecke sur les fonctions périodiques . . . 44
  - 2.2.2 Opérateurs de Hecke sur les formes modulaires . . . 52
  - 2.2.3 Intervalles sans valeurs propres . . . 55
- 2.3 Propriétés intégrales des coefficients de formes primitives . . . 59
- 2.4 Fonctions L de formes modulaires . . . 63
  - 2.4.1 Définition . . . 63

3 Formes quasimodulaires sur le groupe modulaire **68**
- 3.1 Définition . . . 68
- 3.2 Théorèmes de structure . . . 81
- 3.3 Opérateurs de Hecke quasimodulaires . . . 84
- 3.4 Formes modulaires presque holomorphes . . . 86
- 3.5 Modularité et équations différentielles . . . 91
  - 3.5.1 Des équations satisfaites par les séries d'Eisenstein . . . 91
  - 3.5.2 Équations différentielles des formes quasimodulaires . . . 93
  - 3.5.3 Crochets de Rankin-Cohen . . . 97
  - 3.5.4 Crochets de Rankin-Cohen et équations différentielles . . . 105

A Compléments d'algèbre **112**
- A.1 Série formelle . . . 112
- A.2 Caractères . . . 114
- A.3 Actions de groupes . . . 115
- A.4 Polynômes de Tchebychef . . . 118

A.5 Polynômes symétriques 120
A.5.1 Définition 120
A.5.2 Ordre sur les monômes 122
A.5.3 Preuve du théorème fondamental des polynômes symétriques . 124
A.6 Accouplements parfaits 125
A.7 Extensions transcendantes 125
A.8 Algèbres de Poisson 131

B Compléments d'analyse 138
B.1 Applications conformes 138
B.2 Développement de Fourier complexe 138
B.3 Logarithmes complexes 140
B.3.1 Détermination principale du logarithme 140
B.3.2 Racine carrée 144
B.3.3 Détermination holomorphe du logarithme d'une fonction 144
B.4 Nombres de Bernoulli 145
B.5 Fonctions de Bernoulli 149
B.6 La formule de Poisson 153
B.7 La formule sommatoire d'Abel 154
B.8 La formule sommatoire d'Euler Maclaurin 154
B.9 Produits infinis 157
B.10 Formule d'Euler 161
B.11 Fonctions B et Γ d'Euler 163
B.12 Fonction confluente hypergéométrique 167
B.13 Fonctions J de Bessel 169
B.14 Une autre présentation de E_2 172

C Compléments d'arithmétique 177
C.1 Compléments sur les fonctions arithmétiques 177
C.1.1 Compléments sur la fonction somme de diviseurs 177
C.1.2 Fonction nombre de diviseurs premiers 178
C.2 Séries de Dirichlet 179
C.3 Quelques fonctions sommatoires arithmétiques 183
C.4 Sommes de Kloosterman 184

D Problèmes 188
D.1 Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction ζ de Riemann 188
D.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux. 191
D.3 Le théorème des quatre carrés 195
D.4 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique 201

E Corrigés des problèmes **203**
E.1 Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction ζ de Riemann 203
E.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux. 213
E.3 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique 223

Chapitre 1

Introduction

1.1 Une étonnante égalité

Si ν est un nombre complexe, on définit la fonction

$$\begin{array}{rcccc} \sigma_\nu & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{C} \\ & & n & \mapsto & \displaystyle\sum_{d|n} d^\nu \end{array}$$

la somme portant sur les diviseurs positifs de n.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sigma_1(a)\sigma_1(n-a) = \frac{1}{12}\left(\sigma_1(n) + 5\sigma_3(n) - 6n\sigma_1(n)\right) \tag{1.1}$$

et

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sigma_3(a)\sigma_3(n-a) = \frac{1}{120}\left(\sigma_7(n) - \sigma_3(n)\right). \tag{1.2}$$

Il existe plusieurs démonstrations élémentaires de ces égalités. Nous en donnons une due à Skoruppa [34] dans une forme présentée par Zagier dans son cours au Collège de France (2005-2006).

***Proposition* 1–** *Soit* $\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *un polynôme tel que*

$$\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{H}(\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{Y}).$$

On pose $\widetilde{\mathrm{H}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{X}+\mathrm{Y})$ *puis, on définit les coefficients des polynômes* H *et* $\widetilde{\mathrm{H}}$ *par*

$$\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{r,s\geq 1} h_{r,s}\mathrm{X}^{r-1}\mathrm{Y}^{s-1} \quad \textit{et} \quad \widetilde{\mathrm{H}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{r,s\geq 1} \widetilde{h}_{r,s}\mathrm{X}^{r-1}\mathrm{Y}^{s-1}.$$

Enfin, pour tout entier $n \geq 1$*, on écrit*

$$\sum_{m=1}^{n-1} \mathrm{H}(n,m) = \sum_{j\geq 1} \gamma_j n^{j-1}.$$

Pour tout entier $N \geq 1$, *on a l'égalité,*

$$\sum_{r,s\geq 1}\left(\widetilde{h}_{r,s}-h_{r,s}\right)\sum_{k=1}^{N-1}\sigma_{r-1}(k)\sigma_{s-1}(N-k)=\sum_{j\geq 0}\left(\gamma_j - Nh_{j+1,1}+h_{j,1}\right)\sigma_{j-1}(N)$$

avec la convention $h_{0,1}=\gamma_0=0$.

Remarque 2- L'existence des coefficients γ_j repose sur le fait que, pour tout $s\geq 1$, la somme

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{s-1}$$

est un polynôme en n. Ce polynôme est calculé proposition 265. Cette proposition permet de montrer que $\gamma_1 = 0$ et

$$\gamma_j = \sum_{s\geq 1}\frac{1}{s}\sum_{\ell=1}^{\min(j-1,s)}\binom{s}{\ell}B_{s-\ell}h_{j-\ell,s}$$

si $j\geq 2$ où $B_{s-\ell}$ est le nombre de Bernoulli d'indice $s-\ell$.

Le choix $n=1$ dans l'égalité

$$\sum_{m=1}^{n-1} H(n,m)=\sum_{j\geq 1}\gamma_j n^{j-1}$$

implique l'égalité

$$\sum_{j\geq 1}\gamma_j = 0.$$

La preuve de la proposition 1 repose sur le lemme combinatoire suivant exprimant une relation de symétrie de la fonction Λ_N définie par

$$\begin{array}{cccc}\Lambda_N & : & \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}\\ & & (a,b) & \mapsto & \#\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\ ax+by=N\}.\end{array}$$

Noter que $\Lambda_N(a,b)=\Lambda_N(b,a)$.

***Lemme* 3–** *On a*

$$\Lambda_N(a,b)=\Lambda_N(a,a+b)+\Lambda_N(b,a+b)+\delta(a+b\mid N).$$

Démonstration. On remarque la bijection

$$\begin{array}{ccc}\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\ ax+by=N,\ x>y\} & \xrightarrow{\sim} & \{(z,w)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\ az+(a+b)w=N\}\\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y)\end{array}$$

l'ensemble d'arrivée ayant cardinal $\Lambda_{\mathrm{N}}(a,a+b)$. On remarque aussi la bijection

$$\begin{array}{ccc} \{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\ ax+by=\mathrm{N},\ x<y\} & \xrightarrow{\sim} & \{(z,w)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\ bz+(a+b)w=\mathrm{N}\} \\ (x,y) & \mapsto & (y-x,x) \end{array}$$

l'ensemble d'arrivée ayant cardinal $\Lambda_{\mathrm{N}}(b,a+b)$. De ces deux bijections, on déduit

$$\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b)=\Lambda_{\mathrm{N}}(a,a+b)+\Lambda_{\mathrm{N}}(b,a+b)+\#\{(x,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\ ax+bx=\mathrm{N}\}$$

le dernier cardinal étant 1 si $a+b$ divise N et 0 sinon. □

Preuve de la proposition 1. Multipliant l'égalité du lemme 3 par $\widetilde{\mathrm{H}}(a,b)=\mathrm{H}(a,a+b)=\mathrm{H}(a+b,b)$ on trouve

$$\widetilde{\mathrm{H}}(a,b)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b)=\mathrm{H}(a,a+b)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,a+b)+\mathrm{H}(a+b,b)\Lambda_{\mathrm{N}}(a+b,b)+\widetilde{\mathrm{H}}(a,b)\delta(a+b\mid\mathrm{N}).$$

En sommant sur tous les couples (a,b) (noter qu'il n'y en a qu'un nombre fini pour lesquels $\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b)$ est non nul) on a

$$\sum_{a,b\geq1}\widetilde{\mathrm{H}}(a,b)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b)=\sum_{\substack{a,c\\1\leq a<c}}\mathrm{H}(a,c)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,c)+\sum_{\substack{b,d\\d>b\geq1}}\mathrm{H}(d,b)\Lambda_{\mathrm{N}}(d,b)+\sum_{a,b\geq1}\widetilde{\mathrm{H}}(a,b)\delta(a+b\mid\mathrm{N}).$$

Puisque

$$\sum_{\substack{b,d\\d>b\geq1}}\mathrm{H}(d,b)\Lambda_{\mathrm{N}}(d,b)=\sum_{\substack{a,c\\a>c\geq1}}\mathrm{H}(a,c)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,c)$$

on obtient

$$\sum_{a,b\geq1}\left(\widetilde{\mathrm{H}}(a,b)-\mathrm{H}(a,b)\right)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b)=-\sum_{a\geq1}\mathrm{H}(a,a)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,a)+\sum_{a,b\geq1}\widetilde{\mathrm{H}}(a,b)\delta(a+b\mid\mathrm{N}).\tag{1.3}$$

Or

$$\Lambda_{\mathrm{N}}(a,a)=\#\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\ a(x+y)=\mathrm{N}\}=\begin{cases}0 & \text{si } a\nmid\mathrm{N}\\ \dfrac{\mathrm{N}}{a}-1 & \text{si } a\mid\mathrm{N}\end{cases}$$

puis $\mathrm{H}(a,a)=\widetilde{\mathrm{H}}(a,0)=\mathrm{H}(a,0)$ d'où

$$\begin{aligned}\sum_{a\geq1}\mathrm{H}(a,a)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,a)&=\sum_{a\mid\mathrm{N}}\mathrm{H}(a,0)\left(\frac{\mathrm{N}}{a}-1\right)\\&=\sum_{r\geq1}h_{r,1}\sum_{a\mid\mathrm{N}}a^{r-1}\left(\frac{\mathrm{N}}{a}-1\right)\\&=\sum_{r\geq1}h_{r,1}\left(\mathrm{N}\sigma_{r-2}(\mathrm{N})-\sigma_{r-1}(\mathrm{N})\right)\\&=\sum_{j\geq0}\left(\mathrm{N}h_{j+1,1}-h_{j,1}\right)\sigma_{j-1}(\mathrm{N}).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Remarque 4 - Pour écrire l'égalité (1.4), on a utilisé la convention $h_{0,1} = 0$.

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{a,b\geq 1} \widetilde{\mathrm{H}}(a,b)\delta(a+b \mid \mathrm{N}) &= \sum_{c} \delta(c \mid \mathrm{N}) \sum_{1\leq b<c} \widetilde{\mathrm{H}}(c-b,b)\\ &= \sum_{c|\mathrm{N}} \sum_{1\leq b<c} \mathrm{H}(c,b)\\ &= \sum_{j\geq 1} \gamma_j \sum_{c|\mathrm{N}} c^{j-1}\\ &= \sum_{j\geq 1} \gamma_j \sigma_{j-1}(\mathrm{N}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Par report de (1.4), (1.5) dans (1.3) on a

$$\sum_{a,b\geq 1} \Big(\widetilde{\mathrm{H}}(a,b) - \mathrm{H}(a,b)\Big)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b) = \sum_{j\geq 0} (\gamma_j - \mathrm{N}h_{j+1,1} + h_{j,1})\sigma_{j-1}(\mathrm{N}). \tag{1.6}$$

Remarque 5 - Pour écrire l'égalité (1.6), on a utilisé la convention $\gamma_0 = 0$.

Enfin,

$$\sum_{a,b\geq 1} \mathrm{H}(a,b)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b) = \sum_{r,s\geq 1} h_{r,s} \sum_{a,b\geq 1} a^{r-1} b^{s-1} \Lambda_{\mathrm{N}}(a,b)$$

puis

$$\sum_{a,b\geq 1} a^{r-1} b^{s-1} \Lambda_{\mathrm{N}}(a,b) = \sum_{\substack{(a,b,x,y)\in\mathbb{N}^{*4}\\ ax+by=\mathrm{N}}} a^{r-1} b^{s-1} = \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^{*2}\\ k+\ell=\mathrm{N}}} \sum_{a|k} a^{r-1} \sum_{b|\ell} b^{s-1}$$

ayant posé $k = ax$ et $\ell = by$. On a donc

$$\sum_{a,b\geq 1} \Big(\widetilde{\mathrm{H}}(a,b) - \mathrm{H}(a,b)\Big)\Lambda_{\mathrm{N}}(a,b) = \sum_{r,s\geq 1} \Big(\widetilde{h}_{r,s} - h_{r,s}\Big) \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \sigma_{r-1}(k)\sigma_{s-1}(\mathrm{N}-k). \tag{1.7}$$

La formule de la proposition s'obtient par report de (1.7) dans (1.6). □

Choisissons

$$\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{X}^2 - \mathrm{XY} + \mathrm{Y}^2\Big).$$

On a

$$\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{X}^2 + \mathrm{XY} + \mathrm{Y}^2\Big) = \mathrm{H}(\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{Y}) = \widetilde{\mathrm{H}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}).$$

On calcule

$$\sum_{m=1}^{n-1} \mathrm{H}(n,m) = \frac{5}{12}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{12}n$$

de sorte que

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{12}, \quad \gamma_3 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma_4 = \frac{5}{12}.$$

Par ailleurs,

$$h_{r,s} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (r,s) = (3,1) \\ & \quad \text{ou } (r,s) = (1,3) \\ -\frac{1}{2} & \text{si } (r,s) = (2,2) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \widetilde{h}_{r,s} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (r,s) = (3,1) \\ & \quad \text{ou } (r,s) = (1,3) \\ & \quad (r,s) = (2,2) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{r,s} \left(\widetilde{h}_{r,s} - h_{r,s}\right) \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \sigma_{r-1}(k)\sigma_{s-1}(\mathrm{N}-k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \sigma_1(k)\sigma_1(\mathrm{N}-k)$$

et

$$\sum_{j\geq 0} \left(\gamma_j - \mathrm{N}h_{j+1,1} + h_{j,1}\right)\sigma_{j-1}(\mathrm{N}) = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\mathrm{N}\right)\sigma_1(\mathrm{N}) + \frac{5}{12}\sigma_3(\mathrm{N}).$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \sigma_1(k)\sigma_1(\mathrm{N}-k) = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\mathrm{N}\right)\sigma_1(\mathrm{N}) + \frac{5}{12}\sigma_3(\mathrm{N}).$$

Avec

$$\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{XY}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\right)^2$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \sigma_3(k)\sigma_3(\mathrm{N}-k) = \frac{1}{120}\left(\sigma_7(\mathrm{N}) - \sigma_3(\mathrm{N})\right).$$

Ce cours fournira des outils permettant de situer ces égalités dans un cadre conceptuel. Cette conceptualisation conduit à de nouvelles égalités telles que

$$\sum_{a=1}^{n-1} a\sigma_1(a)\sigma_3(n-a) = -\frac{n}{40}\left(n\sigma_3(n) - \frac{7}{6}\sigma_5(n) + \frac{1}{6}\sigma_1(n)\right).$$

1.2 Les propriétés de coefficients issus d'un produit

Pour tout nombre complexe z de partie imaginaire strictement positive, on définit

$$\Delta(z) = e^{2i\pi z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{2i\pi nz}\right)^{24}.$$

La fonction Δ est périodique de période 1 et admet un développement de Fourier

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{\Delta}(n) e^{2i\pi nz}.$$

La considération des produits partiels permet de constater expérimentalement les formules suivantes.

1) Pour tous entiers m et n, on a

$$\widehat{\Delta}(m)\widehat{\Delta}(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11/2}\widehat{\Delta}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Si p est un nombre premier et $\nu \geq 0$ un entier, on a

$$\frac{\widehat{\Delta}(p^\nu)}{p^{11\nu/2}} = \mathrm{X}_\nu\left(\frac{\widehat{\Delta}(p)}{p^{11/2}}\right)$$

où X_ν est un polynôme de Tchebytchef de seconde espèce (voir l'annexe A.4).

2) Pour tout entier n, on a la majoration

$$\left|\widehat{\Delta}(n)\right| \leq \sigma_0(n) n^{11/2}.$$

3) Pour tout intervalle $[a,b] \subset [-2,2]$, et définissons $\lambda_\Delta(n) = \widehat{\Delta}(n)/n^{11/2}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x,\, \lambda_\Delta(p) \in [a,b]\}}{\#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x\}} = \frac{1}{\pi}\int_a^b \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

4) Pour tout entier n, on a $\widehat{\Delta}(n) \neq 0$.

Nous démontrerons le premier point. Le deuxième point a été démontré (sous une forme plus générale) par Deligne en 1974, la preuve est au delà des objectifs de ce cours. Le troisième point, connu jusqu'à récemment sous le nom de conjecture de Sato-Tate a été démontré en 2009 par Barnet-Lamb, Geraghty, Harris & Taylor. Ces trois résultats ont comme point de départ l'interprétation des coefficients de Fourier de Δ comme valeurs propres d'opérateurs que nous allons étudier : les opérateurs de Hecke. Le dernier point est encore conjectural.

1.3 Fonctions arithmétiques

1.3.1) Généralités

Une fonction arithmétique est une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. Elle est *multiplicative* si

$$(m,n) = 1 \Longrightarrow f(mn) = f(m)f(n)$$

pour tous couples d'entiers naturels non nuls (m,n) et si elle n'est pas la fonction nulle. Si f est multiplicative, alors il existe un entier n tel que $f(n)=0$ et puisque $(n,1)=1$ alors $f(1\cdot n)=f(1)f(n)$ de sorte que $f(1)=1$. Par ailleurs, si

$$n=\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

(où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers) est la décomposition en facteurs premiers distincts de n, alors

$$f(n)=\prod_{p\in\mathcal{P}} f\left(p^{v_p(n)}\right).$$

Autrement dit, une fonction multiplicative est entièrement déterminée par ses valeurs en les puissances de nombres premiers. L'ensemble des fonctions arithmétiques est muni d'un intéressant produit (sa définition est justifiée par la proposition 303).

Définition 6– *Si f et g sont deux fonction arithmétiques, on définit le* produit de convolution *de f et g, noté $f*g$ en posant*

$$f*g(n)=\sum_{\substack{d\mid n\\ d>0}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

pour tout entier $n\geq 1$.

Le changement de variable $n\leftarrow n/d$ montre que le produit de convolution est commutatif. L'unité pour ce produit est la fonction δ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \delta \ : \ \mathbb{N}^* & \to & \{0,1\} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Ce produit est adapté aux fonctions multiplicatives.

Proposition 7– *Le produit de convolution de deux fonctions multiplicatives est multiplicatif.*

Démonstration. Soit f et g deux fonctions multiplicatives. On a

$$f*g(mn)=\sum_{d\mid mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right)$$

et, si $(m,n)=1$, la décomposition des entiers en facteurs premiers de façon unique implique qu'on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : a\mid m,\, b\mid n\} & \xrightarrow{\sim} & \{d\in\mathbb{N}^* : d\mid mn\} \\ (a,b) & \mapsto & ab. \end{array}$$

Ainsi, en utilisant la mutliplicativité de f et g, on obtient

$$f*g(mn)=\sum_{a\mid m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right)\sum_{b\mid n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right)=f*g(m)\cdot f*g(n).$$

$\square$

1.3.2) Fonction de Möbius

***Définition* 8–** *La fonction de Möbius est la fonction* $\mu \colon \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ *définie par* $\mu(1) = 1$ *et*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } p \mid n \text{ tel que } v_p(n) \geq 2 \\ (-1)^{\#\{p \in \mathcal{P} \colon p \mid n\}} & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$n = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} p^{v_p(n)}$$

est la décomposition en facteurs premiers de n.

On dit qu'un entier est sans facteur carré s'il n'est divisible par le carré d'aucun entier au moins égal à 2. L'entier 1 est sans facteur carré et, si $n \geq 2$ admet la décomposition en facteurs premiers

$$n = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} p^{v_p(n)}$$

il est sans facteur carré si et seulement si $v_p(n) = 1$ pour tout $p \mid n$.

***Lemme* 9** (Inversion de Möbius)– *Pour tout entier* $n \geq 1$ *on a*

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \delta(n).$$

Démonstration. Il s'agit de montrer $\mu * \mathbb{1} = \delta$ où

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{1} & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{C} \\ & & n & \mapsto & 1. \end{array}$$

Puisque ce produit de convolution est multiplicatif, il suffit de démontrer le résultat pour n une puissance de nombre premier. Or si p est premier et $\alpha \geq 1$, alors

$$\sum_{d \mid p^\alpha} \mu(d) = 1 + \mu(p) = 0.$$

□

1.3.3) Fonctions sommes de diviseurs

Si $\nu \in \mathbb{C}$, on définit la fonction arithmétique σ_ν par

$$\sigma_\nu(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d \mid n}} d^\nu.$$

***Lemme* 10–** *Si* $\nu \in \mathbb{C}$, *la fonction* σ_ν *est multiplicative.*

Démonstration. La fonction σ_ν est le produit de convolution des fonctions multiplicatives $\mathbb{1}$ et $n \mapsto n^\nu$. □

***Lemme* 11–** *Si $\nu \in \mathbb{C}$, et si $\alpha \geq 2$, alors*

$$\sigma_\nu(p^\alpha) = \sigma_\nu(p)\sigma_\nu(p^{\alpha-1}) - p^\nu\sigma_\nu(p^{\alpha-2}).$$

Démonstration. On calcule

$$\sigma_\nu(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} d^\nu = \sum_{j=0}^{\alpha} p^{j\nu} = \frac{p^{(\alpha+1)\nu}-1}{p^\nu-1} \tag{1.8}$$

et on constate que

$$\frac{p^{(\alpha+1)\nu}-1}{p^\nu-1} = \frac{(p^\nu+1)(p^{\alpha\nu}-1)-p^{\alpha\nu}+p^\nu}{p^\nu-1} = \frac{p^{2\nu}-1}{p^\nu-1}\cdot\frac{p^{\alpha\nu}-1}{p^\nu-1} - p^\nu\frac{p^{(\alpha-1)\nu}-1}{p^\nu-1}.$$

□

Les polynômes de Tchebychef de seconde espèce (voir l'annexe A.4) permettent d'écire la relation de multipicativité de σ_ν d'une façon remarquable. On normalise la fonction σ_ν en posant

$$\widetilde{\sigma_\nu}(n) = \frac{\sigma_\nu(n)}{n^{\nu/2}}.$$

***Corollaire* 12–** *Alors, pour tout nombre premier p et tout entier $\alpha \geq 0$, on a*

$$\widetilde{\sigma_\nu}(p^\alpha) = \mathrm{X}_\alpha\left(\widetilde{\sigma_\nu}(p)\right).$$

Démonstration. On définit les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_n = \widetilde{\sigma_\nu}(p^n) \quad \text{et} \quad v_n = \mathrm{X}_n\left(\widetilde{\sigma_\nu}(p)\right).$$

Le lemme 11 implique

$$u_n = \widetilde{\sigma_\nu}(p)u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Par ailleurs, l'équation (A.3) évaluée en $\widetilde{\sigma_\nu}(p)$ conduit à

$$v_n = \widetilde{\sigma_\nu}(p)v_{n-1} - v_{n-2}.$$

Le résultat est alors une conséquence directe de $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. □

***Corollaire* 13–** *Pour tous entiers m et n, on a*

$$\sigma_\nu(m)\sigma_\nu(n) = \sum_{d|(m,n)} d^\nu\sigma_\nu\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Démonstration. Supposons d'abord $m = p^\alpha$ et $n = p^\beta$ avec α et β positifs ou nuls. Grâce au corollaire 12 et à la formule de Clebsch-Gordan (lemme 207), on écrit

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma_\nu}(p^\alpha)\widetilde{\sigma_\nu}(p^\beta) &= X_\alpha\,(\widetilde{\sigma_\nu}(p))\,X_\beta\,(\widetilde{\sigma_\nu}(p)) \\ &= \sum_{i=0}^{\min(\alpha,\beta)} X_{\alpha+\beta-2i}\,(\widetilde{\sigma_\nu}(p)) \\ &= \sum_{i=0}^{\min(\alpha,\beta)} \widetilde{\sigma_\nu}(p^{\alpha+\beta-2i}) \\ &= \sum_{d\mid(p^\alpha,p^\beta)} \widetilde{\sigma_\nu}\left(\frac{p^\alpha\cdot p^\beta}{d^2}\right).\end{aligned}$$

Si m et n sont deux entiers premiers entre eux, le résultat est une conséquence directe de la multiplicativité de σ_ν. Si m et n sont deux entiers quelconques, on écrit les décompositions en facteurs premiers de m et n :

$$m = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(m)} \quad \text{et} \quad n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

les entiers $v_p(m)$ et $v_p(n)$ étant nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de p. On a alors

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma_\nu}(m)\widetilde{\sigma_\nu}(n) &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \sum_{d\mid\left(p^{v_p(m)},p^{v_p(n)}\right)} \widetilde{\sigma_\nu}\left(\frac{p^{v_p(m)+v_p(n)}}{d^2}\right) \\ &= \sum_{d\mid(m,n)} \widetilde{\sigma_\nu}\left(\frac{mn}{d^2}\right)\end{aligned}$$

par multiplicativité de $\widetilde{\sigma_\nu}$ et bijectivité de l'application

$$\begin{array}{rcl}\left\{(d_p)_{p\in\mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{P}} : d_p \mid \left(p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)}\right)\right\} & \xrightarrow{\sim} & \{d\in\mathbb{N}^* : d \mid (m,n)\} \\ (d_p)_{p\in\mathcal{P}} & \mapsto & \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} d_p = \prod_{p\mid(m,n)} d_p.\end{array}$$

La formule de multiplicativité annoncée résulte alors de l'écriture de $\widetilde{\sigma_\nu}$ en fonction de σ_ν. □

Par inversion de Möbius, on peut exprimer la valeur par σ_ν d'un produit d'entiers.

***Corollaire* 14–** *Si $m \geq 1$ et $n \geq 1$ sont des entiers, alors*

$$\sigma_\nu(mn) = \sum_{d\mid(m,n)} \mu(d)d^\nu\sigma_\nu\left(\frac{m}{d}\right)\sigma_\nu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Démonstration. On calcule

$$S(m,n)=\sum_{d|(m,n)}\mu(d)d^{\nu}\sigma_{\nu}\left(\frac{m}{d}\right)\sigma_{\nu}\left(\frac{n}{d}\right)$$

en reportant la valeur $\sigma_\nu(m/d)\sigma_\nu(n/d)$ tirée du corollaire 13. On trouve

$$S(m,n)=\sum_{d|(m,n)}\mu(d)d^{\nu}\sum_{r|(m/d,n/d)}r^{\nu}\sigma_{\nu}\left(\frac{mn}{d^2r^2}\right).$$

Le choix $\ell=rd$ conduit à

$$S(m,n)=\sum_{\ell|(m,n)}\ell^{\nu}\sigma_{\nu}\left(\frac{mn}{\ell^2}\right)\sum_{d|\ell}\mu(d).$$

Par inversion de Möbius (lemme 9) on obtient

$$S(m,n)=\sigma_{\nu}(mn).$$

□

Remarque 15 - Ce lemme peut-être démontré sans utiliser la relation de Möbius mais en utilisant une relation sur les polynômes des Tchebychef (voir le lemme 208).

Remarque 16 - Les relations de multiplicativité démontrées dans cette partie appartiennent à la théorie des opérateurs de Hecke. Ces opérateurs seront étudiés dans la suite de ce cours.

Chapitre 2

Formes modulaires sur le groupe modulaire

2.1 Définition et structure linéaire

On appelle *groupe modulaire*, le groupe multiplicatif des matrices 2×2 à coefficients entiers et déterminant 1, défini par

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ ad - bc = 1 \right\}.$$

En définissant

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a le

***Théorème* 17–** *Les matrices* S *et* T *engendrent* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Notons G le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T. Il suffit de montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{G}$. Si ce n'est pas le cas, on considère $a \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe des entiers b, c et d vérifiant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{G}$$

et tel que

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{G} \Rightarrow |a'| \geq |a|.$$

Nécessairement, $a \neq 0$, sinon $b = -c = \pm 1$ or

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & d \end{pmatrix} = \mp \mathrm{S}\mathrm{T}^{\mp d} \in \mathrm{G} \quad \text{avec } -\mathrm{I} = \mathrm{S}^2.$$

Soit q le quotient de la division euclidienne de $-b$ par a, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathrm{T}^q \mathrm{S} = \begin{pmatrix} aq+b & * \\ * & * \end{pmatrix} \notin \mathrm{G}$$

et $|aq+b| < |a|$ ce qui contredit la minimalité de $|a|$. □

On note $\mathcal{H}$ le *demi-plan de Poincaré*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{I}m\, z > 0\}.$$

On complète $\mathcal{H}$ par ajout de $\mathbb{Q}$ et du point ∞ pour obtenir $\overline{\mathcal{H}}$. Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ avec $c = 0$, on pose $-\frac{d}{c} = \frac{a}{c} = \infty$. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit [(a)] sur $\overline{\mathcal{H}}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \overline{\mathcal{H}} \setminus \{\infty, -\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty\,. \end{cases}$$

On a l'expression pratique suivante :

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)}. \tag{2.1}$$

L'action est sur $\overline{\mathcal{H}}$ grâce à la formule

$$\mathrm{I}m\, \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\mathrm{I}m\, z}{|cz+d|^2} \tag{2.2}$$

valable dès que $ad - bc = 1$; si γ et γ' sont dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, si $z \in \overline{\mathcal{H}}$, alors $\gamma(\gamma' z) = (\gamma\gamma')z$ puis $\mathrm{I}z = z$. En particulier, on a

$$\tau = \gamma z \Longrightarrow z = \gamma^{-1}\tau$$

et on définit une relation d'équivalence sur $\overline{\mathcal{H}}$ en disant que deux éléments sont *congrus modulo* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ si l'un est obtenu par action d'une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'autre. L'*orbite* d'un élément $z \in \mathcal{H}$ est sa classe d'équivalence modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire, l'ensemble

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z = \{\gamma z : \ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\}.$$

Les matrices γ et $-\gamma$ agissent de la même façon :

$$\gamma z = (-\gamma) z$$

pour $z \in \overline{\mathcal{H}}$, et, on note souvent $-\gamma z$ le nombre $(-\gamma)z$. Il n'y a pas d'ambigüité lorsque $z \in \mathcal{H}$ car l'opposé du nombre γz n'est pas dans $\mathcal{H}$. On a

$$\mathrm{S}z = -\frac{1}{z} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}z = z + 1.$$

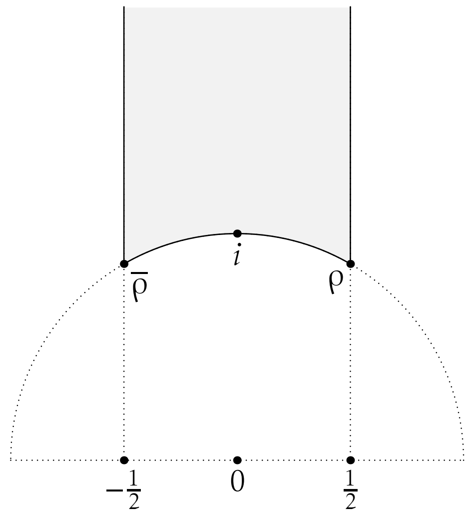


Figure 2.1 – L'ensemble $\mathcal{F}$

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathcal{H} \colon |\mathrm{Re}\, z| \le \frac{1}{2}, |z| \ge 1 \right\}$$

(voir la figure 2.1). On note $\rho = \exp(i\pi/3)$.

On va montrer que tout point de $\mathcal{H}$ est congru modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ a un point de $\mathcal{F}$ et que, si deux points de $\mathcal{F}$ sont congrus modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors ils sont sur la frontière de $\mathcal{F}$.

***Théorème* 18–** *1. Pour tout $z \in \mathcal{H}$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tels que $\tau = \gamma z$.*

2. Si τ et si z sont deux points de $\mathcal{F}$ tels que $\tau = \gamma z$ avec $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \{\pm \mathrm{I}\}$, alors soit $|\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Re}(\tau)| = \frac{1}{2}$, soit $|z| = |\tau| = 1$.

Démonstration. 1. On note $z = x + iy$. Il s'agit de montrer que l'intersection de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$ avec $\mathcal{F}$ est non vide. Pour cela, on commence par montrer que l'ensemble $\mathcal{Y}$ des réels $y' \ge y$ qui sont parties imaginaires de points de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$ est fini (il est non vide car $y \in \mathcal{Y}$). Soit $y' \in \mathcal{Y}$. Alors, $y' = \mathrm{Im} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z$ et

$$y' = \frac{y}{|cz + d|^2}. \tag{2.3}$$

De $y' \ge y$, on tire $|cz + d|^2 \le 1$. Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers c et d vérifiant cette dernière relation puisque [b] le disque de centre O et rayon 1 ne contient qu'un nombre fini de points du quadrillage $z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$ contient

a. Il n'est pas nécessaire de détailler cette notion puisque nous donnons dans les lignes suivantes les proporiétés utiles. Pour approfondir, voir l'annexe A.3.

b. On peut aussi montrer que $|c| \le 1/y$ puis $\sqrt{1 -^2 y^2} - cx \le d \le \sqrt{1 - c^2 y^2} - cx$.

(au moins) un point de partie imaginaire maximale. Notons w l'un d'eux. Soit n l'unique entier de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\, w, \frac{1}{2} - \mathrm{Re}\, w\right[$. Alors $|\mathrm{Re}\, \mathrm{T}^n w| \leq \frac{1}{2}$. D'autre part $|\mathrm{T}^n w| \geq 1$, sinon

$$\mathrm{Im}\, \mathrm{S}(\mathrm{T}^n w) = \frac{\mathrm{Im}\, \mathrm{T}^n w}{|\mathrm{T}^n w|^2} = \frac{\mathrm{Im}\, w}{|\mathrm{T}^n w|^2} > \mathrm{Im}\, w$$

ce qui contredirait la maximalité de $\mathrm{Im}\, w$. Le point $\tau = \mathrm{T}^n w$ est donc dans $\mathcal{F}$.

2. On note $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ puis $z = x + iy$ et $\tau = \sigma + it$. On a $|x| \leq 1/2$, $|z| \geq 1$ et $y \geq \sqrt{3}/2$. On va restreindre notre preuve au cas où $\mathrm{Im}\, \tau \geq \mathrm{Im}\, z$. En effet, si cette inégalité n'est pas vraie, alors $\mathrm{Im}\, z \geq \mathrm{Im}\, \tau$ et $z = \gamma^{-1}\tau$ de sorte qu'il suffit d'appliquer le raisonnement qui suit à (z, τ, γ^{-1}) au lieu de (τ, z, γ). De $\mathrm{Im}\, \gamma z \geq \mathrm{Im}\, z$, on déduit $|cz + d| \leq 1$. Alors $1 \geq |cz + d| \geq |c| y$ donc $|c| \leq 2/\sqrt{3}$ et $c \in \{-1, 0, 1\}$.
   (a) Si $c = 1$, alors $|z + d| \leq 1$ donc $(x + d)^2 \leq 1 - y^2 \leq 1/4$ puis

   $$-1 \leq -\frac{1}{2} - x \leq d \leq \frac{1}{2} - x \leq 1.$$

   Ainsi $d \in \{-1, 0, 1\}$.
      i. Si $d = 1$ alors $(x + 1)^2 \leq 1/4$ conduit à $x \leq -1/2$ et donc $x = -1/2$). On a alors $1/4 \leq 1 - y^2 \leq 1/4$ d'où $y = \sqrt{3}/2$. Ensuite $z = -\overline{\rho}$ et $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ d'où $\tau = a - \overline{\rho}$. De $\sigma = a - 1/2$ on tire $a \in \{0, 1\}$. Si $a = 0$ alors $\gamma = \mathrm{ST}$ et $z = \tau = -\overline{\rho}$. Si $a = 1$ alors $\gamma = \mathrm{TST}$ et $z = -\overline{\rho}$, $\tau = \rho$.
      ii. si $d = 0$ alors $b = -c = 1$. On a donc $|z| \leq 1$ puis $|z| = 1$. Ainsi, $\tau = a - \overline{z}$. De $|\sigma| \leq 1/2$, on tire

      $$-1 \leq x - \frac{1}{2} \leq a \leq x + \frac{1}{2} \leq 1$$

      d'où $a \in \{-1, 0, 1\}$. Si $a = 1$ alors $x = 1/2$ tandis que si $a = -1$ alors $x = -1/2$. On a donc $z = \tau = \rho$ et $\gamma = \mathrm{TS}$ ou $z = \tau = -\overline{\rho}$ et $\gamma = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$ ou $|z| = 1$, $\tau = -\overline{z}$ et $\gamma = \mathrm{S}$.
      iii. Si $d = -1$ alors $(x - 1)^2 \leq 1/4$ et donc $x = 1/2$. On a alors $y = \sqrt{3}/2$ puis $z = \rho$ et $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & -a-1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Ainsi, $\tau = a + \rho$ et $a \in \{-1, 0\}$. Si $a = 0$ alors $\gamma = \mathrm{ST}^{-1}$ et $z = \tau = \rho$. Si $a = -1$ alors $\gamma = \mathrm{STS}$ et $z = \rho$, $\tau = -\overline{\rho}$.
   (b) Si $c = 0$ alors $a = d = \pm 1$. Ainsi, $\gamma = \pm \mathrm{T}^{\pm b}$ et z et τ étant deux points de distance horizontale $|b| \geq 1$ dans une bande de largeur 1, ils sont sur les bords de cette bande. Ainsi $|\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Re}(\tau)| = \frac{1}{2}$.
   (c) Si $c = -1$. On échange γ et $-\gamma$ (ce qui ne change rien à τ) et on se ramène au cas $c = 1$.

□

Remarque 19 - Soit $\mathfrak{a} = \frac{a}{c}$ un nombre rationnel avec [c] $(a, c) = 1$. Alors, d'après le théorème de Bezout, il existe une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et alors $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\infty = \mathfrak{a}$. Il en résulte

---

c. Le plus grand diviseur commun de deux entiers m et n est noté (m, n). Le contexte empêche de confondre cette notation avec celle désignant le couple (m, n).

que tout point de $\overline{\mathcal{H}}$ est congru modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à un point de $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$. D'autre part, ∞ n'est congru à aucun point de $\mathcal{F}$ puisqu'il n'est congru qu'à lui-même ou a des nombres rationnels.

Pour comprendre ce qu'est le point ∞, on envoie $\mathcal{H}$ sur le disque unité épointé

$$\mathring{\mathrm{D}}(0,1) = \{q \in \mathbb{C} :\ 0 < |q| < 1\}$$

via $z \mapsto \exp(2i\pi z)$. Si $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et périodique de période 1, il existe une fonction holomorphe $\widetilde{f} : \mathring{\mathrm{D}}(0,1) \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \widetilde{f}(\exp(2i\pi z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La fonction $\widetilde{f}$ admet alors un développement en série de Laurent normalement convergent sur tout compact de $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)$ qu'on écrit

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) q^n$$

i.e. la fonction f admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n z}$$

normalement convergent sur tout compact de $\mathcal{H}$. (Voir l'annexe B.2).

***Définition* 20–** *Une fonction* $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *holomorphe sur* $\mathcal{H}$ *et* 1*-périodique est* holomorphe à l'infini *si* $\widetilde{f}$ *est holomorphe en* 0.

Remarque 21- Il est équivalent de dire que f a un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n z}$$

normalement convergent sur tout compact de $\mathcal{H}$.

***Définition* 22–** *Soit* $k \in \mathbb{Z}$. *On appelle* forme modulaire de poids k *sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *toute fonction holomorphe* $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *vérifiant :*

1. *pour toute matrice* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *et tout* $z \in \mathcal{H}$,

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z)\,;$$

2. *la fonction* f *est holomorphe à l'infini.*

Remarque 23- La seconde condition a un sens puisque le choix de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{T}$ dans le premier point implique que f est 1-périodique. Cette seconde condition s'appelle *condition aux pointes*. La première condition s'appelle *condition de modularité*.

On note $\mathcal{M}_k$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des formes modulaires de poids k sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Le choix de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = -\mathrm{I}$ implique que la seule forme modulaire de poids impair sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est la fonction constante nulle.

Désormais, on suppose k pair.

On remarque aisément que $\mathcal{M}_k\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{M}_{k+\ell}$ et donc l'ensemble

$$\mathcal{M}_* = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{N} \\ k\neq 2}} \mathcal{M}_k$$

est une algèbre. On précise cette remarque.

Définition* 24– *Une algèbre graduée est une algèbre* A *pour laquelle existe un ensemble* J *d'indices et une famille* $(\mathrm{A}_j)_{j\in \mathrm{J}}$ *de sous-groupes additifs de* A *telles que

1) $\mathrm{A} = \bigoplus_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_j$;
2) $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j \subset \mathrm{A}_{i+j}$ *pour tous* i *et* j *dans* J.

***Proposition* 25–** *L'algèbre* $\mathcal{M}_*$ *est une algèbre graduée :*

a)

$$\mathcal{M}_* = \bigoplus_{\substack{k\in 2\mathbb{N} \\ k\neq 2}} \mathcal{M}_k;$$

b) pour tous k *et* ℓ *dans* $2\mathbb{N} - \{2\}$, *on a*

$$\mathcal{M}_k\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{M}_{k+\ell}.$$

Démonstration. Le second point ayant déjà été signalé, nous prouvons le premier. On suppose par l'absurde l'existence d'éléments non nuls $f_i \in \mathcal{M}_{k_i}$ où les $k_1 < k_2 < \cdots < k_\delta$ sont des éléments de $2\mathbb{N} - \{2\}$, tels que

$$\sum_{i=1}^{\delta} f_i = 0.$$

Fixons $z \in \mathcal{H}$ n'annulant aucune des fonctions f_i. On a

$$(z+d)^{-k_\delta} \sum_{i=1}^{\delta} f_i\left(\frac{z+d-1}{z+d}\right) = 0$$

pour tout $d \in \mathbb{Z}$. Par modularité des f_i, il en résulte

$$\sum_{i=1}^{\delta} (z+d)^{k_i - k_\delta} f_i(z).$$

Puisque $k_i - k_\delta < 0$ si $i \neq \delta$, on trouve en faisant tendre d vers l'infini que $f_\delta(z) = 0$ ce qui contredit le choix de z. $\square$

***Proposition* 26–** *Une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe est une forme modulaire de poids k sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si :*

1. *elle est 1-périodique ;*
2. *elle vérifie*
$$z^{-k} f\left(-\frac{1}{z}\right) = f(z)$$
pour tout $z \in \mathcal{H}$;
3. *elle est holomorphe à l'infini.*

Démonstration. En notant $f_{|\gamma}(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ on a

$$\left(f_{|\gamma}\right)_{|\gamma'} = f_{|\gamma\gamma'}$$

pour toute matrice γ et γ' de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Si $f_{|\gamma} = f$ et $f_{|\gamma'} = f$ on a donc $f_{|\gamma\gamma'} = f$. La 1-périodicité de f équivaut donc à $f_{|\mathrm{T}^n} = f$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Le point 2 équivaut quant à lui à $f_{|\mathrm{S}^n} = f$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Enfin, si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on l'écrit comme produit de puissances de T et S pour voir que si f vérifie les points 1 et 2 alors $f_{|\gamma} = f$. □

***Définition* 27–** *Une forme modulaire de poids k sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *est appelée* forme parabolique *de poids k sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ si $\widehat{f}(0) = 0$.*

Remarque 28 - Cela revient à demander que $\widetilde{f}$ s'annule en 0. On dit que f *s'annule en l'infini*.

On note $\mathcal{S}_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_k$ constitué des formes paraboliques de poids k sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Si une forme modulaire f est parabolique, l'existence de son développement de Fourier implique en particulier l'existence de $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \mathrm{C}e^{\pi n} \tag{2.4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (voir l'annexe B.2). On utilise la modularité et la parabolicité pour améliorer cette majoration.

***Lemme* 29–** *Si f est une forme parabolique de poids k sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que,*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \mathrm{C}n^{k/2}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Démonstration. Soit

$$\varphi(z) = |f(z)|(\mathrm{Im}\, z)^{k/2}$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a

$$\varphi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varphi(z)$$

donc, pour montrer que φ est bornée sur $\mathcal{H}$, il suffit de montrer que φ est bornée sur $\mathcal{F}$. En reportant dans le développement de Fourier de f la majoration (2.4) et en utilisant que la partie imaginaire d'un point de $\mathcal{F}$ vaut au moins $y_0 = \sqrt{3}/2$, on trouve $\mathrm{C} > 0$ et $\mathrm{D} > 0$ tels que

$$|f(z)| = \mathrm{C}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\pi n(1-3y/2)}e^{-\pi n y/2} \leq \mathrm{C}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n y/2} \leq \mathrm{D}e^{-\pi y/2} \tag{2.5}$$

pour tout $z = x + iy \in \mathcal{F}$. Ainsi

$$\lim_{\substack{\mathrm{Im}\, z\to+\infty \\ z\in\mathcal{F}}} \varphi(z) = 0.$$

Puisque, pour tout $\mathrm{M} > 0$, l'ensemble $\mathcal{F} \cap \{z \in \mathcal{H} \colon \mathrm{Im}\, z \leq \mathrm{M}\}$ est compact, il en résulte que φ est bornée sur $\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{H}$. On a donc

$$|f(z)| \leq \|\varphi\|_\infty (\mathrm{Im}\, z)^{-k/2}$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Puisque

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x+iy)e^{-2i\pi n(x+iy)}\,\mathrm{d}x$$

pour tout $y > 0$, on déduit

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|\varphi\|_\infty e^{2\pi n y} y^{-k/2}$$

et on termine en choisissant $y = 1/n$. $\square$

Si $f \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et non constamment nulle et si $\tau \in \mathcal{H}$, on note $v_\tau(f)$ l'ordre d'annulation de f en τ : c'est l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-\tau)^n}$ est holomorphe et non nulle en τ. Si, de plus, f est 1-périodique et holomorphe en l'infini, on note $v_\infty(f)$ l'ordre d'annulation $v_0(\widetilde{f})$ de $\widetilde{f}$ en 0.

***Lemme* 30–** *Si $f \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et non constamment nulle, périodique de période 1 et holomorphe en l'infini, il n'y a qu'un nombre fini de points $\tau \in \mathcal{F}$ tels que $v_\tau(f) \neq 0$.*

Démonstration. Puisque $\widetilde{f}$ est holomorphe sur

$$\mathrm{D}(0,1) = \{q \in \mathbb{C} \colon |q| < 1\},$$

elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur le compact

$$\overline{\mathrm{D}}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left\{q \in \mathbb{C} \colon |q| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

On pose

$$\widetilde{\widetilde{f}}(q) = \frac{\widetilde{f}(q)}{q^{v_0(\widetilde{f})}}$$

de sorte que $\widetilde{\widetilde{\widetilde{f}}}$ est holomorphe et non nulle en 0. Soit $2r > 0$ le plus petit des modules de zéros de $\widetilde{\widetilde{\widetilde{f}}}$ dans $\overline{\mathrm{D}}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (on pose $2r = 1$ si $\widetilde{\widetilde{\widetilde{f}}}$ ne s'annule pas dans ce disque). Alors, $\widetilde{\widetilde{\widetilde{f}}}$ ne s'annule pas dans $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$ puis $\widetilde{f}$ ne s'annule pas dans $\mathring{\mathrm{D}}(0,r)$. Finalement, f ne s'annule pas dans

$$\mathcal{F} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \colon\ \mathrm{Im}\, z > \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right\}.$$

Ensuite, f est holomorphe sur le compact

$$\mathcal{F} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \colon\ \mathrm{Im}\, z \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right\}.$$

où elle ne s'annule donc qu'un nombre fini de fois. □

***Lemme* 31–** *Si $f \in \mathcal{M}_k \setminus \{0\}$, si $\tau \in \mathcal{H}$ et si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors $v_\tau(f) = v_{\gamma\tau}(f)$.*

Démonstration. On sait que $\mathrm{X} \colon z \mapsto (z-\tau)^{-v_\tau(f)} f(z)$ est holomorphe et non nulle en τ et on doit montrer que $\mathrm{Y} \colon z \mapsto (z - \gamma\tau)^{-v_\tau(f)} f(z)$ est holomorphe est non nulle en $\gamma\tau$. Écrivons $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Grâce à la relation de modularité, on a

$$\mathrm{X}(z) = (cz+d)^{-k} [\gamma^{-1}(\gamma z) - \tau]^{-v_\tau(f)} f(\gamma z).$$

L'égalité

$$\frac{\gamma^{-1}u - \gamma^{-1}v}{u - v} = \frac{1}{(cu-a)(cv-a)}$$

appliquée à $u = \gamma z$ et $v = \gamma\tau$ donne alors $\mathrm{X}(z) = \mathrm{A}(z)\mathrm{Y}(\gamma z)$ avec

$$\mathrm{A}(z) = \frac{(c\gamma z - a)^{v_\tau(f)} (c\gamma\tau - a)^{v_\tau(f)}}{(cz+d)^k}.$$

On déduit le résultat du fait que la fonction A est holomorphe et ne s'annule pas sur $\mathcal{H}$. □

L'orbite d'un zéro de f n'est donc constituée que de zéros de f et, tous ses points annulent f au même ordre. On définit

$$\rho = \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right).$$

On peut alors énoncer le théorème fondamental suivant qui donne une formule de comptage (pondéré) du nombre d'orbites de zéros d'une forme modulaire.

***Théorème* 32** (Formule $\frac{k}{12}$)**–** *Si $f \in \mathcal{M}_k \setminus \{0\}$ alors*

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_\rho(f) + \sum_\tau v_\tau(f) = \frac{k}{12}$$

la somme se faisant sur un système de représentants de $\mathcal{H}$ modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ excluant les classes de i et ρ.

Remarque 33- Comme ensemble de sommation, on peut prendre

$$\left\{z \in \mathcal{F}:\ \mathrm{Re}\, z \neq \frac{1}{2}, |z| = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}\, z < 0\right\}.$$

Démonstration de la formule $\frac{k}{12}$. On suppose dans un premier temps que f n'a pas de zéro sur la frontière de $\mathcal{F}$, sauf éventuellement en i ou ρ (et donc en $\rho^2 = S\rho$). Puisque f est holomorphe, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que f n'a pas de zéros dans l'intersection avec $\mathcal{F}$ des disques épointés de rayon ε et de centres ρ, i et ρ^2. On fixe aussi $H > 0$ tel que f n'a pas de zéro (complexe) dans l'intersection de $\mathcal{F}$ avec le demi-plan $\mathrm{Im}\, z > H$. On considère alors le chemin α déterminé par A, B, C, D, D′, C′, B′ et A′ comme sur la figure 2.2.

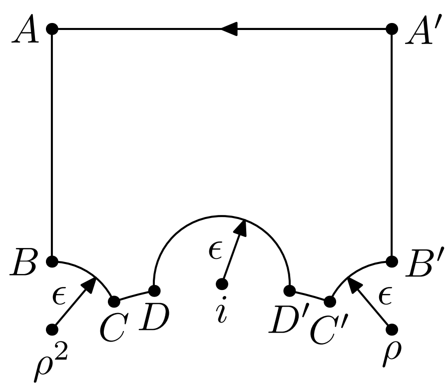


FIGURE 2.2 –

Le théorème des résidus implique

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_\tau v_\tau(f).$$

Par périodicité, la somme des intégrales sur AB et B′A′ s'annule. On évalue la somme des intégrales sur $\widehat{\mathrm{CD}}$ et $\widehat{\mathrm{D'C'}}$. On pose $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Le chemin $\widehat{\mathrm{C'D'}}$ est image de $\widehat{\mathrm{CD}}$ par l'action de S donc si $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ une paramétrisation de $\widehat{\mathrm{CD}}$, alors $\widetilde{\beta}(t) = -\beta(t)^{-1}$ paramétrise $\widehat{\mathrm{C'D'}}$. Ainsi,

$$\int_{\widehat{\mathrm{CD}}} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 g\left(\beta(t)\right)\beta'(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{\widehat{\mathrm{D'C'}}} g(z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^1 g\left(\widetilde{\beta}(t)\right)\widetilde{\beta}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

De $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$, on déduit

$$\frac{1}{z^2}g\left(-\frac{1}{z}\right) = g(z) + \frac{k}{z}$$

donc

$$\int_{\widehat{\mathrm{D'C'}}} g(z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^1 g(\beta(t))\beta'(t)\,\mathrm{d}t - k\int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t,$$

puis

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\widehat{\mathrm{CD}}} + \int_{\widehat{\mathrm{D'C'}}}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{k}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Notons $\theta_0(\varepsilon) \in [\pi/2, 2\pi/3]$ l'angle $(\widehat{\mathrm{O}x, \mathrm{OD}})$ et $\theta_1(\varepsilon) \in [\pi/2, 2\pi/3]$ l'angle $(\widehat{\mathrm{O}x, \mathrm{OC}})$. Une paramétrisation de $\widehat{\mathrm{CD}}$ est $\beta(t) = e^{i(\theta_0(\varepsilon)-\theta_1(\varepsilon))t + i\theta_1(\varepsilon)}$ de sorte que

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\widehat{\mathrm{CD}}} + \int_{\widehat{\mathrm{D'C'}}}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = k\frac{\theta_1(\varepsilon) - \theta_0(\varepsilon)}{2\pi}.$$

Lorsque ε tend vers 0 les angles $\theta_1(\varepsilon)$ et $\theta_0(\varepsilon)$ tendent respectivement vers $2\pi/3$ et $\pi/2$ d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\widehat{\mathrm{CD}}} + \int_{\widehat{\mathrm{D'C'}}}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{k}{12}.$$

On évalue ensuite l'intégrale sur le segment A'A de longueur 1. On a

$$\frac{f'}{f}(z) = 2i\pi e^{2i\pi z}\frac{\widetilde{f}'}{\widetilde{f}}\left(e^{2i\pi z}\right)$$

puis

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{A'}}^{\mathrm{A}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_{\varpi}\frac{\widetilde{f}'(q)}{\widetilde{f}(q)}\,\mathrm{d}q$$

où ϖ est l'image de A'A par $z \mapsto e^{2i\pi z}$, c'est-à-dire un cercle de centre 0 parcouru dans le sens antitrigonométrique. Le seul zéro éventuel de $\widetilde{f}$ à l'intérieur de ce cercle (image du demi-plan $\mathrm{I}m\, z > \mathrm{H}$) est 0. Ainsi,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\varpi}\frac{\widetilde{f}'(q)}{\widetilde{f}(q)}\,\mathrm{d}q = -v_0(\widetilde{f})$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{A'}}^{\mathrm{A}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -v_\infty(f).$$

On évalue ensuite l'intégrale sur $\widehat{\mathrm{BC}}$. La fonction $\frac{f'}{f}$ admet un développement de Laurent autour de ρ^2 qui s'écrit

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{v_{\rho^2}(f)}{z - \rho^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - \rho^2)^n.$$

Ainsi [d],

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\widehat{\mathrm{BC}}}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = v_{\rho^2}(f)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\widehat{\mathrm{BC}}}\frac{1}{z-\rho^2}\,\mathrm{d}z = -i\frac{\pi}{3}v_{\rho^2}(f).$$

On en déduit

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\widehat{\mathrm{BC}}}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{6}v_{\rho^2}(f) = -\frac{1}{6}v_{\rho}(f).$$

De même (ou bien par action de S), on a

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\widehat{\mathrm{C'B'}}}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{6}v_{\rho}(f).$$

Enfin, le même raisonement conduit à

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\widehat{\mathrm{DD'}}}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}v_{i}(f).$$

On obtient la formule $\frac{k}{12}$ par ajout des différentes contributions. Maintenant, s'il y a d'autres zéros sur la frontière, ils vont par paires $(\tau, \mathrm{T}\tau)$ avec $\mathcal{R}e\,\tau = -\frac{1}{2}$ ou $(\tau, \mathrm{S}\tau)$ avec $|\tau| = 1$ et on modifie le contour α comme l'indique la figure 2.3. Noter que z et $\mathrm{S}u$ apparaissent comme des zéros à l'intérieur du contour mais que leurs images respectives $\mathrm{T}z$ et u ne sont elles pas comptées. Le chemin $\widehat{\mathrm{A'B'}}$ reste l'image du chemin $\widehat{\mathrm{AB}}$ par T et le chemin $\widehat{\mathrm{C'D'}}$ reste l'image du chemin $\widehat{\mathrm{CD}}$ par S. Nous avons donc toujours l'annulation de la somme des intégrales sur $\widehat{\mathrm{AB}}$ et $\widehat{\mathrm{B'A'}}$ et

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\widehat{\mathrm{CD}}}+\int_{\widehat{\mathrm{D'C'}}}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{k}{2i\pi}\int_0^1\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière intégrale ne dépend que de la valeur de la primitive de la fonction continue β'/β en 0 et en 1. En choisissant le cercle autour de u de rayon suffisamment petit, le chemin $\widehat{\mathrm{CD}}$ est un arc de cercle de rayon 1 et de centre 1 au voisinage de C et de D. La fonction β'/β a donc même primitive au voisinage de 0 et 1 que dans le cas précédemment calculé. La suite de la démonstration est donc identique. □

Une première conséquence de la formule $\frac{k}{12}$ est le

***Théorème* 34–**

1) Si $k < 0$, alors $\mathcal{M}_k = \{0\}$.

2) On a $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$.

3) On a $\mathcal{M}_2 = \{0\}$.

d. Notons $\alpha(\theta_0,\theta_1)$ l'arc du cercle de centre τ et de rayon R délimité par les points d'angles θ_0 et θ_1 tous deux dans $[0,2\pi[$. Le paramétrage $z(t) = \tau + \mathrm{R}e^{it}$ avec $t\in[\theta_0,\theta_1]$ montre que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha(\theta_0,\theta_1)}\frac{\mathrm{d}z}{z-\tau} = \frac{\theta_1-\theta_0}{2\pi}.$$

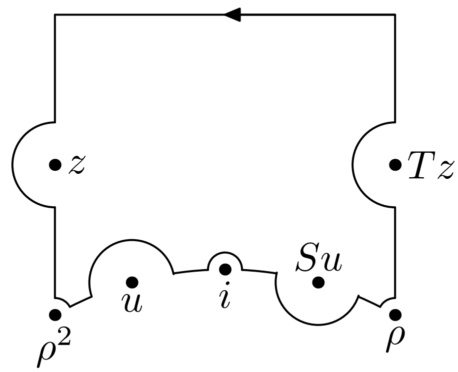


FIGURE 2.3 –

Démonstration. Le premier point résulte du fait que, dans la formule $\frac{k}{12}$ le terme de gauche est somme de termes positifs ou nuls. On montre le deuxième point. Les fonctions constantes sont des formes modulaires de poids 0, donc si $f \in \mathcal{M}_0$ alors $g = f - \widehat{f}(0) \in \mathcal{M}_0$ et g s'annule à l'infini. Si g n'est pas la fonction constante nulle, alors dans la formule $\frac{k}{12}$ appliquée à g, le terme de gauche vaut au moins 1 alors que le terme de droite est nul. Ainsi $g = 0$ et $f = \widehat{f}(0)$ est constante. Maintenant, si $f \in \mathcal{M}_2$, la formule $\frac{k}{12}$ implique

$$6v_\infty + 6\sum_\tau v_\tau(f) + 3v_i(f) + 2v_\rho(f) = 1$$

et l'équation $6a + 3b + 2c = 1$ n'a pas de solution $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$. □

D'autre part, le résultat suivant, dont on pourrait se passer dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se généralise aisément au cas des formes modulaires avec système multiplicatif et donne une majoration de la dimension ([26, Annexe]).

***Proposition* 35–** *Si $k > 0$, alors*

$$\dim \mathcal{M}_k \leq 1 + \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor.$$

Remarque 36- La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x : le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Démonstration de la proposition 35. On note $\mathrm{N} = 2 + \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor$. Par l'absurde, on suppose que $\dim \mathcal{M}_k \geq \mathrm{N}$ ce qui implique l'existence d'une famille libre $\{f_i\}_{1 \leq i \leq \mathrm{N}}$ de N éléments de $\mathcal{M}_k$. Choisissons τ à l'intérieur de $\mathcal{F}$ (en particulier τ est différent de i et ρ). Le système

$$\begin{cases} f_1(\tau)x_1 + \cdots + f_\mathrm{N}(\tau)x_\mathrm{N} = 0 \\ f_1'(\tau)x_1 + \cdots + f_\mathrm{N}'(\tau)x_\mathrm{N} = 0 \\ \vdots \\ f_1^{(\mathrm{N}-2)}(\tau)x_1 + \cdots + f_\mathrm{N}^{(\mathrm{N}-2)}(\tau)x_\mathrm{N} = 0 \end{cases}$$

a plus d'équations que d'inconnues et admet au moins $(0,\ldots,0)$ comme solution. Il admet donc une infinité de solutions, on choisit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq \mathrm{N}}$l'une d'entre elle non nulle . Par liberté de la famille $\{f_i\}_{1\leq i\leq \mathrm{N}}$, la fonction

$$f=\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\alpha_i f_i$$

n'est pas la fonction constante nulle et elle s'annule à l'ordre au moins $\mathrm{N}-1$ en τ. On a donc

$$v_\tau(f)\geq 1+\left\lfloor\frac{k}{12}\right\rfloor>\frac{k}{12}$$

ce qui contredit la formule $\frac{k}{12}$. □

Pour les petites valeurs de k, on a donc des espaces de dimension 1 au plus. Il nous faut maintenant montrer l'existence de formes modulaires de poids k pour tout entier pair $k\geq 4$.

***Définition* 37–** *Soit $k\geq 4$ un entier pair. On appelle* série d'Eisenstein *de poids k la série*

$$\mathrm{G}_k(z)=\frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(mz+n)^k}.$$

***Proposition* 38–** *La série G_k est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{H}$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Puisque G_k est une série de fonctions holomorphes, il suffit de montrer la convergence normale.

Montrons que si $\mathrm{K}>0$ et $\mathrm{T}>0$ sont deux réels, il existe $\varepsilon>0$ tel que, pout tout $(m,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et tout $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|\mathrm{Re}\,z|\leq\mathrm{K}$ et $\mathrm{Im}\,z\geq\mathrm{T}$, on a $|mz+n|\geq\varepsilon\sqrt{m^2+n^2}$. Le résultat est évidemment vrai pour $(m,n)=(0,0)$. Montrons le pour (m,n) tel que $m^2+n^2=1$. On a $|mz+n|\geq|m(x+i\mathrm{T})+n|$ et la fonction $(m,n,x)\mapsto|m(x+i\mathrm{T})+n|$ est continue sur le compact $\{(m,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon\ m^2+n^2=1\}\times[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$ où elle atteint son minimum strictement positif qu'on note ε. Passons maintenant au cas général lorsque $(m,n)\neq(0,0)$. Posant $\mathrm{M}=m/\sqrt{m^2+n^2}$ et $\mathrm{N}=n/\sqrt{m^2+n^2}$, on a $\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2=1$ et donc, grâce au cas précédent $|\mathrm{M}z+\mathrm{N}|\geq\varepsilon$. En multipliant cette inégalité par $\sqrt{m^2+n^2}$, on trouve $|mz+n|\geq\varepsilon\sqrt{m^2+n^2}$. [e]

Il existe alors $\mathrm{C}>0$ telle que pour tout $z\in\mathcal{H}$ vérifiant $|\mathrm{Re}\,z|\leq\mathrm{K}$ et $\mathrm{Im}\,z\geq\mathrm{T}$, on a

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{|mz+n|^k}\leq\mathrm{C}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}.$$

En sommant séparément sur les couples ayant $m=0$ ou $n=0$, on obtient :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}=4\zeta(k)+4\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}.$$

e. Ce type de raisonnement s'appelle un raisonnement par *homogénéité*.

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+n^2)^{k/2}} + \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+1)^{k/2}} + \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}\\
&\leq 2\zeta(k) + \sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}\\
&\leq 2\zeta(k) + \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{k/2}}\\
&\leq 2\zeta(k) + \int_{\mathbb{R}^2\setminus \mathrm{D}(0,1)}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{k/2}}\\
&\leq 2\zeta(k) + \int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{r=1}^{+\infty}\frac{r\,\mathrm{d}r}{r^k}
\end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant finie puisque $k>2$. □

Les séries d'Eisenstein admettent des développements de Fourier que l'on calcule maintenant. Les nombres de Bernoulli B_k sont définis en annexe B.4.

***Proposition* 39–** *Pour $k \geq 4$ pair, on a*

$$\mathrm{G}_k(z) = -\frac{\mathrm{B}_k}{2k} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_{k-1}(n)e^{2i\pi nz}.$$

Démonstration. En posant $q = e^{2i\pi z}$ pour $z \in \mathcal{H}$, on a

$$\pi\operatorname{cotan}(\pi z) = i\pi - \frac{2i\pi}{1-q} = i\pi - 2i\pi\sum_{d=0}^{+\infty}q^d$$

donc, en utilisant l'équation (B.14),

$$\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+m}+\frac{1}{z-m}\right) = i\pi - 2i\pi\sum_{d=0}^{+\infty}\exp(2i\pi dz).$$

En dérivant cette équation $k-1$ fois, on obtient

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z+m)^k} = \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{d=1}^{+\infty}d^{k-1}\exp(2i\pi dz).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!}\mathrm{G}_k(z) &= 2\zeta(k) + 2\sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\ell z+n)^k} \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty} d^{k-1}\exp(2i\pi d\ell z) \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{d>0\\ d\mid n}} d^{k-1}\right)\exp(2i\pi nz).
\end{aligned}$$

On termine grâce à la relation (B.4). □

Remarque 40 - La normalisation de G_k est celle utilisée lorsqu'on veut un développement de Fourier ayant 1 comme coefficient de $e^{2i\pi z}$. En posant $q = e^{2i\pi z}$, on a

$$\mathrm{G}_4(z) = \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + 252q^6 + 344q^7 + 585q^8 + \mathrm{O}(q^9)$$

$$\mathrm{G}_6(z) = -\frac{1}{504} + q + 33q^2 + 244q^3 + 1057q^4 + 3126q^5 + 8052q^6 + 16808q^7 + 33825q^8 + \mathrm{O}(q^9)$$

$$\mathrm{G}_8(z) = \frac{1}{480} + q + 129q^2 + 2188q^3 + 16513q^4 + 78126q^5 + 282252q^6 + 823544q^7 + 2113665q^8 + \mathrm{O}(q^9)$$

$$\mathrm{G}_{10}(z) = -\frac{1}{264} + q + 513q^2 + 19684q^3 + 262657q^4 + 1953126q^5 + 10097892q^6 + 40353608q^7 + 134480385q^8 + \mathrm{O}(q^9)$$

$$\mathrm{G}_{12}(z) = \frac{691}{65520} + q + 2049q^2 + 177148q^3 + 4196353q^4 + 48828126q^5 + 362976252q^6 + 1977326744q^7 + 8594130945q^8 + \mathrm{O}(q^9).$$

Un intérêt de la normalisation choisie pour G_k est que la fonction $\widehat{\mathrm{G}_k}$ (qui est donc σ_{k-1}) est multiplicative (voir l'annexe 1.3).

On a alors le résultat suivant qui justifie l'introduction des séries d'Eisenstein.

***Proposition* 41–** *Pour $k \geq 4$ pair, la série d'Eisenstein G_k est une forme modulaire non parabolique de poids k sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. L'holomorphie a déjà été montrée, l'holomorphie en l'infini et la 1-périodicité résultent du développement de Fourier et $\widehat{\mathrm{G}_k}(0) \neq 0$ car $\mathrm{B}_k \neq 0$. Il reste à montrer la transformation par S. On a

$$\begin{aligned}
z^{-k}\mathrm{G}_k\left(-\frac{1}{z}\right) &= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(-m+nz)^k} \\
&= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k}\sum_{(q,r)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(qz+r)^k} \\
&= \mathrm{G}_k(z).
\end{aligned}$$

□

On en déduit le

***Théorème* 42–** *Pour $k \geq 4$, on a*

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{S}_k \oplus \mathbb{C}\mathrm{G}_k.$$

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{S}_k + \mathbb{C}\mathrm{G}_k \subset \mathcal{M}_k$ est conséquence de $\mathrm{G}_k \in \mathcal{M}_k$. Soit maintenant $f \in \mathcal{M}_k$. Alors, comme $\widehat{\mathrm{G}_k}(0) \neq 0$, on a

$$f - \frac{\widehat{f}(0)}{\widehat{\mathrm{G}_k}(0)}\mathrm{G}_k \in \mathcal{S}_k$$

d'où $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{S}_k + \mathbb{C}\mathrm{G}_k$. Il résulte de $\mathrm{G}_k \notin \mathcal{S}_k$ que la somme est directe. □

On peut alors calculer les structures de $\mathcal{M}_k$ et $\mathcal{S}_k$ pour les premières valeurs de k.

***Théorème* 43–** *Si $k \in \{4,6,8,10,14\}$ alors $\mathcal{M}_k = \mathbb{C}\mathrm{G}_k$ et $\mathcal{S}_k = \{0\}$.*

Pour $k \in \{4,6,8,10\}$, la proposition 35 implique $\dim \mathcal{M}_k \leq 1$. Grâce à la proposition 41, on a donc $\mathcal{M}_k = \mathbb{C}\mathrm{G}_k$. Pour $k = 14$, on sait grâce à la proposition 41 que $\dim \mathcal{M}_{14} \geq 1$. Mais, la formule $\frac{k}{12}$ s'écrit alors

$$6m + 3v_i + 2v_\rho = 7$$

avec $m \in \mathbb{N}$ qui n'a comme seule solution que $v_i = 1$, $v_\rho = 2$ et $m = 0$. Ainsi, les formes non nulles de $\mathcal{M}_{14}$ s'annulent toutes aux mêmes points (i et ρ) aux mêmes ordres. Le quotient de deux telles formes est donc toujours holomorphe sur $\mathcal{H}$ et en l'infini et est une forme modulaire de poids 0, c'est-à-dire une constante. Il en résulte que $\dim \mathcal{M}_{14} = 1$ puis $\mathcal{M}_{14} = \mathbb{C}\mathrm{G}_{14}$. Dans tous ces cas, le théorème 42 implique $\mathcal{S}_k = \{0\}$.

On construit maintenant une forme parabolique. Pour cela, il est pratique de renormaliser les séries d'Eisenstein pour le coefficient de Fourier d'ordre 0 soit 1. On pose donc

$$\mathrm{E}_k = -\frac{2k}{\mathrm{B}_k}\mathrm{G}_k.$$

On a alors

$$\mathrm{E}_k(z) = 1 - \frac{2k}{\mathrm{B}_k}\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_{k-1}(n)e^{2i\pi nz}. \tag{2.6}$$

En particulier, posant $q = e^{2i\pi z}$, on a

$$\mathrm{E}_4(z) = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 + 60480q^6 + 82560q^7 + \mathrm{O}(q^8)$$

$$\mathrm{E}_6(z) = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 - 1575504q^5 - 4058208q^6 - 8471232q^7 + \mathrm{O}(q^8)$$

$$\mathrm{E}_8(z) = 1 + 480q + 61920q^2 + 1050240q^3 + 7926240q^4 + 37500480q^5 + 135480960q^6 + 395301120q^7 + \mathrm{O}(q^8)$$

$$\mathrm{E}_{10}(z) = 1 - 264q - 135432q^2 - 5196576q^3 - 69341448q^4 - 515625264q^5 - 2665843488q^6 - 10653352512q^7 + \mathrm{O}(q^8)$$

$$\mathrm{E}_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691}q + \frac{134250480}{691}q^2 + \frac{11606736960}{691}q^3 + \frac{274945048560}{691}q^4 + \frac{3199218815520}{691}q^5 + \frac{23782204031040}{691}q^6 + \mathrm{O}(q^7)$$

$$\mathrm{E}_{14}(z) = 1 - 24q - 196632q^2 - 38263776q^3 - 1610809368q^4 - 29296875024q^5 - 313495116768q^6 - 2325336249792q^7 + \mathrm{O}(q^8).$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des propositions 41 et 25.

***Théorème* 44–** *La fonction*

$$\Delta = \frac{1}{1728}(\mathrm{E}_4^3 - \mathrm{E}_6^2)$$

est une forme parabolique non nulle de poids 12 *sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Remarque 45 - Que cette fonction est la même que la fonction Δ définie dans l'introduction sera démontré à la proposition 137.

Remarque 46 - Toujours en posant $q = e^{2i\pi z}$, on calcule

$$\Delta(z) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + \mathrm{O}(q^8).$$

Puisque Δ s'annule en l'infini (comme toute forme parabolique), on déduit de la formule $\frac{k}{12}$ le résultat suivant.

***Proposition* 47–** *La fonction* Δ *ne s'annule qu'en l'infini où elle s'annule à l'ordre* 1.

Pour $k \geq 12$, si $f \in \mathcal{S}_k$, la fonction $\frac{f}{\Delta}$ est holomorphe sur $\mathcal{H}$ et en l'infini et elle est modulaire de poids $k-12$. On en déduit une relation de récurrence entre les espaces de formes modulaires.

***Théorème* 48–** *Pour* $k \geq 12$,

$$\mathcal{S}_k = \Delta \mathcal{M}_{k-12}.$$

Compte-tenu du théorème 34, on a en particulier le corollaire suivant.

***Corollaire* 49–**

$$\mathcal{S}_{12} = \mathbb{C}\Delta.$$

Finalement, on peut calculer la dimension de $\mathcal{M}_k$ pour toutes les valeurs paires $k \geq 0$.

***Théorème* 50–** *Si* $k \geq 0$ *est pair,*

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{k}{12} \right\rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \left\lfloor \dfrac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$\mathrm{D}(k) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{k}{12} \right\rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \left\lfloor \dfrac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $\mathrm{D}(k+12) = \mathrm{D}(k)+1$ pour tout entier $k \geq 0$. Le théorème 48 implique $\dim \mathcal{S}_{k+12} = \dim \mathcal{M}_k$ et le théorème 42 implique $\dim \mathcal{S}_{k+12}+1 = \dim \mathcal{M}_{k+12}$. On en déduit $\dim \mathcal{M}_{k+12} = \dim \mathcal{M}_k + 1$. Les suites $(\mathrm{D}(2j))_{j\geq 1}$ et $(\dim \mathcal{M}_{2j})_{j \geq 1}$ satisfont donc la même relation de récurrence. Elles coïncident en $2j = 0$ et $2j = 2$ grâce au théorème 34 et pour toutes les valeurs $2j \in \{4, 6, 8, 10\}$ grâce au théorème 43. Les deux suites sont donc égales. □

Les calculs de la dimension de $\mathcal{M}_k$ et des développements de Fourier des séries d'Eisenstein impliquent d'intéressantes relations arithmétiques. On va donner deux exemples.

1. Partant de $\mathrm{G}_4^2 \in \mathcal{M}_8$, $\mathrm{G}_8 \in \mathcal{M}_8$ et puisque $\dim \mathcal{M}_8 = 1$, on a

$$\mathrm{G}_8 = \lambda \mathrm{G}_4^2 \quad \text{avec } \lambda = \frac{\widehat{\mathrm{G}_8}(0)}{\widehat{\mathrm{G}_4^2}(0)} = 120.$$

En calculant ensuite le développement de Fourier complet de G_4^2 et en comparant avec celui de G_8, on obtient

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n)\sigma_3(n-m)$$

pour tout entier $n \geq 1$.

2. L'espace $\mathcal{M}_{16}$ est de dimension 2 et $\mathcal{M}_{16} = \mathcal{S}_{16} \oplus \mathbb{C}\mathrm{G}_{16}$. L'espace $\mathcal{S}_{16}$ est donc de dimension 1. Notons Δ_{16} la forme parabolique qui engendre $\mathcal{S}_{16}$ dont le premier coefficient de Fourier non nul vaut 1 (d'après la formule $\frac{k}{12}$, cette forme ne s'annule à l'infini qu'à l'ordre 1, donc ce coefficient est $\widehat{\Delta_{16}}(1)$). On a $\mathrm{E}_8^2 \in \mathcal{M}_{16}$ et $\mathrm{E}_{16} \in \mathcal{M}_{16}$. De plus, la comparaison des coefficients de Fourier d'ordre 1 implique $\mathrm{E}_8^2 \neq \mathrm{E}_{16}$. Ainsi, puisque $\widehat{\mathrm{E}_8^2}(0) = \widehat{\mathrm{E}_{16}}(0) = 1$, on a

$$\mathrm{E}_{16} - \mathrm{E}_8^2 \in \mathcal{S}_{16} \setminus \{0\}$$

et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\Delta_{16} = \lambda(\mathrm{E}_{16} - \mathrm{E}_8^2) \in \mathcal{S}_{16}$$

Puisque $\widehat{\Delta_{16}}(1) = 1$, on peut calculer λ et obtenir

$$\Delta_{16} = \frac{3617}{3456000}(\mathrm{E}_8^2 - \mathrm{E}_{16}).$$

En particulier,

$$\Delta_{16}(z) = q + 216q^2 - 3348q^3 + 13888q^4 + 52110q^5 - 723168q^6 + \mathrm{O}(q^7)$$

avec $q = e^{2i\pi z}$. On aurait aussi pu utiliser E_4^4 et $\mathrm{E}_4\mathrm{E}_6^2$ pour trouver

$$\Delta_{16} = \frac{1}{1728}(\mathrm{E}_4^4 - \mathrm{E}_4\mathrm{E}_6^2) = \Delta \mathrm{E}_4. \tag{2.7}$$

On peut aisément retrouver (2.7) à l'aide de Δ en constatant que $\Delta\mathrm{E}_4 \in \mathcal{S}_{16}$.

L'espace des formes paraboliques peut être muni d'une structure d'espace hermitien. Si f et g sont dans $\mathcal{S}_k$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g}(z) y^{k-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (z = x + iy).$$

La convergence de l'intégrale résulte de la majoration (2.5). On montre maintenant qu'on peut remplacer dans la définition l'ensemble $\mathcal{F}$ par n'importe laquelle de ses images par une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. À cette fin, rappelons que si D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $\varphi\colon \mathrm{D} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est holomorphe en $a \in \mathrm{D}$, alors les équation de Cauchy-Riemann sont

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial x}(a) = \frac{\partial \operatorname{Im}\varphi}{\partial y}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial y}(a) = -\frac{\partial \operatorname{Im}\varphi}{\partial x}(a)$$

et on a

$$\varphi'(a) = \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial x}(a) + i\frac{\partial \operatorname{Im}\varphi}{\partial x}(a).$$

Il en résulte que le jacobien

$$\operatorname{Jac}[\varphi](a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{x}(a) & \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{y}(a) \\ \frac{\partial \operatorname{Im}\varphi}{x}(a) & \frac{\partial \operatorname{Im}\varphi}{y}(a) \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\det \operatorname{Jac}[\varphi](a) = \left|\varphi'(a)\right|^2$. Ainsi,

$$\int_{\gamma\mathcal{F}} \mathrm{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{F}(\varphi(x,y))\left|\varphi'(x+iy)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

On choisit $\varphi(z) = \gamma z = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Grâce à (2.2), c'est un difféomorphisme C^1 de $\mathcal{F}$ dans $\gamma\mathcal{F}$ et

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathcal{F}} f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}|cz+d|^{-2k}\frac{(\operatorname{Im}\gamma z)^{k-2}}{|cz+d|^{-2k+4}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathcal{F}} f(\varphi(z))\overline{g(\varphi(z))}(\operatorname{Im}\varphi(z))^{k-2}\left|\varphi'(z)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\gamma\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On montre aisément que

$$\begin{aligned}&\langle f, f\rangle \geq 0 \\ &\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0 \\ &\overline{\langle f, g\rangle} = \langle g, f\rangle.\end{aligned}$$

On appelle l'application $\langle\ ,\ \rangle$ le *produit scalaire de Petersson*.

***Proposition* 51–** *Pour tout entier pair $k > 0$, l'espace $\mathcal{S}_k$ acquiert une structure d'espace hermitien grâce au produit scalaire de Petersson.*

On va maintenant construire une généralisation des séries d'Eisenstein dont on va montrer qu'elles engendrent l'espace de toutes les formes modulaires. Afin d'exprimer leur développement de Fourier, on aura besoin de deux nouveaux objets. Si m, n et $c \geq 1$ sont des entiers, la *somme de Kloosterman* $\mathrm{Kl}(m,n;c)$ est définie par

$$\mathrm{Kl}(m,n;c) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} \exp\left(2i\pi \frac{mx + n\{x,c\}}{c}\right)$$

où $\{x,c\}$ désigne l'inverse de x modulo c. Le choix des représentants des éléments de $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$ est sans conséquence. Un résultat difficile de Deligne implique la majoration

$$|\mathrm{Kl}(m,n;c)| \leq \sqrt{(m,n,c)}\, 2^{\omega(c)} \sqrt{c} \tag{2.8}$$

où $\omega(c)$ est le nombre de diviseurs premiers (distincts) de c. On trouvera plus de renseignements en annexe C.4. D'autre part, on définit pour $\nu \in \mathbb{N}$, la *fonction* J *de Bessel* d'ordre ν par

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}.$$

La série est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$ et elle définit donc une fonction entière. Pour tout entier $\nu \geq 0$ et tout réel x on a $|\mathrm{J}_\nu(x)| \leq \min\left(1, \frac{|x|^\nu}{2^\nu \nu!}\right)$ (voir l'annexe B.13).

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note e_m la fonction $z \mapsto \exp(2i\pi mz)$ et $e = e_1$. On définit alors la *série de Poincaré* d'ordre m (et de poids $k \geq 0$ pair) par

$$\mathrm{P}_m(z) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k} e_m(\mathrm{M}[c,d]z).$$

La somme se fait sur tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ d'entiers premiers entre eux et, étant donné (c,d) un tel couple, $\mathrm{M}[c,d]$ désigne une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme

$$\mathrm{M}[c,d] = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le choix des coefficients supérieurs, donnés par le théorème de Bezout, n'influe pas sur le calcul de P_m. La série définissant P_m est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{H}$: en effet,

$$|\mathrm{P}_m(z)| \leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mz+n|^k}.$$

Elle définit donc une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$. Puisque

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_k(z) &= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)=\ell}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\ell^k} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(cz+d)^k} \\
&= \frac{\mathrm{B}_k}{2k}\mathrm{P}_0(z)
\end{aligned}$$

ces séries apparaissent bien comme une généralisation des séries d'Eisenstein.

***Lemme* 52–** *Soit* $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*, alors*

$$(\gamma z+\delta)^{-k}\mathrm{P}_m\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = \mathrm{P}_m(z).$$

Démonstration. On note $\mathrm{M} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$. Alors

$$\mathrm{P}_m(\mathrm{M}z) = \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1} (c\mathrm{M}z+d)^{-k} e_m(\mathrm{M}[c,d]\mathrm{M}z).$$

On a $\mathrm{M}[c,d]\mathrm{M} = \mathrm{M}[\alpha c+\gamma d, \beta c+\delta d]$ et l'application

$$\begin{array}{ccc}
\{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 :\, (c,d)=1\} & \to & \{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 :\, (c,d)=1\} \\
(c,d) & \mapsto & (\alpha c+\gamma d, \beta c+\delta d)
\end{array}$$

est bijective d'inverse

$$\begin{array}{ccc}
\{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 :\, (c,d)=1\} & \to & \{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 :\, (c,d)=1\} \\
(c,d) & \mapsto & (\delta c-\gamma d, \alpha d-\beta c)
\end{array}$$

comme on le voit en calculant $\mathrm{M}[c,d]\mathrm{M}^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_m(\mathrm{M}z) &= \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}\left((\delta c-\gamma d)\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+\alpha d-\beta c\right)^{-k} e_m(\mathrm{M}[c,d]z) \\
&= \frac{1}{2}(\gamma z+\delta)^k \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-k} e_m(\mathrm{M}[c,d]z).
\end{aligned}$$

□

On calcule ensuite le développement de Fourier de P_m pour $m>0$. *Via* la bijection

$$\begin{array}{ccc}
\{(c,q,r)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} :\, 0\le r<|c|, (c,r)=1\} & \to & \{(c,d)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z} :\, (c,d)=1\} \\
(c,q,r) & \mapsto & (c, cq+r)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\sum_{(c,d)=1} \varphi(c,d) &= \varphi(0,-1)+\varphi(0,1)+\sum_{c>0}\sum_{\substack{r=0\\(c,r)=1}}^{c-1}\sum_{q\in\mathbb{Z}}[\varphi(c,cq+r)+\varphi(-c,-cq+r)]\\ &= \varphi(0,-1)+\varphi(0,1)+\sum_{c>0}\sum_{\substack{r=0\\(c,r)=1}}^{c-1}\sum_{q\in\mathbb{Z}}[\varphi(c,cq+r)+\varphi(-c,cq+r)]\end{aligned}$$

pour toute application $\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ telle que les sommes convergent absolument. Puisque k est pair et $-\mathrm{I}$ agit trivialement, on a

$$\sum_{\substack{r=0\\(c,r)=1}}^{c-1}\sum_{q\in\mathbb{Z}}\frac{e_m(\mathrm{M}[-c,cq+r]z)}{(-cz+cq+r)^k} = \sum_{\substack{r=0\\(c,r)=1}}^{c-1}\sum_{q\in\mathbb{Z}}\frac{e_m(\mathrm{M}[-c,-cq-r]z)}{(c(z-q)-r)^k}.$$

Par le changement de variable $(q,r)\mapsto(n=-q-1, d=c-r)$ on obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{r=0\\(c,r)=1}}^{c-1}\sum_{q\in\mathbb{Z}}\frac{e_m(\mathrm{M}[-c,cq+r]z)}{(-cz+cq+r)^k} &= \sum_{\substack{d=1\\(c,d)=1}}^{c}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e_m(\mathrm{M}[c,cq+d]z)}{(c(z+n)+d)^k}\\ &= \sum_{\substack{d=0\\(c,d)=1}}^{c-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e_m(\mathrm{M}[c,cn+d]z)}{(c(z+n)+d)^k}.\end{aligned}$$

En utilisant (2.1) et en remarquant que si $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ alors a et d sont inverses l'un de l'autre modulo c, on obtient

$$\mathrm{P}_m(z) = e_m(z)+\sum_{c=1}^{+\infty}\sum_{\substack{d=0\\(c,d)=1}}^{c-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}[c(z+n)+d]^{-k}e_m\left(\frac{\{d,c\}}{c}-\frac{1}{c[c(z+n)+d]}\right)$$

où $\{d,c\}$ est n'importe quel représentant de l'inverse de d modulo c. On note

$$\mathrm{I}_{c,d}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}[c(z+n)+d]^{-k}e_m\left(\frac{\{d,c\}}{c}-\frac{1}{c[c(z+n)+d]}\right).$$

Grâce à la formule de Poisson, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{c,d}(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}[c(z+t)+d]^{-k}e_m\left(\frac{\{d,c\}}{c}-\frac{1}{c[c(z+t)+d]}-\frac{n}{m}t\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}e\left(nz+\frac{m\{d,c\}+nd}{c}\right)\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy}(cu)^{-k}e\left(-\frac{m}{c^2u}-nu\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

pour n'importe quelle valeur de $y > 0$ grâce au théorème des résidus. En particulier, $y \to +\infty$ implique

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cu)^{-k} e\left(-\frac{m}{c^2u} - nu\right) \mathrm{d}u = 0$$

pour $n < 0$. Si $n > 0$, le changement de variable $t = -2i\pi nu$ conduit à

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cu)^{-k} e\left(-\frac{m}{c^2u} - nu\right) \mathrm{d}u = \left(\frac{2i\pi}{c}\right)^k n^{k-1} \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{2\pi ny-i\infty}^{2\pi ny+i\infty} t^{-k} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) \mathrm{d}t$$

avec $z = 4\pi\sqrt{mn}/c$. Puisque

$$\mathrm{J}_{k-1}(z) = \frac{(z/2)^{k-1}}{2i\pi} \int_{2\pi ny-i\infty}^{2\pi ny+i\infty} t^{-k} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) \mathrm{d}t$$

(voir le lemme 295), on obtient le résultat suivant.

***Proposition* 53–** *Pour tout $m > 0$,*

$$\mathrm{P}_m(z) = e^{2i\pi mz} + 2i^k\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{(k-1)/2} \sum_{c=1}^{+\infty} \left[\frac{\mathrm{Kl}(m,n;c)}{c} \mathrm{J}_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right] e^{2i\pi nz}.$$

Autrement dit,

$$\widehat{\mathrm{P}_m}(n) = \begin{cases} 2i^k\pi \left(\dfrac{n}{m}\right)^{(k-1)/2} \displaystyle\sum_{c=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Kl}(m,n;c)}{c} \mathrm{J}_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) & \text{si } m \neq n\,; \\ 1 + 2i^k\pi \displaystyle\sum_{c=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Kl}(m,m;c)}{c} \mathrm{J}_{k-1}\left(\frac{4\pi m}{c}\right) & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Remarque 54 - La proposition précédente montre en particulier que les coefficients de Fourier des séries de Poincaré sont réels.

Le résultat suivant est alors conséquence du lemme 52 et de la proposition 53.

***Proposition* 55–** *Si $m > 0$ alors P_m est une forme parabolique de poids k.*

***Corollaire* 56–** *Si $k \in \{2, 4, 6, 8, 10, 14\}$ alors*

$$\sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \frac{e_m(\mathrm{M}[c,d]z)}{(cz+d)^k} = 0$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{H}$.

En particulier, en considérant les coefficients de Fourier, on a

***Corollaire* 57–** *Si $k \in \{2,4,6,8,10,14\}$ alors*

$$\frac{2\pi}{i^k}\sum_{c=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{Kl}(m,n;c)}{c}\mathrm{J}_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)=\delta(m=n)$$

pour tout m et n dans $\mathbb{N}^*$.

Remarque 58 - Je ne connais pas de preuve directe de ces égalités.

***Corollaire* 59–** *Si m et n, sont des entiers strictement positifs alors*

$$\widehat{\mathrm{P}_m}(n)=m^{1-k}\sum_{d\mid(m,n)}d^{k-1}\widehat{\mathrm{P}_1}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Démonstration. La relation de Selberg sur les sommes de Kloosterman (voir en annexe la proposition 317) conduit à

$$\widehat{\mathrm{P}_m}(n)-\delta(m=n)=m^{1-k}\sum_{d\mid(m,n)}d^{k-1}\widehat{\mathrm{P}_1}\left(\frac{mn}{d^2}\right)-m^{1-k}\sum_{d\mid(m,n)}d^{k-1}\delta\left(1=\frac{mn}{d^2}\right).$$

Si d divise (m,n) vérifie $d^2=mn$ alors $d=m$ et $d=n$ donc

$$\delta(m,n)=m^{1-k}\sum_{d\mid(m,n)}d^{k-1}\delta\left(1=\frac{mn}{d^2}\right)$$

d'où le résultat. □

La proposition suivante rend très utiles les séries de Poincaré.

***Proposition* 60–** *Soit $f\in\mathcal{S}_k$ et $m>0$. Alors*

$$\langle f,\mathrm{P}_m\rangle=\frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}}\widehat{f}(m).$$

Démonstration. Soit $f\in\mathcal{S}_k$. Alors

$$\begin{aligned}\langle f,\mathrm{P}_m\rangle&=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}}y^kf(z)\sum_{(c,d)=1}(c\overline{z}+d)^{-k}e_m\left(-\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}\int_{\mathcal{F}}\mathrm{F}[\varphi(z)]|\varphi'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

avec $\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ et $\mathrm{F}(z)=y^{k-2}f(z)e_m(-\overline{z})$. Ainsi

$$\langle f,\mathrm{P}_m\rangle=\frac{1}{2}\int_{\bigcup_{(c,d)=1}\varphi^{-1}(\mathcal{F})}y^kf(z)e_m(-\overline{z})\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Notant

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \to & \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \colon (c,d) = 1\} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c,d). \end{array}$$

Ainsi,

$$\bigcup_{(c,d)=1} \varphi^{-1}(\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathrm{B}\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{F}$$

Or,

$$\bigcup_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{F} = \mathcal{H} \sqcup \mathcal{H}$$

est la copie de deux exemplaires de $\mathcal{H}$ (car $(-\gamma)\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}$ pour toute matrice $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$). On a donc

$$\bigcup_{\mathrm{B}\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} \colon 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\} \sqcup \{z \in \mathcal{H} \colon 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$$

et

$$\langle f, \mathrm{P}_m \rangle = \int_{y=0}^{+\infty} \int_{x=0}^{1} y^k f(z) e_m(-\overline{z}) \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Insérant le développement de Fourier de f, on déduit

$$\begin{aligned} \langle f, \mathrm{P}_m \rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) \int_0^1 e_{n-m}(x)\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} y^{k-2} e^{-2\pi(n+m)y}\,\mathrm{d}y \\ &= \widehat{f}(m) \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}}. \end{aligned}$$

□

***Corollaire* 61–** *L'espace $\mathcal{S}_k$ est engendré par les séries de Poincaré P_m avec $m > 0$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{S}_k$ est de dimension finie on a

$$\mathrm{Vect}\{\mathrm{P}_m,\, m \in \mathbb{Z}\}^{\perp} \oplus \mathrm{Vect}\{\mathrm{P}_m,\, m \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{S}_k.$$

Or la proposition 60 implique $\mathrm{Vect}\{\mathrm{P}_m,\, m \in \mathbb{Z}\}^{\perp} = \{0\}$. □

On va maintenant établir une formule de moyenne des coefficients de Fourier sur une base orthogonale de $\mathcal{S}_k$ appelée *formule de trace de Petersson* [f]. On désigne par H_k une base orthogonale de $\mathcal{S}_k$. On commence par établir le développement dans cette base des séries de Poincaré.

f. Ce terme ne pourra être expliqué qu'une fois introduits les opérateurs de Hecke.

***Proposition* 62–** *Soit $m>0$, on a*

$$\mathrm{P}_m = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{f\in \mathrm{H}_k} \frac{\widehat{f}(m)}{\|f\|^2} f.$$

Démonstration. L'orthogonalité de H_k implique

$$\mathrm{P}_m = \sum_{f\in \mathrm{H}_k} \frac{\langle \mathrm{P}_m, f\rangle}{\|f\|^2} f$$

et la proposition 60 permet de conclure. □

Le *coefficient harmonique* de $f\in \mathrm{H}_k$ est défini par

$$\omega_k(f) = \frac{(k-2)!}{4\pi^{k-1}\|f\|^2}.$$

***Corollaire* 63–** *Soit m et n deux entiers strictement positifs. On a*

$$\sum_{f\in \mathrm{H}_k} \omega_k(f)\frac{\widehat{f}(m)\widehat{f}(n)}{(mn)^{(k-1)/2}} = \delta(m=n) + 2i^k\pi\sum_{c=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{Kl}(m,n;c)}{c}\mathrm{J}_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right).$$

Démonstration. On calcule $\widehat{\mathrm{P}_m}(n)$ à l'aide de la proposition 62 et on compare le résultat obtenu avec la proposition 53. □

La formule de traces Petersson (corollaire 63) peut être vue comme une formule d'orthogonalité approchée des coefficients de Fourier des formes de H_k grâce au corollaire suivant. La fonction τ_3 est la fonction arithmétique définie pour tout entier $n\geq 1$ par $\tau_3(n) = \#\left\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3 : n = abc\right\}$. On a donc $\tau_3 = \sigma_0 * \mathbb{1}$.

***Corollaire* 64–** *Il existe $\mathrm{C}>0$ tel que pour tous entiers m et n et tout entier pair $k\geq 2$ on a*

$$\left|\sum_{f\in\mathcal{S}_k}\omega_k(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) - \delta(m=n)\right| \leq \mathrm{C}k^{-1/2}(mn)^{1/4}\tau_3((m,n))(\log k + \log(2mn)).$$

Démonstration. Il s'agit d'estimer

$$\mathrm{R}(k) = \sum_{c=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{Kl}(m,n;c)}{c}\mathrm{J}_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right).$$

On pose $\mathrm{K} = k-1$. La majoration de Deligne pour les sommes de Kloosterman (2.8) et les corollaires 292 et 294 impliquent

$$|\mathrm{R}(k)| \leq \sum_{c\leq \mathrm{X}}\frac{(m,n,c)2^{\omega(c)}}{\sqrt{c}} + \mathrm{X}^{\mathrm{K}}\sum_{c\geq \mathrm{X}}\frac{(m,n,c)2^{\omega(c)}}{c^{\mathrm{K}+1/2}}$$

avec $X = 2\pi\sqrt{mn}/(K!)^{1/K}$. On a

$$\sum_{c\leq X}\frac{(m,n,c)2^{\omega(c)}}{\sqrt{c}} \leq \sum_{d\mid(m,n)}\sqrt{d}\sum_{r\leq X/d}\frac{2^{\omega(rd)}}{\sqrt{r}}$$
$$\leq \sum_{d\mid(m,n)}\sqrt{d}\sigma_0(d)\sum_{r\leq X/d}\frac{\sigma_0(r)}{\sqrt{r}}$$

car $\omega(rd)\leq\omega(r)+\omega(d)$ et $2^{\omega}\leq\sigma_0$ (voir l'annexe C.1.2). Le corollaire 310 implique alors

$$\sum_{c\leq X}\frac{(m,n,c)2^{\omega(c)}}{\sqrt{c}} \leq c_0\sqrt{X}|\log X|\sum_{d\mid(m,n)}\sigma_0(d) = c_0\sqrt{X}|\log X|\tau_3\left((m,n)\right).$$

Le corollaire 311 implique

$$\sum_{c\geq X}\frac{(m,n,c)2^{\omega(c)}}{c^{K+1/2}} \leq c_1 X^{-K+1/2}|\log X|\tau_3\left((m,n)\right).$$

On a donc

$$|R(k)|\leq c_2\sqrt{X}|\log X|\tau_3\left((m,n)\right)\leq c_3\frac{(mn)^{1/4}\tau_3\left((m,n)\right)}{\sqrt{k}}\left(\log k+\log(2mn)\right).$$

□

2.2 Opérateurs de Hecke

2.2.1) Opérateurs de Hecke sur les fonctions périodiques

On note $\mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$, périodiques de période 1 et holomorphes en ∞. Toute fonction $f\in\mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ admet un développement de Fourier

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{2i\pi nz} \tag{2.9}$$

convergeant normalement sur tout compact de $\mathcal{H}$.

Définition 65– *Soit $p\in\mathcal{P}$. On définit l'application linéaire* $T_p\colon \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})\to\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathbb{C})$ *par*

$$T_pf(z)=p^{k-1}f(pz)+\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1}f\left(\frac{z+n}{p}\right).$$

Il faut remarquer qu'on oublie de marquer la dépendance en k dans la notation T_p. Si on veut insister sur cette dépendance, on note $T_{k,p}$. On appelle T_p le p^e *opérateur de Hecke*. Si $f\in\mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$, on voit aisément que T_pf est holomorphe sur $\mathcal{H}$.

***Lemme* 66–** *Si* $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$, *alors* $\mathrm{T}_p f$ *est périodique de période* 1.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_p f(z+1) &= p^{k-1} f(pz+p) + \frac{1}{p}\left(\sum_{n=0}^{p-1} f\left(\frac{z+n}{p}\right) - f\left(\frac{z}{p}\right) + f\left(\frac{z+p}{p}\right)\right)\\ &= \mathrm{T}_p f(z)\end{aligned}$$

en utilisant la périodicité de f. □

On peut alors calculer le développement de Fourier de $\mathrm{T}_p f$. On prouve aisément le résultat suivant.

***Lemme* 67–** *Soit p un nombre premier. Alors*

$$\mathrm{T}_p e_n = \begin{cases} p^{k-1} e_{np} + e_{n/p} & si\ p \mid n \\ p^{k-1} e_{np} & sinon \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On déduit alors aisément du développement (2.9) le résultat suivant.

***Proposition* 68–** *Si* $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$, *alors*

$$\widehat{\mathrm{T}_p f}(n) = \begin{cases} p^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{f}(np) & si\ p \mid n \\ \widehat{f}(np) & sinon \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 69 - Pour toute fonction $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$, on fait la convention $\widehat{f}(r) = 0$ si $r \notin \mathbb{Z}$. Le résultat de la proposition 68 s'énonce alors

$$\widehat{\mathrm{T}_p f}(n) = p^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{f}(np).$$

Par la suite, on fera cette convention sans la préciser.

***Corollaire* 70–** *Si* $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$, *alors* $\mathrm{T}_p f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$.

Si p et q sont premiers, on calcule $\mathrm{T}_q e_n$ grâce au lemme 67 puis $\mathrm{T}_p\mathrm{T}_q e_n$ par réapplication de ce même lemme. On obtient un résultat symétrique en p et q ce qui démontre que les opérateurs T_p et T_q commutent.

***Corollaire* 71–** *Si p et q sont deux nombres premiers, alors*

$$\mathrm{T}_p\mathrm{T}_q = \mathrm{T}_q\mathrm{T}_p.$$

***Lemme* 72–** *Soit* $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ *un vecteur propre non constant de tous les opérateurs de Hecke alors* $\widehat{f}(1) \neq 0$.

Démonstration. On suppose $T_p f = \lambda_p f$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $\widehat{f}(1) = 0$. De la proposition 68 appliquée à $n = 1$ on déduit $\widehat{f}(p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Par récurrence il résulte alors de la proposition 68 appliquée $n = p^{\alpha-1}$ que $\widehat{f}(p^\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \geq 1$. Ensuite, si $\widehat{f}(n) = 0$ et $p \nmid n$ la proposition 68 implique $\widehat{f}(pn) = 0$ puis cette même proposition avec $p^{\alpha-1}n$ au lieu de n donne $\widehat{f}(p^\alpha n) = 0$ pour tout $\alpha \geq 0$. Finalement par récurrence sur le nombre de facteurs premiers de n on a $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et f est constante. □

Définition 73– *Une fonction $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ est appelée* fonction de Hecke *si elle est vecteur propre non constante de tous les opérateurs de Hecke et si $\widehat{f}(1) = 1$.*

Remarque 74 - Si $g \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$, alors $\widehat{g}(1) \neq 0$ d'après le lemme 72. On construit donc à partir de g une fonction de Hecke par simple normalisation $f = g/\widehat{g}(1)$.

Exemple 75 - Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On va montrer que

$$T_p(G_k + \alpha) = \sigma_{k-1}(p)(G_k + \alpha).$$

Soit $n \geq 1$. Écrivons $n = p^\beta n'$ avec $(p, n') = 1$ et $\beta \geq 0$. On fait la convention $\sigma_{k-1}(r) = 0$ si $r \notin \mathbb{Z}$. D'après la proposition 68 on a

$$\begin{aligned}\widehat{T_p G_k}(n) = \widehat{T_p G_k}(p^\beta n') &= p^{k-1}\sigma_{k-1}(p^{\beta-1}n') + \sigma_{k-1}(p^{\beta+1}n') \\ &= \sigma_{k-1}(p)\sigma_{k-1}(p^\beta)\sigma_{k-1}(n') = \sigma_{k-1}(p)\sigma_{k-1}(n)\end{aligned}$$

en utilisant (1.8). Il en résulte que $T_p G_k = \sigma_{k-1}(p) G_k$. D'autre part $T_p \alpha = \alpha T_p e_0 = \alpha\sigma_{k-1}(p)$ d'après le lemme 67. Ainsi pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ la fonction $G_k + \alpha$ est une valeur propre de tous les opérateurs de Hecke et puisque $\widehat{G_k + \alpha}(1) = 1$ alors $G_k + \alpha$ est une fonction de Hecke. En particulier, $G_k - \widehat{G_k}(0)$ est une fonction de Hecke nulle en ∞.

L'intérêt des fonctions de Hecke est qu'on sait relier leurs coefficients de Fourier aux valeurs propres de opérateurs de Hecke, donnant ainsi une structure algébrique à ces coefficients de Fourier.

Proposition 76– *Si f est une fonction de Hecke, alors $T_p f = \widehat{f}(p) f$ pour tout nombre premier p.*

Démonstration. On a $T_p f = \lambda_p f$ avec $\lambda_p \in \mathbb{C}$, d'où $\widehat{T_p f}(1) = \lambda_p \widehat{f}(1) = \lambda_p$. Par la proposition 68, on a aussi $\widehat{T_p f}(1) = \widehat{f}(p)$. □

Les coefficients de Fourier d'ordres premiers des fonctions de Hecke sont déterminés par le spectre des opérateurs de Hecke. On va voir que c'est en fait le cas de tous les coefficients de Fourier.

Lemme 77– *Soit f une fonction de Hecke, p un nombre premier et n un entier naturel. Alors*

$$\widehat{f}(p)\widehat{f}(n) = \begin{cases} \widehat{f}(pn) + p^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) & \text{si } p \mid n \\ \widehat{f}(pn) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. De $\mathrm{T}_p f = \widehat{f}(p) f$ on déduit $\widehat{\mathrm{T}_p f}(n) = \widehat{f}(p)\widehat{f}(n)$ que l'on compare avec l'expression obtenue par la proposition 68. □

***Théorème* 78–** *Soit f une fonction de Hecke. Alors*

1. *pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout entier $\nu \geq 1$,*
$$\widehat{f}(p^{\nu+1}) = \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^{\nu}) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{\nu-1})\,;$$
2. *pour tous entiers positifs m et n premiers entre eux,*
$$\widehat{f}(mn) = \widehat{f}(m)\widehat{f}(n).$$

Démonstration. Le premier point résulte du lemme 77 en prenant $n = p^{\nu}$. On prouve le second point. Supposons d'abord que $m = p^{\nu}$. Si $\nu = 0$, le résultat vient de $\widehat{f}(1) = 1$. Si $\nu = 1$, il est conséquence du lemme 77. Supposons le résultat vrai pour tout $m = p^{\ell}$ avec $\ell \leq \nu$. Alors

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(p^{\nu+1})\widehat{f}(n) &= \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^{\nu})\widehat{f}(n) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{\nu-1})\widehat{f}(n) \quad \text{d'après le point 1}\\
&= \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^{\nu}n) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{\nu-1}n) \quad \text{d'après l'hypothèse}\\
&= \widehat{f}(p^{\nu+1}n) + p^{k-1}\widehat{f}(p^{\nu-1}n) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{\nu-1}n) \quad \text{d'après le lemme 77}\\
&= \widehat{f}(p^{\nu+1}n).
\end{aligned}$$

Par récurrence, le résultat est donc vrai dès que m est une puissance de nombre premier. Si $m \neq 1$, on écrit la décomposition de m en produit de nombres premiers distincts

$$m = \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{v_i}.$$

En écrivant $n_1 = \frac{m}{p_1^{v_1}}$, on a

$$\widehat{f}(m) = \widehat{f}(p_1^{v_1} n_1) = \widehat{f}(p_1^{v_1})\widehat{f}(n_1)$$

de sorte que par réitérations sur les facteurs premiers distincts de m, on a

$$\widehat{f}(m) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \widehat{f}(p^{v_p(m)}).$$

Montrons enfin le second point. On écrit

$$m = \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{v_i} \quad \text{et} \quad n = \prod_{i=\omega+1}^{\tau} p_i^{v_i}$$

les décompositions en facteurs premiers de m et n. Les facteurs premiers p_i sont tous distincts. On a alors

$$\widehat{f}(m)\widehat{f}(n) = \prod_{i=1}^{\tau} \widehat{f}\left(p_i^{v_i}\right) = \widehat{f}\left(\prod_{i=1}^{\tau} \widehat{f}\left(p_i^{v_i}\right)\right) = \widehat{f}(mn).$$

□

Le résultat suivant implique que les opérateurs de Hecke seront surtout utilisés sur les fonctions qui s'annulent à l'infini.

***Corollaire* 79–** *Soit* $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ *une fonction de Hecke (pour la famille* $\{\mathrm{T}_{k,p}\}_{p\in\mathcal{P}}$*) qui ne s'annule pas à l'infini. Alors, il existe* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$f = \alpha + \mathrm{G}_k.$$

Démonstration. D'apès le lemme 77, on a $\widehat{f}(p)\widehat{f}(0) = (1+p^{k-1})\widehat{f}(0)$ pour tout p. Ainsi $\widehat{f}(p) = \sigma_{k-1}(p)$. D'autre part, $\widehat{f}(1) = 1$ par définition. Le premier point du théorème 78 et le lemme 11 impliquent par récurrence $\widehat{f}(p^\nu) = \sigma_{k-1}(p^\nu)$ pour tout $\nu \geq 0$ puis le second point de ce théorème donne $\widehat{f}(n) = \sigma_{k-1}(n)$ pour tout $n \geq 1$. On a donc $f - \widehat{f}(0) = \mathrm{G}_k - \widehat{\mathrm{G}_k}(0)$ ce qui fournit le résultat avec $\alpha = \widehat{f}(0) - \widehat{\mathrm{G}_k}(0)$. □

On définit, pour toute fonction de Hecke f,

$$\lambda_f(n) = \frac{\widehat{f}(n)}{n^{(k-1)/2}}.$$

On va voir que la première relation du théorème 78 se traduit en relation remarquable sur λ_f faisant intervenir les polynômes de Tchebychef de seconde espèce (voir l'annexe A.4).

Soit alors $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ une fonction de Hecke. En posant $u_n = \lambda_f(p^n)$ et $v_n = \mathrm{X}_n\big(\lambda_f(p)\big)$, on a

$$v_{n+2} = \lambda_f(p)v_{n+1} - v_n$$

grâce à (A.3) évalué en $\lambda_f(p)$ et

$$u_{n+2} = \lambda_f(p)u_{n+1} - u_n$$

grâce au premier point du théorème 78. Puisque $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, on en déduit

$$\lambda_f(p^n) = \mathrm{X}_n\big(\lambda_f(p)\big) \tag{2.10}$$

pour tout $n \geq 0$. La relation de Clebsch-Gordan conduit alors a une intéressante formule de multiplicativité des coefficients de Fourier d'une fonction de Hecke.

***Proposition* 80–** *Soit* f *une fonction de Hecke. Pour tous entiers* $m \geq 1$ *et* $n \geq 1$*, on a*

$$\widehat{f}(m)\widehat{f}(n) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^*\\ d\mid(m,n)}} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Démonstration. Si m et n sont premiers entre eux, le résultat est donné par le point 2 du théorème 78. Soit p un nombre premier, $m = p^\alpha$ et $n = p^\alpha$, alors par (2.10), on a

$$\lambda_f(p^\alpha)\lambda_f(p^\beta) = \mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_\beta\big(\lambda_f(p)\big).$$

On utilise ensuite la formule de Clebsch-Gordan (lemme 207) pour obtenir

$$\begin{aligned}\lambda_f(p^\alpha)\lambda_f(p^\beta) &= \sum_{\gamma=0}^{\inf(\alpha,\beta)} \mathrm{X}_{\alpha+\beta-2\gamma}\big(\lambda_f(p)\big) = \sum_{\gamma=0}^{\inf(\alpha,\beta)} \lambda_f\left(p^{\alpha+\beta-2\gamma}\right)\\ &= \sum_{d\mid(p^\alpha,p^\beta)} \lambda_f\left(\frac{p^\alpha p^\beta}{d^2}\right)\end{aligned}$$

ce qui, après normalisation, donne le résultat énoncé. Supposons maintenant m et n quelconques. Alors,

$$\begin{aligned}\lambda_f(m)\lambda_f(n) &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \sum_{d_p\mid(p^{v_p(m)},p^{v_p(n)})} \lambda_f\left(\frac{p^{v_p(m)+v_p(n)}}{d_p^2}\right)\\ &= \sum_{d\mid(m,n)} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right)\end{aligned}$$

par multiplicativité de λ_f et bijectivité de l'application

$$\begin{array}{ccc}\left\{(d_p)_{p\in\mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{P}} : d_p \mid \left(p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)}\right)\right\} & \xrightarrow{\sim} & \{d\in\mathbb{N}^* : d \mid (m,n)\}\\ (d_p)_{p\in\mathcal{P}} & \mapsto & \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} d_p = \prod_{p\mid(m,n)} d_p.\end{array}$$

□

On note μ la fonction de Möbius (voir l'annexe 1.3.2).

***Corollaire* 81–** *Si $m\geq 1$ et $n\geq 1$ sont des entiers, alors*

$$\widehat{f}(mn) = \sum_{d\mid(m,n)} \mu(d)d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{m}{d}\right)\widehat{f}\left(\frac{n}{d}\right).$$

Démonstration. On calcule

$$\mathrm{S}(m,n) = \sum_{d\mid(m,n)} \mu(d)d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{m}{d}\right)\widehat{f}\left(\frac{n}{d}\right)$$

en reportant la valeur $\widehat{f}(m/d)\widehat{f}(n/d)$ tirée de la proposition 80. On trouve

$$\mathrm{S}(m,n) = \sum_{d\mid(m,n)} \mu(d)d^{k-1} \sum_{r\mid(m/d,n/d)} r^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2r^2}\right).$$

Le choix $\ell = rd$ conduit à

$$\mathrm{S}(m,n) = \sum_{\ell\mid(m,n)} \ell^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{mn}{\ell^2}\right)\sum_{d\mid\ell}\mu(d).$$

Par inversion de Möbius (lemme 9) on obtient

$$\mathrm{S}(m,n) = \widehat{f}(mn).$$

□

Remarque 82 - Ce lemme peut-être démontré sans utiliser la relation de Möbius mais en utilsant une relation sur les polynômes des Tchebychef (voir le lemme 208).

On utilise cette relation de multiplicativité pour construire des opérateurs de Hecke T_n pour tout entier $n \geq 0$.

***Définition* 83–** *Soit $n \geq 1$ un entier. Si $n = 1$, le premier opérateur de Hecke est $\mathrm{T}_1 = \mathrm{I}$. Si $n = p^\nu$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $\nu \geq 2$, l'opérateur de Hecke d'ordre p^ν est défini par la relation de récurrence*

$$\mathrm{T}_{p^\nu} = \mathrm{T}_p \circ \mathrm{T}_{p^{\nu-1}} - p^{k-1}\mathrm{T}_{p^{\nu-2}}.$$

Enfin, si $n > 1$, l'opérateur de Hecke d'ordre n est défini par

$$\bigcirc_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{T}_{p^{\nu_p(n)}} \quad \textit{si } n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}.$$

Remarque 84 - Soit p et q deux nombres premiers (éventuellement égaux). À partir de la définition de T_{p^ν} et du corollaire 71, on montre par récurrence sur ν que T_{p^ν} et T_q commutent pour tout ν. On déduit alors par récurrence sur ω que T_{p^ν} et T_{q^ω} commutent pour tout ω. Cette remarque justifie qu'on ne se préoccupe pas de l'ordre des compositions dans la définition de T_n. Elle montre aussi que T_n et T_m commutent.

La relation définissant T_{p^ν} implique

$$\frac{1}{p^{\nu(k-1)/2}}\mathrm{T}_{p^\nu} = \mathrm{X}_\nu\left(\frac{1}{p^{(k-1)/2}}\mathrm{T}_p\right).$$

Le raisonnement est identique à celui menant à (2.10).

Exemple 85 - On exprime T_{50} à l'aide de T_2 et T_5 :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{50} = \mathrm{T}_{25} \circ \mathrm{T}_2 = 5^{k-1}\mathrm{X}_2\left(\frac{1}{5^{(k-1)/2}}\mathrm{T}_5\right) \circ \mathrm{T}_2 &= 5^{k-1}\left(\frac{1}{5^{k-1}}\mathrm{T}_5 \circ \mathrm{T}_5 - \mathrm{I}\right) \circ \mathrm{T}_2 \\ &= \mathrm{T}_5 \circ \mathrm{T}_5 \circ \mathrm{T}_2 - 5^{k-1}\mathrm{T}_2.\end{aligned}$$

***Proposition* 86–** *Pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$ on a*

$$\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\mathrm{T}_{mn/d^2}.$$

Démonstration. On pose $\widetilde{\mathrm{T}}_n = \frac{1}{n^{(k-1)/2}}\mathrm{T}_n$. Pour tous m et n on a

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_m \circ \mathrm{T}_n &= \bigcirc_{p\in\mathcal{P}}\left(\mathrm{X}_{v_p(n)}\left(\widetilde{\mathrm{T}}_p\right)\circ \mathrm{X}_{v_p(m)}\left(\widetilde{\mathrm{T}}_p\right)\right)\\ &= \bigcirc_{p\in\mathcal{P}}\left(\mathrm{X}_{v_p(n)}\mathrm{X}_{v_p(m)}\left(\widetilde{\mathrm{T}}_p\right)\right)\\ &= \bigcirc_{p\in\mathcal{P}}\left(\sum_{d\mid\left(p^{v_p(m)},p^{v_p(n)}\right)}\widetilde{\mathrm{T}}_{p^{v_p(m)+v_p(n)}/d^2}\right)\end{aligned}$$

comme dans la preuve de la proposition 80. Le résultat en découle. □

***Proposition* 87–** *Si* $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ *alors*

$$\widehat{\mathrm{T}_m f}(n) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^*\\ d\mid(m,n)}} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

pour tous entiers m *et* n*.*

Démonstration. Si $m = 1$ le résultat est immédiat. Si m est un nombre premier c'est le résultat de la proposition 68. Supposons $m = p^\nu$ avec p premier et $\nu \geq 2$, et supposons le résultat vrai si on remplace m par $p^{\nu-1}$ et $p^{\nu-2}$. La définition de T_{p^ν} donne

$$\widehat{\mathrm{T}_{p^\nu} f}(n) = \mathrm{T}_p\widehat{\left(\mathrm{T}_{p^{\nu-1}} f\right)}(n) - p^{k-1}\widehat{\mathrm{T}_{p^{\nu-2}} f}(n).$$

La proposition 68 conduit alors à

$$\widehat{\mathrm{T}_{p^\nu} f}(n) = p^{k-1}\widehat{\mathrm{T}_{p^{\nu-1}} f}\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{\mathrm{T}_{p^{\nu-1}} f}(np) - p^{k-1}\widehat{\mathrm{T}_{p^{\nu-2}} f}(n)$$

et par hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{T}_{p^\nu} f}(n) = \delta(p\mid n)p^{k-1}\sum_{d\mid(p^{\nu-1},n/p)} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^{\nu-1}n/p}{d^2}\right) + \sum_{d\mid(p^{\nu-1},np)} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^{\nu-1}np}{d^2}\right)\\ - p^{k-1}\sum_{d\mid(p^{\nu-2},n)} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^{\nu-2}n}{d^2}\right).\end{aligned}$$

Dans les première et dernière sommes, on pose $\delta = pd$ pour trouver

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{T}_{p^\nu} f}(n) = \sum_{\substack{\delta\mid(p^\nu,n)\\ p\mid\delta}} \delta^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^\nu n}{\delta^2}\right) + \sum_{d\mid(p^{\nu-1},np)} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^\nu n}{d^2}\right)\\ - \sum_{\substack{\delta\mid\left(p^{\nu-1},np\right)\\ p\mid\delta}} \delta^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{p^\nu n}{\delta^2}\right).\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes se compensent, ne laissant que le terme provenant de $d = 1$ de la deuxième somme. On réintègre ce terme à la première somme pour déduire

$$\widehat{\mathrm{T}_{p^\nu} f}(n) = \sum_{\delta \mid (p^\nu, n)} \delta^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^\nu n}{\delta^2}\right).$$

Si m admet la décomposition en nombres premiers $m = p_1^{\nu_1} \cdots p_\omega^{\nu_\omega}$ alors

$$\widehat{\mathrm{T}_m f}(n) = \sum_{\substack{d_1 \mid (p_1^{\nu_1}, n) \\ \vdots \\ d_\omega \mid (p_\omega^{\nu_\omega}, n)}} (d_1 \cdots d_\omega)^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{(d_1 \cdots d_\omega)^2}\right).$$

Les entiers $p_1^{\nu_1}, \dots, p_\omega^{\nu_\omega}$ étant premiers entre eux, on obtient le résultat énoncé grâce à la bijection

$$\begin{array}{ccc} \left\{(d_1, \dots, d_\omega) \colon d_1 \mid \left(p_1^{\nu_1}, n\right), \dots, d_\omega \mid \left(p_\omega^{\nu_\omega}, n\right)\right\} & \to & \left\{d \colon d \mid \left(p_1^{\nu_1} \cdots p_\omega^{\nu_\omega}, n\right)\right\} \\ (d_1, \dots, d_\omega) & \mapsto & d_1 \cdots d_\omega. \end{array}$$

□

Remarque 88 - La proposition 87 implique en particulier

$$\widehat{\mathrm{T}_m f}(n) = \widehat{\mathrm{T}_n f}(m) \tag{2.11}$$

Enfin, par construction et grâce au théorème 78, si f est une fonction de Hecke, alors

$$\mathrm{T}_n f = \widehat{f}(n) f. \tag{2.12}$$

2.2.2) Opérateurs de Hecke sur les formes modulaires

On étudie maintenant le comportement des opérateurs de Hecke vis-à-vis des formes modulaires. L'espace des formes modulaires étant engendré par des séries de Poincaré, on commence par étudier l'image de ces séries.

***Proposition* 89–** *Pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$ on a*

$$m^{k-1} \mathrm{T}_n \mathrm{P}_m = n^{k-1} \mathrm{T}_m \mathrm{P}_n.$$

Démonstration. Grâce à la proposition 87 et au corollaire 59, on a

$$\widehat{\mathrm{T}_n \mathrm{P}_m}(\ell) = \frac{1}{m^{k-1}} \sum_{\substack{d \mid (n, \ell) \\ \delta \mid \left(m, \frac{n\ell}{d^2}\right)}} (d\delta)^{k-1} \widehat{\mathrm{P}_1}\left(\frac{mn\ell}{(d\delta)^2}\right).$$

La proposition 87 implique donc $m^{k-1} \widehat{\mathrm{T}_n \mathrm{P}_m}(\ell) = \widehat{\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_m \mathrm{P}_1}(\ell)$ puis

$$m^{k-1} \mathrm{T}_n \mathrm{P}_m = \mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_m \mathrm{P}_1. \tag{2.13}$$

On déduit alors le résultat de la commutativité des opérateurs de Hecke. □

***Théorème* 90–** *La restriction des opérateurs de Hecke* T_n *à* $\mathcal{M}_k$ *est à valeurs dans* $\mathcal{M}_k$*. La restriction des opérateurs de Hecke* T_n *à* $\mathcal{S}_k$ *est à valeurs dans* $\mathcal{S}_k$*.*

Démonstration. Il suffit de montrer les résultats pour les formes paraboliques puisque $\mathcal{M}_k = \mathbb{C}\mathrm{G}_k \oplus \mathcal{S}_k$ et G_k est un vecteur propre des opérateurs de Hecke. Pour tout $n \geq 1$, on a $\mathrm{T}_n\mathrm{P}_1 = n^{k-1}\mathrm{P}_n$ d'après la proposition 89 (et parce que T_1 est l'identité) donc $\mathrm{T}_n\mathrm{P}_1$ est une forme parabolique. L'équation (2.13) et la proposition 86 conduisent à

$$\mathrm{T}_n\mathrm{P}_m = m^{1-k} \sum_{d|(n,m)} d^{k-1}\mathrm{T}_{mn/d^2}\mathrm{P}_1$$

et donc $\mathrm{T}_n\mathrm{P}_m$ est parabolique pour tous entiers $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Puisque les séries de Poincaré engendre $\mathcal{S}_k$, cet espace est stable par les opérateurs de Hecke. □

On peut alors montrer qu'il existe une base orthogonale de $\mathcal{S}_k$ constituée de fonctions de Hecke.

***Proposition* 91–** *Les opérateurs de Hecke* T_n *sont autoadjoints pour le produit scalaire de Petersson :*

$$\langle \mathrm{T}_n f, g\rangle = \langle f, \mathrm{T}_n g\rangle$$

pour toutes formes $f \in \mathcal{S}_k$ *et* $g \in \mathcal{S}_k$*.*

Démonstration. Puisque les séries de Poincaré P_m avec $m \geq 1$ engendrent $\mathcal{S}_k$, il suffit de montrer le résultat pour $f = \mathrm{P}_m$ et $g = \mathrm{P}_\ell$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{T}_n\mathrm{P}_m, \mathrm{P}_\ell\rangle &= \frac{(k-2)!}{(4\pi\ell)^{k-1}}\widehat{\mathrm{T}_n\mathrm{P}_m}(\ell) \quad \text{d'après la proposition 60}\\
&= (k-2)!\left(\frac{n}{4\pi\ell m}\right)^{k-1}\widehat{\mathrm{T}_m\mathrm{P}_n}(\ell) \quad \text{d'après la proposition 89}\\
&= (k-2)!\left(\frac{n}{4\pi\ell m}\right)^{k-1}\widehat{\mathrm{T}_\ell\mathrm{P}_n}(m) \quad \text{d'après l'équation (2.11)}\\
&= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}}\widehat{\mathrm{T}_n\mathrm{P}_\ell}(m) \quad \text{d'après la proposition 89}\\
&= \langle \mathrm{T}_n\mathrm{P}_\ell, \mathrm{P}_m\rangle\\
&= \langle \mathrm{P}_m, \mathrm{T}_n\mathrm{P}_\ell\rangle.
\end{aligned}$$

□

Les opérateurs de Hecke étant commutatifs et autoadjoints on déduit le théorème suivant.

***Théorème* 92–** *Il existe une base orthogonale de* $\mathcal{S}_k$ *constituée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke* T_n*.*

***Définition* 93–** *On appelle* forme primitive *de* $\mathcal{S}_k$ *tout vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke de premier coefficient de Fourier égal à* 1.

Remarque 94 - Une forme primitive est donc une fonction de Hecke.

Les formes de $\mathcal{S}_k \setminus \{0\}$ n'étant pas constantes, si f appartient à une base comme celle donnée par le théorème 92 alors $\widehat{f}(1) \neq 0$ grâce au lemme 72. En particulier, après division par le coefficient de Fourier d'ordre 1 de chaque élément d'une base fournie par le théorème 92 on voit qu'il existe une base orthogonale de $\mathcal{S}_k$ formée de formes primitives. On va voir qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes primitives et que leur ensemble constitue *la* seule base de formes primitives.

Proposition 95– *L'ensemble des formes primitives de $\mathcal{S}_k$ est une base orthogonale de $\mathcal{S}_k$. On note H_k^* cette base.*

Démonstration. Soit $f_1, \dots, f_d$ une base de formes primitives de $\mathcal{S}_k$ construite à partir du théorème 92. Soit g une forme primitive de $\mathcal{S}_k$. Il existe des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ tels que

$$g = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i f_i.$$

Choisissons j tel que $\alpha_j \neq 0$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{T}_n g = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathrm{T}_n f_i = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \widehat{f_i}(n) f_i$$

d'après (2.12). D'autre part

$$\mathrm{T}_n g = \widehat{g}(n) g = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \widehat{g}(n) f_i.$$

On a donc $\alpha_j \widehat{f_j}(n) = \alpha_j \widehat{g}(n)$ puis $\widehat{g}(n) = \widehat{f_j}(n)$. Finalement, $g = f_j$. Les seules formes primitives sont donc les fonctions $f_1, \dots, f_d$ et, par construction leur ensemble est une base orthogonale. $\square$

Proposition 96– *Les coefficients de formes primitives sont réels.*

Démonstration. Grâce à l'équation (2.12) on a $\langle \mathrm{T}_n f, f \rangle = \widehat{f}(n) \|f\|^2$. Les opérateurs de Hecke étant autoadjoints on a ensuite $\langle \mathrm{T}_n, f \rangle = \langle f, \mathrm{T}_n f \rangle$ or $\langle f, \mathrm{T}_n f \rangle = \langle f, \widehat{f}(n) f \rangle = \overline{\widehat{f}(n)} \|f\|^2$ ce qui permet de conclure. $\square$

Proposition 97– *La fonction Δ est une forme primitive de $\mathcal{S}_{12}$.*

Démonstration. Soit $n \geq 0$ un entier, $\mathrm{T}_n \Delta \in \mathcal{S}_{12}$ et $\mathcal{S}_{12} = \mathbb{C}\Delta$ d'où $\mathrm{T}_n \Delta = \widehat{\Delta}(n) \Delta$. $\square$

On peut alors démontrer la première des conjectures mentionnées page 11. Les propositions 97 et 80 montrent en effet que, pour tous entiers m et n, on a

$$\widehat{\Delta}(m) \widehat{\Delta}(n) = \sum_{d \mid (m,n)} d^{11/2} \widehat{\Delta}\left(\frac{mn}{d^2} \right).$$

Enfin, on ne peut pas achever cette partie sans mentionner le résultat très difficile suivant de Deligne. C'est ce résultat qui permet de prouver la deuxième des conjectures mentionnées page 11.

***Théorème* 98–** *Soit $f \in \mathcal{S}_k$ une forme primitive. Alors*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \sigma_0(n) n^{(k-1)/2}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Le corollaire suivant du corollaire 64 montre que le coefficient harmonique pour les formes primitives [g] se comporte asymptotiquement comme $1/\#\mathrm{H}_k^*$.

***Corollaire* 99–** *Le coefficient harmonique vérifie*

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{f\in\mathrm{H}_k^*} \omega_k(f) = 1.$$

On introduit donc l'opérateur de moyenne harmonique. Si $\mathrm{X}\colon \mathrm{H}_k^* \to \mathbb{C}$, la moyenne harmonique de $\mathbb{C}$ est

$$\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{X}) = \sum_{f\in\mathrm{H}_k^*} \omega_k(f)\mathrm{X}(f).$$

En définissant pour tout entier $n \geq 1$ la fonction coefficient de Fourier

$$\begin{array}{cccc} \lambda(n) & : & \mathrm{H}_k^* & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \lambda_f(n) \end{array}$$

le corollaire 64 montre qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que, pour tout entiers m et n et tout entier pair on a

$$\left|\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}\left(\lambda(m)\lambda(n)\right) - \delta(m=n)\right| \leq \mathrm{C}\frac{(mn)^{1/4}}{k^{1/2}}\tau_3\left((m,n)\right)(\log k + \log(2mn)).$$

2.2.3) Intervalles sans valeurs propres

Le but de cette partie est de déterminer un majorant de la longueur minimum que doit avoir un intervalle pour contenir nécessairement une valeur propre de Hecke. Jusqu'à la fin de la partie p est un nombre premier fixé, dont toutes les constantes peuvent dépendre.

***Théorème* 100–** *Soit p un nombre premier. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $k_{p,\varepsilon} \geq 2$ et un réel $\mathrm{C}_{p,\varepsilon} > 0$ tels que pour tout entier pair $k \geq k_{p,\varepsilon}$ et tout intervalle I de longueur de Sato-Tate*

$$\mu_{\mathrm{ST}}(\mathrm{I}) \geq \frac{\mathrm{C}_{p,\varepsilon}}{\log^{1-\varepsilon} k}$$

il existe une forme primitive f de poids k dont le coefficient $\lambda_f(p)$ appartient à I.

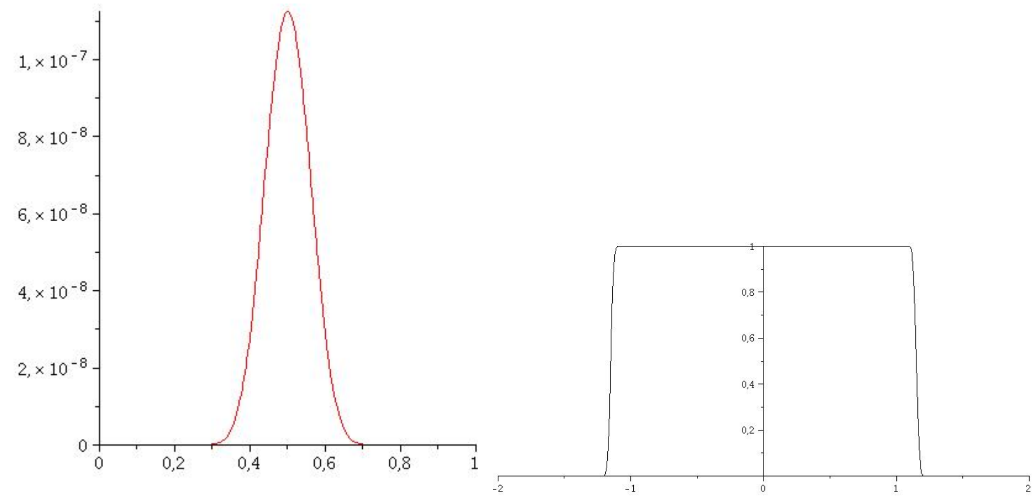
---

g. Noter qu'on n'utilise pas que les formes primitives sont vecteurs propres des opérateurs de Hecke, mais simplement que leur ensemble forme une base orthogonale et que leurs premiers coefficients de Fourier valent 1.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ on note $\mathbb{1}_{\mathrm{I}}$ sa fonction caractéristique :

$$\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On exhibe une approximation lisse de cette fonction ayant des propriétés qui nous seront nécéssaires pour la suite.



(a) Fonction pic (b) Fonction plateau

Figure 2.4 – Construction d'une approximation lisse de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$

***Lemme* 101–** *Pour tout intervalle* $[a,b]$ *de* $[-2,2]$ *et tout* $\Delta \in [0,2]$ *il existe une fonction* $\mathrm{F}_{\Delta,a,b} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *de classe* C^∞ *sur* $[-2,2]$ *telle que*

1) $\mathrm{F}_{\Delta,a,b}(x) = 1$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *;*

2) $\mathrm{F}_{\Delta,a,b}(x) = 0$ *pour tout* $x \notin [a-\Delta, b+\Delta] \cap [-2,2]$ *;*

3) il existe une suite $\left(\widehat{\mathrm{F}}(n)\right)_{n\geq 0}$ *telle que pour tout* $\ell \geq 1$ *et tout* $n \geq \ell$ *on a*

$$\left|\widehat{\mathrm{F}}(n)\right| \leq \mathrm{C}_\ell (\Delta n)^{-\ell} \tag{2.14}$$

où $\mathrm{C}_\ell > 0$ *ne dépend ni de* Δ *ni de* n *et telle que la série* $\sum_{n\geq 0} \widehat{\mathrm{F}}(n)\mathrm{X}_n$ *converge normalement vers* $\mathrm{F}_{\Delta,a,b}$ *sur* $[-2,2]$.

Démonstration. On introduit la fonction C^∞ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{t^2(t-1)^2}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

puis
$$\widetilde{\mathrm{F}}_{\Delta,a,b}\colon t\mapsto \mathrm{G}_{1-a/\Delta}\left(\frac{t}{\Delta}\right)\mathrm{G}_{1+b/\Delta}\left(-\frac{t}{\Delta}\right) \tag{2.15}$$
avec
$$\mathrm{G}_u(t)=\frac{\int_0^{u+t}g}{\int_{\mathbb{R}}g}.$$
Enfin, $\mathrm{F}_{\Delta,a,b}=\widetilde{\mathrm{F}}_{\Delta,a,b}\mathbb{1}_{[-2,2]}$ vérifie les deux premières conditions. Posons
$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{F}}(n)&=\int_{-2}^{2}\mathrm{F}_{\Delta,a,b}\mathrm{X}_n\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{F}_{\Delta,a,b}(2\cos\varphi)\sin\left((n+1)\varphi\right)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{F}_{\Delta,a,b}(2\cos\varphi)\cos(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{F}_{\Delta,a,b}(2\cos\varphi)\cos\left((n+2)\varphi\right)\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$
En effectuant ℓ intégrations par parties on trouve la majoration (2.14) puis (2.15) donne $\left\|\mathrm{F}^{(\ell)}_{\Delta,a,b}\right\|_\infty \ll_\ell \Delta^{-\ell}$. Puisque $\|\mathrm{X}_n\|_\infty=n+1$, on tire de cette majoration la convergence normale de
$$\widetilde{\mathrm{F}}(n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\widehat{\mathrm{F}}(n)\mathrm{X}_n$$
sur $[-2,2]$. Par orthonormalité,
$$\widehat{\mathrm{F}}(n)=\int_{-2}^{2}\widetilde{\mathrm{F}}\mathrm{X}_n\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}.$$
Soit
$$\begin{array}{cccc}\mathrm{H} & : & [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ & & \varphi & \mapsto & \left(\mathrm{F}_{\Delta,a,b}(2\cos\varphi)-\widetilde{\mathrm{F}}(2\cos\varphi)\right)\sin\varphi.\end{array}$$
Cette fonction impaire a tous les coefficients de son développement de Fourier nuls donc elle est nulle [h] □

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème 100.

Démonstration du théorème 100. Puisque p est fixé on note $\lambda=\lambda(p)$. Soit I un intervalle de $]-2,2[$ ne contenant aucune valeur $\lambda_f(p)$. Soit Δ suffisament petit et J le sous-intervalle de I tel que si $\mathrm{J}=[a,b]$ alors $[a-\Delta,b+\Delta]=\mathrm{I}$. Soit F la fonction obtenue par le lemme 101 à partir de J et Δ. On a alors
$$\left|\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{F}(\lambda))\right|=\left|\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{F}(\lambda)\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(\lambda))\right|=0. \tag{2.16}$$

h. On aurait aussi pu faire le raisonnement suivant : les polynômes X_n constituent une base de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et, pour tout n, l'intégrale $\int_{-2}^{2}(\mathrm{F}_{\Delta,a,b}-\widetilde{\mathrm{F}})\mathrm{X}_n\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}$ est nulle. Par densité de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dans $\mathrm{L}^2([-2,2],\mu_{\mathrm{ST}})$, on en déduit que l'intégrale $\int_{-2}^{2}(\mathrm{F}_{\Delta,a,b}-\widetilde{\mathrm{F}})f\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}$ est nulle pour toute fonction f de $\mathrm{L}^2([-2,2],\mu_{\mathrm{ST}})$. Ainsi $\mathrm{F}_{\Delta,a,b}-\widetilde{\mathrm{F}}$ est presque partout nulle et donc nulle par continuité.

Par ailleurs,

$$\left|\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{F}(\lambda)) - \int_{-2}^{2} \mathrm{F}\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}\right| \leq \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(1)\|\mathrm{F} - \mathrm{F}_{\mathrm{M}}\|_\infty \\ \mathrm{II} &= \int_{-2}^{2} \|\mathrm{F}_{\mathrm{M}} - \mathrm{F}\|_\infty \,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}} \\ \mathrm{III} &= \left|\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{F}_{\mathrm{M}}(\lambda)) - \int_{-2}^{2} \mathrm{F}_{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}\right| \end{aligned}$$

et F_{M} est la série partielle

$$\mathrm{F}_{\mathrm{M}} = \sum_{n=0}^{\mathrm{M}} \widehat{\mathrm{F}}(n)\mathrm{X}_n.$$

Pour tout $\ell \geq 2$, les majorations (2.14) et $\|\mathrm{X}_n\|_\infty \leq n+1$ impliquent $\mathrm{I} + \mathrm{II} \ll_\ell (\Delta \mathrm{M})^{-\ell}\mathrm{M}^2$. Ensuite

$$\mathrm{III} \leq \sum_{n=0}^{\mathrm{M}} |\mathrm{F}(n)| \cdot \left|\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{X}_n(\lambda)) - \int_{-2}^{2} \mathrm{X}_n\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}\right|.$$

Puisque $\mathrm{X}_n(\lambda) = \lambda(p^n)$ et $\int_{-2}^{2} \mathrm{X}_n\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}} = \delta(n=0)$, la formule de trace de Petersson implique

$$\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{X}_n(\lambda)) - \int_{-2}^{2} \mathrm{X}_n\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}} \ll_\ell k^{-1/2} p^{n/4}(n + \log k)$$

et donc

$$\mathrm{III} \ll_\ell k^{-1/2} \log(k)\mathrm{M} \cdot p^{\mathrm{M}/4}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}_k^{\mathrm{h}}(\mathrm{F}(\lambda)) - \int_{-2}^{2} \mathrm{F}\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}} \ll_\ell (\Delta \mathrm{M})^{-\ell}\mathrm{M}^2 + k^{-1/2}\log(k)\mathrm{M} \cdot p^{\mathrm{M}/4}.$$

Grâce à (2.16), on obtient

$$\int_{-2}^{2} \mathrm{F}\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}} \ll_\ell (\Delta \mathrm{M})^{-\ell}\mathrm{M}^2 + k^{-1/2}\log(k)\mathrm{M} \cdot p^{\mathrm{M}/4}.$$

Puisque $\mathbb{1}_{\mathrm{J}} \leq \mathrm{F}$, on a $\mu_{\mathrm{ST}}(\mathrm{J}) \ll_\ell (\Delta \mathrm{M})^{-\ell}\mathrm{M}^2 + k^{-1/2}\log(k)\mathrm{M} \cdot p^{\mathrm{M}/4}$. Enfin,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{ST}}(\mathrm{I}) &\leq \mu_{\mathrm{ST}}(\mathrm{J}) + \int_{a-\Delta}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x + \int_{b-\Delta}^{b} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \mu_{\mathrm{ST}}(\mathrm{J}) + \int_{a-\Delta}^{a} \mathrm{d}x + \int_{b-\Delta}^{b} \mathrm{d}x \\ &\leq \mu_{\mathrm{ST}}(\mathrm{J}) + 2\Delta \\ &\ll_\ell \Delta + (\Delta \mathrm{M})^{-\ell}\mathrm{M}^2 + k^{-1/2}\log(k)\mathrm{M} \cdot p^{\mathrm{M}/4}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat énoncé en choisissant

$$M = \lfloor \log k \rfloor, \quad \Delta = \log^{-1+\varepsilon}(k) \quad \text{et} \quad \ell = \left\lfloor \frac{3}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

□

***Corollaire* 102–** *Soit p un nombre premier. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $k_{p,\varepsilon} \geq 2$ et un réel $D_{p,\varepsilon} > 0$ tels que si $k \geq k_{p,\varepsilon}$ est un entier pair, alors*

$$\#\left\{\lambda_f(p) \colon f \in H_k^*\right\} \geq D_{p,\varepsilon}(\log k)^{1-\varepsilon}.$$

Démonstration. D'après le théorème 100, tout intervalle de longueur (relativement à μ_{ST}) au moins $\ell_k = C_{p,\varepsilon}(\log k)^{-1+\varepsilon}$ contient une valeur propre $\lambda_f(p)$. On peut placer $\lceil 1/\ell_k \rceil$ tels intervalles dans $[-2, 2]$ qui peuvent avoir des bords communs. Pour éviter le cas où une valeur propre se trouverait au bord d'un intervalle (et donc dans deux intervalles) on ne considère qu'un intervalle sur deux de sorte que le cardinal cherché vaut au moins $\lceil 1/\ell_k \rceil/2$ et on conclue par le choix $D_{p,\varepsilon} = 1/(2C_{p,\varepsilon})$. □

Remarque 103 - Une conjecture de Maeda prédit que les polynômes caractéristiques opérateurs de Hecke sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Ce sont donc aussi les polynômes minimaux et les valeurs propres des opérateurs de Hecke sont simples. En admettant cette conjecture, on a :

$$\#\left\{\lambda_f(p) \colon f \in H_k^*\right\} = \# H_k^*.$$

2.3 Propriétés intégrales des coefficients de formes primitives

Nous étudions les propriétés d'intégralité des opérateurs de Hecke. On va montrer en détail que les coefficients de Fourier des formes de H_k^* sont des entiers algébriques totalement réels, c'est-à-dire des entiers algébriques dont tous les conjugués sont réels [(i)].

***Lemme* 104–** *Soit $n \geq 1$ un entier. Il existe une base de $\mathcal{S}_k$ dans laquelle la matrice de T_n est à coefficients entiers.*

Démonstration. Grâce à la proposition 87, les coefficients de Fourier de l'image d'une forme parabolique par un opérateur de Hecke sont dans le $\mathbb{Z}$-module engendré par les coefficients de Fourier de cette forme. Il suffit donc de prouver l'existence d'une base de l'espace $\mathcal{S}_k$ à coefficients entiers. Une telle base est construite dans le lemme suivant. □

***Lemme* 105–** *Il existe une base $f_1, \ldots, f_d$ de $\mathcal{S}_k$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et telle que, pour tous $1 \leq i, j \leq d$ on a $\widehat{f_i}(j) = \delta(i = j)$.*

i. Autrement dit, un entier algébrique totalement réel est une racine d'un polynôme unitaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et dont toutes les racines sont réelles.

Démonstration. On choisit a et b des entiers naturels tels que pour $j = 1, \ldots, d$, la forme parabolique $g_j = \Delta^j \mathrm{E}_6^{2(d-j)+a} \mathrm{E}_4^b$ soit de poids k. Ces formes sont à coefficients entiers et, si $i \leq j$, alors $\widehat{g_j}(i) = \delta(i = j)$ puisque Δ est parabolique de premier coefficient $\widehat{\Delta}(1) = 1$ et $\widehat{\mathrm{E}_4}(0) = \widehat{\mathrm{E}_6}(0) = 1$. On construit $f_d, f_{d-1}, \ldots, f_1$ en posant $f_d = g_d$ et

$$f_{d-i} = g_{d-i} - \sum_{j=0}^{i-1} \widehat{g_{d-i}}(d-j) f_{d-j} \qquad (i = 1, \ldots, d-1).$$

□

On note $\mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des formes paraboliques de poids k sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à coefficients de Fourier entiers.

***Proposition* 106–** *L'ensemble $\mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang la dimension de $\mathcal{S}_k$ et stable par les opérateurs de Hecke.*

Démonstration. On note d la dimension de $\mathcal{S}_k$ et $\{f_i\}_{1 \leq i \leq d}$ la base du lemme 105. Par construction de cette base, on a

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z} f_i \subset \mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$$

et il reste à montrer l'inclusion opposée. Soit donc $f \in \mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$. Grâce au lemme 105, il existe $\{c_i\}_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d$ tel que

$$f = \sum_{i=1}^{d} c_i f_i.$$

Soit $j \in \{1, \cdots, d\}$, on va montrer que $c_j \in \mathbb{Z}$. On a

$$\widehat{f}(j) = \sum_{i=1}^{d} c_i \widehat{f_i}(j)$$

et, par construction des formes f_i, il en résulte $\widehat{f}(j) = c_j$. Ainsi, $c_j \in \mathbb{Z}$ et

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z} f_i = \mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}.$$

La stabilité par les opérateurs de Hecke résulte du lemme 104. □

Grâce au lemme 104, le polynôme caractéristique de T_n est à coefficients entiers et les valeurs propres sont des entiers algébriques. Elles sont réelles puisque les opérateurs de Hecke sont autoadjoints. Les racines conjuguées sont aussi réelles puisqu'elles sont aussi des valeurs propres des opérateurs de Hecke. Ces racines conjuguées sont en fait valeurs propres de formes primitives, ce qu'on montre maintenant. Soit σ un automorphisme de $\mathbb{C}$ (il préserve $\mathbb{Q}$) et $f \in \mathrm{H}_k^*$. On définit

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma\left[\widehat{f}(n)\right] e(nz).$$

Avec la base du lemme 105, on écrit

$$f = \sum_{i=1}^{d} t_i f_i.$$

Puisque f_i est à coefficients entiers on a

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{d} \sigma(t_i)\widehat{f_i}(n)\right] e(nz) = \sum_{i=1}^{d} \sigma(t_i) f_i \in \mathcal{S}_k.$$

D'autre part, $\mathrm{T}_n f^\sigma = \widehat{f^\sigma}(n) f^\sigma$: en effet, soit $m \geq 1$, on a

$$\widehat{\mathrm{T}_n f^\sigma}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \sigma\left[\widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right)\right] = \sigma\left[\widehat{\mathrm{T}_n f}(m)\right] = \widehat{f^\sigma}(n)\widehat{f^\sigma}(m).$$

On en déduit que les conjugués par les automorphismes de $\mathbb{C}$ des valeurs propres de Hecke sont coefficients de formes primitives donc réels.

On note $\mathcal{T}_k$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les opérateurs de Hecke. On va montrer que $\mathcal{T}_k$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}_k)$ des formes linéaires de $\mathcal{S}_k$ et que $\mathcal{S}_k$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{T}_k)$ des formes linéaires de $\mathcal{T}_k$.

***Lemme* 107–** *Les applications linéaires*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_k & \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_k) & \\ \mathrm{T} & \mapsto & \left(f \mapsto \widehat{\mathrm{T}f}(1)\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_k & \to \mathcal{L}(\mathcal{T}_k) & \\ f & \mapsto & \left(\mathrm{T} \mapsto \widehat{\mathrm{T}f}(1)\right) \end{array}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Démonstration. On note φ_1 l'application linéaire de $\mathcal{T}_k$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{S}_k)$ et φ_2 l'application linéaire de $\mathcal{S}_k$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{T}_k)$. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{T}_k$ tel que $\varphi_1(\mathrm{T}) = 0$. Alors, pour toute $f \in \mathcal{S}_k$, on a $\widehat{\mathrm{T}f}(1) = 0$ et, en particulier, pour toute $f \in \mathcal{S}_k$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{\mathrm{T}(\mathrm{T}_n f)}(1) = 0$. Par commutativité des opérateurs de Hecke, on en déduit $\widehat{\mathrm{T}_n(\mathrm{T}f)}(1) = 0$ puis $\widehat{\mathrm{T}f}(n) = 0$ (voir la proposition 87) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\mathrm{T}f = 0$ pour toute $f \in \mathcal{S}_k$ puis $\mathrm{T} = 0$ et φ_1 est injective. Soit maintenant $f \in \mathcal{S}_k$ telle que $\varphi_2(f) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{\mathrm{T}_n f}(1) = 0$, *i.e.* $\widehat{f}(n) = 0$ et donc $f = 0$. Ainsi φ_2 est injective. L'injectivité de φ_1 implique $\dim \mathcal{T}_k \leq \dim \mathcal{S}_k$ et l'injectivité de φ_2 implique $\dim \mathcal{S}_k \leq \mathcal{T}_k$. On a donc $\dim \mathcal{S}_k = \mathcal{T}_k$ et les applications linéaire φ_1 et φ_2 sont bijectives. $\square$

***Corollaire* 108–** *Les espaces vectoriels $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{S}_k$ sont duaux.*

Remarque 109 - Le lemme 107 peut se résumer en l'énoncé suivant. L'application bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_k \times \mathcal{S}_k & \to & \mathbb{C} \\ (\mathrm{T}, f) & \mapsto & \widehat{\mathrm{T}f}(1) \end{array}$$

est un accouplement parfait (voir l'annexe A.6).

***Lemme* 110–** *Une base de $\mathcal{T}_k$ est $\{\mathrm{T}_i\}_{1\leq i\leq d}$ où d est la dimension de $\mathcal{S}_k$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{T}_k$ est de dimension d, il suffit de montrer que la famille $\{\mathrm{T}_i\}_{1\leq i\leq d}$ est libre. Soit $\{t_i\}_{1\leq i\leq d}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{d} t_i \mathrm{T}_i = 0.$$

En notant $\{f_i\}_{1\leq i\leq d}$ la base construite au lemme 105, on a

$$\sum_{i=1}^{d} t_i \widehat{\mathrm{T}_i f_j}(1) = 0$$

pour tout $j \in [1, d]$. Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{d} t_i \widehat{f_j}(i) = 0$$

puis $t_j = 0$ pour tout j. $\square$

On note $\mathcal{T}_k^{\mathbb{Z}}$ et on appelle *$\mathbb{Z}$-module de Hecke* sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par les opérateurs de Hecke.

***Lemme* 111–** *Le module $\mathcal{T}_k^{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang la dimension de $\mathcal{S}_k$ admettant $\{\mathrm{T}_i\}_{1\leq i\leq \dim \mathcal{S}_k}$ comme base.*

Démonstration. On note d la dimension de $\mathcal{S}_k$. Soit $n \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que

$$\mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{d} t_i \mathrm{T}_i$$

avec $\{t_i\}_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{Z}^d$. L'existence de $\{t_i\}_{1\leq i\leq d} \in \mathbb{C}^d$ est donnée par le lemme 110. Soit $\{f_i\}_{1\leq i\leq d}$ la base construite au lemme 105, pour tout $j \in [1, d]$, on a

$$\widehat{\mathrm{T}_n f_j}(1) = \sum_{i=1}^{d} t_i \widehat{f_j}(i) = t_j$$

puis, comme $\widehat{\mathrm{T}_n f_j}(1) = \widehat{f_j}(n) \in \mathbb{Z}$, on a $t_j \in \mathbb{Z}$. $\square$

2.4 Fonctions L de formes modulaires

2.4.1) Définition

Soit $f \in \mathcal{S}_k$ on définit sa série de Dirichlet par

$$\mathrm{D}(f,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n) n^{-s}$$

avec

$$\lambda_f(n) = \frac{\widehat{f}(n)}{n^{(k-1)/2}}.$$

***Lemme* 112–** *Si $f \in \mathcal{S}_k$, la série de Dirichlet $\mathrm{D}(f,s)$ converge absolument sur le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 1$ et normalement sur tout compact de ce demi-plan. Elle définit donc une fonction holomorphe sur ce demi-plan.*

Démonstration. Écrivons la décomposition de f dans la base des formes primitives de poids k :

$$f = \sum_{g \in \mathrm{H}_k^*} c(g) g.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a alors

$$\lambda_f(n) = \sum_{g \in \mathrm{H}_k^*} c(g) \lambda_g(n).$$

La majoration de Deligne (théorème 98) implique

$$\left| \sum_{g \in \mathrm{H}_k^*} c(g) \lambda_g(n) \right| \leq \sum_{g \in \mathrm{H}_k^*} |c(g)| \sigma_0(n).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Le lemme 298 fournit alors $\mathrm{C}(\varepsilon)$ tel que

$$\left| \sum_{g \in \mathrm{H}_k^*} c(g) \lambda_g(n) \right| \leq \mathrm{C}(\varepsilon) \sum_{g \in \mathrm{H}_k^*} |c(g)| n^{\varepsilon}.$$

Le résultat découle de cette inégalité grâce à la proposition 301. □

On donne une représentation intégrale qui permettra de prolonger analytiquement $\mathrm{D}(f,s)$ à $\mathbb{C}$.

***Lemme* 113–** *Soit $f \in \mathcal{S}_k$. On a*

$$\mathrm{D}(f,s) = \frac{(2\pi)^{s+(k-1)/2}}{\Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right)} \int_1^{+\infty} f(iy) \left[y^{s+(k-1)/2} + i^k y^{1-s+(k-1)/2} \right] \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(n)n^{-s} &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(n)\left(\frac{y}{n}\right)^s e^{-y}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(n)\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{n}\right)^s e^{-y}\frac{\mathrm{d}y}{y}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(n)\int_0^{+\infty}(2\pi u)^s e^{-2\pi n u}\frac{\mathrm{d}u}{u}\\ &= (2\pi)^s\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(n)u^s e^{-2\pi n u}\frac{\mathrm{d}u}{u}\\ &= (2\pi)^s\int_0^{+\infty}f(iu)u^s\frac{\mathrm{d}u}{u}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right)}{(2\pi)^{s+(k-1)/2}}\mathrm{D}(f,s) = \int_1^{+\infty}f(iu)u^{s+(k-1)/2}\frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_0^1 f(iu)u^{s+(k-1)/2}\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Or

$$\int_0^1 f(iu)u^{s+(k-1)/2}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{+\infty}f\left(-\frac{1}{iy}\right)y^{-s-(k-1)/2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = i^k\int_1^{+\infty}f(iy)y^{-s+(k+1)/2}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

en utilisant la modularité de f. □

Dans la représentation intégrale (2.17), tant que 0 était une borne de l'intégrale, celle-ci ne convergeait que pour $\mathrm{Re}\, s > 1$. En revanche, la convergence en $+\infty$ était assurée pour toutes les valeurs de s grâce à la décroissance exponentielle de f (voir la majoration (2.5)). La modularité a permis de supprimer la borne 0. Puisque par ailleurs, la fonction $1/\Gamma$ est entière (voir le corollaire 284) on a le corollaire suivant.

***Corollaire* 114–** *La fonction $s \mapsto \mathrm{D}(f,s)$ admet un prolongement en fonction entière.*

Posons

$$\mathrm{D}(f_\infty, s) = (2\pi)^{-s-(k-1)/2}\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right).$$

Le lemme 113 conduit à l'équation fonctionnelle suivante.

***Corollaire* 115–** *Soit $f \in \mathcal{S}_k$. On a l'équation fonctionnelle*

$$\mathrm{D}(f_\infty, s)\mathrm{D}(f,s) = i^k\mathrm{D}(f_\infty, 1-s)\mathrm{D}(f, 1-s)$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Le point $s = \frac{1}{2}$ est donc un point de symétrie de l'ensemble des valeurs de $s \mapsto \mathrm{D}(f,s)$. Cette remarque donne un intérêt particulier à la valeur $\mathrm{D}\left(f, \frac{1}{2}\right)$. On a le premier résultat suivant.

***Corollaire* 116–** *L'ordre d'annulation de* $\mathrm{D}(f,s)$ *en* $s=\frac{1}{2}$ *est*

– *pair si* $k\equiv 0 \pmod 4$ *;*
– *impair si* $k\equiv 2 \pmod 4$*.*

Démonstration. En dérivant[j] ℓ fois l'équation fonctionnelle, on obtient (grâce à la formule de Leibniz)

$$\sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}\mathrm{D}^{(\ell-i)}(f_\infty,s)\mathrm{D}^{(i)}(f,s)=i^k(-1)^\ell\sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}\mathrm{D}^{(\ell-i)}(f_\infty,1-s)\mathrm{D}^{(i)}(f,1-s). \tag{2.18}$$

Si $k\equiv 0 \pmod 4$, on suppose que l'ordre d'annulation est au moins $2n+1$. Alors $\mathrm{D}^{(i)}(f,1/2)=0$ pour $i\in\{0,\dots,2n\}$. L'équation (2.18) donne alors

$$\mathrm{D}^{(2n+1)}(f,1/2)=-\mathrm{D}^{(2n+1)}(f,1/2)$$

et donc $\mathrm{D}^{(2n+1)}(f,1/2)=0$. L'ordre d'annulation ne peut donc être que pair. Lorsque $k\equiv 2 \pmod 4$, le raisonnement est le même. □

Remarque 117 - En posant $\Gamma_{\mathbb{R}}(z)=\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ la formule de duplication de Legendre (voir la proposition 287) s'écrit

$$\Gamma(z)=\frac{(2\pi)^z}{2}\Gamma_{\mathbb{R}}(z)\Gamma_{\mathbb{R}}(z+1).$$

On a alors

$$\mathrm{D}(f_\infty,s)=\frac{1}{2}\Gamma_{\mathbb{R}}\left(s+\frac{k-1}{2}\right)\Gamma_{\mathbb{R}}\left(s+\frac{k+1}{2}\right).$$

On suppose maintenant que $f\in\mathrm{H}_k^*$. La multiplicativité des coefficients de Hecke permet d'utiliser la proposition 304 pour obtenir

$$\mathrm{D}(f,s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\mathrm{X}_\nu\left(\lambda_f(p)\right)p^{-\nu s}$$

si $\mathrm{Re}\,s>1$. Le calcul de la série génératrice des polynômes de Tchebychef (A.4) implique alors

$$\mathrm{D}(f,s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\lambda_f(p)p^{-s}+p^{-2s}\right)^{-1}\qquad(\mathrm{Re}\,s>1).$$

L'existence de ce *produit eulérien* implique que $\mathrm{D}(f,s)$ est une fonction L.

***Définition* 118–** *Si* $f\in\mathrm{H}_k^*$ *la fonction* L *de* f *est définie par*

$$\mathrm{L}(f,s)=\mathrm{D}(f,s).$$

Cette fonction L *est définie par une série de Dirichlet sur le demi-plan* $\mathrm{Re}\,s>1$*, admet un prolongement en fonction entière, une équation fonctionnelle et un développement eulérien. On note* $\mathrm{L}(f_\infty,s)=\mathrm{D}(f_\infty,s)$ *et* $\Lambda(f,s)=\mathrm{L}(f_\infty,s)\mathrm{L}(f,s)$*.*

j. On note $s\mapsto\mathrm{D}^{(j)}(f,s)$ la dérivée j^{e} de $\mathrm{D}(f,s)$.

En particulier si $\mathrm{Re}\, s > 1$ alors $\mathrm{L}(f,s) \neq 0$. Il résulte donc de l'équation fonctionnelle que si $\mathrm{Re}\, s < 0$ alors

$$\frac{\mathrm{L}(f_\infty, s)}{\mathrm{L}(f_\infty, 1-s)} \mathrm{L}(f,s) \neq 0.$$

On en déduit que si $\mathrm{Re}\, s < 0$ alors $\mathrm{L}(f,s) = 0$ (à un certain ordre) si et seulement si s est un pôle de

$$\frac{\mathrm{L}(f_\infty, s)}{\mathrm{L}(f_\infty, 1-s)} = (2\pi)^{-1+2s} \frac{\Gamma\left(1 - s + \frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right)}$$

(au même ordre). Puisque d'après le corollaire 284 la fonction $1/\Gamma$ est entière, on en déduit que s est un pôle de $\Gamma\left(1 - s + \frac{k-1}{2}\right)$. Or les pôles de Γ sont simples et appartiennent à $-\mathbb{N}$ (voir la proposition 280). Ainsi,

$$\mathrm{L}(f,s) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}\, s < 0 \Longleftrightarrow s \in -\mathbb{N} - \frac{k-1}{2} \text{ et } s \text{ est un pôle simple.}$$

Les zéros de $-\mathbb{N} - \frac{k-1}{2}$ s'appellent les *zéros triviaux*. Ce sont des zéros simples. Les autres zéros, dits *non triviaux*, sont tous dans la bande $0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1$. L'équation fonctionnelle implique que ceux-ci sont symétriques par rapport au point $\frac{1}{2}$. D'autre part la représentation intégrale de $\mathrm{L}(f,s)$ et le fait que les coefficients de Fourier de f sont réels impliquent

$$\overline{\mathrm{L}(f,s)} = \mathrm{L}(f,\overline{s}).$$

Les zéros non triviaux de $\mathrm{L}(f,s)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe $\mathrm{Im}\, s = 0$ (voir la figure 2.5).

L'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de formes primitives prédit que pour toute forme primitive f, la fonction $\mathrm{L}(f,s)$ ne s'annule qu'en les zéros triviaux et sur la droite critique $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

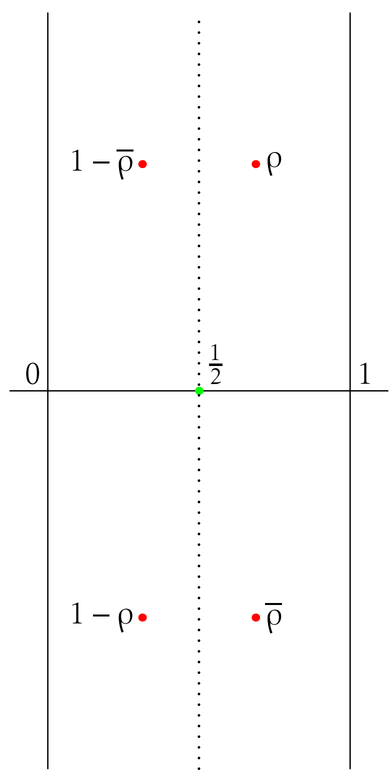


Figure 2.5 – Les zéros non triviaux des fonctions L de formes primitives

Chapitre 3

Formes quasimodulaires sur le groupe modulaire

3.1 Définition

On note à partir de maintenant

$$\mathrm{D} := \frac{1}{2i\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}.$$

Si $f \in \mathcal{M}_k$ vérifie $\mathrm{D}f = 0$ alors f est constante et donc $k = 0$ ou $f = 0$. D'autre part, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nz}$$

alors

$$\mathrm{D}f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\widehat{f}(n)e^{2i\pi nz}.$$

Si $f \in \mathcal{M}_k$, alors $\mathrm{D}f$ vérifie

$$(cz+d)^{-(k+2)}\mathrm{D}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{D}f(z) + \frac{k}{2i\pi}f(z)\frac{c}{cz+d} \tag{3.1}$$

pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Si f n'est pas une fonction constante, la fonction $\mathrm{D}f$ ne vérifie pas la condition de modularité et n'est donc pas modulaire. Supposons en effet, par l'absurde, que $\mathrm{D}f$ est modulaire de poids ℓ avec f non constante (soit $k \neq 0$). En comparant (3.1) et la condition de modularité de poids ℓ, on obtient

$$\left[(cz+d)^{\ell} - (cz+d)^{k+2}\right]\mathrm{D}f(z) = \frac{k}{2i\pi}c(cz+d)^{k+1}f(z).$$

Ayant fixé $z \in \mathcal{H}$ et $c = 1$, on en déduit que le polynôme

$$\left[(z+\mathrm{X})^{\ell} - (z+\mathrm{X})^{k+2}\right]\mathrm{D}f(z) - \frac{k}{2i\pi}(z+\mathrm{X})^{k+1}f(z) \tag{3.2}$$

s'annulant sur l'ensemble infini des entiers est nul. Si $\ell = k+2$, cela implique $f = 0$. Si $\ell \neq k+2$, la considération du coefficient de $\mathrm{X}^{\max(\ell,k+2)}$ implique $\mathrm{D}f(z) = 0$ puis $f(z) = 0$.
Le but de ce chapitre est d'agrandir l'espace des formes modulaires de façon à obtenir un espace stable par dérivation. Pour aider à choisir la bonne définition, on établit aisément par récurrence une formule donnant les les dérivées succéssives d'une forme modulaire.

***Proposition* 119–** *Soit f une forme modulaire de poids k et $m \geq 0$ un entier. Pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ la m^e dérivée de f vérifie*

$$(cz+d)^{-(k+2m)}\mathrm{D}^m f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(k+m-1)!}{(k+m-j-1)!}\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^j \mathrm{D}^{m-j}f(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j.$$

***Définition* 120–** *Soit $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Étant donnés des entiers k, $s \geq 0$, on dit que f est une* fonction quasimodulaire *de* poids k *et* profondeur s *(sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*) s'il existe des fonctions holomorphes $f_0, \ldots, f_s$ sur $\mathcal{H}$ avec f_s non identiquement nulle, telles que*

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \tag{3.3}$$

pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout $z \in \mathcal{H}$. Par convention, la fonction nulle est quasimodulaire de profondeur nulle pour tout poids.

On note FM_k^s l'ensemble des fonctions quasimodulaires de poids k et profondeur s et $\mathrm{FM}_k^{\leq s}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions quasimodulaires de poids k, profondeur inférieure ou égale à s. On note aussi

$$\mathrm{FM}_k^{\infty} := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{FM}_k^{\leq s}.$$

Avec les notations de la définition 120, on définit pour tout entier j l'opérateur Q_j en posant $\mathrm{Q}_j(f) := f_j$.

On remarque que l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec

$$f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \tag{3.4}$$

définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur les fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$. De plus, pour $\mathrm{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on définit

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{X}(\mathrm{A}) : & \mathcal{H} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \dfrac{c}{cz+d} \end{array}$$

de sorte que (3.3) se réécrit

$$\left(f \underset{k}{|} \mathrm{A}\right) = \sum_{j=0}^{s} \mathrm{Q}_j(f)\mathrm{X}(\mathrm{A})^j. \tag{3.5}$$

Les applications Q_j sont bien définies grâce au résultat d'unicité suivant.

***Lemme* 121–** *S'il existe des fonctions $f_0, \ldots, f_s$ telles que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout $z \in \mathcal{H}$ on a*

$$\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\mathrm{X}(\mathrm{A})^j = 0$$

alors $f_j = 0$ pour tout j.

Démonstration. On évalue l'égalité en $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & d-1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ et on obtient

$$\sum_{j=0}^{s} f_j(z)\left(\frac{1}{z+d}\right)^j = 0 \text{ puis } \sum_{j=0}^{s} f_j(z)(z+d)^{s-j} = 0$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$ et $d \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que le polynôme

$$\sum_{j=0}^{s} f_j(z)(z+\mathrm{X})^{s-j}$$

s'annule une infinité de fois. Les coefficients de son développement de Taylor en $-z$ sont donc nuls et les f_j sont nuls. □

Remarque 122- Noter que si $f \in \mathcal{M}_k$ l'équation (3.1) se réécrit $\left(\mathrm{D}f \underset{k+2}{|} \mathrm{A}\right) = \mathrm{D}f + \frac{k}{2i\pi} f\mathrm{X}(\mathrm{A})$. On retrouve rapidement cette égalité en remarquant qu'en dérivant (3.4), on a pour toute fonction f holomorphe sur $\mathcal{H}$ l'égalité

$$\mathrm{D}\left(f \underset{k}{|} \mathrm{A}\right) = -\frac{k}{2i\pi}\left(f \underset{k}{|} \mathrm{A}\right)\mathrm{X}(\mathrm{A}) + \left(\mathrm{D}f \underset{k+2}{|} \mathrm{A}\right). \tag{3.6}$$

***Lemme* 123–** *Soit A et B dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors*

$$\left(\mathrm{X}(\mathrm{A}) \underset{2}{|} \mathrm{B}\right) = \mathrm{X}(\mathrm{AB}) - \mathrm{X}(\mathrm{B}).$$

Démonstration. Il s'agit juste de la décomposition en éléments simples du terme de gauche. En effet

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{X}(\mathrm{A}) \underset{2}{|} \mathrm{B}\right) = \frac{c(\gamma z+\delta)^{-2}}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d} &= \frac{c}{(\gamma z+\delta)\left[(\alpha c+\gamma d)z+\beta c+\delta d\right]} \\ &= \frac{\mathrm{K}}{(\alpha c+\gamma d)z+\beta c+\delta d} + \frac{\mathrm{L}}{\gamma z+\delta}.\end{aligned}$$

On a

$$\mathrm{K} = ((\alpha c+\gamma d)z+\beta c+\delta d)\left(\mathrm{X}(\mathrm{A})\underset{2}{|}\mathrm{B}\right)_{|z=-(\beta c+\delta d)/(\alpha c+\gamma d)} = \alpha c+\gamma d$$

et

$$\mathrm{L} = (\gamma z+\delta)\left(\mathrm{X}(\mathrm{A})\underset{2}{|}\mathrm{B}\right)_{|z=-\delta/\gamma} = \frac{c}{-(\alpha c+\gamma d)\frac{\delta}{\gamma}+\beta c+\delta d} = \frac{-\gamma c}{(\alpha\delta-\beta\gamma)c} = -\gamma.$$

□

Remarques 124– i) Le choix de $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ dans (3.3) montre que $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{I}$. Autrement dit

$$f \in \mathrm{FM}_k^\infty \Longrightarrow \mathrm{Q}_0(f) = f.$$

ii) De même, le choix de $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ implique

$$f \in \mathrm{FM}_k^\infty \Longrightarrow f \text{ est périodique de période } 1.$$

iii) Soit $f \in \mathrm{FM}_k^\infty$. On note $\mathrm{Prof}(f)$ sa profondeur et $\mathrm{Poids}(f)$ son poids.

iv) Si f et g sont dans FM_k^∞ ne sont pas la fonction nulle, on a $\mathrm{Prof}(fg) = \mathrm{Prof}(f) + \mathrm{Prof}(g)$.

v) Soit $f \in \mathrm{FM}_k^\infty$. On pose $\mathrm{Q}_j(f) = 0$ pour tous $j < 0$ et $j > \mathrm{Prof}(f)$. On vérifie aisément que pour tout n, l'application Q_n est linéaire et

$$\mathrm{Q}_n(fg) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Q}_j(f)\mathrm{Q}_{n-j}(g). \tag{3.7}$$

Le lemme technique suivant va être utile par la suite.

***Lemme* 125–** *Considérons la matrice unipotente supérieure*

$$\mathrm{M}(x) = \left(\binom{\beta-1}{\alpha-1}x^{\beta-\alpha}\right)_{\substack{1\le\alpha\le s+1\\ \alpha\le\beta\le s+1}}$$

alors

$$\mathrm{M}(x+y) = \mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y).$$

En particulier, la matrice $\mathrm{M}(x)$ *est inversible d'inverse*

$$\mathrm{M}(x)^{-1} = \mathrm{M}(-x).$$

Démonstration. Le coefficient d'indice (α,β) du produit $\mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y)$ est

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma=1}^{s+1} \delta(\gamma\ge\alpha)\binom{\gamma-1}{\alpha-1}\delta(\beta\ge\gamma)\binom{\beta-1}{\gamma-1}x^{\gamma-\alpha}y^{\beta-\gamma} &= \delta(\beta\ge\alpha)\binom{\beta-1}{\alpha-1}\sum_{\gamma=\alpha}^{\beta}\binom{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}x^{\gamma-\alpha}y^{\beta-\gamma}\\ &= \delta(\beta\ge\alpha)\binom{\beta-1}{\alpha-1}(x+y)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

□

Ce lemme permet de montrer que les fonctions $\mathrm{Q}_n(f)$ sont elles-mêmes quasimodulaires.

***Proposition* 126–** *Soit $f \in \mathrm{FM}_k^{\leq s}$. Pour tout $m \in \{0,\dots,s\}$, on a*

$$\left(\mathrm{Q}_m(f) \underset{k-2m}{|} \mathrm{A}\right) = \sum_{v=0}^{s-m} \binom{m+v}{v} \mathrm{Q}_{m+v}(f)\,\mathrm{X}(\mathrm{A})^v$$

pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Autrement dit,

$$\mathrm{Q}_\ell \circ \mathrm{Q}_m = \binom{\ell+m}{m} \mathrm{Q}_{\ell+m}$$

pour tous ℓ et m.

Démonstration. Puisque $\left(f \underset{k}{|} \mathrm{AB}\right) = \left(\left(f \underset{k}{|} \mathrm{A}\right) \underset{k}{|} \mathrm{B}\right)$, on a

$$\left(f \underset{k}{|} \mathrm{AB}\right) = \sum_{n=0}^{s} \left(\mathrm{Q}_n(f) \underset{k-2n}{|} \mathrm{B}\right) \left(\mathrm{X}(\mathrm{A}) \underset{2}{|} \mathrm{B}\right)^n.$$

Le lemme 123 implique alors

$$\left(f \underset{k}{|} \mathrm{AB}\right) = \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{n=j}^{s} \binom{n}{j} (-\mathrm{X}(\mathrm{B}))^{n-j} \left(\mathrm{Q}_n(f) \underset{k-2n}{|} \mathrm{B}\right)\right) \mathrm{X}(\mathrm{AB})^j.$$

En comparant avec le développement de $\left(f \underset{k}{|} \mathrm{AB}\right)$, on en déduit

$$\mathrm{Q}_j(f) = \sum_{n=j}^{s} \binom{n}{j} (-\mathrm{X}(\mathrm{B}))^{n-j} \left(\mathrm{Q}_n(f) \underset{k-2n}{|} \mathrm{B}\right)$$

pour tout j. Ces équations peuvent se réécrire en

$$\mathrm{M}\left(-\mathrm{X}(\mathrm{B})\right) \begin{pmatrix} \left(\mathrm{Q}_0(f) \underset{k}{|} \mathrm{B}\right) \\ \vdots \\ \left(\mathrm{Q}_s(f) \underset{k-2s}{|} \mathrm{B}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Q}_0(f) \\ \vdots \\ \mathrm{Q}_s(f) \end{pmatrix}$$

et en utilisant le lemme 121,

$$\begin{pmatrix} \left(\mathrm{Q}_0(f) \underset{k}{|} \mathrm{B}\right) \\ \vdots \\ \left(\mathrm{Q}_s(f) \underset{k-2s}{|} \mathrm{B}\right) \end{pmatrix} = \mathrm{M}\left(\mathrm{X}(\mathrm{B})\right) \begin{pmatrix} \mathrm{Q}_0(f) \\ \vdots \\ \mathrm{Q}_s(f) \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\left(Q_n(f) \underset{k-2n}{|} B\right) = \sum_{n=j}^{s} \binom{n}{j} Q_n(f) X(B)^{n-j}$$

pour tout n. Le résultat en découle. □

Remarque 127 - On définit une action sur les vecteurs colonnes de fonctions de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix} |_k \gamma = \begin{pmatrix} \left(f_0 \underset{k}{|} \gamma\right) \\ \vdots \\ \left(f_n \underset{k-2n}{|} \gamma\right) \\ \vdots \\ \left(f_s \underset{k-2s}{|} \gamma\right) \end{pmatrix}$$

pour tout $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. On a montré que si si f est quasimodulaire de poids k et profondeur s alors

$$\begin{pmatrix} Q_0(f) \\ \vdots \\ Q_n(f) \\ \vdots \\ Q_s(f) \end{pmatrix} |_k \gamma = M\left(X(\gamma)\right) \begin{pmatrix} Q_0(f) \\ \vdots \\ Q_n(f) \\ \vdots \\ Q_s(f) \end{pmatrix}.$$

On donne une seconde preuve de l'importante proposition 126.

Démonstration alternative de la proposition 126. Soit A et B dans $SL_2(\mathbb{Z})$. On a

$$\left(\left(f \underset{k}{|} B\right) \underset{k}{|} A^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{s} \left(Q_n(f) X(B)^n \underset{k}{|} A^{-1}\right) \tag{3.8}$$

$$= \sum_{n=0}^{s} \left(Q_n(f) \underset{k-2n}{|} A^{-1}\right)\left(X(B) \underset{2}{|} A^{-1}\right)^n \tag{3.9}$$

$$= \sum_{n=0}^{s} \left(Q_n(f) \underset{k-2n}{|} A^{-1}\right)\left(X(BA^{-1}) - X(A^{-1})\right)^n \tag{3.10}$$

d'après le lemme 123

$$= \sum_{m=0}^{s} \left[\sum_{n=m}^{s} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \left(Q_n(f) \underset{k-2n}{|} A^{-1}\right) X(A^{-1})^{n-m}\right] X(BA^{-1})^m \tag{3.11}$$

par développement du terme $\left(X(BA^{-1}) - X(A^{-1})\right)^n$ puis permutation des sommes. D'autre part,

$$\left(\left(f \underset{k}{|} B\right) \underset{k}{|} A^{-1}\right) = \left(f \underset{k}{|} BA^{-1}\right) = \sum_{m=0}^{s} Q_m(f) X(BA^{-1})^m$$

donc

$$\mathrm{Q}_m(f) = \sum_{v=0}^{s-m} (-1)^v \binom{v+m}{m} \left(\mathrm{Q}_{v+m}(f) \underset{k-2v-2m}{|} \mathrm{A}^{-1} \right) \mathrm{X}(\mathrm{A}^{-1})^v.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Q}_m(f) \underset{k-2m}{|} \mathrm{A} \right) &= \sum_{v=0}^{s-m} (-1)^v \binom{v+m}{m} \left(\left(\mathrm{Q}_{v+m}(f) \underset{k-2v-2m}{|} \mathrm{A}^{-1} \right) \underset{k-2v-2m}{|} \mathrm{A} \right) \left(\mathrm{X}(\mathrm{A}^{-1}) \underset{2}{|} \mathrm{A} \right)^v \\ &= \sum_{v=0}^{s-m} \binom{v+m}{m} \mathrm{Q}_{v+m}(f) \mathrm{X}(\mathrm{A})^v\end{aligned}$$

car, le lemme 123 conduit à $\left(\mathrm{X}(\mathrm{A}^{-1}) \underset{2}{|} \mathrm{A} \right) = \mathrm{X}(\mathrm{I}) - \mathrm{X}(\mathrm{A}) = -\mathrm{X}(\mathrm{A})$. □

***Corollaire* 128–** *Pour tout entier $r \geq 1$, on a*

$$\mathrm{Q}_r = \frac{1}{r!} \underbrace{\mathrm{Q}_1 \circ \cdots \circ \mathrm{Q}_1}_{r \text{ iterations}}.$$

***Corollaire* 129–** *Pour tout $m \leq s$, on a l'inclusion*

$$\mathrm{Q}_m \left(\mathrm{FM}_k^s \right) \subset \mathrm{FM}_{k-2m}^{s-m}.$$

Il résulte du corollaire 129 que si $f \in \mathrm{FM}_k^s$ alors $\mathrm{Q}_s(f)$ vérifie l'équation de modularité de poids $k-2s$: pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on a

$$\left(\mathrm{Q}_s(f) \underset{k-2s}{|} \mathrm{A} \right) = \mathrm{Q}_s. \tag{3.12}$$

Nous voudrions ajouter une condition à notre définition des fonctions quasimodulaires pour assurer que cette fonction $\mathrm{Q}_s(f)$ soit modulaire tout en préservant la structure d'espace vectoriel. Puisque tous les coefficients $\mathrm{Q}_j(f)$ d'une fonction quasimodulaire sont des fonctions quasimodulaires, ils sont périodiques de période 1 et admettent donc un développement de Fourier. On introduit alors la définition suivante.

***Définition* 130–** *Une fonction quasimodulaire f de poids k et profondeur s sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *est une* forme quasimodulaire *si les développements de Fourier de toutes les fonctions coefficients de sa transformation quasimodulaire n'ont pas de terme d'ordre strictement négatif :*

$$\mathrm{Q}_j(f)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{\mathrm{Q}_j(f)}(n) e^{2i\pi nz}$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, s\}$.

On note $\mathcal{M}_k^s$ l'ensemble des formes quasimodulaires de poids k et profondeur s et $\mathcal{M}_k^{\leq s}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des formes quasimodulaires de poids k, profondeur inférieure ou égale à s sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note aussi

$$\mathcal{M}_k^{\infty} := \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_k^{\leq s} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{2\mathbb{N}}^{\infty} := \bigcup_{k\in 2\mathbb{N}} \mathcal{M}_k^{\infty}.$$

On a une structure graduée sur grâce au bon comportement du produit :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_k^{\leq s} \times \mathcal{M}_\ell^{\leq t} & \to & \mathcal{M}_{k+\ell}^{\leq s+t} \\ (f,g) & \mapsto & fg. \end{array}$$

Remarques 131- i) Une forme quasimodulaire de poids k et profondeur nulle est une forme modulaire de poids k.

ii) Puisque les formes modulaires non constantes sont de poids strictement positif, si f est une forme quasimodulaire alors

$$\mathrm{Prof}(f) \leq \frac{\mathrm{Poids}(f)}{2}.$$

D'autre part $\mathrm{Poids}(f)$ est pair.

***Théorème* 132–** *La somme sur le poids k des espaces $\mathcal{M}_k^{\infty}$ est directe.*

Démonstration. Soit $f_1, \dots, f_r$ des formes quasimodulaires telles qu'aucune n'est identiquement nulle et leur somme est nulle. Quitte à les réordonner et à sommer celles de même poids, on considère $k_1 < \cdots < k_r$ la suite de leurs poids respectifs. On note s le maximum de leurs profondeurs. On fixe $z \in \mathcal{H}$. Pour tout entier d, on a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & d-1 \\ 1 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La relation de quasimodularité implique que le polynôme

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{s} \mathrm{Q}_j(f_i)(z)(z+\mathrm{X})^{k_i+s-j}$$

s'annule en d et donc une infinité de fois. Son terme de plus haut degré, $\mathrm{Q}_0(f_r)(z) = f_r(z)$, est donc nul et ce pour tout choix de $z \in \mathcal{H}$. L'hypothèse de départ est contredite. □

On montre dans le théorème suivant, et c'est l'un des intérêts des formes quasimodulaires, que l'anneau gradué des formes quasimodulaires est stable par la dérivation.

***Théorème* 133–** *Soit $f \in \mathcal{M}_k^s$ non constante, alors $\mathrm{D}f \in \mathcal{M}_{k+2}^{s+1}$. Plus précisément,*

$$\mathrm{Q}_0(\mathrm{D}f) = \mathrm{D}f,$$

$$\mathrm{Q}_n(\mathrm{D}f) = \mathrm{D}(\mathrm{Q}_n f) + \frac{k-n+1}{2i\pi}\mathrm{Q}_{n-1}(f)$$

si $1 \leq n \leq s$ et

$$\mathrm{Q}_{s+1}(\mathrm{D}f) = \frac{k-s}{2i\pi}\mathrm{Q}_s(f).$$

Démonstration. Puisque

$$\mathrm{D}\,\mathrm{X}(\mathrm{A}) = -\frac{1}{2i\pi}\mathrm{X}(\mathrm{A})^2$$

on a, par dérivation de (3.3), l'égalité

$$\mathrm{D}\left(f \underset{k}{|} \mathrm{A}\right) = \sum_{j=0}^{s} \mathrm{D}\Big(\mathrm{Q}_j(f)\Big)\mathrm{X}(\mathrm{A})^j - \frac{j}{2i\pi}\mathrm{Q}_j(f)\mathrm{X}(\mathrm{A})^{j+1}. \tag{3.13}$$

La comparaison de (3.13) et (3.6) et l'utilisation de (3.5) conduisent à

$$\left(\mathrm{D}f \underset{k+2}{|} \mathrm{A}\right) = \sum_{j=0}^{s} \mathrm{D}\Big(\mathrm{Q}_j(f)\Big)\mathrm{X}(\mathrm{A})^j - \frac{j}{2i\pi}\mathrm{Q}_j(f)\mathrm{X}(\mathrm{A})^{j+1} + \frac{k}{2i\pi}\mathrm{Q}_j(f)\mathrm{X}(\mathrm{A})^{j+1}. \tag{3.14}$$

Le quasimodularité de $\mathrm{D}f$ ainsi que les valeurs de $\mathrm{Q}_n(\mathrm{D}f)$ découlent de (3.14). Les développements de Fourier des $\mathrm{Q}_n(\mathrm{D}f)$ n'ont que des coefficients d'indice positifs puisque c'est le cas des coefficients $\mathrm{Q}_n(f)$. ☐

Remarque 134 - Soit $n \in \{0, \dots, s+1\}$. Le théorème 133 est équivalent à

$$[\mathrm{Q}_n, \mathrm{D}] = \frac{k-n+1}{2i\pi}\mathrm{Q}_{n-1}$$

où on a noté [,] le commutateur.

Soit f une forme modulaire de poids k. En divisant l'équation (3.1) par $\left(f \underset{k}{|} \mathrm{A}\right) = f$, on a

$$(cz+d)^{-2}\frac{\mathrm{D}f}{f}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{D}f}{f}(z) + \frac{k}{2i\pi}\frac{c}{cz+d}. \tag{3.15}$$

Pour garantir l'holomorphie sur $\mathcal{H}$ de $\mathrm{D}f/f$, il est suffisant que f ne s'annule pas sur $\mathcal{H}$. Si on veut construire une forme quasimodulaire de poids 2, il suffit donc de prendre une forme modulaire sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ne s'annulant pas sur $\mathcal{H}$. Une telle forme s'annulera nécéssairement à la pointe infinie (d'après le théorème 32) mais au même ordre que sa dérivée comme on le voit sur le développement de Fourier. On choisit alors pour f la fonction Δ.

***Proposition* 135–** *La fonction* E_2 *définie par*

$$\mathrm{E}_2 := \frac{\mathrm{D}\Delta}{\Delta} \tag{3.16}$$

est une forme quasimodulaire de poids 2 *et profondeur* 1*. On a*

$$\mathrm{Q}_1(\mathrm{E}_2) = \frac{6}{i\pi}.$$

La notation est justifiée par la proposition suivante que l'on comparera à l'équation (2.6).

***Proposition* 136–** *Le développement de Fourier de* E_2 *est donné par*

$$\mathrm{E}_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_1(n)e^{2i\pi nz}.$$

Il existe différentes preuves de ce développement. On en donne une utilisant l'expression en produit de Δ. Une autre sera donnée en annexe B.14. Pour simplifier l'écriture, on définit la fonction

$$\begin{array}{cccc} e & : & \mathcal{H} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & e^{2i\pi z}. \end{array}$$

Cette fonction est 1-périodique et vérifie $\mathrm{D}e = e$.

***Proposition* 137–** *Pour tout* $z \in \mathcal{H}$, *on a*

$$\Delta(z) = e(z)\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - e(nz))^{24}.$$

Noter que la convergence du produit résulte de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|e(nz)| = \sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2\pi n\,\mathrm{I}m\,z}$$

(voir l'annexe B.9). Soit

$$\eta(z) = e\left(\frac{z}{24}\right)\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - e(nz)).$$

Pour démontrer la proposition 137 on commence par démontrer le lemme suivant [a].

***Lemme* 138–** *La fonction* η *vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\eta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\eta(z).$$

Démonstration. En développant le logarithme comme indiqué dans la proposition 259, on calcule :

$$\begin{aligned} e\left(-\frac{z}{24}\right)\eta(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\exp\log(1 - e(nz)) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e(knz)}{k}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{e(-kz) - 1}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

---

a. Le logarithme que nous considérons est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $\log(z) = \log(|z|) + i\arg(z)$ avec $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et coïncide avec le logarithme néperien sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier, $\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log z\right) = \sqrt{|z|}e^{i\arg(z)/2}$. Pour les détails, se reporter à l'annexe B.3

l'interversion étant justifiée par la convergence de

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{e(knz)}{k}\right|.$$

L'égalité du lemme équivaut à

$$\frac{e\left(\frac{1}{24z}\right)\eta\left(-\frac{1}{z}\right)}{e\left(-\frac{z}{24}\right)\eta(z)} = \sqrt{\frac{z}{i}}\,e\left(\frac{z+1/z}{24}\right).$$

Par (3.17), elle est donc conséquence de l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{e(-kz)-1}-\frac{1}{e(k/z)-1}\right) = i\frac{\pi}{12}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\log(-iz). \tag{3.18}$$

Or,

$$\mathrm{cotan}(\pi kz) = i + \frac{2i}{e(kz)-1}$$

l'égalité (3.18) équivaut donc à l'égalité

$$\frac{1}{2}\log(-iz) = -i\frac{\pi}{12}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\mathrm{cotan}(\pi kz)+\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi k}{z}\right)\right).$$

Soit $z \in \mathcal{H}$. On introduit

$$u \mapsto f_z(u) = \mathrm{cotan}(u)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{u}{z}\right).$$

Pour tout entier n, on pose $\nu_n = (n+1/2)\pi$ puis

$$u \mapsto g_{n,z}(u) = \frac{1}{u}f_z(\nu_n u).$$

Cette fonction $g_{n,z}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Elle a un pôle d'ordre 3 en 0 et des pôles simples en chacun des points $u = \pi k/\nu_n$ et $u = \pi kz/\nu_n$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$. En $u = \pi k/\nu_n$, le résidu est :

$$\mathrm{Res}_{\pi k/\nu_n}(g_{n,z}) = \frac{1}{\pi k}\,\mathrm{cotan}(\frac{\pi k}{z}).$$

En $u = \pi kz/\nu_n$, le résidu est :

$$\mathrm{Res}_{\pi kz/\nu_n}(g_{n,z}) = \frac{1}{\pi k}\,\mathrm{cotan}(\pi kz).$$

En écrivant le développement limité de $g_{n,z}$ au voisinage de 0 on obtient

$$\mathrm{Res}_0(g_{n,z}) = -\frac{1}{3}(z+z^{-1}).$$

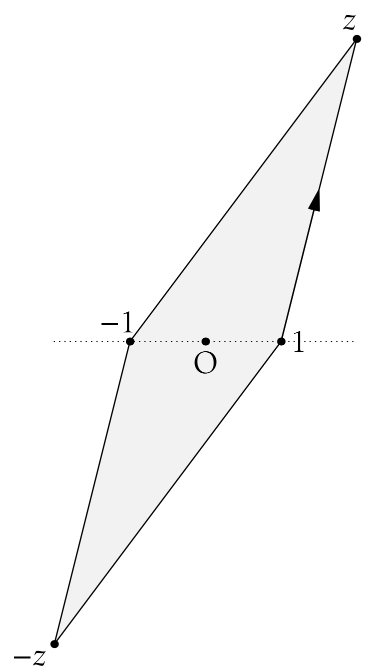


Figure 3.1 – Le contour C et le domaine D

Notons alors C le contour composé des segments reliant dans cet ordre les quatre points $1, z, -1, -z$ et 1, et notons D l'intérieur de ce contour (voir la figure 3.1).

On a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} g_{n,z}(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{\rho\in \mathrm{D}} \mathrm{Res}_{\rho}(g_{n,z}).$$

Or $\pi k/\nu_n \in \mathrm{D}$ si et seulement si $k \in \{-n,\dots,n\}$ et $\pi kz/\nu_n \in \mathrm{D}$ si et seulement si $k \in \{-n,\dots,n\}$. On trouve donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} g_{n,z}(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}(z+z^{-1}) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\mathrm{cotan}(\pi kz) + \mathrm{cotan}\left(\frac{\pi k}{z}\right)\right).$$

Ainsi,

$$\int_{\mathrm{C}} f_z(\nu_n u)\frac{\mathrm{d}u}{8u} = -\frac{i\pi}{12}(z+z^{-1}) + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\mathrm{cotan}(\pi kz) + \mathrm{cotan}\left(\frac{\pi k}{z}\right)\right).$$

On fait tendre n vers l'infini. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{cotan}(\nu_n u) &= i + \frac{2i}{e^{-2\nu_n \operatorname{Im} u}\, e\left(\frac{\nu_n}{\pi}\operatorname{Re} u\right) - 1} \\ &= i + \frac{2ie\left(-\frac{\nu_n}{\pi}\operatorname{Re} u\right)}{e^{-2\nu_n \operatorname{Im}(u)} - e\left(-\frac{\nu_n}{\pi}\operatorname{Re} u\right)}.\end{aligned}$$

Or ν_n tend vers $+\infty$ et

i) sur les segments ouverts reliant 1 à z et z à -1, on a $\mathrm{I}m\,u > 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2\nu_n \mathrm{I}m\,u} = 0 \text{ puis } \lim_{n\to\infty} \operatorname{cotan}(\nu_n u) = -i.$$

ii) sur les segments ouverts reliant -1 à $-z$ et $-z$ à 1, on a $\mathrm{I}m\,u < 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2\nu_n \mathrm{I}m\,u} = +\infty \text{ puis } \lim_{n\to\infty} \operatorname{cotan}(\nu_n u) = i.$$

De même

i) pour u sur $]z,-1[$ et $]-1,-z[$,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cotan}\left(\frac{\nu_n u}{z}\right) = -i;$$

ii) pour u sur $]-z,1[$ et $]1,z[$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cotan}\left(\frac{\nu_n u}{z}\right) = i.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{C}} f_z(\nu_n u)\frac{\mathrm{d}u}{8u} = \int_{\mathrm{C}} \lim_{n\to\infty} f_z(\nu_n u)\frac{\mathrm{d}u}{8u} = [\int_1^z - \int_z^{-1} + \int_{-1}^{-z} - \int_{-z}^{1}](\frac{\mathrm{d}u}{8u}).$$

Or,

$$[-\int_z^{-1} + \int_{-1}^{-z}]\frac{\mathrm{d}u}{u} = [-\int_{-z}^{1} + \int_1^z]\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

donc

$$[\int_1^z - \int_z^{-1} + \int_{-1}^{-z} - \int_{-z}^{1}](\frac{\mathrm{d}u}{8u}) = [\int_1^{-z} + \int_1^z](\frac{\mathrm{d}u}{4u}).$$

On a

$$[\int_1^{-z} + \int_1^z](\frac{\mathrm{d}u}{4u}) = \frac{1}{4}(\log(z) + \log(-z))$$

(voir l'équation (B.1)). Or $z \in \mathcal{H}$ donc $\arg(z) > 0$ puis $\arg(-z) = \arg(z) - \pi$. Ainsi

$$\log(z) + \log(-z) = 2\left(\log|z| + i\arg z - i\frac{\pi}{2}\right) = 2(\log z + \log(-i)).$$

Puisque $\arg z + \arg(-i) \in [-\pi/2, \pi/2]$, le lemme 255 implique

$$\log(z) + \log(-z) = 2\log\left(\frac{z}{i}\right).$$

Finalement on obtient

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{z}{i}\right) = -\frac{i\pi}{12}(z + z^{-1}) + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\operatorname{cotan}(\pi k z) + \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi k}{z}\right)\right)$$

ce qui démontre le lemme. □

Démonstration de la proposition 137. Grâce au lemme 138, la fonction η^{24} appartient à l'espace des formes paraboliques de poids 12 engendré par Δ. Donc η^{24} et Δ sont proportionnelles. Elles sont égales en comparant les premiers coefficients de Fourier. □

Démonstration de la proposition 136. En prenant $u_n(z) = (1 - e(nz))^{24} - 1$ dans la proposition 277, la proposition 137 implique

$$\frac{\mathrm{D}\Delta}{\Delta}(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne(nz)}{1-e(nz)} = 1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{\ell=1}^{+\infty} e(\ell nz)$$

et on obtient le développement de E_2 en permutant la somme en n et la somme en ℓ. □

Remarque 139 - Considérons la fonction

$$f = \frac{\mathrm{E}_4^3}{\Delta}(\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4\mathrm{E}_2).$$

C'est une fonction quasimodulaire de poids 6 et profondeur 1 et son développement de Fourier est

$$-\frac{1}{720}f(z) = 1 + 762e^{2i\pi z} + 210360e^{4i\pi z} + 25100460e^{6i\pi z} + 1267943784e^{8i\pi z} + \mathrm{O}\left(e^{10i\pi z}\right).$$

Cependant ce n'est pas une forme quasimodulaire puisque

$$\mathrm{Q}_1(f) = -\frac{6}{i\pi}\frac{\mathrm{E}_4^4}{\Delta} = -\frac{6}{i\pi}\left(\frac{1}{e^{2i\pi z}} + 984 + \mathrm{O}\left(e^{2i\pi z}\right)\right).$$

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des formes modulaires, il existe des formes quasimodulaires dont le développement de Fourier a un terme constant nul et qui ne se factorisent pas par Δ.

3.2 Théorèmes de structure

***Théorème* 140–** *Soit $f \in \mathcal{M}_k^s$. Il existe des formes modulaires $\mathrm{F}_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$ telles que*

$$f = \sum_{i=0}^{s} \mathrm{F}_i\mathrm{E}_2^i.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{M}_k^{\leq s} = \bigoplus_{i=0}^{s} \mathcal{M}_{k-2i}\mathrm{E}_2^i.$$

Démonstration. Montrons d'abord

$$\mathcal{M}_k^{\leq s} = \sum_{i=0}^{s} \mathcal{M}_{k-2i} \mathrm{E}_2^i.$$

Pour les formes de profondeur nulle (donc les formes modulaires), le résultat est vrai. On le suppose vrai pour les formes de profondeurs inférieures ou égales à $s-1$ et on considère $f \in \mathcal{M}_k^s$. On se ramène au cas des profondeurs inférieures ou égales à $s-1$ en remarquant que

$$f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s \mathrm{Q}_s(f)\mathrm{E}_2^s$$

est de profondeur au plus $s-1$.

On montre ensuite que la somme est directe. Soit $f_0, \dots, f_s$ des formes modulaires telles que, pour tout i, le poids de f_i est $k-2i$. On suppose $f_s \neq 0$ et on pose

$$\mathrm{F} = \sum_{i=0}^{s} f_i \mathrm{E}_2^s.$$

Par (3.7), on a

$$\mathrm{Q}_s(\mathrm{F}) = \mathrm{Q}_s(f_s\mathrm{E}_2^s) = f_s \mathrm{Q}_s(\mathrm{E}_2^s) = \left(\frac{6}{i\pi}\right)^s f_s \mathrm{E}_2^s.$$

On en déduit $\mathrm{Q}_s(\mathrm{F}) \neq 0$ et donc $\mathrm{F} \neq 0$. □

Remarque 141 - Reconsidérons la fonction

$$f = \frac{\mathrm{E}_4^3}{\Delta}(\mathrm{E}_6 - \mathrm{E}_4\mathrm{E}_2)$$

étudiée page 81. Elle n'est pas de la forme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2\mathrm{E}_2$ avec deux formes modulaires F_1, F_2. Si c'était le cas, la considération de la profondeur permettrait de déduire de

$$\frac{\mathrm{E}_4^3}{\Delta}\mathrm{E}_6 - \mathrm{F}_1 = \left(\frac{\mathrm{E}_4^4}{\Delta} + \mathrm{F}_2\right)\mathrm{E}_2$$

que

$$\mathrm{F}_1 = \frac{\mathrm{E}_4^3}{\Delta}\mathrm{E}_6 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2 = -\frac{\mathrm{E}_4^4}{\Delta}$$

ce qui est incompatible avec la modularité de F_1 et F_2.

Remarque 142 - La relation de transformation de E_2 implique, qu'avec les notations du théorème 140, on a

$$\mathrm{Q}_j(f) = \left(\frac{6}{i\pi}\right)^j \sum_{\ell=j}^{s} \binom{\ell}{j} \mathrm{F}_\ell \mathrm{E}_2^{\ell-j}.$$

pour tout $j \in \{0, \dots, s\}$.

On montre ensuite un second théorème de structure faisant intervenir les dérivées de formes modulaires.

***Théorème* 143–** *Soit $f \in \mathcal{M}_k^s$. Il existe un réel α et pour tout $i \in \{0, \dots, \min(s, k/2-1)\}$, il existe des formes modulaires $F_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$ tels que*

$$f = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{s} D^i F_i & \text{si } s < \dfrac{k}{2} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k/2-2} D^i F_i + \alpha D^{k/2-1} E_2 & \text{si } s = \dfrac{k}{2}. \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{M}_k^{\leq k/2} = \bigoplus_{i=0}^{k/2-2} D^i \mathcal{M}_{k-2i} \oplus \mathbb{C} D^{k/2-1} E_2.$$

Démonstration. On procède par descente sur la profondeur s grâce à la remarque suivante. On a besoin de $g \in \mathcal{M}_{k-2s}$ tel que $Q_s(D^s g) = Q_s(f)$. On aura ainsi $f - D^s g \in \mathcal{M}_k^{\leq s-1}$. Soit donc $g \in \mathcal{M}_{k-2s}$, par réitération du théorème 133, on a

$$Q_s(D^s g) = \frac{s!}{(2i\pi)^s} \binom{k-s-1}{s} g. \tag{3.19}$$

Si $\binom{k-s-1}{s} \neq 0$, ce qui est le cas dès que $s \neq \frac{k}{2}$, on choisit

$$g := \frac{(2i\pi)^s}{s!} \frac{1}{\binom{k-s-1}{s}} Q_s(f)$$

qui appartient à $\mathcal{M}_{k-2s}$ grâce au corollaire 129. Si $s = \frac{k}{2}$, ce procédé ne peut pas être efficace puisque le coefficient binomial est nul (cela correspond au fait que $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$). En revanche, par réitération du théorème 133, on a

$$Q_{k/2}\left(D^{k/2-1} E_2\right) = \frac{(k/2-1)!}{(2i\pi)^{k/2-1}} Q_1(E_2) = \frac{(k/2-1)!}{(2i\pi)^{k/2-1}} \frac{6}{i\pi}. \tag{3.20}$$

Puisque $Q_{k/2}(f) \in \mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$, on peut poser

$$\alpha := \frac{i\pi}{6} \frac{(2i\pi)^{k/2-1}}{(k/2-1)!} Q_{k/2}(f) \in \mathbb{C}$$

pour obtenir $f - \alpha D^{k/2-1} E_2 \in \mathcal{M}_k^{\leq k/2-1}$. En utilisant $\mathcal{M}_2 = \{0\}$, on a donc

$$\mathcal{M}_k^{\leq k/2} = \sum_{i=0}^{k/2-2} D^i \mathcal{M}_{k-2i} + \mathbb{C} D^{k/2-1} E_2.$$

Montrons maintenant que la somme est directe. Soit $f_0, \dots, f_s$ des formes modulaires telles que, pour tout i, le poids de f_i est $k-2i$. On suppose $s < k/2$ et $f_s \neq 0$. Soit

$$\mathrm{F} = \sum_{i=0}^{s} \mathrm{D}^i f_i.$$

Par (3.19), on a $\mathrm{Q}_s(\mathrm{D}^s f_s) \neq 0$ donc $\mathrm{Q}_s(\mathrm{F}) \neq 0$ et $\mathrm{F} \neq 0$. Considérons ensuite $f_0, \dots, f_{k/2-2}$ des formes modulaires telles que, pour tout i, le poids de f_i est $k-2i$ et $\alpha \neq 0$. Soit

$$\mathrm{F} = \sum_{i=0}^{k/2-2} \mathrm{D}^i f_i + \alpha \mathrm{D}^{k/2-1} \mathrm{E}_2.$$

Par (3.20), on a $\mathrm{Q}_{k/2}(\mathrm{F}) = \alpha \mathrm{Q}_{k/2}\left(\mathrm{D}^{k/2-1}\mathrm{E}_2\right) \neq 0$ donc $\mathrm{F} \neq 0$. □

Remarque 144 - Peut-on se passer de E_2 ? On voudrait une forme modulaire $f \in \mathcal{M}_\ell$ et un entier r tels que $\mathrm{D}^r f \in \mathcal{M}_k^{k/2}$. Cela implique $k = \ell + 2r$ et $k/2 = \ell + r$ d'où $\ell = 0$. Mais $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ et $\mathrm{D}\mathcal{M}_0 = \{0\}$. La fonction E_2 agit donc comme une « une dérivée non nulle d'une forme modulaire de poids 0 ».

Ce théorème de structure permet de linéariser des produit de convolution (additive) de fonctions sommes de diviseurs faisant intervenir σ_1. On a par exemple, $\mathrm{E}_2^2 \in \mathcal{M}_4^{\leq 2} = \mathcal{M}_4 \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{DE}(2) = \mathbb{C}\mathrm{E}_4 \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{DE}(2)$. En identifiant les coefficients de Fourier d'indice 0 et 1, on obtient $\mathrm{E}_2^2 = \mathrm{E}_4 + 12\,\mathrm{DE}(2)$. L'égalisation des coefficients de Fourier conduit alors à l'égalité

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sigma_1(a)\sigma_1(n-a) = \frac{1}{12}\left(\sigma_1(n) + 5\sigma_3(n) - 6n\sigma_1(n)\right)$$

pour tout entier $n \geq 1$. De la même façon, en utilsant $\mathrm{E}_4\,\mathrm{DE}_2 \in \mathcal{M}_8^{\leq 3} = \mathcal{M}_8 \oplus \mathrm{D}\mathcal{M}_6 \oplus \mathrm{D}^2\mathcal{M}_4$, on obtient

$$\sum_{a=1}^{n-1} a\sigma_1(a)\sigma_3(n-a) = -\frac{n}{40}\left(n\sigma_3(n) - \frac{7}{6}\sigma_5(n) + \frac{1}{6}\sigma_1(n)\right)$$

pour tout entier $n \geq 1$.

3.3 Opérateurs de Hecke quasimodulaires

Dans ce paragraphe, on note la dépendance en k dans les opérateurs de Hecke. On commence par montrer que les opérateurs de Hecke et la dérivation « commutent ».

***Proposition* 145–** *Pour toute fonction $f \in \mathrm{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$, on a*

$$\mathrm{T}_{k+2,n}(\mathrm{D}f) = n\,\mathrm{D}(\mathrm{T}_{k,n} f).$$

Démonstration. On applique la proposition 87 et on utilise que la dériviation est une multiplication de chaque coefficient de Fourier par son ordre pour obtenir

$$\widehat{\mathrm{D}(\mathrm{T}_{k,n})}(m) = m \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \widehat{f\left(\frac{mn}{d^2}\right)}.$$

Ensuite, on dérive f et on applique la proposition 87 à la fonction obtenue. On obtient

$$\widehat{\mathrm{T}_{k+2,n}(\mathrm{D}f)}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k+1}\widehat{\mathrm{D}f}\left(\frac{mn}{d^2}\right) = \sum_{d|(m,n)} d^{k+1}\frac{mn}{d^2}\widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right) = n\widehat{\mathrm{D}(\mathrm{T}_{k,n}f)}(m).$$

□

On en déduit le théorème suivant.

***Théorème* 146–** *L'image par l'opérateur de Hecke* $\mathrm{T}_{k,n}$ *de toute forme quasimodulaire de poids k et profondeur s est une forme quasimodulaire de poids k et profondeur s.*

Démonstration. On pose $\mathrm{G}_2 = -\mathrm{E}_2/24$. Soit $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ de profondeur s. On note $s' = \min(s, k/2-2)$. D'après le théorème 143, il existe des formes modulaires $f_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$, des complexes c_i et un complexe $c_{k/2}$ non nul si et seulement si $s = k/2$ tels que

$$f = \sum_{i=0}^{s'} c_i \mathrm{D}^i f_i + c_{k/2}\mathrm{D}^{k/2-1}\mathrm{G}_2.$$

Grâce à la proposition 145, on a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{k,n}f &= \sum_{i=0}^{s'} c_i \mathrm{T}_{k,n}(\mathrm{D}^i f_i) + c_{k/2}\mathrm{T}_{k,n}(\mathrm{D}^{k/2-1}\mathrm{G}_2)\\ &= \sum_{i=0}^{s'} n^i c_i \mathrm{D}^i(\mathrm{T}_{k-2i,n}f_i) + n^{k/2-1}c_{k/2}\mathrm{D}^{k/2-1}(\mathrm{T}_{2,n}\mathrm{G}_2).\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{T}_{k-2i,n}f_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$ et $\mathrm{T}_{2,n}\mathrm{G}_2 = \sigma_1(n)\mathrm{G}_2$ (voir l'exemple page 46), on a $\mathrm{T}_{k,n}f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$. D'autre part, $\mathrm{T}_{k,n}f$ est de profondeur s si et seulement si $c_s \neq 0$ et donc si et seulement si f est de profondeur s. □

On peut alors étendre la notion de formes modulaires primitives.

***Proposition* 147–** *Soit* $k \geq 2$. *Il existe une base de* $\mathcal{M}_k^{\leq\infty}$ *formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke. Plus précisément, on définit*

$$\mathrm{H}_k^{\leq\infty} = \bigcup_{i=0}^{k/2-2} \mathrm{D}^i \mathrm{H}_{k-2i}^*$$

et
$$\mathrm{N}_k^{\leq\infty} = \left\{\mathrm{D}^i\mathrm{G}_{k-2i}\colon\ 0 \leq i \leq \frac{k}{2} - 2\right\} \bigcup \left\{\mathrm{D}^{k/2-1}\mathrm{G}_2\right\}.$$
Alors l'ensemble $\mathrm{H}_k^{\leq\infty} \cup \mathrm{N}_k^{\leq\infty}$ *est formé de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke et constitue une base pour* $\mathcal{M}_k^{\leq\infty}$.

Démonstration. On a
$$\mathcal{M}_{k-2i} = \mathbb{C}\mathrm{G}_{k-2} \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{H}_{k-2i}^*)$$
de sorte que l'injectivité de D implique
$$\mathrm{D}^i\mathrm{M}_{k-2i} = \mathbb{C}\mathrm{D}^i\mathrm{G}_{k-2i} \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{D}^i\mathrm{H}_{k-2i}^*).$$
Si $f \in \mathrm{H}_{k-2i}^*$ alors l'égalité $\mathrm{T}_{n,k-2i}f = \widehat{f}(n)f$ implique $\mathrm{T}_{n,k}(\mathrm{D}^i f) = n^i\widehat{f}(n)\mathrm{D}^i f$. De même $\mathrm{T}_{n,k}(\mathrm{D}^i\mathrm{G}_{k-2i}) = n^i\sigma_{k-2i-1}(n)\mathrm{D}^i\mathrm{G}_{k-2i}$. □

3.4 Formes modulaires presque holomorphes

La notion de forme modulaire presque holomorphe est proche de la notion de forme quasimodulaire : au lieu de garder l'holomorphie puis de modifier de façon mesurable la modularité, on garde la modularité en modifiant de façon mesurable l'holomorphie. Nous allons montrer que les notions sont finalement les mêmes.

***Définition* 148–** *Une forme modulaire presque holomorphe de poids k et profondeur s est une fonction* $\mathrm{F}\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *telle que*

– *pour toute matrice* $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, *on a* $\left(\mathrm{F}\underset{k}{|}\gamma\right) = \mathrm{F}$;
– *il existe des applications holomorphes* $f_0, \dots, f_s$ *de* $\mathcal{H}$ *dans* $\mathbb{C}$ *avec* f_s *non identiquement nulle telle que*
$$\mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z)}{(\mathrm{Im}\, z)^n}$$
pour tout $z \in \mathcal{H}$;
– *pour tout n, la fonction* f_n *admet un développement de Fourier sans coefficient d'indice strictement négatif :*
$$f_n(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{f_n}(j)e(jz).$$

On définit
$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{Y} & : & \mathcal{H} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ & & z & \mapsto & \mathrm{Im}(z) \end{array}$$
et, les fonctions f_n de la définition 148, sont notées $\mathrm{R}_n(\mathrm{F})$. Ainsi, une forme modulaire presque holomorphe est-elle de la forme
$$\mathrm{F} = \sum_{n=0}^{s} \frac{\mathrm{R}_n(\mathrm{F})}{\mathrm{Y}^n}.$$

La possibilité de définir R_n est justifiée par le lemme d'unicité suivant.

***Lemme* 149–** *Si $f_0, \ldots, f_s$ et $g_0, \ldots, g_t$ sont des applications holomorphes de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$ telles que*

$$\sum_{n=0}^{s} \frac{f_n}{Y^n} = \sum_{n=0}^{t} \frac{g_n}{Y^n}$$

alors $s = t$ et $f_n = g_n$ pour tout n.

Démonstration. Quitte à ajouter des fonctions nulles, on peut supposer $s = t$. On pose alors $h_n = f_n - g_n$ pour tout n et, par l'absurde on suppose l'existence d'un plus grand entier v tel que la fonction h_v ne soit pas la fonction nulle. En dérivant par rapport à x d'une part et à y d'autre part l'égalité

$$\sum_{n=0}^{v} \frac{h_n(x+iy)}{y^n} = 0 \tag{3.21}$$

on trouve

$$\sum_{n=0}^{v} \frac{h'_n}{Y^n} = 0 \tag{3.22}$$

et

$$\sum_{n=0}^{v} \left(\frac{ih'_n}{Y^n} - n\frac{h_n}{Y^{n+1}} \right) = 0. \tag{3.23}$$

Après soustraction de (3.23) au produit par i de (3.22) on trouve

$$\sum_{n=1}^{v} \frac{nh_n}{Y^n} = 0. \tag{3.24}$$

On a donc supprimé de notre somme la fonction h_0. On itère v fois le procédé qui a permis de passer de (3.21) à (3.24) jusqu'à trouver $h_v = 0$. Cela contredit l'existence de v et achève la démonstration. □

Remarques 150– i) Une forme modulaire presque holomorphe de poids k et profondeur nulle est une forme modulaire de poids k.

ii) La dernière condition de la définition porte sur les coefficients de développements de Fourier dont l'existence est fournie par les points précédents. En effet, $\left(F \underset{k}{|} \gamma\right) = F$ conduit à

$$\sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z+1)}{Y(z)^n} = \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z)}{Y(z)^n}.$$

On déduit alors du lemme 149 que les fonctions f_n sont toutes périodiques de période 1. Étant par ailleurs holomorphes, elles admettent un développement de Fourier.

Le point clé de notre démarche est que les fonctions $R_n(F)$ sont des formes qusimodulaires. La preuve est comparable à la preuve de la proposition 126.

***Proposition* 151–** *Soit*

$$F = \sum_{n=0}^{s} \frac{R_n(F)}{Y^n}$$

une forme modulaire presque holomorphe de poids k et profondeur s. Alors, chaque coefficient $R_n(F)$ est une forme quasimodulaire de poids $k-2n$ et profondeur $s-n$. De plus,

$$Q_j \circ R_n = (2i)^j \binom{n+j}{j} R_{n+j}$$

pour tout j.

Démonstration. On note $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En utilisant

$$\frac{1}{Y(\gamma z)} = \frac{|cz+d|^2}{Y(z)} = (cz+d)\left(-2ic + \frac{cz+d}{Y(z)}\right)$$

on trouve

$$\left(F\underset{k}{|}\gamma\right) = \sum_{j=0}^{s}\left(\sum_{n=j}^{s}(-2i)^{n-j}\binom{n}{j}\left(R_n(F)\underset{k-2n}{|}\gamma\right)X(\gamma)^{n-j}\right)\frac{1}{Y^j}. \tag{3.25}$$

Puisque $\left(F\underset{k}{|}\gamma\right) = F$, le lemme 149 implique

$$R_j(F) = \sum_{n=j}^{s}(-2i)^{n-j}\binom{n}{j}\left(R_n(F)\underset{k-2n}{|}\gamma\right)X(\gamma)^{n-j}$$

pour tout j. On peut réécrire ces équations en

$$M(-2i\,X(\gamma))\begin{pmatrix} \left(R_0(f)\underset{k}{|}\gamma\right) \\ \vdots \\ \left(R_s(f)\underset{k-2s}{|}\gamma\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0(f) \\ \vdots \\ R_s(f) \end{pmatrix}.$$

Grâce au lemme 125 on obtient

$$\begin{pmatrix} \left(R_0(f)\underset{k}{|}\gamma\right) \\ \vdots \\ \left(R_s(f)\underset{k-2s}{|}\gamma\right) \end{pmatrix} = M(2i\,X(\gamma))\begin{pmatrix} R_0(f) \\ \vdots \\ R_s(f) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\left(\mathrm{R}_n(\mathrm{F}) \underset{k-2n}{|} \gamma\right) = \sum_{\beta=n}^{s} \binom{\beta}{n} (2i\,\mathrm{X}(\gamma))^{\beta-n}\,\mathrm{R}_\beta(\mathrm{F}).$$

Ceci conduit au résultat puisque les conditions sur les développements de Fourier des coefficients Q_n des formes quasimodulaires et des coefficients R_n des formes modulaires presque holomorphes sont identiques. □

Remarque 152 - On a une action sur les vecteurs colonnes de fonctions de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$ à la remarque 127. On a montré que si si f est modulaire presque holomorphe de poids k et profondeur s alors

$$\begin{pmatrix} \mathrm{R}_0(f) \\ \vdots \\ \mathrm{R}_n(f) \\ \vdots \\ \mathrm{R}_s(f) \end{pmatrix} |_k \gamma = \mathrm{M}\,(2i\,\mathrm{X}(\gamma)) \begin{pmatrix} \mathrm{R}_0(f) \\ \vdots \\ \mathrm{R}_n(f) \\ \vdots \\ \mathrm{R}_s(f) \end{pmatrix}.$$

Il faut noter le ressemblance avec la remarque 127. La relation de quasimodularité et l'action modulaire sur les formes presque holomorphe se ramènent à une multiplication par un élément d'un groupe à un paramètre.

Puisque $\mathrm{Q}_j\mathrm{R}_0 = (2i)^j\mathrm{R}_j$ alors, si F est une forme modulaire presque holomorphe de poids k, il existe une forme quasimodulaire $f (= \mathrm{R}_0(\mathrm{F}))$ de même poids et profondeur telle que

$$\mathrm{F} = \sum_{n=0}^{s} \frac{\mathrm{Q}_n(f)}{(2i\,\mathrm{Y})^n}. \tag{3.26}$$

Grâce aux lemmes 149 et 121, cette forme quasimodulaire f est unique. Réciproquement, si f est quasimodulaire de poids k, on définit F par (3.26), ainsi :

$$\mathrm{F} = \sum_{n=0}^{s} \frac{\mathrm{Q}_n(f)/(2i)^n}{\mathrm{Y}^n}.$$

Grâce à (3.25), on a

$$\left(\mathrm{F} \underset{k}{|} \gamma\right) = \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{n=j}^{s} \binom{n}{j} \left(\mathrm{Q}_n(f) \underset{k-2n}{|} \gamma\right) (-\mathrm{X}(\gamma))^{n-j} \right) \frac{1}{(2i\,\mathrm{Y})^j}.$$

On a

$$\mathrm{M}\,(-\mathrm{X}(\gamma)) \begin{pmatrix} \left(\mathrm{Q}_0(f) \underset{k}{|} \gamma\right) \\ \vdots \\ \left(\mathrm{Q}_s(f) \underset{k-2s}{|} \gamma\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Q}_0(f) \\ \vdots \\ \mathrm{Q}_s(f) \end{pmatrix}$$

donc
$$\left(\mathrm{F}\underset{k}{|}\gamma\right) = \sum_{j=0}^{s} \frac{\mathrm{Q}_j(f)}{(2i\,\mathrm{Y})^j} = \mathrm{F}.$$
On déduit le résultat d'idientification suivant.

***Théorème* 153–** *L'application linéaire*
$$\Phi\colon f \mapsto \sum_{n=0}^{s} \frac{\mathrm{Q}_n(f)}{(2i\,\mathrm{Y})^n}$$
de l'espace des formes quasimodulaires de poids k et profondeur inférieure à s dans l'espace des formes modulaires presque holomorphes de poids k et profondeur inférieure à s est un isomorphisme d'inverse
$$\Phi^{-1}\colon \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n}{\mathrm{Y}^n} \mapsto f_0.$$

Les formes quasimodulaires étant décrites à l'aide de E_2 et des dérivées de formes modulaires (voir § 3.2), il nous reste à étudier l'image de E_2 et de la dérivation D par Φ. Puisque $\mathrm{Q}_1(\mathrm{E}_2) = \dfrac{6}{i\pi}$, la forme modulaire presque holomorphe image par Φ de E_2 est
$$\mathrm{E}_2^* = \mathrm{E}_2 - \frac{3}{\pi\,\mathrm{Y}}.$$
Enfin l'image de D est
$$\delta = \Phi\,\mathrm{D}\Phi^{-1}.$$
Les fonctions presque holomorphes ne sont certes pas holomorphes mais elles sont dérivables comme fonction de $\mathbb{R}^2$ donc, après changement de variables comme fonctions de z et $\overline{z}$. On a
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Si f est holomorphe, il résulte des conditions de Cauchy-Riemann que
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \mathrm{D}(f) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$
La dérivation D est donc prolongée par $\partial/\partial z$ de sorte que $2iy = (z-\overline{z})$ implique
$$\mathrm{D\,Y} = \frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z} = \frac{1}{2i}.$$
En particulier, la dérivée d'une forme modulaire presque holomorphe
$$\mathrm{F} = \sum_{n=0}^{s} \frac{\mathrm{R}_n(\mathrm{F})}{\mathrm{Y}^n}$$
est
$$\mathrm{DF} = \sum_{n=0}^{s} \frac{\mathrm{DR}_n(\mathrm{F})}{\mathrm{Y}^n} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{s+1} \frac{(n-1)\mathrm{R}_{n-1}(\mathrm{F})}{\mathrm{Y}^n}.$$

***Proposition* 154**— *La dérivation image de* D *dans l'espace des formes modulaires presque holomorphes de poids k est définie par*

$$\delta F = DF - \frac{k}{4\pi Y}F.$$

Démonstration. On calcule

$$\delta F = \Phi\, DR_0(F) = \sum_{n=0}^{s+1} \frac{Q_n\, DR_0(F)}{(2i\,Y)^n}.$$

Grâce au théorème 133 on obtient

$$\delta F = \sum_{n=0}^{s} \frac{DQ_n R_0(F)}{(2i\,Y)^n} + \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{s+1} \frac{(k-n+1)Q_{n-1}R_0(F)}{(2i\,Y)^n}.$$

La proposition 151 implique alors

$$\delta F = \sum_{n=0}^{s} \frac{DR_n(F)}{Y^n} - \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{s+1} \frac{(k-n+1)R_{n-1}(F)}{Y^n}$$

c'est à dire

$$\delta F = DF - \frac{k}{4\pi Y}F.$$

□

3.5 Modularité et équations différentielles

3.5.1) Des équations satisfaites par les séries d'Eisenstein

Puisque DE_2 est une forme quasimodulaire de poids 4 et profondeur 2, elle est combinaison linéaire de E_4 et E_2^2. Par identification des premiers coefficients de Fourier, on trouve

$$DE_2 = \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4). \tag{3.27}$$

De même, DE_4 est une forme quasimodulaire de poids 6 et profondeur 1. Elle est donc combinaison linéaire de E_6 et E_4E_2. On trouve

$$DE_4 = \frac{1}{3}(E_4E_2 - E_6). \tag{3.28}$$

Enfin, DE_6 est une forme quasimodulaire de poids 8 et de profondeur 1. Elle est donc combinaison linéaire de E_4^2 et E_6E_2. On trouve

$$DE_6 = \frac{1}{2}(E_6E_2 - E_4^2). \tag{3.29}$$

Les équations (3.27), (3.28) et (3.29) sont connues sous le nom d'*équations de Ramanujan*. On dérive (3.27) et on utilise (3.28) pour trouver

$$D^2E_2 = \frac{1}{72}E_2^3 - \frac{1}{24}E_2E_4 + \frac{1}{36}E_6. \tag{3.30}$$

En dérivant cette équation et en utilisant (3.27) et (3.29) on trouve

$$D^3E_2 = \frac{1}{288}E_2^4 - \frac{1}{96}E_4^2 - \frac{1}{48}E_2^2E_4 + \frac{1}{36}E_2E_6. \tag{3.31}$$

On multiplie ensuite (3.30) par E_2 puis on reporte le résultat dans (3.31) pour obtenir

$$D^3E_2 = -\frac{1}{96}E_2^4 + E_2\,D^2E_2 + \frac{1}{48}E_2^2E_4 - \frac{1}{96}E_4^2.$$

Élevant (3.27) au carré et reportant le résultat dans l'équation précédente, on obtient

$$D^3E_2 = E_2\,D^2E_2 - \frac{3}{2}(DE_2)^2. \tag{3.32}$$

On en déduit la proposition suivante.

***Proposition* 155–** *La fonction*

$$\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}E_2$$

*est solution de l'*équation de Chazy

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2.$$

En remplaçant dans l'équation (3.32), la fonction E_2 par sa définition $E_2 = \dfrac{D\Delta}{\Delta}$, on trouve une équation différentielle à coefficients constants d'ordre 4 satisfaite par Δ, à savoir

$$2\Delta^3 D^4\Delta - 10\Delta^2 D\Delta D^3\Delta - 3\Delta^2(D^2\Delta)^2 + 24\Delta(D\Delta)^2 D^2\Delta - 13(D\Delta)^4 = 0. \tag{3.33}$$

On verra dans la partie 3.5.2 que Δ satisfait une équation différentielle à coefficients constants d'ordre 3.

L'obtention d'une équation différentielle à coefficients constants d'ordre 3 satisfaite par E_2 a été relativement aisée à partir des équations de Ramanujan. Ce n'est pas si simple pour E_4 et E_6. Cependant, à l'aide des équations de Ramanujan, on trouve

$$\begin{aligned}
DE_4 &= \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6)\\
D^2E_4 &= \frac{5}{36}\left(E_2^2E_4 - 2E_2E_6 + E_4^2\right)\\
D^3E_4 &= \frac{5}{72}\left(E_2^3E_4 - 3E_2^2E_6 + 3E_2E_4^2 - E_4E_6\right).
\end{aligned}$$

On vérifie alors que

$$L_4(E_4, DE_4, D^2E_4, D^3E_4) = 0 \tag{3.34}$$

avec

$$L_4(X,Y,Z,T) = X^3Z^2 - \frac{5}{2}X^2Y^2Z - X^2T^2 + \frac{25}{16}XY^4 + 9XYZT - \frac{36}{5}XZ^3 - \frac{15}{2}Y^3T + \frac{27}{4}Y^2Z^2.$$

De même, les équations de Ramanujan conduisent à

$$DE_6 = \frac{1}{2}\left(E_2E_6 - E_4^2\right) \tag{3.35}$$

$$D^2E_6 = \frac{7}{24}\left(E_2^2E_6 - 2E_2E_4^2 + E_4E_6\right) \tag{3.36}$$

$$D^3E_6 = \frac{7}{72}\left(2E_2^3E_6 - 6E_2^2E_4^2 + 6E_2E_4E_6 - E_4^3 - E_6^2\right). \tag{3.37}$$

On vérifie alors que

$$L_6(E_6, DE_6, D^2E_6, D^3E_6) = 0 \tag{3.38}$$

avec

$$\begin{aligned}L_6(X,Y,Z,T) = {} & X^7Z^3 - \frac{7}{2}X^6Y^2Z^2 - X^6T^3 + \frac{49}{12}X^5Y^4Z + 12X^5YZT^2 - \frac{343}{216}X^4Y^6 \\ & - \frac{28}{3}X^4Y^3T^2 - 48X^4Y^2Z^2T - \frac{72}{7}X^4T^4 + \frac{224}{3}X^3Y^4ZT + 64X^3Y^3Z^3 \\ & + \frac{1152}{7}X^3YZT^3 - \frac{6144}{49}X^3Z^3T^2 - \frac{784}{27}X^2Y^6T - \frac{448}{3}X^2Y^5Z^2 - 128X^2Y^3T^3 \\ & - \frac{3840}{7}X^2Y^2Z^2T^2 + \frac{49152}{49}X^2YZ^4T - \frac{131072}{343}X^2Z^6 + \frac{3136}{27}XY^7Z + 1024XY^4ZT^2 \\ & - \frac{34816}{21}XY^3Z^3T + \frac{32768}{49}XY^2Z^5 - \frac{21952}{729}Y^9 - \frac{3584}{9}Y^6T^2 \\ & + \frac{2048}{3}Y^5Z^2T - \frac{2048}{7}Y^4Z^4.\end{aligned}$$

La provenance des polynômes L_4 et L_6 sera expliquée dans la partie 3.5.4 (voir le théorème 162 et les exemples 177 et 178).

3.5.2) Équations différentielles des formes quasimodulaires

À la partie 3.5.1, on a montré que les séries E_2, E_4 et E_6 sont solutions d'équations différentielles d'ordre 3. On généralise cette remarque à toutes les formes quasimodulaires.

***Proposition* 156–** *La famille*

$$\left\{E_4^iE_6^j : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \mid 4i + 6j = k\right\}$$

est une base de $\mathcal{M}_k$.

k	0	2	4	6	8	10
$\mathcal{B}_k$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{\mathrm{E}_4\}$	$\{\mathrm{E}_6\}$	$\{\mathrm{E}_8 = \mathrm{E}_4^2\}$	$\{\mathrm{E}_{10} = \mathrm{E}_4\mathrm{E}_6\}$

Table 3.1 – La famille $\mathcal{B}_k$

Démonstration. Notons $\mathcal{B}_k = \left\{\mathrm{E}_4^i\mathrm{E}_6^j : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \mid 4i + 6j = k\right\}$. On commence par montrer, par récurrence sur k, que $\mathcal{B}_k$ engendre $\mathcal{M}_k$. Pour les premières valeurs de k, on a facilement le tableau 3.1. Pour $k \leq 10$, le fait que $\mathcal{B}_k$ engendre $\mathcal{M}_k$ résulte donc des théorèmes 34 et 43. Soit k tel que $\mathcal{B}_k$ engendre $\mathcal{M}_k$. On considère $f \in \mathcal{M}_{k+12}$. D'après le théorème de Bezout, il existe des entiers i_0 et j_0 tels que $4i_0 + 6j_0 = k + 12$. On a alors $f - \widehat{f}(0)\mathrm{E}_4^{i_0}\mathrm{E}_6^{j_0} \in \mathcal{S}_{k+12}$ et il existe $g \in \mathcal{M}_k$ tel que $f - \widehat{f}(0)\mathrm{E}_4^{i_0}\mathrm{E}_6^{j_0} = \Delta g$ (théorème 48). Puisque $\mathcal{B}_k$ engendre $\mathcal{M}_k$, on écrit

$$g = \sum_{4\alpha+6\beta=k} \lambda_{\alpha\beta}\mathrm{E}_4^\alpha\mathrm{E}_6^\beta$$

pour en déduire

$$\Delta g = \frac{1}{1728}\sum_{4(\alpha+3)+\beta=k+12} \lambda_{\alpha\beta}\mathrm{E}_4^{\alpha+3}\mathrm{E}_6^\beta - \frac{1}{1728}\sum_{\alpha+6(\beta+2)=k+12} \lambda_{\alpha\beta}\mathrm{E}_4^\alpha\mathrm{E}_6^{\beta+2}.$$

On en tire que f est combinaison linéaire de $\mathcal{B}_{k+12}$ ce qui achève la récurrence.

On montre ensuite que la famille $\mathcal{B}_k$ est libre. On commence par remarquer que, grâce au théorème 32, la fonction E_4 ne s'annule qu'en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \rho$ où elle s'annule à l'ordre 1 et la fonction E_6 ne s'annule qu'en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot i$ où elle s'annule à l'ordre 1. Supposons $\mathcal{B}_k$ non libre. Soit

$$\mathrm{F} = \sum_{4\alpha+6\beta=k} \lambda_\alpha\mathrm{E}_4^\alpha\mathrm{E}_6^\beta = 0$$

avec l'un des coefficients λ_α non nul. On a

$$\mathrm{F} = \delta(4 \mid k)\lambda_{k/4}\mathrm{E}_4^{k/4} + \sum_{\substack{4\alpha+6\beta=k\\ \beta\geq 1}} \lambda_\alpha\mathrm{E}_4^\alpha\mathrm{E}_6^\beta = 0.$$

L'évaluation en i conduit à $\delta(4 \mid k)\lambda_{k/4} = 0$. Soit α_0 le plus petit des α tels que $\lambda_\alpha \neq 0$. (Il existe alors $\beta \geq 1$ tel que $4\alpha + 6\beta = k$). On a

$$0 = (z-\rho)^{-\alpha_0}\mathrm{F}(z) = \sum_{\substack{4\alpha+6\beta=k\\ \beta\geq 1}} \lambda_\alpha\left(\frac{\mathrm{E}_4}{z-\rho}\right)^\alpha (z-\rho)^{\alpha-\alpha_0}\mathrm{E}_6^\beta.$$

Évaluant cette quantité en $z = \rho$, on trouve

$$\lambda_{\alpha_0}\mathrm{E}_4'(\rho)^{\alpha_0}\mathrm{E}_6(\rho)^{(k-4\alpha_0)/6} = 0.$$

On obtient la contradiction $\lambda_{\alpha_0} = 0$. La famille $\mathcal{B}_k$ est libre. □

Remarque 157 - La proposition 156 permet un nouveau calcul de la dimension de $\mathcal{M}_k$ par décompte des solutions de l'équation $4i + 6j = k$.

***Corollaire* 158–** *Les formes quasimodulaires sont des polynômes en* E_2, E_4 *et* E_6.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 156 et du théorème 140. □

***Proposition* 159–** *Si* $P \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ *vérifie* $P(E_2,E_4,E_6) = 0$ *alors* $P = 0$.

Démonstration. Par regroupement des termes, on écrit

$$P = \sum_{k=1}^{K} \sum_{4\alpha+6\beta+2\gamma=k} p_{\alpha\beta\gamma} Y^\alpha Z^\beta X^\gamma.$$

Le théorème 132 implique

$$\sum_{4\alpha+6\beta+2\gamma=k} p_{\alpha\beta\gamma} Y^\alpha Z^\beta X^\gamma = 0$$

pour tout k. Par considération de la profondeur, on a $\gamma = 0$ et donc

$$\sum_{4\alpha+6\beta=k} p_{\alpha\beta 0} Y^\alpha Z^\beta = 0$$

Enfin, les coefficients $p_{\alpha\beta 0}$ sont tous nuls grâce à la proposition 156. □

La proposition 159 implique que E_2, E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. Le corollaire 158 implique que $\bigcup_k \mathcal{M}_k^\infty$ est algébriquement dépendant de $\{E_2,E_4,E_6\}$ sur $\mathbb{C}$ (voir l'annexe A.7). Il résulte alors du théorème 230 qu'étant données quatre formes quasimodulaires, elles sont nécessairement algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$. (Et, puisque $\bigoplus_k \mathcal{M}_k = \mathbb{C}[E_4,E_6]$ qu'étant données trois formes modulaires, elles sont nécessairement algébriquement dépendante sur $\mathbb{C}$). On résume ces résultats dans la proposition suivante.

***Proposition* 160–**

1) *Si f, g et h sont trois formes modulaires, il existe un polynôme* $P \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ *tel que* $P(f,g,h) = 0$.
2) *Si f_1, f_2, f_3 et f_4 sont quatre formes quasimodulaires, il existe un polynôme* $Q \in \mathbb{C}[X,Y,Z,T]$ *tel que* $Q(f_1,f_2,f_3,f_4) = 0$.

Pour les formes modulaires, la proposition 160 est optimale.

***Proposition* 161–** *Soit $f \in \mathcal{M}_k$ et $g \in \mathcal{M}_\ell$ non nulles. S'il existe un polynôme non nul* $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ *tel que* $P(f,g) = 0$ *alors la fonction f^ℓ/g^k est constante.*

Démonstration. Par symétrie, on peut supposer $\ell \geq k$. La fonction f^ℓ/g^k vérifie la condition de modularité de poids 0. Si elle n'est pas constante, elle ne peut donc pas être holomorphe. Il existe donc $\rho \in \mathcal{H} \cup \{\infty\}$ tel que g s'annule à l'ordre $v_\rho(g)$ en ρ et tel que si l'ordre d'annulation de f en ρ est $v_\rho(f) \geq 0$ alors $\ell v_\rho(f) < k v_\rho(g)$. On en déduit $v_\rho(g) > v_\rho(f)$. Par ailleurs, si $\mathrm{P}(f,g) = 0$, on peut supposer qu'il existe $\mathrm{K} \in 2\mathbb{N}$ tel que P soit de la forme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ ki+\ell j=\mathrm{K}}} a_{ij}\mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j = \sum_{j=0}^{\lfloor \mathrm{K}/\ell \rfloor} b_j \mathrm{X}^{i(j)}\mathrm{Y}^j$$

avec

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } k \nmid \mathrm{K}-\ell j \\ a_{i(j)\,j} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où} \quad i(j) = \frac{\mathrm{K}-\ell j}{k}.$$

(En fait, tout polynôme est somme de termes de cette forme et, grâce à la proposition 25, chacun des termes annule (f,g).) On note $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \colon k \mid \mathrm{K}-\ell j \text{ et } b_j \neq 0\}$. Le polynôme

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{j=j_0}^{\lfloor \mathrm{K}/\ell \rfloor} b_j \mathrm{X}^{i(j)}\mathrm{Y}^{j-j_0}$$

annule (f,g) et $b_{j_0} \neq 0$. On a donc

$$b_{j_0} f^{i(j_0)} = -\sum_{j=j_0+1}^{\lfloor \mathrm{K}/\ell \rfloor} b_j f^{i(j)} g^{j-j_0}$$

et tout zéro de g annule f au moins au même ordre. C'est contradictoire avec le début de cette preuve. □

La proposition 160 implique en particulier le résultat suivant [b].

***Théorème* 162–** *Toute forme quasimodulaire satisfait une équation différentielle d'ordre* 3 *à coefficients constants. Si $f \in \mathcal{M}_k^\infty$, il existe un polynôme non nul* $\mathrm{L} \in \mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z},\mathrm{T}]$ *tel que*

$$\mathrm{L}(f,\mathrm{D}f,\mathrm{D}^2 f,\mathrm{D}^3 f) = 0.$$

Après l'étude des crochets de Rankin-Cohen, on montrera que si une forme modulaire f n'est pas constante alors f, $\mathrm{D}f$ et $\mathrm{D}^2 f$ sont algébriquement indépendante sur $\mathbb{C}$. Autrement dit, si $\mathrm{P}(f,\mathrm{D}f,\mathrm{D}^2 f) = 0$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}]$ alors $\mathrm{P} = 0$. Cela revient à dire que f n'est solution d'aucune équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants (voir la propsition 181).

Remarque 163 - On donnera plus loin (voir la remarque 176) une autre preuve (due à Resnikoff) dans le cas où f est une forme modulaire.

b. La restriction de ce résultat aux formes modulaires est un résultat de Hürwitz (1889).

L'équation (3.33) était une équation différentielle d'ordre 4 satisfaite par Δ. Le théorème 162 nous indique que Δ doit satisfaire une équation différentielle d'ordre 3. On a montré que

$$\Delta = \frac{1}{1728}(\mathrm{E}_4^3 - \mathrm{E}_6^2).$$

On en déduit, grâce aux équations de Ramanujan les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\Delta &= \frac{1}{1728}(\mathrm{E}_4^3 - \mathrm{E}_6^2)\mathrm{E}_2 \\ \mathrm{D}^2\Delta &= \frac{1}{20736}(\mathrm{E}_4^3 - \mathrm{E}_6^2)(13\mathrm{E}_2^2 - \mathrm{E}_4) \\ \mathrm{D}^3\Delta &= \frac{1}{124416}(\mathrm{E}_4^3 - \mathrm{E}_6^2)(91\mathrm{E}_2^3 - 21\mathrm{E}_2\mathrm{E}_4 + 2\mathrm{E}_6). \end{aligned}$$

À l'aide de ces équations, on vérifie

$$\mathrm{L}_\Delta(\Delta, \mathrm{D}\Delta, \mathrm{D}^2\Delta, \mathrm{D}^3\Delta) = 0 \tag{3.39}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_\Delta(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z},\mathrm{T}) = 48\mathrm{X}^7 + 36\mathrm{X}^4\mathrm{T}^2 - 252\mathrm{X}^3\mathrm{YZT} + 48\mathrm{X}^3\mathrm{Z}^3 + 182\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^3\mathrm{T} + 285\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2 \\ - 468\mathrm{XY}^4\mathrm{Z} + 169\mathrm{Y}^6. \end{aligned}$$

La provenance de ce polynôme L_Δ sera expliquée dans la partie 3.5.4 (voir l'exemple 180).

3.5.3) Crochets de Rankin-Cohen

***Définition* 164–** *Soit $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ et $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$. Soit $n \geq 0$ un entier. Le n^e crochet de Rankin-Cohen (associée au profondeur s et t) de f et g est défini par*

$$[f,g]_{n;s,t} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{k-s+n-1}{n-r}\binom{\ell-t+n-1}{r} \mathrm{D}^r f\, \mathrm{D}^{n-r} g.$$

Remarque 165 - Si $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ et $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$, alors k et ℓ sont déterminés par f et g. Il n'est donc pas nécessaire de préciser la dépendance en k et ℓ de $[f,g]_{n;s,t}$. En revanche, rien ne dit que s soit la profondeur de f et t celle de g. Ce sont juste des majorants de ces profondeurs. Il est donc nécessaire de préciser la dépendance en s et t. On réservera la notation $[f,g]_n$ pour $[f,g]_{n;s,t}$ lorsque nous saurons que s est la profondeur de f et t celle de g.

D'après le théorème 133, on a $[f,g]_{n;s,t} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}^{\leq s+t+n}$. Ce serait en fait le cas pour n'importe quelle combinaison linéaire

$$\sum_{r=0}^{n} a(r) \mathrm{D}^r f\, \mathrm{D}^{n-r} g.$$

Nous allons monter que le choix fait pour $a(r)$ permet de réduire la profondeur. En particulier, le crochet de Rankin-Cohen de deux formes modulaires sera toujours une forme modulaire. On commence par établir une formule pour les dérivées multiple d'une forme quasimodulaires. C'est une généralisation de la proposition 119 et du théorème 133.

***Lemme* 166–** *Si $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ alors*

$$\left(\mathrm{D}^r f \underset{k+2r}{|} \gamma\right) = \sum_{n=0}^{s+r}\left[\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(2i\pi)^j}j!\binom{r}{j}\binom{k+r-n+j-1}{j}\mathrm{D}^{r-j}\mathrm{Q}_{n-j}(f)\right]\mathrm{X}(\gamma)^n$$

pour tous $r \geq 0$ et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Il s'agit de démontrer, qu'appliqué à des formes de poids k, l'opérateur $\mathrm{Q}_n\,\mathrm{D}^r$ vérifie

$$\mathrm{Q}_n\,\mathrm{D}^r = \sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(2\pi i)^j}j!\binom{r}{j}\binom{k+r-n+j-1}{j}\mathrm{D}^{r-j}\mathrm{Q}_{n-j}. \tag{3.40}$$

On le montre par récurrence. Lorsque $r = 0$, c'est immédiat. Lorsque $r = 1$, la formule est donnée par le théorème 133. Soit $r \geq 1$ tel que la formule (3.40) soit vraie pour tout k. On applique cette formule à $\mathrm{D}f$ de poids $k+2$. On obtient

$$\mathrm{Q}_n\,\mathrm{D}^{r+1} = \sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(2\pi)^j}j!\binom{r}{j}\binom{k+2+r-n+j-1}{j}\mathrm{D}^{r-j}\mathrm{Q}_{n-j}.$$

On applique ensuite le théorème 133. Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_n\,\mathrm{D}^{r+1} &= \mathrm{D}^{r+1}\mathrm{Q}_n + \frac{1}{(2i\pi)^{r+1}}(r+1)!\binom{k+2r-n+1}{r+1}\mathrm{Q}_{n-r-1}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{(2i\pi)^j}\left[\frac{r!}{(r-j)!}\binom{k+r-n+j+1}{j}+\frac{(k-n+j)r!}{(r-j+1)!}\binom{k+r-n+j}{j-1}\right]\mathrm{D}^{r+1-j}\mathrm{Q}_{n-j}.\end{aligned}$$

On termine en calculant

$$\frac{r!}{(r-j)!}\binom{k+r-n+j+1}{j}+\frac{(k-n+j)r!}{(r-j+1)!}\binom{k+r-n+j}{j-1} = j!\binom{r+1}{j}\binom{k+r-n+j}{j}.$$

□

Le résultat suivant est la raison d'être des crochets de Rankin-Cohen.

***Théorème* 167–** *Soit $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ et $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$. Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$[f,g]_{n;s;t} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}^{\leq s+t}.$$

Démonstration. On pose $a_r = (-1)^r\binom{k-s+n-1}{n-r}\binom{\ell-t+n-1}{r}$. Grâce à (3.7), on a

$$\mathrm{Q}_j\left([f,g]_{n;s,t}\right) = \sum_{r=0}^{n} a_r \sum_{j_1+j_2=j} \mathrm{Q}_{j_1}(\mathrm{D}^r f)\mathrm{Q}_{j_2}(\mathrm{D}^{n-r} g).$$

En utilisant le lemme 166, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_j\left([f,g]_{n;s,t}\right) = &\sum_{j_1+j_2=j}\sum_r a_r \sum_{i_1} \frac{1}{(2i\pi)^{i_1}} i_1!\binom{r}{i_1}\binom{k+r-j_1+i_1-1}{i_1}\\ &\times \sum_{i_2}\frac{1}{(2i\pi)^{i_2}} i_2!\binom{n-r}{i_2}\binom{\ell+n-r-j_2+i_2-1}{i_2}\mathrm{D}^{r-i_1}\mathrm{Q}_{j_1-i_1}(f)\,\mathrm{D}^{n-r-i_2}\mathrm{Q}_{j_2-i_2}(g).\end{aligned}$$

Les intervalles de définition des indices sont indiqués par les coefficients binomiaux. On fait les changements de variables

$$\begin{aligned} u &= j_1 - i_1 & v &= j_2 - i_2\\ \alpha &= r - i_1 & \beta &= n - r - i_2\end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_j\left([f,g]_{n;s,t}\right) = &\sum_{u,v}\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha+\beta=u+v+n-j}}\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-\alpha-\beta}\frac{1}{(k+\alpha-u-1)!(\ell+\beta-v-1)!}\\ &\times\left[\sum_r a_r\binom{r}{\alpha}\binom{n-r}{\beta}(k+r-u-1)!(\ell+n-r-v-1)!\right]\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{Q}_u(f)\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{Q}_v(g). \quad (3.41)\end{aligned}$$

On veut que cette quantité soit nulle pour tout $j \in \{s+t+1,\dots,s+t+n\}$. Il suffit pour cela que

$$\sum_r a_r\binom{r}{\alpha}\binom{n-r}{\beta}(k+r-u-1)!(\ell+n-r-v-1)! = 0 \qquad (3.42)$$

pour tout (u,v,α,β) dans l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(u,v,\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^4\colon\ u\le s,\ v\le t,\ u+v-s-t\le\alpha+\beta\le u+v+n-s-t-1\}.$$

Reportant la valeur de a_r dans (3.42) on obtient

$$\begin{aligned}&(k-s+n-1)!(s-u)!(\ell-t+n-1)(t-v)!\\ &\qquad\sum_{r_1+r_2=n}\frac{(-1)^{r_1}}{r_1!r_2!}\binom{r_1}{\alpha}\binom{r_2}{\beta}\binom{k+r_1-u-1}{s-u}\binom{\ell+r_2-v-1}{t-v}. \quad (3.43)\end{aligned}$$

On définit deux séries de rayon de convergence infini par

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \sum_{r_1}\frac{(-1)^{r_1}}{r_1!}\binom{r_1}{\alpha}\binom{k+r_1-u-1}{s-u}\mathrm{X}^{r_1}$$

et

$$\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = \sum_{r_2} \frac{1}{r_2!}\binom{r_2}{\beta}\binom{\ell + r_2 - v - 1}{t - v}\mathrm{X}^{r_2}.$$

Puisque la somme en facteur dans l'expression (3.43) est le coefficient de degré n de la série $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$. On va montrer que si $(u, v, \alpha, \beta) \in \mathcal{E}$ alors, la série $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ est un polynôme de degré strictement inférieur à n.

Puisque $s \leq k/2$, on peut écrire

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \binom{k+\alpha-u-1}{s-u}\frac{(-\mathrm{X})^\alpha}{\alpha!}\sum_{r=0}^{+\infty} p(r)$$

avec

$$p(r) = \frac{(-1)^r}{r!}\frac{\binom{k+\alpha-u-1+r}{r}}{\binom{k+\alpha-s-1+r}{r}}\mathrm{X}^r.$$

On calcule

$$\frac{p(r+1)}{p(r)} = \frac{r+k+\alpha-u}{(r+k+\alpha-s)(r+1)}(-\mathrm{X})$$

pour obtenir (voir l'annexe B.12)

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \binom{k+\alpha-u-1}{s-u}(-\mathrm{X})^\alpha\, {}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} k+\alpha-u \\ k+\alpha-s \end{bmatrix}(-\mathrm{X}).$$

Grâce au corollaire 290, on a

$${}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} k+\alpha-u \\ k+\alpha-s \end{bmatrix}(-\mathrm{X}) = e^{-\mathrm{X}}\, {}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} u-s \\ k+\alpha-s \end{bmatrix}(\mathrm{X})$$

puis

$${}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} u-s \\ k+\alpha-s \end{bmatrix}(\mathrm{X}) = \sum_{r=0}^{s-u}(-1)^r\frac{\binom{s-u}{r}}{\binom{k+\alpha-s-1+r}{k+\alpha-s-1}}\frac{\mathrm{X}^r}{r!}.$$

On a alors

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = e^{-\mathrm{X}}\sum_{r=\alpha}^{s-u+\alpha}\binom{k+\alpha-u-1}{k+r-s-1}\binom{r}{\alpha}\frac{\mathrm{X}^r}{r!}.$$

De façon identique,

$$\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = e^{\mathrm{X}}\sum_{r=\beta}^{t-v+\beta}\binom{\ell+\beta-v-1}{\ell+r-t-1}\binom{r}{\beta}\frac{(-\mathrm{X})^r}{r!}.$$

Le produit $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ est donc un polynôme de degré au plus

$$s+t-u-v+\alpha+\beta \leq n-1.$$

□

Restreignons notre étude à celle du premier crochet sur les formes modulaires. On note

$$\mathcal{M}_* = \bigoplus_{\substack{k\in 2\mathbb{N}\\ k\neq 2}} \mathcal{M}_k \tag{3.44}$$

l'algèbre de toutes les formes modulaires. Le crochet $[\ ,\ ]_{1;0,0}$ n'est pas défini sur $\mathcal{M}_*$ (puisque $[f,g]_{1;0,0}$ dépend du poids de f et g). Cependant, la somme (3.44) étant directe, si f et g sont des fonctions de $\mathcal{M}_*$, elles s'écrivent de façon unique

$$f = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{N}\\ k\neq 2}} f_k, \quad g = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{N}\\ k\neq 2}} g_k$$

où, pour tout k, on a f_k et g_k modulaires de poids k. On étend alors le premier crochet de Rankin-Cohen par linéarité en posant

$$[f,g]_1 = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{N}\\ k\neq 2}} \sum_{\substack{\ell\in 2\mathbb{N}\\ \ell\neq 2}} [f_k, g_\ell]_{1;0,0}.$$

Munie de ce crochet, l'algèbre complexe de toutes les formes modulaires est une algèbre de Poisson.

***Proposition* 168–** *L'algèbre $\mathcal{M}_*$ munie du crochet $[\ ,\ ]_1$ est une algèbre de Poisson. Autrement dit, $[\ ,\ ]_1$ est une application bilinéaire antisymétrique de $\mathcal{M}_*\times\mathcal{M}_*$ dans $\mathcal{M}_*$ vérifiant*

1) *la loi de Leibniz : $[fg,h]_1 = f[g,h]_1 + [f,h]_1 g$;*
2) *l'identité de Jacobi : $[f,[g,h]_1]_1 + [g,[h,f]_1]_1 + [h,[f,g]_1]_1 = 0$*

pour tout triplet (f,g,h) de formes modulaires.

Démonstration. Il est immédiat que le crochet est antisymétrique puisque chacun des crochets $[\ ,\ ]_{1;0,0}$ l'est. Par bilinéarité, il suffit de vérifier la loi de Leibniz et l'identité de Jacobi pour les formes modulaires. On vérifie la loi de Leibniz. Soit donc $f\in\mathcal{M}_k$, $g\in\mathcal{M}_\ell$ et $h\in\mathcal{M}_m$. On a

$$\begin{aligned}[fg,h]_1 &= (k+\ell)fg\,\mathrm{D}h - m\,\mathrm{D}(f)gh - mf\,\mathrm{D}(g)h\\ &= f(\ell g\,\mathrm{D}(h) - m\,\mathrm{D}(g)h) + (kf\,\mathrm{D}(h) - m\,\mathrm{D}(f)h)g = f[g,h]_1 + [f,h]_1 g.\end{aligned}$$

On vérifie ensuite l'identité de Jacobi. On rappelle que $[g,h]_1$ est de poids $\ell+m+2$ et donc

$$\begin{aligned}[f,[g,h]_1]_1 &= kg(\ell\,\mathrm{D}(g)\mathrm{D}(h) + \ell g\,\mathrm{D}^2(h) - m\,\mathrm{D}^2(g)h - m\,\mathrm{D}(g)\mathrm{D}(h))\\ &\qquad - (\ell+m+2)\mathrm{D}(f)(\ell g\,\mathrm{D}(h) - m\,\mathrm{D}(g)h)\\ &= klfg\,\mathrm{D}^2(h) + k(\ell-m)f\,\mathrm{D}(g)\mathrm{D}(h) - kmf\,\mathrm{D}^2(g)h\\ &\qquad - (\ell+m+2)\ell)\mathrm{D}(f)g\,\mathrm{D}(h) + (\ell+m+2)m\,\mathrm{D}(f)\mathrm{D}(g)h.\end{aligned}$$

On en déduit

$$[g,[h,f]_1]_1 = \ell mgh\mathrm{D}^2(f) + \ell(m-k)g\mathrm{D}(h)\mathrm{D}(f) - \ell kg\mathrm{D}^2(h)f - (m+k+2)m\mathrm{D}(g)h\mathrm{D}(f) \\ + (m+k+2)k\mathrm{D}(g)\mathrm{D}(h)f$$

et

$$[h,[f,g]_1]_1 = mkhf\mathrm{D}^2(g) + m(k-\ell)h\mathrm{D}(f)\mathrm{D}(g) - m\ell h\mathrm{D}^2(f)g - (k+\ell+2)k\mathrm{D}(h)f\mathrm{D}(g)' \\ + (k+\ell+2)\ell\mathrm{D}(h))\mathrm{D}(f)g$$

et on obtient 0 par sommation de ces trois égalités. □

Remarque 169 - D'après l'exemple 242, il existe une seule application bilinéaire $\{\ ,\ \}$ de $\mathbb{C}[X,Y]\times\mathbb{C}[X,Y]$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$ donnant à $\mathbb{C}[X,Y]$ une structure d'algèbre de Poisson et vérifiant $\{X,Y\} = -2(X^3-Y^2)$. Puisque

$$[E_4,E_6]_1 = -2(E_4^3 - E_6^2) \tag{3.45}$$

(cette relation est obtenue en remarquant que $[E_4,E_6]\in\mathcal{S}_{12}$ et en utilisant les premiers coefficient de Fourier non nul), l'isomorphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X,Y] & \mapsto & \mathcal{M}_* \\ P & \mapsto & P(E_4,E_6) \end{array}$$

est un isomorphisme de Poisson. Le crochet $[\ ,\ ]_1$ est l'unique application bilinéaire donnant à $\mathcal{M}_*$ une structure d'algèbre de Poisson et vérifiant (3.45).

Remarque 170 - Le crochet $[\ ,\ ]_1$ ne se prolonge pas en un crochet de Poisson sur $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} [E_2,E_4]_1 &= P(E_2,E_4,E_6)\\ [E_2,E_6]_1 &= Q(E_2,E_4,E_6)\\ [E_4,E_6]_1 &= R(E_2,E_4,E_6) \end{aligned}$$

avec

$$P = -\frac{1}{3}XZ + \frac{1}{3}Y^2,\ Q = -\frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{2}YZ, \quad \text{et} \quad R = -2Y^3 + 2Z^2.$$

Si ces relation permettaient de définir un crochet de Poisson sur $\mathcal{M}_*^{\leq\infty} = \mathbb{C}[E_2,E_4,E_6]$, alors on aurait $\mathrm{Rot}(P,Q,R)\cdot(P,Q,R) = 0$ (voir l'exemple 243). Cependant

$$\mathrm{Rot}(P,Q,R)\cdot(P,Q,R) = -\frac{1}{6}Y(Y^3-Z^2).$$

On rappelle que, par définition, $D\Delta = \Delta E_2$. Par récurrence, on montre alors que, pour tout $j\geq 0$, on a $D^j\Delta = \Delta\delta_j$ où $\delta_j\in\mathcal{M}_{2j}^{\leq j}$ est défini par

$$\begin{cases} \delta_0 = 1 \\ \delta_j = (D+E_2)\delta_{j-1} \end{cases} \tag{3.46}$$

où on note abusivement E_2 l'opérateur de multiplication par E_2. Si $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ et $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$, on a donc

$$[\Delta f, g]_{n;s,t} = \Delta h \tag{3.47}$$

avec $h \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}^{\leq s+t}$. Par exemple,

$$[\Delta f, g]_{1;0,0} = \Delta [f, g]_{1;0,0}$$

puisque la restriction aux formes modulaires du premier crochet est de Poisson (voir la proposition 168).

Remarque 171- Soit $f \in \mathcal{M}_k$. En utilisant $\mathrm{D}\Delta = \Delta \mathrm{E}_2$, on calcule

$$\frac{[\Delta, f]_1}{12\Delta} = \mathrm{D}f - \frac{k}{12} f \mathrm{E}_2.$$

Grâce à la remarque 235 (ou bien par vérification directe), on en déduit que l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_k & \to & \mathcal{M}_{k+2} \\ f & \mapsto \mathrm{D}f - \dfrac{k}{12} f \mathrm{E}_2 & \end{array} \tag{3.48}$$

induit par prolongement linéaire une dérivation sur $\mathcal{M}_*$ (voir la définition 232). Cette dérivation s'appelle la *dérivation de Serre*.

On utilise maintenant le calcul de $\mathrm{Q}_j\left([f, g]_{n;s,t}\right)$ fait dans la preuve du théorème 167 pour donner un résultat de structure de même type que le théorème 143.

***Proposition* 172–** *Soit $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ et $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$. Soit $n > 0$. On a*

$$[f, g]_{n;s;t} \in \mathcal{S}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t} \mathrm{D}^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

Si, de plus, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

i) $n > s + t$;

ii) $n = s + t$ et f ou g a un développement de Fourier de terme constant nul

alors

$$[f, g]_{n;s;t} \in \mathcal{S}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t-1} \mathrm{D}^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j} \oplus \mathrm{D}^{s+t} \mathcal{S}_{k+\ell+2n-2s-2t}.$$

Démonstration. Puisque $n > 0$, on a $s + t < \dfrac{k + \ell + 2n}{2}$. En utilisant les théorèmes 167 et 143, on a alors

$$[f, g]_{n;s;t} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t} \mathrm{D}^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

On écrit

$$[f,g]_{n;s;t} = f_0 + \sum_{j=1}^{s+t} \mathrm{D}^j f_j$$

avec $f_j \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}$ pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$. Si $n \geq 1$, chacune des fonctions $\mathrm{D}^j f\, \mathrm{D}^{n-j} g$ lorsque j parcourt $\{0,\dots,n\}$ a un développement de Fourier de terme constant nul. C'est donc aussi le cas de $[f,g]_{n;s,t}$. Comme lorsque j parcourt $\{1,\dots,s+t\}$, les fonctions $\mathrm{D}^j f_j$ ont toutes un développement de Fourier de terme constant nul, c'est le cas de

$$[f,g]_{n;s,t} - \sum_{j=1}^{s+t} \mathrm{D}^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

La forme modulaire f_0 est donc une forme parabolique et

$$[f,g]_{n;s;t} \in \mathcal{S}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t} \mathrm{D}^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

Si $j \leq s+t-1$, la forme $\mathrm{D}^j f_j$ est de profondeur strictement inférieure à $s+t$. On a donc $\mathrm{Q}_{s+t}\Big([f,g]_{n;s;t}\Big) = \mathrm{Q}_{s+t}\Big(\mathrm{D}^{s+t} f_{s+t}\Big)$. Puisque f_{s+t} est modulaire (de poids $k+\ell+2n-2s-2t$), la formule (3.40) implique

$$\mathrm{Q}_{s+t}\Big(\mathrm{D}^{s+t} f_{s+t}\Big) = \frac{1}{(2i\pi)^{s+t}} \cdot \frac{(k+\ell+2n-s-t-1)!}{(k+\ell+2n-2s-2t-1)!} f_{s+t}.$$

pour montrer que f_{s+t} est parabolique, il est donc suffisant de montrer que le développement de Fourier de $\mathrm{Q}_{s+t}\Big(\mathrm{D}^{s+t} f_{s+t}\Big)$ a un coefficient de Fourier constant nul. Grâce à (3.41), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_{s+t}\Big([f,g]_{n;s,t}\Big) = \sum_{u,v} \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha+\beta=u+v+n-s-t}} &\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-\alpha-\beta} \frac{1}{(k+\alpha-u-1)!(\ell+\beta-v-1)!} \\ &\times \left[\sum_r a_r \binom{r}{\alpha}\binom{n-r}{\beta}(k+r-u-1)!(\ell+n-r-v-1)!\right] \mathrm{D}^\alpha \mathrm{Q}_u(f) \mathrm{D}^\beta \mathrm{Q}_v(g)\end{aligned}$$

avec $a_r = (-1)^r\binom{k-s+n-1}{n-r}\binom{\ell-t+n-1}{r}$. Les contributions de $\mathrm{D}^\alpha \mathrm{Q}_u(f)\mathrm{D}^\beta \mathrm{Q}_v(g)$ lorsque $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ ont des coefficients de Fourier constants nuls. Si $n > s+t$ alors $u+v+n-s-t > u+v \geq 0$ donc $\alpha+\beta > 0$ et $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Ainsi, $\mathrm{Q}_{s+t}\Big([f,g]_{n;s,t}\Big)$ puis f_{s+t} sont des formes paraboliques. On suppose maintenant que $n = s+t$ et que f ou g a un développement de Fourier de terme constant nul. Si $(\alpha,\beta) = (0,0)$ alors $(u,v) = (0,0)$ et seul $\mathrm{Q}_0(f)\mathrm{Q}_0(g)$ peut fournir un coefficient de Fourier constant non nul. Mais $\mathrm{Q}_0(f)\mathrm{Q}_0(g) = fg$ donc il n'y a pas de tel coefficient. $\square$

3.5.4) Crochets de Rankin-Cohen et équations différentielles

On peut maintenant exprimer les relations de Ramanujan (3.27), (3.28) et (3.29) à l'aide des crochets de Rankin-Cohen.

***Proposition* 173–** *Les équations de Ramanujan sont*

$$[\mathrm{E}_2,\Delta]_{1;1,0}=\Delta\mathrm{E}_4$$
$$[\mathrm{E}_4,\Delta]_{1;0,0}=4\Delta\mathrm{E}_6$$
$$[\mathrm{E}_6,\Delta]_{1;0,0}=6\Delta\mathrm{E}_4^2.$$

Démonstration. L'équation (3.47) implique $[\mathrm{E}_2,\Delta]_{1;1,0}=\Delta h$ avec $h\in\mathcal{M}_4\oplus\mathrm{D}\mathcal{M}_2=\mathbb{C}\mathrm{E}_4$. En comparant les premiers coefficients de Fourier, on trouve $[\mathrm{E}_2,\Delta]_{1;1,0}=\Delta\mathrm{E}_4$. Il reste à vérifier que cette équation est équivalente à (3.27). En remplaçant le crochet par sa définition, on obtient

$$\mathrm{D}(\Delta)\mathrm{E}_2-12\Delta\,\mathrm{D}\mathrm{E}_2=\Delta\mathrm{E}_4.$$

Il reste à diviser par Δ puis à utiliser la définition $\mathrm{E}_2=\dfrac{\mathrm{D}\Delta}{\Delta}$ pour obtenir (3.27). Les deux autres équations s'obtiennent de même. □

On donne ensuite une interprétation en terme de crochets de Rankin-Cohen de l'équation de Chazy (3.32) satisfaite par E_2.

***Proposition* 174–** *L'équation de Chazy satisfaite par* E_2 *est*

$$\Big[[\mathrm{K},\Delta]_{1;0,0},\Delta\Big]_{1,0,0}=24\Delta\mathrm{K}^2$$

avec $\mathrm{K}=[\mathrm{E}_2,\Delta]_{1;1,0}$.

Démonstration. Par la proposition (173), on a $\mathrm{K}=\Delta\mathrm{E}_4$. En particulier c'est une forme modulaire et il est légitime d'évaluer $[\mathrm{K},\Delta]_{1;0,0}$. Comme $[\ \ ,\ \ ]_{1;0,0}$ est un crochet de Poisson, on a

$$[\mathrm{K},\Delta]_{1;0,0}=[\Delta\mathrm{E}_4,\Delta]_{1;0,0}=\Delta[\mathrm{E}_4,\Delta]_{1;0,0}=4\Delta^2\mathrm{E}_6$$

d'après la proposition 173. On a alors

$$\Big[[\mathrm{K},\Delta]_{1;0,0},\mathrm{K}\Big]_{1;0,0}=[4\Delta^2\mathrm{E}_6,\Delta]_{1;0,0}=4\Delta^2[\mathrm{E}_6,\Delta]_{1;0,0}=24\Delta^3\mathrm{E}_4^2=24\Delta\mathrm{K}^2$$

toujours d'après la proposition 173. Il reste à vérifier que $\Big[[\mathrm{K},\Delta]_{1;0,0},\Delta\Big]_{1,0,0}=24\Delta\mathrm{K}^2$ est bien l'équation de Chazy. Par définition, on a $\mathrm{K}=\mathrm{E}_2\,\mathrm{D}\Delta-12\,\mathrm{D}\mathrm{E}_2\cdot\Delta$ et, grâce à $\mathrm{D}\Delta=\Delta\mathrm{E}_2$, on trouve

$$\mathrm{K}=\Delta(\mathrm{E}_2^2-12\,\mathrm{D}\mathrm{E}_2). \tag{3.49}$$

On a ensuite

$$16\mathrm{K}\,\mathrm{D}\Delta=16\mathrm{K}\Delta\mathrm{E}_2=16\Delta^2(\mathrm{E}_2^2-12\,\mathrm{D}\mathrm{E}_2)\mathrm{E}_2$$

et

$$12\,\mathrm{D}\mathrm{K}\cdot\Delta=12\Delta^2\mathrm{E}_2(\mathrm{E}_2^2-12\,\mathrm{D}\mathrm{E}_2)+12\Delta^2(2\mathrm{E}_2\,\mathrm{D}\mathrm{E}_2-12\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_2)$$

de sorte que
$$[\mathrm{K},\Delta]_{1;0,0} = 4\Delta^2(\mathrm{E}_2^3 - 18\mathrm{E}_2\,\mathrm{DE}_2 + 36\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_2).$$
On note $\mathrm{L} = 4\Delta^2(\mathrm{E}_2^3 - 18\mathrm{E}_2\,\mathrm{DE}_2 + 36\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_2)$. Enfin,
$$30\mathrm{L}\,\mathrm{D}\Delta = 30\mathrm{L}\Delta\mathrm{E}_2 = 120\Delta^3(\mathrm{E}_2^4 - 18\mathrm{E}_2^2\,\mathrm{DE}_2 + 36\mathrm{E}_2\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_2)$$
et
$$12\,\mathrm{DL}\cdot\Delta = 48\Delta^3(2\mathrm{E}_2^4 - 33\mathrm{E}_2^2\,\mathrm{DE}_2 + 54\mathrm{E}_2\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_2 - 18(\mathrm{DE}_2)^2 + 36\,\mathrm{D}^3\mathrm{E}_2)$$
d'où
$$\Big[[\mathrm{K},\Delta]_{1;0,0},\Delta\Big]_{1;0,0} = 24\Delta^3\Big(\mathrm{E}_2^4 - 24\mathrm{E}_2^2\,\mathrm{DE}_2 + 72\mathrm{E}_2\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_2 + 36(\mathrm{DE}_2)^2 - 72\,\mathrm{D}^3\mathrm{E}_2\Big). \quad (3.50)$$
On élève (3.49) au carré
$$24\Delta\mathrm{K}^2 = 24\Delta^3\Big(\mathrm{E}_2^4 - 24\mathrm{E}_2^2\,\mathrm{DE}_2 + 144(\mathrm{DE}_2)^2\Big). \quad (3.51)$$
Finalement, en égalisant (3.50) et (3.51), on obtient
$$2\,\mathrm{D}^3\mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_2\,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_2 + 3(\mathrm{DE}_2)^2 = 0.$$
C'est l'équation de Chazy. □

On montre maintenant comment calculer les équations différentielles satisfaites par Δ, E_4 et E_6, c'est-à-dire comment calculer les polynômes L_Δ, L_4 et L_6. La méthode est due à Resnikoff [31]. Définissons
$$\partial_2 f = [f,\mathrm{D}f]_{1;0,1} \quad (3.52)$$
pour toute forme modulaire f. En utilisant la définition des corchets, on voit que
$$\partial_2 f = \frac{1}{k+1}[f,f]_2 \quad (3.53)$$
si k est le poids de f. Il en résulte en particulier que $\partial_2 f$ est modulaire parabolique (de poids $2k+4$). On peut donc définir
$$\partial_3 f = [f,\partial_2 f]_{1;0,0}$$
qui est une forme modulaire parabolique de poids $3k+6$. D'après la proposition 160, les trois formes modulaires f, $\partial_2 f$ et $\partial_3 f$ sont algébriquement dépendantes. On a donc démontré le résultat suivant.

***Proposition* 175–** *Si f est une forme modulaire, il existe un polynôme $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}]$ tel que*
$$\mathrm{P}(f,\partial_2 f,\partial_3 f) = 0.$$

Remarque 176 - Cette proposition implique l'existence d'une équation différentielle d'ordre 3 satisfaite par les formes modulaires puisque

$$\partial_2 f = kf\,\mathrm{D}^2 f - (k+1)(\mathrm{D}f)^2 \tag{3.54}$$

et

$$\partial_3 f = 2(k+1)(k+2)(\mathrm{D}f)^3 - 3k(k+2)f\cdot\mathrm{D}f\cdot\mathrm{D}^2 f + k^2 f^2\,\mathrm{D}^3 f. \tag{3.55}$$

Elle fournit donc une nouvelle preuve du théorème 162.

Exemple 177 - On a $\mathrm{E}_4 \in \mathcal{M}_4$, $\partial_2\mathrm{E}_4 \in \mathcal{S}_{12}$ et $\partial_3\mathrm{E}_4 \in \mathcal{S}_{18}$. Le plus petit multiple commun des poids de ces trois formes est 36 et la dimension de $\mathcal{S}_{36}$ est 3. Il existe donc une combinaison linéaire nulle à coefficients non nuls des quatre éléments de $\mathcal{S}_{36}$ suivants : $(\partial_2\mathrm{E}_4)^3$, $(\partial_3\mathrm{E}_4)^2$, $\partial_2\mathrm{E}_4\cdot\mathrm{E}_4^6$ et $(\partial_2\mathrm{E}_4)^2\cdot\mathrm{E}_4^3$. En calculant les débuts des développements de Fourier, on trouve

$$(\partial_2\mathrm{E}_4)^3 = -\frac{5}{144}(\partial_3\mathrm{E}_4)^2 + \frac{5}{9}(\partial_2\mathrm{E}_4)^2\cdot\mathrm{E}_4^3.$$

Remplaçant E_4 par X, $\partial_2\mathrm{E}_4$ par $4\mathrm{XZ}-5\mathrm{Y}^2$ et $\partial_3\mathrm{E}_4$ par $60\mathrm{Y}^3-72\mathrm{XYZ}+16\mathrm{X}^2\mathrm{T}$ (grâce à (3.54) et (3.55)), on trouve que $\mathrm{L}_4(\mathrm{E}_4,\mathrm{DE}_4,\mathrm{D}^2\mathrm{E}_4,\mathrm{D}^3\mathrm{E}_4) = 0$ avec

$$\mathrm{L}_4(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z},\mathrm{T}) = \mathrm{X}^3\mathrm{Z}^2 - \frac{5}{2}\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\mathrm{Z} - \mathrm{X}^2\mathrm{T}^2 + \frac{25}{16}\mathrm{XY}^4 + 9\mathrm{XYZT} - \frac{36}{5}\mathrm{XZ}^3 - \frac{15}{2}\mathrm{Y}^3\mathrm{T} + \frac{27}{4}\mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2.$$

Exemple 178 - Le cas de E_6 est un peu plus délicat. On a $\mathrm{E}_6 \in \mathcal{M}_6$, $\partial_2\mathrm{E}_6 \in \mathcal{S}_{16}$ et $\partial_3\mathrm{E}_6 \in \mathcal{S}_{24}$. On voudrait donc travailler dans $\mathcal{S}_{48}$ qui est de dimension 4. On ne peut cependant pas construire 5 formes paraboliques à partir de E_6, $\partial_2\mathrm{E}_6$ et$\partial_3\mathrm{E}_6$. En effet, cela revient à compter les triplets (a,b,c) tels que $\mathrm{E}_6^a(\partial_2\mathrm{E}_6)^b(\partial_3\mathrm{E}_6)^c \in \mathcal{S}_{48}$, c'est-à-dire $6a+16b+24c = 48$ avec $b+c \neq 0$ et il n'y en a que 3. Ces triplets conduisent aux fonctions $(\partial_2\mathrm{E}_6)^3$, $(\partial_3\mathrm{E}_6)^2$ et $\mathrm{E}_6^4\partial_3\mathrm{E}_6$. Les premiers coefficients des développements de Fourier montrent qu'elles ne sont pas liées. On cherche donc à travailler dans $\mathcal{S}_{96}$ qui est de dimension 8. Comme il n'y a que 8 triplets (a,b,c) tels que $6a+16b+24c = 96$ avec $b+c \neq 0$, on ne peut encore pas construire assez de fonctions. On pourrait considérer $\mathcal{S}_{192}$ qui est de dimension 16 : il existe 24 triplets (a,b,c) tels que $6a+16b+24c = 192$ avec $b+c \neq 0$, et on peut donc construire suffisament de fonctions linéairement liées. Avant cela, on vérifie cependant s'il existe une relation linéaire entre les 8 fonctions de $\mathcal{S}_{96}$. Ces 8 fonctions sont $(\partial_3\mathrm{E}_6)^4$, $(\partial_2\mathrm{E}_6)^3(\partial_3\mathrm{E}_6)^2$, $(\partial_2\mathrm{E}_6)^6$, $\mathrm{E}_6^4(\partial_3\mathrm{E}_6)^3$, $\mathrm{E}_6^4(\partial_2\mathrm{E}_6)^3\partial_3\mathrm{E}_6$, $\mathrm{E}_6^8(\partial_3\mathrm{E}_6)^2$, $\mathrm{E}_6^8(\partial_2\mathrm{E}_6)^3$ et $\mathrm{E}_6^{12}\partial_3\mathrm{E}_6$. La considération des premiers coefficients de Fourier conduit à la relation conjecturale [c] :

$$(\partial_3\mathrm{E}_6)^4 = -\frac{512}{7}(\partial_2\mathrm{E}_6)^3(\partial_3\mathrm{E}_6)^2 - \frac{65536}{49}(\partial_2\mathrm{E}_6)^6 - \frac{7}{2}\mathrm{E}_6^4(\partial_3\mathrm{E}_6)^3 + 756\mathrm{E}_6^8(\partial_2\mathrm{E}_6)^3. \tag{3.56}$$

c. Puisqu'on utilise qu'un nombre fini de coefficient de Fourier sans avoir *a priori* qu'il existe une relation linéaire.

Une fois l'égalité (3.56) conjecturée, il est aisé de la démontrer. Il suffit de remplacer $\partial_2 E_6$ et $\partial_3 E_6$ par leurs expressions polynomiales en E_4 et E_6. Cela est fait en utilisant les équations de Ramanujan qui conduisent à (3.35) puis à

$$\begin{aligned}\partial_2 E_6 &= -\frac{7}{4}E_4^4 + \frac{7}{4}E_4 E_6^2\\ \partial_3 E_6 &= -14E_4^6 + \frac{35}{2}E_4^3E_6^2 - \frac{7}{2}E_6^4.\end{aligned}$$

Dans (3.56), on remplace E_6 par X, $\partial_2 E_6$ par $6XZ - 7Y^2$ et $\partial_3 E_6$ par $112Y^3 - 144XYZ + 36X^2T$ (grâce à (3.54) et (3.55)), on trouve que $L_6(E_6, DE_6, D^2E_6, D^3E_6) = 0$ avec

$$\begin{aligned}L_6(X,Y,Z,T) = {}& X^7Z^3 - \frac{7}{2}X^6Y^2Z^2 - X^6T^3 + \frac{49}{12}X^5Y^4Z + 12X^5YZT^2 - \frac{343}{216}X^4Y^6\\ & - \frac{28}{3}X^4Y^3T^2 - 48X^4Y^2Z^2T - \frac{72}{7}X^4T^4 + \frac{224}{3}X^3Y^4ZT + 64X^3Y^3Z^3\\ & + \frac{1152}{7}X^3YZT^3 - \frac{6144}{49}X^3Z^3T^2 - \frac{784}{27}X^2Y^6T - \frac{448}{3}X^2Y^5Z^2 - 128X^2Y^3T^3\\ & - \frac{3840}{7}X^2Y^2Z^2T^2 + \frac{49152}{49}X^2YZ^4T - \frac{131072}{343}X^2Z^6 + \frac{3136}{27}XY^7Z + 1024XY^4ZT^2\\ & - \frac{34816}{21}XY^3Z^3T + \frac{32768}{49}XY^2Z^5 - \frac{21952}{729}Y^9 - \frac{3584}{9}Y^6T^2\\ & + \frac{2048}{3}Y^5Z^2T - \frac{2048}{7}Y^4Z^4.\end{aligned}$$

Exemple 179 - Pour E_8, la même méthode (dans $\mathcal{S}_{120}$) donne

$$(\partial_3 E_8)^4 + \frac{288}{5}(\partial_2 E_8)^3(\partial_3 E_8)^2 + \frac{20736}{25}(\partial_2 E_8)^6 - 4096E_8^5(\partial_2 E_8)^4 = 0.$$

Pour vérifier cette relation, on utilise $E_8 = E_4^2$ et les relations de Ramanujan [d] qui donnent

$$\begin{aligned}DE_8 &= \frac{2}{3}E_2E_4^2 - \frac{2}{3}E_4E_6\\ D^2E_8 &= \frac{1}{2}E_2^2E_4^2 - E_2E_4E_6 + \frac{5}{18}E_4^3 + \frac{2}{9}E_6^2\\ D^3E_8 &= \frac{5}{12}E_2^3E_4^2 - \frac{5}{4}E_2^2E_4E_6 + \frac{25}{36}E_2E_4^3 + \frac{5}{9}E_2E_6^2 - \frac{5}{12}E_4^2E_6\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\partial_2 E_8 &= \frac{20}{9}E_4^5 - \frac{20}{9}E_4^2E_6^2\\ \partial_3 E_8 &= \frac{160}{9}E_4^6E_6 - \frac{160}{9}E_4^3E_6^3.\end{aligned}$$

d. Ou des arguments dimensionnels.

On en déduit $L_8(E_8, DE_8, D^2E_8, D^3E_8) = 0$ avec

$$\begin{aligned}
L_8(X,Y,Z,T) = {} & 102400X^9Z^4 - 460800X^8Y^2Z^3 - 102400X^8T^4 + 777600X^7Y^4Z^2 \\
& + 1536000X^7YZT^3 - 737280X^7Z^3T^2 - 583200X^6Y^6Z - 1152000X^6Y^3T^3 \\
& - 6151680X^6Y^2Z^2T^2 + 5529600X^6YZ^4T - 1327104X^6Z^6 + 164025X^5Y^8 \\
& + 10160640X^5Y^4ZT^2 - 1209600X^5Y^3Z^3T - 1410048X^5Y^2Z^5 - 3810240X^4Y^6T^2 \\
& - 13608000X^4Y^5Z^2T + 5099760X^4Y^4Z^4 + 12830400X^3Y^7ZT + 855360X^3Y^6Z^3 \\
& - 3207600X^2Y^9T - 6735960X^2Y^8Z^2 + 4234032XY^{10}Z - 793881Y^{12}.
\end{aligned}$$

Exemple 180 - Enfin, on termine cette série d'exemples par le calcul de L_Δ. Dans $\mathcal{S}_{84}$, on a les fonctions $(\partial_3\Delta)^2$, $(\partial_2\Delta)^3$ et Δ^7. La considération des premiers coefficients de Fourier permet de conjecturer la relation

$$(\partial_3\Delta)^2 = -16(\partial_2\Delta)^3 - 27648\Delta^7. \tag{3.57}$$

Comme $\mathcal{S}_{84}$ est de dimension 7, cette relation n'est que conjecturale. Pour la vérifier on utilise $1728\Delta = E_4^3 - E_6^2$ et (3.46) qui conduit à

$$\begin{aligned}
D\Delta &= \frac{1}{1728}\left(E_4^3 - E_6^2\right)E_2 \\
D^2\Delta &= \frac{1}{20736}\left(E_4^3 - E_6^2\right)\left(13E_2^2 - E_4\right) \\
D^3\Delta &= \frac{1}{124416}\left(E_4^3 - E_6^2\right)\left(91E_2^3 - 21E_2E_4 + 2E_6\right)
\end{aligned}$$

puis à

$$\begin{aligned}
\partial_2\Delta &= -\frac{1}{2985984}E_4^7 + \frac{1}{1492992}E_4^4E_6^2 - \frac{1}{2985984}E_4E_6^4 \\
\partial_3\Delta &= \frac{1}{1289945088}E_4^9E_6 - \frac{1}{429981696}E_4^6E_6^3 + \frac{1}{429981696}E_4^3E_6^5 - \frac{1}{1289945088}E_6^7.
\end{aligned}$$

Dans (3.57), on remplace Δ par X, $\partial_2\Delta$ par $12XZ - 13Y^2$ et $\partial_3\Delta$ par $364Y^3 - 504XYZ + 144X^2T$ (grâce à (3.54) et (3.55)), on trouve que $L_\Delta(\Delta, D\Delta, D^2\Delta, D^3\Delta) = 0$ avec

$$\begin{aligned}
L_\Delta(X,Y,Z,T) = {} & 48X^7 + 36X^4T^2 - 252X^3YZT + 48X^3Z^3 + 182X^2Y^3T + 285X^2Y^2Z^2 \\
& - 468XY^4Z + 169Y^6.
\end{aligned}$$

Enfin, nous montrons que le théorème 162 est optimal pour les formes modulaires. La preuve est inspirée de [4].

***Proposition* 181–** *Si f est une forme modulaire non constante, elle ne satisfait aucune équation différentielle d'ordre* 2

Pour simplifier l'écriture de la preuve, on démontre un lemme intermédiaire.

***Lemme* 182–** *Soit f une forme modulaire de poids k, soit g une forme modulaire de poids ℓ et doit F une forme quasimodulaire de poids m et profondeur 1. S'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{V}]$ tel que $\mathrm{P}(f, g, \mathrm{F}) = 0$ alors il existe un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{U}, \mathrm{V}]$ tel que $\mathrm{Q}(f, g) = 0$.*

Démonstration. Il existe une forme modulaire non nulle r de poids $m-2$ telle que

$$\left(\mathrm{F} \underset{m}{|} \gamma\right) = \mathrm{F} + r\mathrm{X}(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. par regroupement des termes de mêmes poids et en utilisant le théorème 132, on peut supposer que P est de la forme

$$\mathrm{P} = \sum_{\substack{a,b,c \\ ka+\ell b+mc=\mathrm{K}}} p(a,b,c)\mathrm{T}^a\mathrm{U}^b\mathrm{V}^c$$

pour un entier pair K. Si on définit

$$b(a,c) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{K} - ka - mc}{\ell} & \text{si cette quantité est entière} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a

$$\mathrm{P} = \sum_{a,c} p\left(a, b(a,c), c\right) \mathrm{T}^a \mathrm{U}^{b(a,c)}\mathrm{V}^c.$$

On note C_0 le degré en V de P, c'est-à-dire le plus grand entier tel que le polynôme

$$\sum_a p\left(a, b(a,\mathrm{C}_0), \mathrm{C}_0\right) \mathrm{T}^a \mathrm{U}^{b(a,\mathrm{C}_0)}$$

ne soit pas le polynôme nul. Si C_0 n'existe pas, on pose $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$.

Pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a $\mathrm{P}(f, g, \mathrm{F})(\gamma z) = 0$. Ceci implique

$$\mathrm{P}\left(\left(f \underset{k}{|} \gamma\right), \left(g \underset{\ell}{|} \gamma\right), \left(\mathrm{F} \underset{m}{|} \gamma\right)\right) = 0$$

et donc $\mathrm{P}\left(f, g, \mathrm{F} + r\mathrm{X}(\gamma)\right) = 0$. Cette égalité devient

$$\sum_{j=0}^{\mathrm{C}_0} r^j \mathrm{X}(\gamma)^j \sum_{\substack{a,c \\ j\leq c\leq \mathrm{C}_0}} \binom{c}{j} p\left(a, b(a,c), c\right) f^a g^{b(a,c)} \mathrm{F}^{c-j} = 0.$$

Grâce au lemme 121, on en déduit

$$\sum_{\substack{a,c \\ j\leq c\leq \mathrm{C}_0}} \binom{c}{j} p\left(a, b(a,c), c\right) f^a g^{b(a,c)} \mathrm{F}^{c-j} = 0$$

pour tout j. Le choix de $j = C_0$ (qui fixe $c = C_0$) donne $Q(f,g) = 0$ avec

$$Q = \sum_a p\left(a, b(a, C_0), C_0\right) T^a U^{b(a,C_0)}$$

et ce polynôme est non nul par construction de C_0. □

Démonstration de la proposition 181. Soit f une forme modulaire de poids k et P un polynôme tel que $P(f, Df, D^2 f) = 0$. Puisque

$$D^2 f = \frac{1}{kf}\left[\partial_2 f - (k+1)(Df)^2\right],$$

la fraction rationnelle

$$P\left(X, Y, \frac{Z-(k+1)Y^2}{kX}\right)$$

annule $(f, Df, \partial_2 f)$. Son numérateur est donc un polynôme annulant $(f, Df, \partial_2 f)$. Grâce au lemme 182, on en déduit l'existence d'un polynôme annulant $(f, \partial_2 f)$. Grâce à la proposition 161, soit ce polynôme, et donc P, est nul, soit la fonction

$$h = \frac{(\partial_2 f)^k}{f^{2k+4}}$$

est constante. On montre maintenant que h n'est pas constante. Soit n_0 le plus petit entier non nul tel que $\widehat{f}(n_0) \neq 0$.

1) Si f est parabolique, alors

$$h = -\frac{n_0^{2k}}{\widehat{f}(n_0)^4} e^{-8i\pi n_0 z}\left(1 + O(e^{2i\pi z})\right)$$

n'est pas constante.

2) Si f n'est pas parabolique alors, comme $\partial_2 f$ est parabolique, si h est contante, on a $\partial_2 f = 0$. C'est impossible car

$$\partial_2 f = kn_0^2 \widehat{f}(0)\widehat{f}(n_0)e^{2i\pi n_0 z} + O\left(e^{2i\pi(n_0+1)z}\right).$$

□

Annexe A

Compléments d'algèbre

A.1 Série formelle

La notion de série formelle permet d'établir des égalités entre suite en manipulant leurs séries génératrices sans se préoccuper de domaine de convergence. Une série formelle d'un anneau A n'est rien d'autre qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. L'ensemble A[[X]] de séries formelles est muni d'une structures d'anneau commutatif grâce aux opérations suivantes. Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux séries formelles, la somme $a+b$ de a et b est la série formelle

$$a+b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

et le produit ab de a et b est la série formelle

$$ab = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Avec cette structure, et en notant

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathrm{X}^n$$

on retrouve les formules d'addition et multiplication définies sur les séries. On calcule donc avec les séries formelles comme avec les séries.

Une série formelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est inversible, son inverse est la série formelle $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{a_0} \\ b_n = -\dfrac{1}{a_0}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Exemple 183 - L'inverse de la série formelle $1 - \mathrm{X}$ est la série formelle

$$(1-\mathrm{X})^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}^n.$$

Si $\mathbb{K}$ est un corps, l'anneau $\mathbb{K}[[\mathrm{X}]]$ est une algèbre commutative sur $\mathbb{K}$.

***Définition* 184–** *Soit* $\mathrm{S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \mathrm{X}^n$ *une série formelle. Sa dérivée est la série formelle*

$$\mathrm{S}' = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \mathrm{X}^n (n+1) s_{n+1} \mathrm{X}^n.$$

La dérivation est un endomorphisme de $\mathrm{A}[[\mathrm{X}]]$. Si S et T sont deux séries formelles alors

$$(\mathrm{S}+\mathrm{T}) =' = \mathrm{S}' + \mathrm{T}' \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{ST})' = \mathrm{S}'\mathrm{T} + \mathrm{S}\mathrm{T}'.$$

Exemple 185 - Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant le produit de $\mathrm{S} = (1-\mathrm{X})^n$ et $\mathrm{T} = (1-\mathrm{X})^{-n}$, on trouve

$$(1-\mathrm{X})^{-n'} = -n(1-\mathrm{X})^{-n-1}.$$

Soit $\mathrm{S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{T} = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n \mathrm{X}^n$ deux séries formelles. On voudrait définir la composée

$$\mathrm{S} \circ \mathrm{T} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} t_m \mathrm{X}^m \right)^n.$$

Pour garder nos habitudes de calculs sur les séries, il faudrait que cette série soit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n} t_{m_1} \cdots t_{m_n} \mathrm{X}^{m_1+\ldots+m_n}.$$

Pour tout entier n, le coefficient d'indice n est donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{(m_1,\ldots,m_k)\in\mathbb{N}^k \\ m_1+\cdots+m_k=n}} t_{m_1} \ldots t_{m_k}$$

et on a besoin que cette somme soit finie. Si $t_0 \neq 0$, elle ne sera pas finie pour certaine valeur de n. En revanche, si $t_0 = 0$ seuls contribueront les m_i tels que $m_i \geq 1$ et la condition $m_1 + \cdots + m_k = n$ donne donc $k \leq n$; de plus, pour chaque valeur de k il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ tels que $m_1 + \cdots + m_k = n$.

***Définition* 186–** *Soit* $\mathrm{S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \mathrm{X}^n$ *et* $\mathrm{T} = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n \mathrm{X}^n$ *deux séries formelles. On suppose* $t_0 = 0$. *La composée* $\mathrm{S} \circ \mathrm{T}$ *est la série formelle*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \mathrm{X}^n$$

avec

$$u_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{(m_1,\ldots,m_k)\in\mathbb{N}^k \\ m_1+\cdots+m_k=n}} t_{m_1} \ldots t_{m_k}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. *C'est la série obtenue en remplaçant dans la série* S *la variable* X *par* T.

***Proposition* 187–** *Soit* $\mathrm{S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \mathrm{X}^n$ *et* $\mathrm{T} = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n \mathrm{X}^n$ *deux séries formelles. On suppose* $t_0 = 0$. *La dérivée de* $\mathrm{S}\circ\mathrm{T}$ *est*

$$(\mathrm{S}\circ\mathrm{T})' = \mathrm{T}'\cdot\mathrm{S}'\circ\mathrm{T}.$$

On définit quelques séries formelles usuelles.

***Définition* 188–** *La série formelle exponentielle est*

$$\exp(\mathrm{X}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\cdot\mathrm{X}^n.$$

***Proposition* 189–** *L'inverse de la série exponentielle est la série exponentielle composée avec* $-\mathrm{X}$ *:*

$$\exp(\mathrm{X})^{-1} = \exp(-\mathrm{X}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\mathrm{X}^n.$$

***Définition* 190–** *On note* $\ln(1+\mathrm{X})$ *la série formelle*

$$\ln(1+\mathrm{X}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\mathrm{X}^n.$$

***Proposition* 191–** *Dans l'anneau des séries formelles :*

$$\exp\left(\ln(1+\mathrm{X})\right) = 1+\mathrm{X}.$$

A.2 Caractères

On note $\mathbb{U}$ le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

***Définition* 192–** *Un* caractère *d'un groupe* G *est un homomorphisme de groupes de* G *dans* $\mathbb{C}^*$. *Un* caractère unitaire *d'un groupe* G *est un homomorphisme de groupes de* G *dans* $\mathbb{U}$.

Si G est multiplicatif, un caractère de G est donc une application $\chi\colon \mathrm{G}\to\mathbb{C}^*$ telle que $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ pour tous x et y dans G. Noter que même si G n'est pas commutatif, on a $\chi(xy) = \chi(yx)$ pour tous x et y dans G. Si G est additif, c'est une application $\chi\colon \mathrm{G}\to\mathbb{C}^*$ telle que $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ pour tous x et y dans G. Sauf précision contraire, on adoptera la notation multiplicative pour l'opération du groupe G. Si χ est unitaire, on a

$$\chi(x^{-1}) = \overline{\chi(x)}$$

pour tout $x\in\mathrm{G}$.

***Lemme* 193–** *Un caractère d'un groupe fini est nécessairement unitaire.*

Démonstration. Si G est fini, notons g son cardinal. Tout élément x de G vérifie $x^g = 1$ et donc $\chi(x)^g = \chi(x^g) = \chi(1) = 1$. On en tire $|\chi(x)|^g = 1$ puis $|\chi(x)| = 1$. □

L'ensemble des caractères de G est un groupe multiplicatif commutatif, l'opération étant la multiplication usuelle des homorphismes. L'élément neutre, noté χ_0, est appelé *caractère trivial* du groupe

$$\begin{array}{cccc} \chi_0 & : & \mathrm{G} & \to & \mathbb{C}^* \\ & & x & \mapsto & 1. \end{array}$$

***Définition* 194–** *Le groupe commutatif des caractères de* G *est appelé* dual de Pontryagin *de* G *et noté* $\widehat{\mathrm{G}}$*.*

Pontryagin isom a G. Relations d'orthogonalite. Description des caracteres de gpes classique, cf Stein Shakarchi exo 5,6 page 237 et 231.

A.3 Actions de groupes

Soit G un groupe multiplicatif dont on note 1 l'élément neutre et X un ensemble. On cherche à voir G comme un groupe de transformations de X.

***Définition* 195–** *On dit que le groupe* G *agit sur l'ensemble* X *s'il existe une application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}\times\mathrm{X} & \to & \mathrm{X} \\ (g,x) & \mapsto & g\cdot x \end{array}$$

telle que

i) pour tout $x \in \mathrm{X}$ *on a* $1\cdot x = x$ *;*

ii) pour tous g, g' *de* G *et tout* x *de* X*, on a* $g\cdot(g'\cdot x) = (gg')\cdot x$*.*

L'application $(g,x) \mapsto g\cdot x$ *est appelée action de* G *sur* X*.*

Remarque 196 - La définition précédente est celle d'une action *à gauche*. On peut définir la notion d'action à droite : c'est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}\times\mathrm{G} & \to & \mathrm{X} \\ (x,g) & \mapsto & x\cdot g \end{array}$$

telle que

i) pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a $x\cdot 1 = x$;

ii) pour tous g, g' de G et tout x de X, on a $x\cdot(gg') = (x\cdot g)\cdot g'$.

Nous introduisons dans la suite les notions adaptées aux actions à gauche en laissant le soin au lecteur de les adapter aux actions à droites. On peut remarquer que si $(x,g) \mapsto x\cdot g$ est une action à droite alors $(g,x) \mapsto x\cdot g^{-1}$ est une action à gauche.

Exemple 197 - Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ – et donc son sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ – agit sur $\mathcal{H}$ par *homographies*, c'est-à-dire par l'action à gauche

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z. \end{array}$$

Exemple 198 - Soit $k \in \mathbb{Z}$, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit à droite sur l'espace vectoriel $\mathrm{Hol}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ par l'action :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hol}(\mathcal{H},\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Hol}(\mathcal{H},\mathbb{C}) \\ \left(f, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \left(z \mapsto (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right) = \left(f \underset{k}{|} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right). \end{array}$$

Les actions de groupes sont liées aux relations d'équivalence par le résultat suivant qu'on laisse en exercice.

***Proposition* 199–** *On suppose que le groupe* G *agit sur l'ensemble* X. *Deux éléments x et x' de* X *sont dits équivalents s'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $x' = g \cdot x$. On note $x' \sim_{\mathrm{G}} x$ et on définit ainsi une relation d'équivalence sur* X.

L'ensemble des éléments équivalents à $x \in \mathrm{X}$ pour la relation précédente s'appelle l'orbite de x sous G. On note cette orbite

$$\mathrm{G}\cdot x = \{g \cdot x \colon g \in \mathrm{G}\}.$$

L'ensemble des orbites d'éléments de X forme une partition de X : elles sont deux à deux disjointes et leur réunion est X.

Exemple 200 - En remarquant que $x + iy$ s'écrit

$$x + iy = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} i$$

on voit que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})i = \mathcal{H}$.

S'il n'existe qu'une orbite pour une action, cette action est dite *transitive*. Cela revient à dire que pour tous x et y de X, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = gx$.

Exemple 201 - L'exemple précédent montre que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$ est transitive, en effet

$$\begin{aligned} x' + iy' &= \begin{pmatrix} \sqrt{y'} & x'/\sqrt{y'} \\ 0 & 1/\sqrt{y'} \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} \sqrt{y'} & x'/\sqrt{y'} \\ 0 & 1/\sqrt{y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}^{-1} (x + iy) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{y'}/\sqrt{y} & (x'y - xy')/\sqrt{yy'} \\ 0 & \sqrt{y}/\sqrt{y'} \end{pmatrix} (x + iy). \end{aligned}$$

L'ensemble des éléments de G laissant stable un élement de X s'appelle le *stabilisateur* de cet élément :

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G\colon\ g \cdot x = x\}.$$

C'est un sous-groupe de G.

Exemple 202 - Le stabilisateur de i par $SL_2(\mathbb{R})$ est $SO_2(\mathbb{R})$. Soit en effet $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ telle que $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, en comparant les parties imaginaires, on obtient $c^2 + d^2 = 1$ de sorte qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $c = \cos\theta$ et $d = \sin\theta$. En comparant les parties réelles puis en écrivant l'équation du déterminant, on obtient

$$\begin{cases} a\cos\theta + b\sin\theta = 0 \\ a\sin\theta - b\cos\theta = 1 \end{cases}$$

qui se résout en $a = \sin\theta$ et $b = -\cos\theta$.

Exemple 203 - On déduit de l'exemple précédent et de l'exemple 200 que le stabilisateur de $x + iy \in \mathcal{H}$ par $SL_2(\mathbb{R})$ est le sous-groupe conjugué

$$\mathrm{Stab}_{SL_2(\mathbb{R})}(x+iy) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y} & -x/\sqrt{y} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R}) \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}.$$

L'action d'un groupe G sur un ensemble X est *libre* si le stabilisateur de tout point de X est minimal, c'est-à-dire réduit à $\{1\}$.

Exemple 204 - L'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$ n'est pas libre. Mais le sous-groupe des translations

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

agit librement sur $\mathcal{H}$ par l'action induite par celle de $SL_2(\mathbb{R})$:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z \right) \mapsto z + t.$$

Une notion moins contraignante est celle de la fidélité qui demande que l'intersection de tous les stabilisateurs soit minimale :

$$\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x) = \{1\}.$$

Exemple 205 - L'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$ n'est pas fidèle puisque les stabilisateurs contiennent tous, outre I la matrice $-I$. Mais l'intersection de tous les stabilisateurs est $\{-I, I\}$ comme on le voit en considérant l'intersection des stabilisateurs de i et $2i$. Il en résulte qu'on définit une action fidèle de ${}_{\{-I,I\}}\backslash^{SL_2(\mathbb{R})}$ sur $\mathcal{H}$ par

$$\begin{array}{ccc} {}_{\{-I,I\}}\backslash^{SL_2(\mathbb{R})} \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ \pm\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}. \end{array}$$

A.4 Polynômes de Tchebychef

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit une fonction sur $[-2, 2]$ en posant

$$X_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

pour tout $\theta \in [0, \pi]$. En notant $\xi = e^{i\theta}$, on obtient

$$X_n(2\cos\theta) = \sum_{i=0}^{n} \xi^{n-2i} = \frac{\xi^{-n-2} - \xi^n}{\xi^{-2} - 1}. \tag{A.1}$$

Cette expression implique immédiatement la majoration suivante

$$\max_{x\in[-2,2]} |X_n(x)| = n + 1 = X_n(2).$$

On a,

$$X_0(x) = 1 \quad X_1(x) = x. \tag{A.2}$$

De $\sin(n+3)\theta + \sin(n+1)\theta = 2\cos\theta\sin(n+2)\theta$, on déduit la relation

$$X_{n+2}(x) = xX_{n+1}(x) - X_n(x) \tag{A.3}$$

de sorte que, par récurrence, on prolonge X_n en fonction polynomiale à coefficients entiers.

Remarque 206 - En posant

$$Y_n(2\operatorname{ch} y) = \frac{\operatorname{sh}(n+1)y}{\operatorname{sh} y}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on définit une fonction Y_n sur $[2, +\infty[$. La relation $\operatorname{sh}(n+3)y + \operatorname{sh}(n+1)y = 2\operatorname{ch} y \operatorname{sh}(n+2)y$ montre qu'elle satisfait une relation semblable à (A.3). Puisqu'on a aussi $Y_0 = 1$ et $Y_1(y) = y$, la fonction Y_n est la restriction de X_n à $[2, +\infty[$.

Les premiers exemples de polynômes de Tchebychef sont donnés table A.4.

Les équations (A.2) et (A.3) sont équivalentes à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} X_n(x)T^n = \frac{1}{1 - xT + T^2}. \tag{A.4}$$

Le polynôme X_n, de degré n et coefficient dominant 1, est appelé *polynôme de Tchebychef de seconde espèce de degré n*. Définissant la mesure de Sato-Tate μ_{ST} par

$$d\,\mu_{ST} = \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx$$

$$\begin{aligned}
X_0 &= 1\\
X_1 &= x\\
X_2 &= x^2 - 1\\
X_3 &= x^3 - 2x\\
X_4 &= x^4 - 3x^2 + 1\\
X_5 &= x^5 - 4x^3 + 3x\\
X_6 &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1\\
X_7 &= x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x\\
X_8 &= x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1\\
X_9 &= x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x\\
X_{10} &= x^{10} - 9x^8 + 28x^6 - 35x^4 + 15x^2 - 1
\end{aligned}$$

Table A.1 – Premiers polynômes de Tchebychef de seconde espèce

on a

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} X_n(x)X_m(x)\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}} &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } n = m\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque $\deg X_n = n$ pour tout entier n, la famille $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale (pour μ_{ST}) de $\mathbb{C}[X]$. On en déduit que

$$X_nX_m = \sum_{j=0}^{n+m} c_jX_j$$

avec

$$c_j = \int_{-2}^{2} X_nX_mX_j\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathrm{ST}}\,.$$

On peut en fait retrouver explicitement les coefficients c_j à l'aide des formules A.1. On obtient la *formule de Clebsch-Gordan* :

***Lemme* 207–** *Pour tous entiers naturels n et m, on a*

$$X_nX_m = \sum_{\substack{j=|n-m|\\ j\equiv n+m \ (\mathrm{mod}\ 2)}}^{n+m} X_j = \sum_{i=0}^{\inf(n,m)} X_{n+m-2i}.$$

Démonstration. On suppose $n \geq m$. Grâce la formule (A.1) on a

$$\begin{aligned} X_m X_n(2\cos\theta) &= \sum_{i=0}^{m} \xi^{m-2i} \cdot \frac{\xi^{-n-2} - \xi^{n}}{\xi^{-2} - 1} \\ &= \frac{1}{\xi^{-2}-1} \left(\sum_{i=0}^{m} \xi^{m-n-2i-2} - \sum_{i=0}^{m} \xi^{m+n-2i} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{i=0}^{m} \xi^{m+n-2i} = \sum_{j=0}^{m} \xi^{-m+n+2j}$$

donc

$$\begin{aligned} X_m X_n(2\cos\theta) &= \frac{1}{\xi^{-2}-1} \sum_{i=0}^{m} \left(\xi^{m-n-2i-2} - \xi^{-m+n+2i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} X_{n-m+2i}(2\cos\theta). \end{aligned}$$

□

***Lemme* 208–** *Si* $\alpha \geq 1$ *et* $\beta \geq 1$, *alors*

$$X_{\alpha+\beta} = X_\alpha X_\beta - X_{\alpha-1} X_{\beta-1}.$$

Démonstration. Grâce à la formule de Clebsch-Gordan (lemme 207), on a

$$X_{\alpha-1} X_{\beta-1} = \sum_{i=0}^{\inf(\alpha,\beta)-1} X_{\alpha+\beta-2i-2} = \sum_{i=1}^{\inf(\alpha,\beta)} X_{\alpha+\beta-2i} = X_\alpha X_\beta - X_{\alpha+\beta}.$$

□

A.5 Polynômes symétriques

A.5.1) Définition

Dans tout ce paragraphe, on fixe un corps $\mathbb{K}$. Un polynôme symétrique est un polynôme invariant par le groupe symétrique. Plus précisément, en notant $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$, on a la définition suivante.

***Définition* 209–** *Soit* $P \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ *un polynôme. On dit qu'il est* symétrique *si*

$$P(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}) = P(X_1,\ldots,X_n)$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Les *polynômes symétriques élémentaires* sont les premiers exemples de tels polynômes. Un entier n étant fixé, les polynômes symétriques élémentaires de $K[X_1,\ldots,X_n]$ sont les polynômes symétriques définis par

$$\sigma_k(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} X_{i_1}\ldots X_{i_k}$$

pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$.

Exemple 210 – Les deux polynômes symétriques élémentaires de $K[X_1,X_2]$ sont

$$\sigma_1(X_1,X_2) = X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad \sigma_2(X_1,X_2) = X_1X_2.$$

Les trois polynômes symétriques élémentaires de $K[X_1,X_2,X_3]$ sont

$$\sigma_1(X_1,X_2,X_3) = X_1 + X_2 + X_3,\ \sigma_2(X_1,X_2,X_3) = X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3$$

et

$$\sigma_3(X_1,X_2,X_3) = X_1X_2X_3.$$

Une raison naturelle d'introduire les polynômes symétriques élémentaires réside dans la proposition suivante établissant une relation entre racines et coefficients d'un polynôme. Sa démonstration est laissée au lecteur. On choisit une extension algébrique Ω de $\mathbb{K}$.

***Proposition* 211–** *Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des éléments de Ω. Alors*

$$(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$$

avec

$$a_j = (-1)^j\sigma_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$.

L'ensemble des polynômes symétriques de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ constitue une sous-algèbre de l'agèbre $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$. Cette base est engendrée par les polynômes symétriques élémentaires. Plus précisément, on a le théorème suivant.

***Théorème* 212** (Théorème fondamental des polynômes symétriques)**–** *Si* P *est un polynôme symétrique de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$, il existe un unique polynôme* L *de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ tel que*

$$P = L(\sigma_1,\ldots,\sigma_n).$$

La démonstration se trouve § A.5.3.

A.5.2) Ordre sur les monômes

Pour établir le théorème fondamental des polynômes symétriques (théorème 212), il est nécessaire de définir et étudier un ordre sur les monômes unitaires $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, c'est-à-dire sur l'ensemble

$$\mathcal{M}_n = \{X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} : (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}.$$

L'ordre que nous étudions est l'ordre *lexicographique*. D'autres ordres sont définis dans [6, Chapter 2, §2] ou [7, Chapter 1, §2]. Il faut remarquer que tout ordre $\prec$ sur $\mathbb{N}^n$ définit un ordre, qu'on note aussi $\prec$, sur $\mathcal{M}_n$ en définissant

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} \prec X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_n^{\beta_n} \text{ si et seulement si } (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \prec (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

***Définition* 213–** *L'ordre lexicographique sur $\mathcal{M}_n$ est défini par*

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} \leq X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_n^{\beta_n}$$

si et seulement si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

pour l'ordre lexicographique, c'est-à-dire si et seulement si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

ou s'il existe $r \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\alpha_i = \beta_i \textit{ pour tout } i < r \textit{ et } \alpha_r < \beta_r.$$

SI A et B sont deux monômes de $\mathcal{M}_n$ tels que $A \leq B$ et $A \neq B$, on note $A < B$. L'ordre lexicographique sur $\mathcal{M}_n$ est un *ordre monomial*. Cela signifie qu'on a la proposition suivante dont la preuve est laissée au lecteur.

***Proposition* 214–** *L'ordre lexicographique sur $\mathcal{M}_n$ est un* ordre total *:*

1) *si* A *et* B *sont deux monômes de $\mathcal{M}_n$ tels que* $A \leq B$ *et* $B \leq A$ *alors* $A = B$ *;*
2) *si* A *et* B *sont deux monômes de $\mathcal{M}_n$, on a* $A \leq B$ *ou* $B \leq A$ *;*
3) *si* A, B *et* C *sont trois monômes de $\mathcal{M}_n$ tels que* $A \leq B$ *et* $B \leq C$ *alors* $A \leq C$.

Cet ordre est compatible avec le produit *: si* A, B *et* C *sont trois monômes de $\mathcal{M}_n$ tels que* $A \leq B$ *alors* $AC \leq BC$. *Enfin, cet ordre est un* bon ordre *: tout sous-ensemble $\mathcal{E}$ non vide de $\mathcal{M}_n$ admet un plus petit élément, c'est-à dire un élément* M *tel que* $M \leq A$ *pour tout* A *de $\mathcal{E}$.*

On étend la notation $<$ aux monômes multipliés par des scalaires non nuls en posant, si a et b sont des éléments de $\mathbb{K}$ non nuls,

$$aX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} < bX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_n^{\beta_n} \Leftrightarrow X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} < X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_n^{\beta_n}.$$

Si P est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$, on l'écrit comme combinaison linéaire de monômes :

$$P = \sum_{i_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{d_n} p_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}.$$

Le *degré* de P est

$$\deg P = \max\{i_1 + \cdots + i_n : p_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0\}.$$

Parmi l'ensemble fini des monômes de P, il y a un plus grand élément pour l'ordre lexicographique. Soit $(j_1,\ldots,j_n)$ le n-uplet d'entiers correspondant à ce maximum. Autrement dit, soit

$$X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n} = \max\{X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} : p_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0\},$$

le *terme dominant* de P est

$$\mathrm{TD}(P) = p_{j_1,\ldots,j_n} X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n}.$$

Il faut remarquer que le terme dominant n'est pas nécessairement le terme de plus haut degré (penser à $X_1^5 X_2^{20} + X_1^6 X_2$). Le dégré du polynôme nul est, par convention, $-\infty$ et son terme dominant est 0.

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$, alors $\mathrm{TD}(PQ) = \mathrm{TD}(P)\,\mathrm{TD}(Q)$. Enfin, si deux polynômes non nuls ont même terme dominant, alors

$$\mathrm{TD}(P) = \mathrm{TD}(Q) > \mathrm{TD}(P - Q). \tag{A.5}$$

Enfin, on résume sous forme de lemmes les résultats dont nous aurons besoin concernant les polynômes symétriques.

***Lemme* 215–**

a) *Soit* P *un polynôme symétrique de* $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$. *On suppose que son terme dominant est* $p_{j_1,\ldots,j_n} X_1^{j_1} \ldots X_n^{j_n}$. *Alors*

$$j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n.$$

b) *Le terme dominant de* $\sigma_1^{r_1} \cdots \sigma_n^{r_n}$ *est*

$$\mathrm{TD}(\sigma_1^{r_1} \cdots \sigma_n^{r_n}) = X_1^{r_1+\cdots+r_n} X_2^{r_2+\cdots+r_n} \cdots X_n^{r_n}.$$

c) *Les polynômes* $\sigma_1^{r_1} \cdots \sigma_n^{r_n}$ *et* $\sigma_1^{t_1} \cdots \sigma_n^{t_n}$ *sont égaux si et seulement s'ils ont même terme dominant.*

Démonstration.

a) Si $X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ est un monôme du polynôme symétrique P alors

$$X_{\sigma(1)}^{i_1} \ldots X_{\sigma(n)}^{i_n} = X_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots X_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}}$$

l'est aussi pour toute permutation σ. Pour tout n-uplet $(i_1,\ldots,i_n)$, il existe une permutation [a] σ telle que $i_{\sigma^{-1}(1)} \geq \ldots \geq i_{\sigma^{-1}(n)}$. Tout n-uplet de P est donc inférieur

a. Définie par récurrence de la façon suivante : $i_{\sigma^{-1}(1)} = \max\{i_1,\ldots,i_n\}$ et $i_{\sigma^{-1}(k)} = \max\{i_1,\ldots,i_n\} \setminus \{i_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,i_{\sigma^{-1}(k-1)}\}$ pour tout $2 \leq k \leq n$.

ou égal à un monôme de la forme $X_{\sigma(1)}^{i_1}\dots X_{\sigma(n)}^{i_n}$ avec $i_1 \geq \dots i_n$. C'est en particulier le cas du monôme dominant.

b) Le terme dominant de σ_i est $X_1 \dots X_i$, celui de $\sigma_i^{r_i}$ est donc $X_1^{r_i}\dots X_i^{r_i}$. On en déduit le résultat par multiplicativité.

c) L'égalité des termes dominants

$$X_1^{r_1+\cdots+r_n}X_2^{r_2+\cdots+r_n}\cdots X_n^{r_n} = X_1^{t_1+\cdots+t_n}X_2^{t_2+\cdots+t_n}\cdots X_n^{t_n}$$

conduit successivement à $r_n = t_n$ puis $r_{n-1} = t_{n-1}$ jusqu'à $r_1 = t_1$.

□

***Corollaire* 216–** *Si un polynôme symétrique* P *a pour terme dominant*

$$\mathrm{TD}(P) = pX_1^{r_1}X_2^{r_2}\cdots X_n^{r_n}$$

alors ce terme dominant est le polynôme symétrique

$$\mathrm{TD}(P) = p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n}.$$

A.5.3) Preuve du théorème fondamental des polynômes symétriques

On démontre dans cette partie le théorème 212. Le point principal de la démonstration de l'existence de L est le corollaire 216 qui permet d'exprimer le terme dominant d'un polynôme en fonction des polynômes symétriques élémentaires.

Par réitération, on définit une suite de couples de polynômes $(P_i, Q_i)_{i\geq 0}$ en posant

$$P_0 = P, \quad Q_0 = 0$$

puis, pour tout $i \geq 0$,

$$\text{si } P_i = 0, \quad \begin{cases} P_{i+1} = P_i \\ Q_{i+1} = Q_i \end{cases}$$

et,

$$\text{si } P_i \neq 0, \quad \begin{cases} P_{i+1} = P_i - p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n} \\ Q_{i+1} = Q_i + p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n} \end{cases}$$

où

$$\mathrm{TD}(P_i) := pX_1^{r_1}X_2^{r_2}\cdots X_n^{r_n} = p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n}$$

grâce au corollaire 216.

On remarque que $P_i + Q_i = P$ pour tout i et que, pour tout i, le polynôme Q_i est produit d'un scalaire par un produit de polynômes symétriques élémentaires. S'il existe j tel que $P_j = 0$, on a donc $P = Q_j$ et P est une combinaison linéaire de produit de polynômes symétriques élémentaires.

Montrons l'existence de j tel que $P_j = 0$. Grâce à l'équation (A.5), on a $\mathrm{TD}(P_{i+1}) < \mathrm{TD}(P_i)$ tant que P_i est non nul. En notant

$$\mathrm{TD}(P_i) = p_i X_1^{\alpha_1(i)}\cdots X_n^{\alpha_n(i)},$$

la suite $((\alpha_1(i),\dots,\alpha_n(i)))_i$ est donc strictement décroissante (pour l'ordre lexicographique) tant qu'elle ne s'annule pas à valeurs dans l'ensemble

$$\{(a_1,\dots,a_n)\colon a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n,\ (a_1,\dots,a_n) \leq (\alpha_1(0),\dots,\alpha_n(0))\}.$$

Cet ensemble est fini (il a moins de $(\alpha_1(0)+1)^n$ éléments). Il existe donc k tel que $(\alpha_1(k),\dots,\alpha_n(k)) = 0$. On a alors $\mathrm{TD}(\mathrm{P}_k) \in \mathbb{K}$ puis $\mathrm{P}_{k+1} = 0$.

Il reste alors à démontrer l'unicité du polynôme L. Il suffit de montrer que si $\mathrm{L}(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = 0$ alors $\mathrm{L} = 0$. Soit donc

$$\mathrm{L}(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} \ell_{i_1,\dots,i_n} \sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n}.$$

Si $\sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n} = \sigma_1^{j_1} \cdots \sigma_n^{j_n}$ alors $i_1 = j_1,\dots,i_n = j_n$ d'après le point b) du lemme 215. Les $\sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n}$ intervenant dans L sont donc tous distincts. Toute famille de polynômes distincts est libre donc $\mathrm{L} = 0$.

A.6 Accouplements parfaits

***Définition* 217–** *Soit* V *et* W *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $\mathrm{B}\colon \mathrm{V}\times\mathrm{W} \to \mathbb{K}$ *une application bilinéaire. On dit que* B *est un* accouplement parfait *si les deux applications linéaires*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \to & \mathcal{L}(\mathrm{W}) \\ x & \mapsto & (y \mapsto \mathrm{B}(x,y)) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{W} & \to & \mathcal{L}(\mathrm{V}) \\ y & \mapsto & (x \mapsto \mathrm{B}(x,y)) \end{array}$$

sont des isomorphismes linéaires.

Si V et W sont de dimension finie, on a des isomorphismes linéaires entre V et son dual $\mathcal{L}(\mathrm{V})$ puis entre W et son dual $\mathcal{L}(\mathrm{W})$. Pour montrer que B est un accouplement parfait, il suffit dans ce cas de montrer que les deux applications linéaires de la définition 217 sont injectives, c'est-à-dire de noyaux $\{0\}$. En effet, l'injectivité de la première application montre alors que $\dim \mathrm{V} \leq \dim \mathcal{L}(\mathrm{W}) = \dim \mathrm{W}$ et l'injectivité de la seconde application montre que $\dim \mathrm{W} \leq \dim \mathcal{L}(\mathrm{V}) = \dim \mathrm{V}$. Ainsi, V et W ont même dimension et les deux applications sont des isomorphismes.

A.7 Extensions transcendantes

Cette partie est essentiellement inspirée du chapitre 8 du cours de Milne [27].

Soit $\mathbb{K}$ un corps contenant $\mathbb{C}$, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_4,\mathrm{E}_6)$.

***Définition* 218–** *Les éléments* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *de* $\mathbb{K}$ *sont* algébriquement indépendants *si* 0 *est leur seul polynôme annulateur, c'est-à-dire si le seul polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n]$ *tel que* $\mathrm{P}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0$ *est* $\mathrm{P} = 0$.

Si des éléments ne sont pas algébriquement indépendants, ils sont dit algébriquement dépendants. Il admettent alors un polynôme annulateur non nul. Il faut noter que la notion d'indépendance algébrique élargit la notion d'indépendance linéaire qui se restreint aux polynômes annulateurs homogènes de degré 1.

Exemples 219-

1) Les éléments X, Y et Z de $\mathbb{C}(X,Y,Z)$ sont algébriquement indépendants.
2) Les séries E_2, E_4 et E_6 de $\mathbb{C}(E_2,E_4,E_6)$ sont algébriquement indépendantes (voir la proposition 159).
3) Grâce au corollaire 158, les dérivées des séries d'Eisenstein sont toutes des éléments de $\mathbb{C}(E_2,E_4,E_6)$. Les équations (3.32),(3.34) et (3.38) montrent que, pour tout $j \in \{2,4,6\}$, les séries E_j, DE_j, D^2E_j et D^3E_j sont algébriquement dépendantes.

Si une famille est linéairement indépendante, l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres et peut donc s'écrire comme un polynôme homogène de degré 1 en les autres éléments. On généralise cette notion.

***Définition* 220–** *Soit $a_1,\dots,a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $\gamma \in \mathbb{K}$ est* algébriquement dépendant *de $\{a_1,\dots,a_n\}$ s'il existe des fractions rationnelles $r_1,\dots,r_d$ en $a_1,\dots,a_n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ telles que*

$$\gamma^d + r_1\gamma^{d-1} + \ldots + r_{d-1}\gamma + r_d = 0.$$

Autrement dit, γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$ s'il existe un polynôme unitaire $L \in \mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)[X]$ tel que $L(\gamma) = 0$.

Au lieu de dire que γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$, on dit aussi que γ est algébrique sur $\mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)$.

Exemple 221- L'équation (3.34) montre que D^3E_4 est algébriquement dépendant de $\{E_4, DE_4, D^2E_4\}$, un polynôme annulant D^3E_4 étant

$$X^2 + \left(\frac{15}{2}\cdot\frac{(DE_4)^3}{E_4^2} - 9\frac{DE_4\,D^2E_4}{E_4}\right)X + \frac{5}{2}(DE_4)^2\,D^2E_4 - \frac{25}{16}\cdot\frac{(DE_4)^4}{E_4} + \frac{36}{5}\cdot\frac{(D^2E_4)^3}{E_4} - \frac{27}{4}\cdot\frac{DE_4(D^2E_4)^2}{E_4^2}.$$

***Proposition* 222–** *L'ensemble des éléments algébriquement dépendants de $\{a_1,\dots,a_n\}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$.*

Remarque 223- La démonstration de cette proposition utilise des résultats sur les polynômes symétriques qui sont donnés en annexe A.5.

Démonstration. Commençons par montrer que si $\gamma \neq 0$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$, alors $1/\gamma$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$. Si $\gamma \neq 0$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$ alors

$$\sum_{i=0}^{i_0} r_i(a_1,\dots,a_n)\gamma^{d-i} = 0$$

avec $r_1,\dots,r_{i_0}$ des fractions rationnelles telles que $r_{i_0}(a_1,\dots,a_n)=0$ et $r_0=1$. On en tire

$$\sum_{i=0}^{i_0}\frac{r_i(a_1,\dots,a_n)}{r_{i_0}(a_1,\dots,a_n)}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^i=0$$

ce qui montre que $1/\gamma$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$.

On considère ensuite γ_1 et γ_2 algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$, on va montrer que $\gamma_1+\gamma_2$, $\gamma_1-\gamma_2$ et $\gamma_1\gamma_2$ sont algébriquement dépendants de $\{a_1,\dots,a_n\}$.

Soit L_1 et L_2 deux polynômes unitaires de $\mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{L}_1(\gamma_1)=0$ et $\mathrm{L}_2(\gamma_2)=0$. Le polynôme $\mathrm{L}=\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2$ admet γ_1 et γ_2 comme racines. On a

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})=\sum_{i=0}^{d-1}\ell_i(a_1,\dots,a_n)\mathrm{X}^i+\mathrm{X}^d$$

avec $\ell_i(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)$ pour tout i. Dans une clôture algébrique Ω de $\mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)$, on écrit

$$\mathrm{L}(\mathrm{X})=\prod_{i=1}^{d}(\mathrm{X}-\alpha_i)$$

en numérotant les racines de sorte que $\alpha_1=\gamma_1$ et $\alpha_2=\gamma_2$. La proposition 211 implique

$$\ell_{d-i}(a_1,\dots,a_n)=(-1)^i\sigma_i(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \tag{A.6}$$

pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$.Soit $g\in\mathbb{C}[\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_d]$. On va montrer que $g(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$. Cela impliquera que $\gamma_1+\gamma_2$, $\gamma_1-\gamma_2$ et $\gamma_1\gamma_2$ sont algébriquement dépendants de $\{a_1,\dots,a_n\}$ après avoir choisi $g(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_d)=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2$, $g(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_d)=\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2$ et $g(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_d)=\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$. Considérons pour cela

$$\mathrm{G}(\mathrm{X})=\prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\left(\mathrm{X}-g(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(d)})\right)=\mathrm{X}^{d!}+\sum_{j=0}^{d!-1}h_j\mathrm{X}^j.$$

L'ensemble $\mathfrak{S}_d$ est le groupe des permutations de d éléments. L'une des racines de ce polynôme unitaire est $g(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$. Nous allons montrer que ce polynôme G est à coefficients dans $\mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)$. Cela impliquera que $g(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$ et achèvera donc la démonstration.

Si on ordonne arbitrairement les permutations en écrivant $\mathfrak{S}_d=\{\sigma_1,\dots,\sigma_{d!}\}$, on a

$$h_j=(-1)^{d!-j}s_{d!-j}\left(g(\alpha_{\sigma_1(1)},\dots,\alpha_{\sigma_1(d)}),\dots,g(\alpha_{\sigma_{d!}(1)},\dots,\alpha_{\sigma_{d!}(d)})\right) \tag{A.7}$$

où $s_{d!-j}$ est la $(d!-j)^{\mathrm{e}}$ fonction symétrique élémentaire à $d!$ variables. Permuter les racines $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ dans (A.7) c'est les remplacer par $\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(d)}$ pour une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_d$. C'est donc permuter les variables dans $s_{d!-j}$. Par symétrie de $s_{d!-j}$, cela ne change pas h_j qui est donc un polynôme symétrique de $\alpha_1,\dots,\alpha_d$. Grâce au théorème fondamental des polynômes symétriques (théorème 212), il existe alors un polynôme L tel que $h_j = \mathrm{L}(\sigma_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_d),\ldots,\sigma_d(\alpha_1,\ldots,\alpha_d))$. Grâce à l'égalité (A.6) on a donc

$$h_j = \mathrm{L}\Big(-\ell_{d-1}(a_1,\ldots,a_n),\ell_{d-2}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,(-1)^d\ell_0(a_1,\ldots,a_n)\Big).$$

Le coefficient h_j est donc bien un élément de $\mathbb{C}(a_1,\ldots,a_n)$. □

On donne ensuite une autre caractérisation de la dépendance algébrique.

***Proposition* 224–** *L'élément γ de $\mathbb{K}$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ si et seulement s'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n,\mathrm{X}_{n+1}]$ tel que*

a) le polynôme à une variable $\mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\mathrm{X}_{n+1})$ n'est pas le polynôme nul ;

b) on a $\mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\gamma) = 0$.

Démonstration. Si γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\ldots,a_n\}$, alors il existe des polynômes à coefficients complexes $p_1, q_1,\ldots, p_d, q_d$ tels que

$$\gamma^d + \frac{p_1(a_1,\ldots,a_n)}{q_1(a_1,\ldots,a_n)}\gamma^{d-1} + \cdots + \frac{p_d(a_1,\ldots,a_n)}{q_d(a_1,\ldots,a_n)} = 0.$$

On note p_0 le produit de polynômes $q_1 \cdots q_d$. Si

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d} p_i(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)\mathrm{X}_{n+1}^{d-i}$$

on a donc $\mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\gamma) = 0$. Le coefficient dominant du polynôme à une variable $\mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\mathrm{X}_{n+1})$ est $p_0(a_1,\ldots,a_n)$. Cette quantité est non nulle donc $\mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\mathrm{X}_{n+1})$ n'est pas le polynôme nul.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\gamma) = 0$ et que le polynôme à une variable $\mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\mathrm{X}_{n+1})$ n'est pas le polynôme nul. Si $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(a_1,\ldots,a_n,\mathrm{X})$ alors Q n'est pas constant, sinon son évaluation en γ montre qu'il serait nul. Le degré d de Q est donc au moins égal à 1. On peut donc écrire

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d} p_i(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)\mathrm{X}_{n+1}^{d-i}$$

avec $p_i \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$. Par définition de d, on a $p_0(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$ de sorte que $\mathrm{L}(\gamma) = 0$ avec

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^d + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{p_i(a_1,\ldots,a_n)}{p_0(a_1,\ldots,a_n)}\mathrm{X}^{d-i} \in \mathbb{C}(a_1,\ldots,a_n)[\mathrm{X}].$$

Ainsi, γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\ldots,a_n\}$. □

***Proposition* 225–** *Si γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ alors les fractions rationnelles en γ à coefficients dans $\mathbb{C}(a_1,\ldots,a_n)$ sont des polynômes. Autrement dit,*

$$\mathbb{C}(a_1,\ldots,a_n)[\gamma] = \mathbb{C}(a_1,\ldots,a_n)(\gamma).$$

Démonstration. On note $\mathbb{L} = \mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)$. On a donc $\mathbb{C} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{L}[\gamma] \subset \mathbb{L}(\gamma) \subset \mathbb{K}$. On va montrer que $\mathbb{L}[\gamma]$ est un corps ce qui implique $\mathbb{L}[\gamma] = \mathbb{L}(\gamma)$. On note e_γ l'application d'évaluation :

$$\begin{array}{cccc} e_\gamma & : & \mathbb{L}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{K} \\ & & \mathrm{P} & \mapsto & \mathrm{P}(\gamma). \end{array}$$

C'est un morphisme d'anneaux d'image $\mathrm{Im}\, e_\gamma = \mathbb{L}[\gamma]$. Puisque γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$, le noyau $\mathrm{Ker}\, e_\gamma$ de cet morphisme est non nul et on a un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{L}[\mathrm{X}]/_{\mathrm{Ker}\, e_\gamma} \simeq \mathbb{L}[\gamma]$. Il suffit donc de montrer que l'anneau quotient $\mathbb{L}[\mathrm{X}]/_{\mathrm{Ker}\, e_\gamma}$ est un corps. Le noyau $\mathrm{Ker}\, e_\gamma$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{L}[\mathrm{X}]$. Cet anneau est principal puisque $\mathbb{L}$ est un corps. Il existe donc un polynôme unitaire $\mathrm{M} \in \mathbb{L}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Ker}\, e_\gamma = \mathrm{M}\mathbb{L}[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ alors $\mathrm{M}_1(\gamma) = 0$ ou $\mathrm{M}_2(\gamma) = 0$ donc $\mathrm{M}_1 \in \mathrm{Ker}\, e_\gamma$ ou $\mathrm{M}_2 \in \mathrm{Ker}\, e_\gamma$. On en déduit que M_1 ou M_2 est un multiple de M puis que M est irréductible. Cette irréductibilité implique que l'anneau quotient $\mathbb{L}[\mathrm{X}]/_{\mathrm{Ker}\, e_\gamma}$ est un corps. □

Remarque 226 - Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps quelconque de $\mathbb{K}$. Le polynôme M défini dans la preuve de la proposition 225, c'est-à-dire l'unique polynôme unitaire M tel que

$$\{\mathrm{P} \in \mathbb{L}[\mathrm{X}] : \mathrm{P}(\gamma) = 0\} = \mathrm{M}\mathbb{L}[\mathrm{X}]$$

s'appelle le *polynôme minimal* de γ sur $\mathbb{L}$.

***Proposition* 227–** *L'élément γ de $\mathbb{K}$ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$ si et seulement si l'espace vectoriel $\mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)[\gamma]$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)$.*

Démonstration. On note $\mathbb{L} = \mathbb{C}(a_1,\dots,a_n)$. Supposons que γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$. Une famille génératrice de $\mathbb{L}[\gamma]$ est $(\gamma^j)_{j\geq 0}$. On note d le degré du polynôme minimal M de γ sur $\mathbb{L}$. Si $j \geq d$, on effectue la division euclidienne de X^j par M et on note R le polynôme reste. On a bien sûr $\deg \mathrm{R} < d$ et $\gamma^j = \mathrm{R}(\gamma)$. Ainsi, une famille génératrice de $\mathbb{L}[\gamma]$ est $(\gamma^j)_{j\in\{0,\dots,d-1\}}$ et $\mathbb{L}[\gamma]$ est de dimension finie inférieure à d sur $\mathbb{L}$.

Supposons réciproquement que $\mathbb{L}[\gamma]$ est de dimension finie h sur $\mathbb{L}$. Alors la famille $(\gamma^i)_{0\leq i\leq h}$ est liée sur $\mathbb{L}$. La relation linéaire entre les éléments de cette famille fournit un polynôme annulateur de γ à coefficients dans $\mathbb{L}$. □

On montre ensuite une propriété de transitivité.

***Proposition* 228–** *Si γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$ et si chaque a_i est algébriquement dépendant de $\{b_1,\dots,b_\ell\}$ alors γ est algébriquement dépendant de $\{b_1,\dots,b_\ell\}$.*

Démonstration. Puisque γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$, il est algébriquement dépendant de $\{b_1,\dots,b_\ell,a_1,\dots,a_n\}$. L'espace vectoriel $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell,a_1,\dots,a_n)[\gamma]$ est donc de dimension finie sur $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell,a_1,\dots,a_n)$ d'après la proposition 227. Les coefficients a_i sont tous algébriquement dépendants de $\{b_1,\dots,b_\ell\}$. En appliquant les propositions 225 et 227 successivement à $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell)[a_1]$, $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell,a_1)[a_2]$,..., jusqu'à $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell,a_1,\dots,a_{n-1})[a_n]$ on voit que $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell,a_1,\dots,a_n)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell)$. On en déduit que $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell,a_1,\dots,a_n)[\gamma]$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell)$. L'ensemble $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell)[\gamma]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell,a_1,\ dotsc,a_n)[\gamma]$, donc $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell)[\gamma]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}(b_1,\dots,b_\ell)$. Grâce à la proposition 227 cela implique que γ est algébriquement dépendant de $\{b_1,\dots,b_\ell\}$. □

Enfin, avant la démonstration du théorème principal de cette partie, nous avons besoin d'un lemme technique.

***Lemme* 229** (Lemme d'échange)– *Si γ est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_n\}$ mais algébriquement indépendant de $\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$ alors a_n est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_{n-1},\gamma\}$.*

Démonstration. D'après la proposition 224, il existe un polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{C}[\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n+1}]$ tel que le polynôme à une variable $\mathrm{P}(a_1,\dots,a_n,\mathrm{X})$ est non nul mais la valeur $\mathrm{P}(a_1,\dots,a_n,\gamma)$ est nulle. On écrit

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n+1})=\sum_i p_i(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n-1},\mathrm{X}_{n+1})\mathrm{X}^n$$

Puisque

$$\sum_i p_i(a_1,\dots,a_{n-1},\mathrm{X})a_i^n\neq 0,$$

il existe j tel que $p_j(a_1,\dots,a_{n-1},\mathrm{X})\neq 0$. Puisque γ est algébriquement indépendant de $\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$, on a $p_j(a_1,\dots,a_{n-1},\gamma)\neq 0$. Le polynôme $\mathrm{P}(a_1,\dots,a_{n-1},\mathrm{X},\gamma)$ n'est donc pas le polynôme nul. Ce polynôme s'annule cependant en a_n. La proposition 224 implique donc que a_n est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_{n-1},\gamma\}$. □

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental de cette partie. L'équivalent en algèbre linéaire de ce théorème est le résultat que les familles libres d'un espace vectoriel ont moins d'éléments que ses familles génératrices.

***Théorème* 230**– *Si* A *et* B *sont deux ensembles finis de* $\mathbb{K}$ *tels que*

1) *l'ensemble* A *est algébriquement indépendant*
2) *tout élément de* A *est algébriquement dépendant de* B

alors $\#\mathrm{A}\leq\#\mathrm{B}$.

Démonstration. On note $\mathrm{A}=\{a_1,\dots,a_m\}$ et $\mathrm{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ puis $k=\#\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$. Si $k=m$ alors $m\leq n$ et le résultat est démontré. On suppose maintenant $k<m$. On renumérote les éléments de A de sorte que $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{a_1,\dots,a_k\}$[b] et $\mathrm{B}=\{a_1,\dots,a_k,b_{k+1},\dots,b_n\}$. Puisque A est algébriquement indépendant, en particulier a_{k+1} est algébriquement indépendant de $\{a_1,\dots,a_k\}$. En revanche, il est algébriquement dépendant de $\mathrm{B}=\{a_1,\dots,a_k,b_{k+1},\dots,b_n\}$. Il existe donc j tel que a_{k+1} est algébriquement indépendant de $\{a_1,\dots,a_k,b_{k+1},\dots,b_{j-1}\}$

b. Avec la convention que $\{a_1,\dots,a_k\}=\emptyset$ si $k=0$.

et algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_k,b_{k+1},\dots,b_j\}$ avec $k+1 \leq j \leq n$ [c]. Grâce au lemme d'échange, b_j est algébriquement dépendant de $\{a_1,\dots,a_{k+1},b_{k+1},\dots,b_{j-1}\}$ et donc de $B_1 = B \cup \{a_{k+1}\} \setminus \{b_j\}$. On en déduit que tout élément de B est algébriquement dépendant de B_1 puis, grâce à la proposition 228, que tout élément de A est algébriquement dépendant de B_1, c'est-à-dire d'un ensemble avec lequel il partage $k+1$ éléments et qui a autant d'éléments que B. Par réitération de ce procédé, on construit un ensemble B_ℓ ayant même cardinal que B, tel que $\#A \cap B_\ell = m$ et tel que tout élément de A est algébriquement dépendant de B_ℓ . Comme pour le cas initial ($k = m$), on a $\#A \leq \#B_\ell = \#B$ ce qui achève la preuve. □

A.8 Algèbres de Poisson

Cette partie est inspirée de discussions avec mes collègues François Dumas [9] et Dominique Manchon [25].

***Définition* 231–** *Une algèbre* A *est dite algèbre de Poisson s'il existe une application bilinéaire antisymétrique* $\{\ ,\ \}$ *de* A^2 *dans* A *qui vérifie*

1) *la loi de Leibniz :* $\{ab,c\} = a\{b,c\} + \{a,c\}b$ *pour tous* a, b *et* c *dans* A *;*

2) *l'identité de Jacobi :* $\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\} = 0$ *pour tous* a, b *et* c *dans* A.

L'application $\{\ ,\ \}$ *est appelée* crochet de Poisson *sur* A.

La loi de Leibniz est à voir comme la dérivation d'un produit. Plus précisément, on fait la définition suivante.

***Définition* 232–** *Soit* A *une algèbre et* D *une application linéaire sur* A. *Cette application est une dérivation si pour tout* $(a,b) \in A^2$, *on a*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

En prenant $a = b = 1$, on trouve $D(1) = 0$. Par récurrence, on a $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$ pour tout $n \geq 1$ et cette égalité demeure pour $n = 0$.

***Définition* 233–** *Soit* A *une algèbre et* $\{\ ,\ \}$ *une application bilinéaire de* A^2 *dans* A. *Pour tout* $a \in A$, *on définit l'application* adjointe *associée par*

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{ad}(a) & : & A & \rightarrow & A \\ & & b & \mapsto & \{a,b\}. \end{array}$$

L'application ad *est une application linéaire de* A *dans l'espace vectoriel* $\mathcal{L}(A)$ *des endomorphismes linéaires de* A.

c. Avec la convention que $\{a_1,\dots,a_k,b_{k+1},\dots,b_{j-1}\} = \{a_1,\dots,a_k\}$ si $j = k+1$.

***Définition* 234**— *Soit* A *une algèbre et* $\{\ ,\ \}$ *une application bilinéaire de* A^2 *dans* A. *Pour tout* $a \in A$, *on définit l'application* adjointe *étoile associée par*

$$\begin{array}{rcrcl} \mathrm{ad}^*(a) & : & A & \to & A \\ & & b & \mapsto & \{b,a\}. \end{array}$$

L'application ad^* *est une application linéaire de* A *dans l'espace vectoriel* $\mathcal{L}(A)$ *des endomorphismes linéaires de* A.

Remarque 235 - Dire que $\{\ ,\ \}$ vérifie la loi de Leibniz est équivalent à dire que l'application linéaire ad est une dérivation. C'est aussi équivalent à dire que, pour tout $a \in A$, l'endomorphisme linéaire $\mathrm{ad}^*(a)$ est une dérivation. Si le crochet est de plus antisymétrique, dire que $\{\ ,\ \}$ vérifie la loi de Leibniz est aussi équivalent à dire que l'endomorphisme linéaire $\mathrm{ad}(a)$ est une dérivation.

Soit $\{\ ,\ \}$ vérifiant la loi de Leibniz. On a donc $\{1,b\} = 0$ pour tout $b \in A$ puis si a et b sont deux éléments de A et si $n \geq 0$ est un entier,

$$\{a^n, b\} = na^{n-1}\{a,b\}.$$

On en déduit, si $m \geq 0$ que

$$\{a^n, b^m\} = nma^{n-1}b^{m-1}\{a,b\}.$$

On voit alors que

$$\{a^n, a^m\} = 0. \tag{A.8}$$

On a aussi $\{a^n b, a^m\} = na^{m+n-1}\{b,a\}$ puis

$$\{a^n b, a^m c\} = ma^{n+m-1}c\{b,a\} + na^{n+m-1}b\{a,c\} + a^{n+m}\{b,c\}. \tag{A.9}$$

Enfin

$$\{a^n b^p, a^m b^q\} = (mp - nq)a^{n+m-1}b^{q+p-1}\{b,a\}. \tag{A.10}$$

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$, on écrit

$$P = \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i,j} b_{i,j} X^i Y^j.$$

alors, l'égalité (A.10) et la bilinéarité montrent que

$$\{P(x,y), Q(x,y)\} = J[P,Q](x,y)\{x,y\} \tag{A.11}$$

où $J[P,Q]$ est le polynôme

$$J[P,Q] = \sum_{i,j,p,q} (iq - pj)a_{i,j}b_{p,q}X^{i+p-1}Y^{j+q-1} = \frac{\partial P}{\partial X}\frac{\partial Q}{\partial Y} - \frac{\partial Q}{\partial X}\frac{\partial P}{\partial Y}.$$

C'est donc le déterminant du jacobien de l'application $(x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$.

Remarque 236 - Le lecteur vérifiera aisément que l'application $(P,Q) \mapsto J[P,Q]$ de $\mathbb{K}[X,Y]\times\mathbb{K}[X,Y]$ dans $\mathbb{K}[X,Y]$ est un crochet de Poisson sur $\mathbb{K}[X,Y]$. Munie de ce crochet, l'algèbre de Poisson $\mathbb{C}[X,Y]$ est appelée *algèbre de Poisson-Weyl* à deux indéterminées. L'algèbre de Poisson-Weyl à $2n$ indéterminées est l'agèbre $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n]$ munie du crochet

$$\{P,Q\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial Y_i} - \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial P}{\partial Y_i}.$$

Une algèbre A sur un corps $\mathbb{K}$ est dite de *type fini* s'il existe un nombre fini $e_1,\ldots,e_n$ d'éléments distincts de A tels que, pour tout élément de A, il existe un polynôme de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ vérifiant $a = P(e_1,\ldots,e_n)$. On dit que A est de type fini *engendrée par* $\{e_1,\ldots,e_n\}$. On va généraliser l'égalité (A.11). Pour cela, on définit

$$J_{ij}[P,Q] = \frac{\partial P}{\partial X_i}\frac{\partial Q}{\partial X_j} - \frac{\partial Q}{\partial X_i}\frac{\partial P}{\partial X_j}$$

pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$.

***Lemme* 237–** *Soit* A *est une algèbre de type fini sur* $\mathbb{K}$ *engendrée par* $\{e_1,\ldots,e_n\}$. *On suppose* A *munie d'une application bilinéaire antisymétrique* $\{\ ,\ \}$ *de* $A\times A$ *dans* A *vérifiant la loi de Leibniz. Soit* P *et* Q *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$. *Alors*

$$\{P(e_1,\ldots,e_n), Q(e_1,\ldots,e_n)\} = \sum_{1\le i<j\le n} J_{ij}[P,Q](e_1,\ldots,e_n)\{e_i,e_j\}.$$

Remarque 238 - La donnée d'une suite $\left(\{e_i,e_j\}\right)_{1\le i<j\le n}$ d'éléments de A ne conduit pas nécessairement à un crochet de Poisson. Il faut en effet vérifier l'identité de Jacobi qui n'est ni utilisée ni vérifiée dans la démonstration du lemme 237. Si en revanche l'algèbre est isomorphe à $\mathbb{K}[X,Y]$, alors l'identité de Jacobi est toujours vérifiée. Ceci est démontré à la remarque 241.

Démonstration du lemme 237. Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour $P = X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$ et $Q = X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$.

On commence par étudier le cas où $P = X_a^{i_a}\ldots X_n^{i_n}$ et $Q = X_{a-1}$ pour $a \in \{2,n\}$. Par la loi de Leibniz on a

$$\{e_a^{i_a}\cdots e_n^{i_n}, e_{a-1}\} = e_a^{i_a}\{e_{a+1}^{i_{a+1}}\cdots e_n^{i_n}, e_{a-1}\} + i_a e_a^{i_a-1} e_{a+1}^{i_{a+1}}\cdots e_n^{i_n}\{e_a,e_{a-1}\}.$$

Par réitération, on en tire

$$\{e_a^{i_a}\cdots e_n^{i_n}, e_{a-1}\} = \sum_{j=a}^{n} i_j \left(\prod_{\substack{k=a\\k\neq j}}^{n} e_k^{i_k}\right) e_j^{i_j-1}\{e_j,e_{a-1}\}$$

c'est-à-dire

$$\{e_a^{i_a}\cdots e_n^{i_n}, e_{a-1}\} = \sum_{j=a}^{n} \left(\frac{\partial X_a^{i_a}\ldots X_n^{i_n}}{\partial X_j}\right)(e_1,\ldots,e_n)\{e_j,e_{a-1}\}. \tag{A.12}$$

On suppose ensuite $P = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ et $Q = X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$. Pour $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, on note $P_\ell = X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n}$ et $Q_\ell = X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n}$. On note alors $\mathcal{E}(\ell)$ l'égalité

$$\{P_\ell(e_1, \dots, e_n), Q_\ell(e_1, \dots, e_n)\} = \sum_{n-\ell \le i < j \le n} J_{ij}[P_\ell, Q_\ell](e_1, \dots, e_n)\{e_i, e_j\}.$$

et on veut démontrer $\mathcal{E}(n-1)$. L'égalité $\mathcal{E}(0)$ est vraie puisque $\{e_n^{i_n}, e_n^{j_n}\} = 0$ grâce à (A.8). Supposons avoir démontré $\mathcal{E}(\ell)$ pour un entier $\ell \in \{0, \dots, n-2\}$. Utilisant (A.9), on écrit

$$\begin{aligned}\{e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}} \cdots e_n^{i_n}, e_{n-\ell-1}^{j_{n-\ell-1}} \cdots e_n^{j_n}\} = {} & j_{n-\ell-1} e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} e_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots e_n^{j_n} \{e_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots e_n^{i_n}, e_{n-\ell-1}\} \\ & - i_{n-\ell-1} e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} e_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots e_n^{i_n} \{e_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots e_n^{j_n}, e_{n-\ell-1}\} \\ & + e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}} \{e_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots e_n^{i_n}, e_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots e_n^{j_n}\}.\end{aligned}$$

On utilise (A.12) et $\mathcal{E}(\ell)$ pour écrire alors $\{e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}} \cdots e_n^{i_n}, e_{n-\ell-1}^{j_{n-\ell-1}} \cdots e_n^{j_n}\}$ comme

$$\begin{aligned}&\sum_{j=n-\ell}^{n} \left(j_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots X_n^{j_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots X_n^{i_n}}{\partial X_j} \right)(e_1, \dots, e_n)\{e_j, e_{n-\ell-1}\} \\ &\quad - \sum_{j=n-\ell}^{n} \left(i_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots X_n^{i_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots X_n^{j_n}}{\partial X_j} \right)(e_1, \dots, e_n)\{e_j, e_{n-\ell-1}\} \\ &\qquad + \sum_{n-\ell \le i < j \le n} \left(X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}} J_{ij}[X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots X_n^{i_n}, X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots X_n^{j_n}] \right)(e_1, \dots, e_n)\{e_i, e_j\}.\end{aligned}$$

Cette quantité se réécrit

$$\sum_{n-(\ell+1) \le i < j \le n} J_{ij}[P_{\ell+1}, Q_{\ell+1}](e_1, \dots, e_n)\{e_i, e_j\}$$

car $J_{ij}[X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}} \cdots X_n^{i_n}, X_{n-\ell}^{j_{n-\ell-1}} \cdots X_n^{j_n}]$ vaut

$$X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}} J_{ij}[X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots X_n^{i_n}, X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots X_n^{j_n}]$$

si $n-\ell \le i < j \le n$ et

$$\begin{aligned}&i_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots X_n^{i_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots X_n^{j_n}}{X_j} \\ &\qquad - j_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \cdots X_n^{j_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \cdots X_n^{i_n}}{X_j}\end{aligned}$$

si $n-\ell-1 = i < j \le n$. On termine alors par réitération de $\ell \in \{0, \dots, n-2\}$. $\square$

Le lemme suivant sera utile pour étudier l'identité de Jacobi.

***Lemme* 239–** *Si* A *est une algèbre de type fini engendrée par* $\{e_1,\dots,e_n\}$. *Si* D *est une dérivation sur* A. *Si* $\mathrm{D}(e_i)=0$ *pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$ *alors* $\mathrm{D}=0$.

Démonstration. Soit $i_1,\dots,i_n$ des entiers naturels. On a

$$\mathrm{D}\left(\prod_{j=1}^{n} e_j^{i_j}\right)=\sum_{j=1}^{n} i_j e_j^{i_j-1}\mathrm{D}(e_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} e_k^{i_k}=0.$$

Par linéarité, on a enfin $\mathrm{D}(a)=0$ puis tout $a\in\mathrm{A}$. □

***Proposition* 240–** *Soit* A *une algèbre de type fini engendrée par* $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$. *Soit* $\{\ ,\ \}$ *une application bilinéaire antisymétrique de* A^2 *dans* A *vérifiant la loi de Leibniz. On suppose que l'identité de Jacobi est vérifiée pour les éléments de* $\mathcal{E}$. *Alors* A *munie de* $\{\ ,\ \}$ *est une algèbre de Poisson.*

Démonstration. Pour tout $(u,v)\in\mathrm{A}^2$, on définit l'endomorphisme linéaire

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{R}[u,v] & : & \mathrm{A} & \to & \mathrm{A} \\ & & w & \mapsto & \{u,\{v,w\}\}+\{v,\{w,u\}\}+\{w,\{u,v\}\}. \end{array}$$

Grâce à la loi de Leibniz, on a

$$\{u,\{v,ww'\}\}=\{u,\{v,w\}\}\,w'+\{u,w'\}\{v,w\}+\{u,\{v,w'\}\}\,w+\{u,w\}\{v,w'\}$$

puis

$$\{v,\{ww',u\}\}=\{v,\{w',u\}\}\,w+\{v,w\}\{w',u\}+\{v,\{w,u\}\}\,w'+\{v,w'\}\{w,u\}$$

et enfin

$$\{ww',\{u,v\}\}=\{w,\{u,v\}\}\,w'+\{w',\{u,v\}\}\,w.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{R}[u,v](ww') &= (\{u,\{v,w\}\}+\{v,\{w,u\}\}+\{w,\{u,v\}\})\,w' \\ &\quad+(\{u,\{v,w'\}\}+\{v,\{w',u\}\}+\{w',\{u,v\}\})\,w \\ &\quad+(\{u,w'\}+\{w',u\})\{v,w\}+(\{u,w\}+\{w,u\})\{v,w'\} \\ &= \mathrm{R}[u,v](w)w'+\mathrm{R}[u,v](w')w. \end{aligned}$$

L'endomorphisme linéaire $\mathrm{R}[u,v]$ est donc une dérivation. Par hypothèse, pour tout $(u,v)\in\mathcal{E}^2$, cette dérivation s'annule sur $\mathcal{E}$. Grâce au lemme 239, elle s'annule donc sur A. Puisque $\mathrm{R}[u,v](w)=\mathrm{R}[w,u](v)$, on a donc

$$\forall w\in\mathrm{A},\ \forall v\in\mathcal{E},\ \forall u\in\mathcal{E},\ \mathrm{R}[w,u](v)=0.$$

L'endomorphisme linéaire $\mathrm{R}[w,u]$ est alors une dérivation qui s'annule sur $\mathcal{E}$ et donc sur A. Puisque $\mathrm{R}[w,u](v)=\mathrm{R}[v,w](u)$, on en déduit

$$\forall v\in\mathrm{A},\ \forall w\in\mathrm{A},\ \forall u\in\mathcal{E},\ \mathrm{R}[v,w](u)=0.$$

L'endomorphisme linéaire $\mathrm{R}[v,w]$ est alors une dérivation qui s'annule sur $\mathcal{E}$ et donc sur A. On a donc $\mathrm{R}[v,w](u)=0$ pour tous u, v et w dans A ce qui est l'identité de Jacobi. □

Remarque 241 - Soit A est une algèbre de type fini à deux générateurs x et y. On suppose que A est munie d'une application bilinéaire antisymétrique $\{\ ,\ \}$ de $A \times A$ dans A vérifiant la loi de Leibniz. Alors, cette application vérifie l'identité de Jacobi et A est une algèbre de Poisson. En effet, grâce à la proposition 240, il suffit de vérifier

$$\{x, \{y, y\}\} + \{y, \{x, y\}\} + \{y, \{y, x\}\} = 0$$

et

$$\{x, \{x, y\}\} + \{y, \{x, x\}\} + \{x, \{y, x\}\} = 0$$

ce qui est conséquence immédiate de l'antisymétrie.

Exemple 242 - Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$. On définit une structure de Poisson sur l'agèbre $\mathbb{C}[X, Y]$, en posant $\{X, Y\} = P$. Ceci détermine en effet une application bilinéaire antisymétrique satisfaisant la loi de Leibniz :

$$\{F, G\} = J[F, G]P.$$

Cette application vérifie l'identité de Jacobi d'après la remarque 241.

Exemple 243 - Soit $\{\ ,\ \}$ une application bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{K}[X, Y, Z]$ satisfaisant à la loi de Leibniz. Le lemme 237 implique

$$\{F, G\} = J_{13}[F, G]\{X, Z\} + J_{23}[F, G]\{Y, Z\} + J_{12}[F, G]\{X, Y\}.$$

pour tous polynômes F et G de $\mathbb{K}[X, Y, Z]$. On note P, Q et R les polynômes définis par

$$\{X, Y\} = R, \quad \{Y, Z\} = P \quad \text{et} \quad \{Z, X\} = Q. \tag{A.13}$$

Par ce qui précède, l'application bilinéaire

$$\{F, G\} = -J_{13}[F, G]Q + J_{23}[F, G]P + J_{12}[F, G]R$$

détermine un crochet de Poisson si et seulement si elle vérifie l'identité de Jacobi. Grâce à la loi de Leibniz et à la bilinéarité, l'identité de Jacobi est vérifiée si et seulement si

$$\{X, \{Y, Z\}\} + \{Y, \{Z, X\}\} + \{Z, \{X, Y\}\} = 0.$$

Cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si

$$\begin{aligned} -\left(J_{13}[X, P] + J_{13}[Y, Q] + J_{13}[Z, R]\right) Q + \left(J_{12}[X, P] + J_{12}[Y, Q] + J_{12}[Z, R]\right) R \\ + \left(J_{23}[X, P] + J_{23}[Y, Q] + J_{23}[Z, R]\right) P = 0. \end{aligned}$$

On définit le rotationel de (P, Q, R) par

$$\operatorname{Rot}(P, Q, R) = \left(\frac{\partial R}{\partial Y} - \frac{\partial Q}{\partial Z}, \frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial X}, \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y}\right).$$

Les données (A.13) définissent donc un crochet de Poisson si et seulement si

$$\operatorname{Rot}(P, Q, R).(P, Q, R) = 0.$$

Un isomorphisme entre deux algèbres qui portent une structure de Poisson peut transporter les stuctures de Poisson. Plus précisément, on fait la définition suivante.

***Définition* 244–** *Soit* A *et* B *deux algèbres. On suppose* A *munie d'un crochet de Poisson* $\{\ ,\ \}_{\mathrm{A}}$ *et* B *munie d'un crochet de Poisson* $\{\ ,\ \}_{\mathrm{B}}$*. Un isomorphisme d'algèbres* $\varphi\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *est appelé* isomorphisme de Poisson *si, pour tous x et y dans* A *on a*

$$\varphi\left(\{x, y\}_{\mathrm{A}}\right) = \{\varphi(x), \varphi(y)\}_{\mathrm{B}}.$$

Annexe B

Compléments d'analyse

B.1 Applications conformes

***Définition* 245–** *Une application entre deux ouverts de* $\mathbb{C}$ *est* conforme *si elle est holomorphe et bijective.*

L'intérêt essentiel des applications conformes est le résultat suivant.

***Théorème* 246–** *Une application conforme admet une fonction réciproque holomorphe.*

La preuve repose sur le théorème de l'application ouverte, le théorème des fonctions implicites et le critère d'effacement des singularités de Riemann. Les détails sont disponibles dans [12, IV.4], [15, VIII.1.3 et VIII.2.5, théorème 7] ou [37, Chapter 8, Proposition 1].

B.2 Développement de Fourier complexe

L'application $e\colon z \mapsto \exp(2i\pi z)$ envoie le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ sur le disque unité épointé $\mathring{\mathrm{D}}(0,1) := \{q \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |q| < 1\}$. Cette application n'est évidemment pas bijective puisqu'elle est périodique de période 1 mais c'est la seule obstruction : sa restriction à la bande verticale $\mathrm{B} := \{z \in \mathcal{H}\colon\ 0 \leq \mathrm{R}e\, z < 1\}$ est bijective [a]. On note φ la réciproque de $e_{|\mathrm{B}}$. Naturellement on aurait pu choisir n'importe quelle bande verticale de largeur 1 à la place de B. On particulier, si $\mathrm{B}' := \{z \in \mathcal{H}\colon\ -1/2 \leq \mathrm{R}e\, z < 1/2\}$, on note ψ la réciproque de $e_{|\mathrm{B}'}$.

Soit $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe périodique de période 1. On pose $\widetilde{f} = f \circ \varphi$ et $\check{f} = f \circ \psi$. Si $z \in \mathcal{H}$ alors

$$f(z) = f(z - \lfloor \mathrm{R}e(z) \rfloor) = \widetilde{f}(e(z - \lfloor \mathrm{R}e(z) \rfloor)) = \widetilde{f}\left(e^{2i\pi z}\right).$$

a. Remarquer que B n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$.

De même, après avoir défini

$$\langle x\rangle := \begin{cases} \lfloor x\rfloor & \text{si } x-\lfloor x\rfloor \in [0,\frac{1}{2}[\\ \lfloor x\rfloor+1 & \text{si } x-\lfloor x\rfloor \in [\frac{1}{2},1[\end{cases}$$

pour tout réel x a-t-on

$$f(z) = f(z-\langle \mathrm{Re}(z)\rangle) = \check{f}(e(z-\langle \mathrm{Re}(z)\rangle)) = \check{f}\left(e^{2i\pi z}\right).$$

La restriction de e à l'intérieur $\mathring{\mathrm{B}}$ de B est holomorphe et bijective donc conforme (voir l'annexe B.1). Puisque l'image de $e_{|\mathring{\mathrm{B}}}$ est $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\setminus\mathbb{R}^+$ on en déduit que $\varphi_{|\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\setminus\mathbb{R}^+}$ est holomorphe et donc que $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\setminus\mathbb{R}^+$. De la même façon, $\check{f}$ est holomorphe sur $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\setminus\mathbb{R}^-$. Montrons maintenant que $\widetilde{f}$ est holomorphe en tout point de $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\cap\mathbb{R}^+$. Si $q\in\mathring{\mathrm{D}}(0,1)$ alors $\exp(2i\pi\varphi(q)) = q = \exp(2i\pi\psi(q))$ donc $\varphi(q)-\psi(q)\in\mathbb{Z}$ puis $f(\varphi(q)) = f(\psi(q))$. Il en résulte que $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$ coïncident au voisinage de tout point de $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\cap\mathbb{R}^+$. Puisque $\widehat{f}$ est holomorphe au voisinage de tout point de $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\cap\mathbb{R}^+$ on en déduit que $\widetilde{f}$ est holomorphe en ces points. On a donc démontré le résultat suivant.

***Lemme* 247–** *Soit $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe et périodique de période* 1*. Il existe une fonction $\widetilde{f}:\mathring{\mathrm{D}}(0,1)\to\mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z)=\widetilde{f}\left(e^{2i\pi z}\right)$ pour tout $z\in\mathcal{H}$.*

Puisque la fonction $\widetilde{f}$ admet un développement de Laurent

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)q^n$$

normalement convergent sur tout compact de $\mathring{\mathrm{D}}(0,1)$, on obtient le résultat suivant.

***Théorème* 248–** *Soit $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe périodique de période* 1*. Elle admet un développement de Fourier*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nz}$$

normalement convergent sur tout compact de $\mathcal{H}$.

En appliquant le théorème des résidus à $\widetilde{f}$, on trouve

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}(0,r)} \frac{\widetilde{f}(q)}{q^{n+1}}\,\mathrm{d}q = \int_0^1 \frac{\widetilde{f}(re(x))}{r^n e(nx)}\,\mathrm{d}x$$

pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $r\in]0,1[$. Écrivant $r=e^{-2\pi y}$ et $z=x+iy$ on tire

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(z)e^{-2i\pi nz}\,\mathrm{d}x$$

ce qui justifie la notation ($\widehat{f}(n)$ est la valeur en n de la transformée de Fourier de f). En choisissant $y = 1/2$, on voit qu'il existe une $C > 0$ tel que

$$\widehat{f}(n) \leq Ce^{\pi n}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 249 - On trouve dans [16, VII.4.17] une démonstration de ce résultat à partie de la théorie de Fourier des fonctions de la variable réelle.

B.3 Logarithmes complexes

B.3.1) Détermination principale du logarithme

Soit

$$S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}\, w \leq \pi\}.$$

L'application

$$\begin{array}{rccc} \exp_{|S} & : & S & \to & \mathbb{C}^* \\ & & w & \mapsto & \exp(w) \end{array}$$

est bijective. L'injectivité résulte de l'égalité :

$$\exp(w) = \exp(w') \Longrightarrow w - w' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

et la surjectivité résulte de l'écriture polaire des nombres complexes non nuls :

$$r\exp(i\theta) = \exp(\log(r) + i\theta).$$

On note log la réciproque de $\exp_{|S}$.

***Propriété-définition* 250–** *Il existe une unique fonction, appelée* détermination principale du logarithme

$$\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$$

qui vérifie les propriétés

i) $\exp(\log z) = z$;

ii) $-\pi < \mathrm{Im}\log z \leq \pi$.

Remarque 251 - Grâce à l'unicité, la restriction de log à $\mathbb{R}^{*+}$ est le logarithme Neperien habituel. Cela justifie la notation la notation.

On note $\arg z$ la détermination principale de l'argument de z : c'est l'unique réel de $]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z|\exp(i\arg z)$. On déduit de la relation

$$\exp(\log|z| + i\arg z) = |z|\exp(i\arg(z)) = z$$

la

***Proposition* 252–** *Si* $z \in \mathbb{C}^*$ *on a*

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

autrement dit,

$$\mathrm{R}e \log z = \log|z|, \quad \mathrm{I}m \log z = \arg z.$$

Remarque 253 - Si $z \in \mathbb{C}^*$, on note k_z l'unique entier tel que $-\pi < \mathrm{I}m(z) + 2k_z\pi \leq \pi$. On a alors $\log \exp(z) = z + 2ik_z\pi$.

Remarque 254 - La propriété

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \log(ab) = \log a + \log b$$

ne s'étend *pas* à $\mathbb{C}^*$. Ainsi

$$\log[i(i-1)] = \frac{1}{2}\log 2 - i\frac{3\pi}{4}$$

et

$$\log i + \log(i-1) = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{5\pi}{4}.$$

Le lemme suivant donne le « défaut d'angle ». Le lecteur le démontrera aisément en « ramenant » la somme des angles dans l'intervalles $]-\pi,\pi]$.

***Lemme* 255–** *Si a et b sont deux complexes non nuls,*

$$\log(ab) = \log a + \log b + 2i\pi k(a,b)$$

avec

$$k(a,b) = \begin{cases} -1 & si\ \pi < \arg a + \arg b \leq 2\pi\,; \\ 0 & si\ -\pi < \arg a + \arg b \leq \pi\,; \\ 1 & si\ -2\pi < \arg a + \arg b \leq -\pi. \end{cases}$$

La fonction log est discontinue en tout point de $\mathbb{R}^{*-}$. Si $a \in \mathbb{R}^{*-}$, on voit la discontinuité en a en considérant les suites

$$z_n = |a|\exp\left[\left(\pi - \frac{1}{n}\right)i\right] \text{ et } w_n = |a|\exp\left[-\left(\pi - \frac{1}{n}\right)i\right].$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -|a| = a$ mais

$$\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \log|a| + \lim_{n\to+\infty}\left(\pi - \frac{1}{n}\right)i = \log|a| + i\pi = \log(a)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \log w_n = \log|a| + \lim_{n\to+\infty}\left(-\pi + \frac{1}{n}\right)i = \log|a| - i\pi = \log(a) - 2i\pi.$$

Cependant, cette source de discontinuité est la seule comme on le montre dans la proposition suivante.

***Proposition* 256–** *La détermination principale du logarithme est continue sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Démonstration. En partant de

$$\frac{z}{|z|} = \cos\arg(z) + i\sin\arg(z)$$

on obtient

$$\begin{cases} \arg(z) = -\arccos\left(\dfrac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}\right) & \text{si } -\pi < \arg z < 0 \\ \arg(z) = \arccos\left(\dfrac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}\right) & \text{si } 0 \leq \arg z \leq \pi. \end{cases}$$

De plus, $\arg(z)$ est du signe de $\dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}$. Ainsi,

$$\arg(z) = \begin{cases} \mathrm{Signe}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}\right)\arccos\left(\dfrac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}\right) & \text{si } z \notin \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R}^{+*} \\ \pi & \text{si } z \in \mathbb{R}^{-*}. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la continuité de arg sur

$$\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z > 0\} \quad \text{et} \quad \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z < 0\}.$$

Soit $z \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ de limite z. Alors, si $z_n \notin \mathbb{R}$, on a

$$|\arg(z_n)| = \left|\mathrm{Signe}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z_n}{|z_n|}\right)\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}\, z_n}{|z_n|}\right)\right| \leq \left|\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}\, z_n}{|z_n|}\right)\right|$$

alors que $\arg(z_n) = 0$ si $z_n \in \mathbb{R}^{*+}$. Puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}\, w_n}{|w_n|}\right) = \arccos(1) = 0$$

si w_n tend vers un réel strictement positif en ne prenant pas de valeur réelles, on obtient que la limite de $\arg z_n$ est $0 = \arg z$. □

Pour étudier l'holomorphie du logarithme, on utilise le lemme suivant.

***Lemme* 257–** *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ *deux fonctions continues,* Ω *et* Ω' *étant des ouverts de* $\mathbb{C}$ *tels que* $f(\Omega) \subset \Omega'$. *On suppose que* $g(f(z)) = z$ *pour tout* $z \in \Omega$, *que* g *est holomorphe en* $f(a)$ *et que* $g'(f(a)) \neq 0$. *Alors* f *est holomorphe en* a *et que* $f'(a) = 1/g'(f(a))$.

Démonstration. De

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{f(z) - f(a)} \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a}$$

on tire

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{1}{\dfrac{g(f(z))-g(f(a))}{f(z)-f(a)}}.$$

Par continuité de f, si z tend vers a alors $f(z)$ tend vers $f(a)$ et, par holomorphie de g en $f(a)$ le quotient $\dfrac{g(f(z))-g(f(a))}{f(z)-f(a)}$ tend vers $g'(f(a))$. On en déduit le résultat. □

En choisissant pour f la restriction de la détermination principale du logarithme à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et pour g la fonction exponentielle, on obtient le résultat suivant.

***Proposition* 258–** *La détermination principale du logarithme est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, on a*

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Cette proposition implique que

$$\log(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \tag{B.1}$$

pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. En utilisant le chemin

$$\xi(t) = \begin{cases} e^{it\arg(z)} & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ te^{i\arg z} & \text{si } 1 \le t \le |z| \end{cases}$$

(voir figure B.1, ce chemin ne coupe pas $\mathbb{R}^-$ puisque $-\pi < \arg(z) \le z$), on retrouve l'égalité

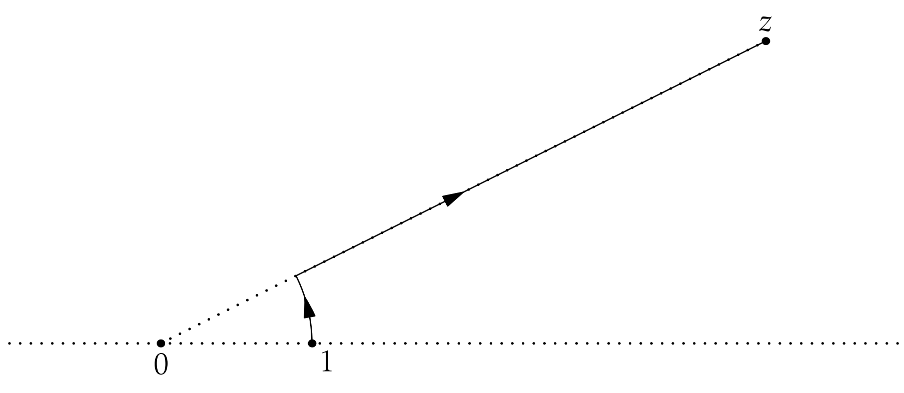


Figure B.1 –

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \log|z| + i\arg(z).$$

On peut alors donner un développement en série de $\log(1-q)$ qui confirme celui déjà connu pour le logarithme néperien sur $\mathbb{R}^+$.

***Proposition* 259–** *Pour tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$, la détermination principale du logarithme vérifie*

$$\log(1-q) = -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{q^j}{j}.$$

Démonstration. La série converge normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(0,1) = \{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$. Elle y définit donc une fonction holomorphe $\mathrm{S} : q \mapsto \mathrm{S}(q)$. Par ailleurs, la proposition 258 implique que la fonction $\mathrm{L} : q \mapsto \log(1-q)$ est elle aussi holomorphe sur $\mathrm{D}(0,1)$. Enfin, les fonctions S et L coïncident sur l'intervalle réel $[0,1[$, qui contient un point d'accumulation. Par le théorème d'unicité du prolongement analytique, les fonctions L et S sont donc égales de $\mathrm{D}(0,1)$. □

Remarque 260 - On peut aussi démontrer la proposition 259 en dérivant les deux termes de l'égalités.

B.3.2) Racine carrée

***Définition* 261–** *On définit la fonction* racine carrée *par*

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{} & : & \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right). \end{array}$$

On a

$$\left(\sqrt{z}\right)^2 = z$$

et

$$\sqrt{-|z|} = i|z|.$$

On déduit la proposition suivante de multiplicativité de la racine carrée de la définition et du lemme 255.

***Proposition* 262–** *Pour tous complexes non nuls a et b on a*

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} = \begin{cases} 1 & \textit{si } -\pi < \arg(a) + \arg(b) \leq \pi \\ -1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

B.3.3) Détermination holomorphe du logarithme d'une fonction

***Proposition* 263–** *Soit Ω un domaine élémentaire*[b] *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas. Soit $z_0 \in \Omega$. Il existe une fonction holomorphe* $\operatorname{Log} f : \Omega \to \mathbb{C}$ *telle que*

$$\exp(\operatorname{Log} f(z)) = f(z)$$

pour tout $z \in \Omega$ et

$$\operatorname{Log} f(z_0) = \log f(z_0).$$

La fonction $\operatorname{Log} f$ *s'appelle une* détermination holomorphe du logarithme de f.

b. Par exemple un ouvert étoilé.

Démonstration. Puisque f ne s'annule pas, la fonction f'/f est holomorphe sur Ω. L'ensemble Ω est un domaine élémentaire donc f'/f admet une primitive. Soit h définie par

$$h(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'}{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

pour tout $z \in \Omega$. La valeur de $h(z)$ ne dépend pas du chemin de Ω choisi pour relier z_0 à z et $h(z_0) = 0$. Soit

$$g(z) = \frac{\exp(h(z))}{f(z)}.$$

On a $g'(z) = 0$ donc g est constante sur Ω. Soit C tel que $\exp(h(z)) = \mathrm{C}f(z)$ pour tout $z \in \Omega$. En évaluant en z_0, on a $\mathrm{C} = 1/f(z_0)$ et donc

$$\exp(h(z) + \log f(z_0)) = f(z)$$

pour tout $z \in \Omega$. On pose $\operatorname{Log} f = h(z) + \log f(z_0)$. □

`Exemple 264`- On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenu dans Ω tel que $f(z) \in \mathbb{R}^{+*}$ pour tout $z \in \mathrm{I}$. Soit $z_0 \in \mathrm{I}$, on a alors $\log f(z_0) = \ln f(z_0)$ et on choisit $\operatorname{Log} f$ une détermination holomorphe du logarithme de f sur Ω telle que $\operatorname{Log} f(z_0) = \ln(f(z_0))$. Si $z \in \mathrm{I}$, alors $f(z) \in \mathbb{R}^{+*}$ et donc $\exp(\ln f(z)) = f(z)$. Il existe donc $k\colon \mathrm{I} \to \mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{Log} f(z) = \ln f(z) + 2i\pi k(z)$ pour tout $z \in \mathrm{I}$. Par continuité, k est constante et par évaluation en $z = z_0$, la fonction k est nulle. La fonction $\operatorname{Log} f$ coïncide donc avec $\ln f$ sur I. C'est donc l'unique prolongement holomorphe de $\ln f$ à I.

B.4 Nombres de Bernoulli

On définit les nombres de Bernoulli $\{\mathrm{B}_n\}$ par le développement en série entière [c]

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n \frac{t^n}{n!}.$$

En partant de

$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}$$

et en utilisant alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n \frac{t^n}{n!} = 1$$

c. La fonction $z \mapsto \frac{e^z-1}{z}$ est holomorphe et non nulle au voisinage de 0. Son inverse $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ est donc holomorphe au voisinage de 0 et donc développable en série entière au voisinage de 0. On se place sur ce voisinage dans les calculs suivants.

on obtient

$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k+1}{n} \mathrm{B}_n = 0$$

pour tout entier $k \geq 1$. Ainsi, par récurrence, les nombres de Bernoulli sont des rationnels. On a $\mathrm{B}_0 = 1$ et $\mathrm{B}_1 = -\frac{1}{2}$ et par parité de la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1} - 1 + \frac{t}{2}$, on voit que si $n \geq 3$ est impair, alors $\mathrm{B}_n = 0$.

k	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
B_k	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

On va montrer que les nombres de Bernoulli permettent de calculer les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs. La formule d'Euler est

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right)$$

la convergence étant normale sur tout compact du disque unité ouvert ne contenant pas 0 (voir l'annexe B.10). Pour tout z de norme strictement inférieure à 1, elle implique

$$\begin{aligned} \pi z \operatorname{cotan}(\pi z) &= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2z^2}{z^2 - m^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^2}{m^2} \cdot \frac{1}{1-(z/m)^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z^2}{m^2} \right)^n \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(2n) z^{2n}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

En écrivant

$$\pi z \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{2i\pi z}{\exp(2i\pi z) - 1} + i\pi z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \mathrm{B}_{2n} z^{2n} \tag{B.3}$$

on a alors

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \mathrm{B}_{2n} \tag{B.4}$$

valable pour tout entier $n \geq 1$.

k	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$\zeta(k)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$	$\frac{691\pi^{12}}{638512875}$	$\frac{2\pi^{14}}{18243225}$	$\frac{3617\pi^{16}}{325641566250}$	$\frac{43867\pi^{18}}{38979295480125}$

Il résulte notament de l'égalité (B.4) que $B_{2n} > 0$ si n est impair et $B_{2n} < 0$ si n est pair. Puisque $\zeta(2n)$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, on a aussi

$$B_{2n} \sim (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \quad (n \to +\infty).$$

En particulier, l'égalité

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

est vraie dès que $|t| < 2\pi$.

Les nombres de Bernoulli permettent le calcul des sommes de puissances d'entiers.

***Proposition* 265–** *Soit $m \geq 0$ et $n \geq 1$ deux entiers. Alors,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{\ell=1}^{m+1} \binom{m+1}{\ell} B_{m+1-\ell} n^\ell.$$

m \ ℓ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
2	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
3	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$							
4	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$						
5	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$					
6	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$				
7	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$			
8	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$		
9	0	$-\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	
10	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$

Table B.1 – Tableau des coefficients $\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{\ell}B_{m+1-\ell}$.

Démonstration de la proposition 265. On veut évaluer

$$\mathrm{S}_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m.$$

Pour cela, on introduit la série génératrice exponentielle de cette quantité :

$$\mathrm{S}[n](t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{S}_m(n) \frac{t^m}{m!}.$$

Puisque $|\mathrm{S}_m(n)| \leq n^{m+1}$, cette série a un rayon de convergence non nul. On a

$$\mathrm{S}[n](t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(kt)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kt} = \frac{e^{nt}-1}{e^t-1}.$$

Ainsi,

$$t\mathrm{S}[n](t) = \left(e^{nt}-1\right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{B}_\ell \frac{t^\ell}{\ell!}. \tag{B.5}$$

D'une part,

$$t\mathrm{S}[n](t) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\mathrm{S}_m(n) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{B.6}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left(e^{nt}-1\right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{B}_\ell \frac{t^\ell}{\ell!} &= \sum_{a \geq 1} \frac{(nt)^a}{a!} \sum_{k \geq 0} \mathrm{B}_k \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{c \geq 1} t^c \sum_{k=0}^{c-1} \frac{n^{c-k}}{(c-k)!k!} \mathrm{B}_k \\
&= \sum_{c \geq 1} \frac{t^c}{c!} \sum_{k=0}^{c-1} \binom{c}{k} \mathrm{B}_k n^{c-k} \\
&= \sum_{m \geq 0} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} \mathrm{B}_k n^{m+1-k} \\
&= \sum_{m \geq 0} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{\ell=1}^{m+1} \binom{m+1}{\ell} \mathrm{B}_{m+1-\ell} n^\ell.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

On obtient le résultat par report de (B.6) et (B.7) dans (B.5). □

Remarque 266 - La preuve donnée n'utilise que des méthodes usuelles de la combinatoire. Le lecteur voulant en savoir plus peut consulter [1] ou [44].

B.5 Fonctions de Bernoulli

À l'annexe B.4, on a définit les nombres de Bernoulli par le développement en série

$$\frac{y}{e^y-1}=\sum_{\alpha=0}^{+\infty}\mathrm{B}_\alpha\frac{y^\alpha}{\alpha!}.$$

En multipliant ce développement par

$$e^{xy}=\sum_{\beta=0}^{+\infty}\frac{x^\beta y^\beta}{\beta!}$$

on obtient

$$\frac{ye^{xy}}{e^y-1}=\sum_{r=0}^{+\infty}\left(\sum_{\alpha+\beta=r}\binom{r}{\beta}\mathrm{B}_\alpha x^\beta\right)\frac{y^r}{r!}.$$

On pose

$$b_r(x)=\sum_{\beta=0}^{r}\binom{r}{\beta}\mathrm{B}_{r-\beta}x^\beta.$$

Puisque $\mathrm{B}_{2k+1}=0$ si $k\geq 1$, le polynôme $b_r(x)+rx^{r-1}/2$ est pair si r est pair et impair si r est impair. De l'égalité

$$\sum_{r=0}^{+\infty}b_r(x)\frac{y^r}{r!}=\frac{ye^{xy}}{e^y-1}\tag{B.8}$$

on déduit

$$\sum_{r=0}^{+\infty}b_r(1-x)\frac{y^r}{r!}=\frac{ye^{(1-x)y}}{e^y-1}=\frac{-ye^{-xy}}{e^{-y}-1}=\sum_{r=0}^{+\infty}b_r(x)\frac{(-y)^r}{r!}$$

d'où

$$b_r(1-x)=(-1)^r b_r(x).\tag{B.9}$$

La fonction de Bernoulli d'ordre r est la fonction B_r, périodique de période 1 qui coïncide avec b_r sur $[0,1[$. Si $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x, c'est-à-dire le réel de $[0,1[$ défini par

$$x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$$

alors

$$\mathrm{B}_r(x)=b_r(\{x\}).$$

La fonction B_0 est la fonction constante égale à 1 et le nombre de Bernoulli B_r est la valeur $\mathrm{B}_r(0)$.

La fonction B_1 est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ mais en aucun point entier. En dérivant par rapport à x l'égalité (B.8) on montre que

$$\mathrm{B}_r'(x)=r\mathrm{B}_{r-1}(x)\tag{B.10}$$

n	$\mathrm{B}_n(x)$
0	1
1	$x-\frac{1}{2}$
2	$x^2-x+\frac{1}{6}$
3	$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$
4	$x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$
5	$x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$
6	$x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$
7	$x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x$
8	$x^8-4x^7+\frac{14}{3}x^6-\frac{7}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{30}$
9	$x^9-\frac{9}{2}x^8+6x^7-\frac{21}{5}x^5+2x^3-\frac{3}{10}x$
10	$x^{10}-5x^9+\frac{15}{2}x^8-7x^6+5x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{66}$

Table B.2 – Premiers polynômes de Bernoulli.

sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On en déduit que si $r\geq 2$, la fonction B_r est C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et C^{r-2} sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in]0,1[$, en utilisant (B.9) on obtient

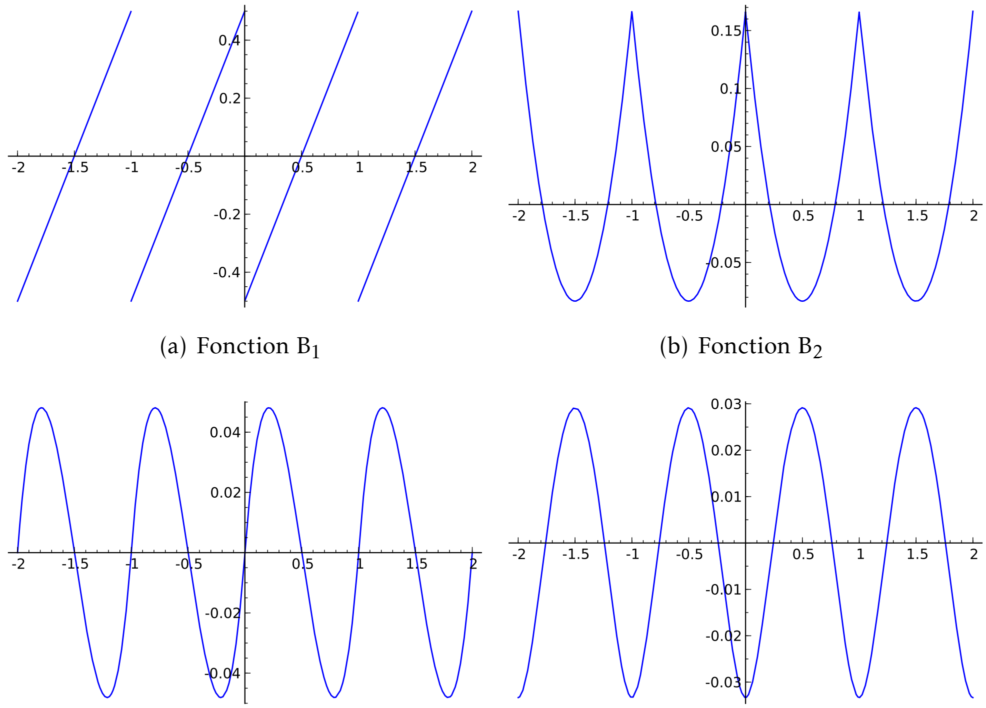
$$\mathrm{B}_r(-x)=\mathrm{B}_r(1-x)=b_r(1-x)=(-1)^r b_r(x)=(-1)^r\mathrm{B}_r(x).$$

Si r est pair, cette relation reste évidemment vraie pour $x=0$. Si $r\geq 3$ est impair, cette relation reste vraie si $x=0$ car $\mathrm{B}_r(0)=\mathrm{B}_r=0$. On en déduit que la fonction B_r est paire si r est pair, impaire si $r\geq 3$ est impair et que la restriction de B_1 à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ est impaire.

Enfin, en intégrant (B.8) sur $[0,1]$, on montre que

$$\int_0^1 \mathrm{B}_r(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Les fonctions B_r étant périodiques et C^∞ au voisinage de tout point de continuité elles sont égales à leur développement de Fourier en tout point de continuité et ces



(a) Fonction B_1 (b) Fonction B_2

(c) Fonction B_3 (d) Fonction B_4

FIGURE B.2 – Fonctions de Bernoulli

développements sont uniformément convergent sut tout intervalle fermé constitué de points de continuité. On peut alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 267– *Les développements de Fourier*

$$B_{2r}(x) = (-1)^{r-1}\frac{2(2r)!}{(2\pi)^{2r}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi nx)}{n^{2r}}$$

et

$$B_{2r+1}(x) = (-1)^{r-1}\frac{2(2r+1)!}{(2\pi)^{2r+1}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n^{2r+1}}$$

sont valides pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ si $2r+1 = 1$ et $x \in \mathbb{R}$ sinon. Ils sont uniformément convergent sur tout compact de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ si $2r+1 = 1$ et normalement convergent sur $\mathbb{R}$ sinon.

Démonstration. La fonction B_1 étant impair sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, son développement de Fourier est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,1}\sin(2\pi nx)$$

sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ avec

$$c_{n,1} = 2\int_0^1 \mathrm{B}_1(t)\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi n}.$$

On en déduit le résultat pour B_1. La fonction B_2 est pair sur $\mathbb{R}$ et elle s'annule en 0, on a donc

$$\mathrm{B}_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,2}\cos(2\pi nx)$$

sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ avec

$$c_{n,2} = 2\int_0^1 \mathrm{B}_2(t)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2 n^2}.$$

On en déduit le résultat pour B_2. Enfin, pour tout $r \geq 1$, on a

$$\mathrm{B}_{2r+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,2r+1}\sin(2\pi nx)$$

et

$$\mathrm{B}_{2r+2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,2r+2}\cos(2\pi nx).$$

En dérivant (B.10), on déduit

$$-(2\pi n)^2 c_{n,r+2} = (r+2)(r+1)c_{n,r}.$$

On en tire par récurrence

$$c_{n,2r} = (-1)^{r-1}\frac{(2r)!}{2(2\pi n)^{2r-2}}c_{n,2} \quad \text{et} \quad c_{n,2r+1} = (-1)^r\frac{(2r+1)!}{(2\pi n)^{2r}}c_{n,1}.$$

Le résultat découle alors des calculs précédent de $c_{n,1}$ et $c_{n,2}$. □

Remarque 268 - La proposition 267 peut aussi se démontrer en utilisant le théorème des résidus pour calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}(0,(2k+1)\pi)} \frac{ze^{xz}}{e^z-1}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{z^r}$$

et en faisant $k \to +\infty$. Cette méthode évite l'utilisation de tout résultat général sur la convergence des séries de Fourier. (Voir [39, Exercice I.0.1]).

En choisissant $x = 0$ dans le développement de Fourier de B_{2r} (avec $r \geq 1$, on retrouve

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\mathrm{B}_{2n} \tag{B.11}$$

qu'on a établie autrement en (B.4). En majorant $|\cos(2\pi nx)|$ par 1, on trouve aussi que

$$|\mathrm{B}_{2r}(x)| \leq |\mathrm{B}_{2r}|$$

pour tout réeel x.

Remarque 269 - On peut aisément montrer que la famille de polynômes $(b_r)_{r\geq 0}$ est la seule à vérifier simultanément

$$\begin{cases} b_0(x) = 1 \\ b_r'(x) = rb_{r-1}(x) \\ \displaystyle\int_0^1 b_r(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (r \geq 1). \end{cases}$$

B.6 La formule de Poisson

Nous énonçons la formule sommatoire de Poisson sous des hypothèses qui ne sont pas les plus faibles. On trouve dans [39, Tome I, Théorème 6.1] un énoncé avec des hypothèses plus faibles.

Théorème 270– *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact et que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ converge absolument. Alors,*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}$$

pour tout réel x. En particulier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n).$$

Démonstration. La fonction $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ est continue et périodique de période 1. La convergence normale justifie l'interversion de la somme et de l'intégrale

$$\widehat{\mathrm{F}}(m) = \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)\right) e^{2i\pi mx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{2i\pi mx}\,\mathrm{d}x.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{F}}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) e^{2i\pi mx} e^{-2i\pi mn}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) e^{2i\pi mx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi mx}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(m). \end{aligned}$$

Enfin l'hypothèse de convergence absolue de la série des coefficients de Fourier assure que F est la somme de sa série de Fourier :

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathrm{F}}(m) e^{2i\pi mx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(m) e^{2i\pi mx}.$$

□

B.7 La formule sommatoire d'Abel

***Théorème* 271–** *Soit* (a_n) *une suite complexe et* φ *une fonction* C^1 *sur* $[1,+\infty[$. *On pose*

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{1\leq n\leq x} a_n.$$

Alors

$$\sum_{1\leq n\leq x} a_n\varphi(n) = \mathrm{A}(x)\varphi(x) - \int_1^x \mathrm{A}(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}\int_1^x \mathrm{A}(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u &= \int_1^x \sum_{1\leq n\leq u} a_n\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{1\leq n\leq x} a_n \int_n^x \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{A}(x)\varphi(x) - \sum_{1\leq n\leq x} a_n\varphi(n).\end{aligned}$$

□

***Corollaire* 272–** *On reprend les notations du théorème 271. On suppose que* $\mathrm{A}(x)\varphi(x)$ *tend vers 0 lorsque* x *tend vers l'infini et que les sommes et intégrales écrites convergent. Alors*

$$\sum_{n\geq x} a(n)\varphi(n) = -\int_x^{+\infty} \mathrm{A}(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u - \mathrm{A}(x)\varphi(x).$$

B.8 La formule sommatoire d'Euler Maclaurin

La formule d'Euler Mac Laurin permet la calcul d'asyptotique de sommes. Cette formule s'exprime à l'aide des nombres et polynômes de Bernoulli définis en annexes B.4 et B.5.

***Théorème* 273–** *Soit* a, b *deux entiers et* f *une fonction* C^{k+1} *sur* $[a,b]$. *Alors*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}\mathrm{B}_{r+1}}{(r+1)!}\left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\right) + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \mathrm{B}_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Grâce à la formule sommatoire d'Abel (voir le théorème 271) on a

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \sum_{1\leq n\leq b} f(n) - \sum_{1\leq n\leq a} f(n) = f(b)b - f(a)a - \int_a^b f'(t)\lfloor t\rfloor \,\mathrm{d}t.$$

On remplace $\lfloor t\rfloor$ par $t-\{t\}$ et on utilise

$$\int_a^b tf'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)b - f(a)a - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour obtenir

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \{t\}f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Enfin $\{t\} = \mathrm{B}_1(t) - \mathrm{B}_1$ donc

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{B}_1\left(f(b)-f(a)\right) + \int_a^b \mathrm{B}_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'est la formule d'Euler Maclaurin pour $k=0$. Pour $k\geq 0$, on suppose

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}\mathrm{B}_{r+1}}{(r+1)!}\left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\right) + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \mathrm{B}_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \quad \text{(B.12)}$$

Par intégration par parties on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{B}_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{k+2}\int_a^b \mathrm{B}'_{k+2}(t)f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k+2}\left(\mathrm{B}_{k+2}(b)f^{(k+1)}(b) - \mathrm{B}_{k+2}(a)f^{(k+1)}(a)\right) - \frac{1}{k+2}\int_a^b \mathrm{B}_{k+2}(t)f^{(k+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque a et b sont entiers,

$$\mathrm{B}_{k+2}(b) = \mathrm{B}_{k+2}(a) = \mathrm{B}_{k+2}(0) = \mathrm{B}_{k+2}$$

de sorte que

$$\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b \mathrm{B}_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{k+2}\mathrm{B}_{k+2}}{(k+2)!}\left(f^{(k+1)}(b) - f^{(k+1)}(a)\right) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)!}\int_a^b \mathrm{B}_{k+2}(t)f^{(k+2)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'égalité (B.12) est donc vraie en remplaçant k par $k+1$ et, par récurrence, elle est vraie pour tout $k\geq 0$. □

Posons

$$\gamma(k) = 1 + \sum_{r=0}^{k} \frac{B_{r+1}}{r+1} - \int_1^{+\infty} B_{k+1}(t)\frac{dt}{t^{k+2}}.$$

Il résulte de l'égalité

$$\int_1^{+\infty} B_{k+1}(t)\frac{dt}{t^{k+2}} = \left[-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{B_{k+1}(t)}{t^{k+1}}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{k+1}\int_1^{+\infty} B'_{k+1}(t)\frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{B_{k+1}}{k+1} + \int_1^{+\infty} B_k(t)\frac{dt}{t^{k+1}}$$

que la quantité $\gamma(k)$ est indépendante de k. On la note γ et on l'appelle *constante d'Euler*. Le corollaire 274 ci-dessous montre que

$$\gamma = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log(N)\right).$$

***Corollaire* 274**— *Pour tous entiers* $N \geq 1$ *et* $k \geq 2$ *on a*

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{B_{2j}}{2j}\cdot\frac{1}{N^{2j}} + \frac{c(k)}{N^{2k}}$$

avec

$$|c(k)| \in \left[0, \frac{B_{2k}}{k}\right].$$

Démonstration. La formule d'Euler-Maclaurin donne

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} = \int_1^{N}\frac{dt}{t} + \sum_{r=0}^{2k-1}\frac{B_{r+1}}{r+1}\left(1 - \frac{1}{N^{r+1}}\right) - \int_1^{N} B_{2k}(t)\frac{dt}{t^{2k+1}}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{j=1}^{k}\frac{B_{2j}}{2j}\cdot\frac{1}{N^{2j}} + \int_N^{+\infty} B_{2k}(t)\frac{dt}{t^{2k+1}}. \tag{B.13}$$

On termine avec la majoration $|B_{2k}(t)| \leq |B_{2k}|$.

□

On a par exemple

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \log N + \gamma +$$

$$\frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{120N^4} - \frac{1}{252N^6} + \frac{1}{240N^8} - \frac{1}{132N^{10}} + \frac{691}{32760N^{12}} + \frac{c(14)}{N^{14}}$$

avec

$$|c(14)| \leq \frac{1}{6}.$$

Remarque 275- Dans l'équation (B.13), la constante γ est $\gamma(2k-1)$ et (B.13) montre que

$$\gamma(2k-1) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log(N)\right).$$

On en déduit de nouveau l'indépendance en k de $\gamma(2k-1)$. En appliquant l'une ou l'autre des preuves de cette indépendance, on peut montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)\,dx + \gamma(f) + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{j=1}^{k}\frac{B_{2j}}{(2j)!}f^{(2j-1)}(n) + R_k(f)$$

où

$$\gamma(f) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x)\,dx\right)$$

ne dépend pas de k et

$$R_k(f) = \frac{1}{(2r)!}\int_N^{+\infty} B_{2k}(t) f^{(2k)}(t)\,dt$$

dès lors que f et ses dérivées tendent vers 0 en l'infini ou que les dérivées de f sont L^1 sur $\mathbb{R}$ (voir [39, Exercice I.0.4] ou [16, VI, §.18]).

B.9 Produits infinis

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Si la suite $\left(\prod_{n=0}^{N} u_n\right)_{nN\in\mathbb{N}}$ admet une limite, on note

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N} u_n$$

et on dit que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge (Voir [14, IV.3]). La définition implique que si les produits $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\prod_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent alors, le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$ converge et

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = \prod_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \prod_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

***Proposition* 276–** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge. Alors*

1) *le produit* $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ *converge ;*
2) *ce produit est nul si et seulement s'il existe un entier* n *tel que* $1+u_n=0$ *;*
3) *pour toute permutation* σ *de* $\mathbb{N}$ *le produit* $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_{\sigma(n)})$ *converge et vaut* $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$

Démonstration. 1) Pour montrer le premier point, on montre que la suite

$$(\mathrm{P_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}} = \left(\prod_{n=0}^{\mathrm{N}}(1+u_n)\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$$

satisfait au critère de Cauchy. Pour tout N, l'inégalité $1+x\le e^x$ implique

$$\left|\prod_{n=0}^{\mathrm{N}}(1+u_n)\right| \le \exp\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}|u_n|\right) \le \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\right) = \mathrm{C}.$$

Soit $\varepsilon\in]0,\mathrm{C}[$ et N_0 un entier tel que

$$\sum_{n=\mathrm{N}_0+1}^{+\infty}|u_n| \le \frac{\varepsilon}{2\mathrm{C}}.$$

Si $\mathrm{M}\ge\mathrm{N}\ge\mathrm{N}_0$, on a

$$|\mathrm{P_M}-\mathrm{P_N}| = \left|\prod_{n=0}^{\mathrm{N}}(1+u_n)\right|\left|\prod_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}}(1+u_n)-1\right| \le \mathrm{C}\left|\prod_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}}(1+u_n)-1\right|.$$

Or,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}}(1+u_n)-1\right| &= \left|\sum_{\substack{\mathrm{I}\subset\{\mathrm{N}+1,\dots,\mathrm{M}\}\\ \mathrm{I}\neq\emptyset}}\prod_{i\in\mathrm{I}}u_i\right|\\ &\le \sum_{\substack{\mathrm{I}\subset\{\mathrm{N}+1,\dots,\mathrm{M}\}\\ \mathrm{I}\neq\emptyset}}\prod_{i\in\mathrm{I}}|u_i| = \prod_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}}(1+|u_n|)-1\end{aligned}$$

donc

$$\left|\prod_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}}(1+u_n)-1\right| \le \exp\left(\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}}|u_n|\right)-1 \le e^{\varepsilon/(2\mathrm{C})}-1 \le \frac{\varepsilon}{\mathrm{C}}.$$

On a donc $|\mathrm{P_M}-\mathrm{P_N}|\le\varepsilon$ et la suite $(\mathrm{P_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Au point précédent, on a montré $|P_M - P_{N_0}| \leq KP_{N_0}$ (avec $K = \varepsilon/C < 1$). On en déduit

$$|P_M| \geq \big||P_{N_0}| - |P_M - P_{N_0}|\big| \geq |P_{N_0}| - |P_M - P_{N_0}| \geq (1-K)|P_{N_0}|.$$

En passant à la limite en M il vient

$$\left|\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)\right| \geq (1-K)\left|\prod_{n=0}^{N_0}(1+u_n)\right|$$

de sorte que si le produit infini s'annule, alors le produit fini de droite aussi et l'un de ses termes est nul.

3) Le premier point appliqué à la suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ implique la convergence du produit permuté. Il reste à montré qu'il est égal au produit non permuté. Si $M \geq N \geq N_0$ sont tels que $\{0,\ldots,N\} \subset \{\sigma(0),\ldots,\sigma(M)\}$ (il suffit de prendre M assez grand) on a comme précédemment

$$\left|\prod_{n=0}^{M}\left(1+u_{\sigma(n)}\right) - \prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\right| \leq \left|\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\right|\left(\exp\left(\sum_{n\in E(M,N)}|u_n|\right)-1\right)$$

avec

$$E(M,N) = \{\sigma(0),\ldots,\sigma(M)\} \setminus \{0,\ldots,N\} \subset \{n \in \mathbb{N} : n \geq N+1\}.$$

Puisque

$$\sum_{n\in E(M,N)}|u_n| \leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty}|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

on a comme précédemment

$$\exp\left(\sum_{n\in E(M,N)}|u_n|\right) - 1 \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

puis

$$\left|\prod_{n=0}^{M}\left(1+u_{\sigma(n)}\right) - \prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\right| \leq \varepsilon.$$

On termine en prenant la limite en M puis en N :

$$\left|\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_{\sigma(n)}\right) - \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)\right| \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ de sorte que les deux produits sont égaux.

□

On trouve dans [16, VII.4.20] une preuve du théorème suivant.

***Théorème* 277–** *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω différentes de la fonction constante égale à -1. Si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur tout compact de Ω alors le produit*

$$f = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n)$$

converge uniformément sur tout compact de Ω. Il définit alors une fonction holomorphe sur Ω qui n'est pas la fonction constante nulle et, pour tout $z \in \Omega$,

$$v_z(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_z(1+u_n).$$

Enfin, si $f(z) \neq 0$ alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}.$$

Remarque 278 - La dernière formule de cette énoncé s'appelle la dérivée logarithmique du produit définissant f.

Exemple 279 - Montrons que le produit

$$\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}$$

définit une fonction entière. Pour cela, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}-1\right]$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$. Soit donc K un compact de $\mathbb{C}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in K$, on a $|z| \leq C$. En écrivant

$$(1+u)e^{-u} - 1 = \sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j(1-j)\frac{u^j}{j!},$$

on trouve

$$|(1+u)e^{-u}-1| \leq |u|^2 \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j+1}{(j+2)!}|u|^j \leq |u|^2 e^{|u|}$$

et donc

$$\left|\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}-1\right| \leq \frac{C^2}{n^2}e^{C}.$$

Cela implique la convergence normale de la somme.

B.10 Formule d'Euler

Le but de cette partie est de démontrer la formule

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \tag{B.14}$$

valable pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et normalement convergente sur tout compact de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

On fixe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et on considère la fonction méromorphe

$$f_z(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \operatorname{cotan}(\pi w).$$

Les pôles sont les entiers et z. Tous les pôles sont simples, sauf 0 qui est double. Si $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$f_z(n+\varepsilon) \sim \frac{z}{n(z-w)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

de sorte que

$$\operatorname{Res}_{w=n} f_z(w) = \frac{z}{n(z-n)}.$$

Par ailleurs,

$$f_z(w) = \frac{1}{w^2} + \frac{1}{zw} + o(1) \quad (w \to 0)$$

et donc

$$\operatorname{Res}_{w=z} f_z(w) = -\pi \operatorname{cotan} \pi z.$$

Pour tout $N > |z|$ entier, on considère le chemin $\alpha(N)$ décrit par la figure B.3. La formule

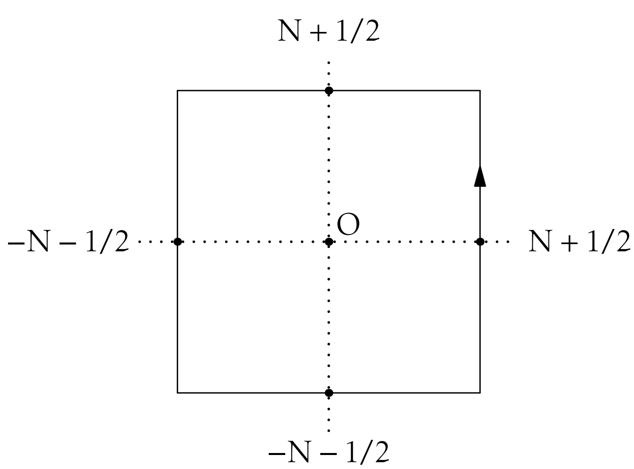


Figure B.3 – Chemin $\alpha(N)$

des résidus conduit à

$$\pi \operatorname{cotan} \pi z + \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha(\mathrm{N})} f_z(w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\mathrm{N} \\ n\neq 0}}^{\mathrm{N}} \frac{z}{n(z-n)}.$$

Puisque

$$\sum_{\substack{n=-\mathrm{N} \\ n\neq 0}}^{\mathrm{N}} \frac{z}{n(z-n)} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{z}{n(z-n)} - \frac{z}{n(z+n)} \right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right)$$

le résultat annoncé résulte de

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_{\alpha(\mathrm{N})} f_z(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

ce qu'on démontre maintenant. La contribution verticale droite est

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{1}{2} \int_{-\mathrm{N}-1/2}^{\mathrm{N}+1/2} \frac{z}{(\mathrm{N}+1/2+it)(z-\mathrm{N}-1/2-it)} \operatorname{cotan} \pi(\mathrm{N}+1/2+it)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\mathrm{N}-1/2}^{\mathrm{N}+1/2} \frac{z}{(\mathrm{N}+1/2+it)(\mathrm{N}+1/2-z+it)} \tanh(\pi t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\mathrm{I}| \leq \frac{|z|(2\mathrm{N}+1)}{2(\mathrm{N}+1/2)(\mathrm{N}+1/2-\mathrm{Re}\,z)}$$

et $\mathrm{I} \to 0$ lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$. De même, la contribution verticale gauche tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ car cette contribution est

$$-\frac{i}{2} \int_{-\mathrm{N}-1/2}^{\mathrm{N}+1/2} \frac{z}{(\mathrm{N}+1/2-it)(\mathrm{N}+1/2+z-it)} \tanh(\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

La contribution horizontale haute est

$$\mathrm{II} = -\frac{1}{2i} \int_{-\mathrm{N}-1/2}^{\mathrm{N}+1/2} \frac{z}{(u+i(\mathrm{N}+1/2))\,(z-u-i(\mathrm{N}+1/2))} \operatorname{cotan}(\pi u + i\pi(\mathrm{N}+1/2))\,\mathrm{d}u.$$

Or, pour $b \geq 1$, on a

$$|\operatorname{cotan}(a+ib)| = \frac{\left|1-e^{-2b+2ia}\right|}{\left|1+e^{-2b+2ia}\right|} \leq \frac{1+e^{-2b}}{\left|1-e^{-2b}\right|} < 2$$

donc

$$|\mathrm{II}| \leq \frac{(2\mathrm{N}+1)|z|}{(\mathrm{N}+1/2)(\mathrm{N}+1/2-\mathrm{Im}\,z)}$$

puis $|\mathrm{II}| \to 0$ lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$. De même la contribution horizontale basse tend vers 0 lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$ car celle-ci vaut

$$\frac{1}{2i} \int_{-\mathrm{N}-1/2}^{\mathrm{N}+1/2} \frac{z}{(u-i(\mathrm{N}+1/2))\,(z-u+i(\mathrm{N}+1/2))} \operatorname{cotan}(\pi u - i\pi(\mathrm{N}+1/2))\,\mathrm{d}u.$$

B.11 Fonctions B et Γ d'Euler

La fonction Γ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Elle définit une fonction holomorphe pour tout z tel que $\mathrm{Re}\, z > 0$. On calcule aisément $\Gamma(1) = 1$. Par intégration par parties, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{B.15}$$

de sorte que si $n \geq 1$ est entier, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

***Proposition* 280–** *La fonction Γ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Les entiers négatifs ou nuls sont des pôles simples. Si $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{Res}_{z=-n}\, \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Démonstration. La relation (B.15) implique pour tout entier $n \geq 1$ la relation

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{B.16}$$

Le membre de droite est holomorphe sur

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) : \ \mathrm{Re}\, z > -n-1\}$$

où cette relation permet donc de définir un prolongement analytique de Γ. Par unicité du prolongement analytique, les prolongements analytiques obtenus pour chaque valeur de n coïncident sur leur domaines d'holomorphie. On obtient le prolongement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ en prenant n de plus en plus grand. Enfin, l'équation (B.15) donne

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{(-n+\varepsilon)(-n+1+\varepsilon)\cdots(\varepsilon-1)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

et on obtient le résidus de Γ en $-n$ en faisant tendre ε vers 0. □

La fonction B d'Euler est définie pour tous z et w complexes de partie réelle strictement positive par

$$\mathrm{B}(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\, \mathrm{d}t \tag{B.17}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2z-1} (\cos\theta)^{2w-1}\, \mathrm{d}\theta \tag{B.18}$$

la dernière expression étant conséquence du changement de variable $t = \sin^2\theta$. Cette intégrale apparaît naturellement lors de l'étude du produit de fonctions Γ. En effet,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-y}x^z y^w \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy} \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}u^{2z}v^{2w}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{uv} \\
&= 4\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2(z+w)}\frac{\mathrm{d}r}{r}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2z-1}(\cos\theta)^{2w-1}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{B}(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{B.19}$$

On peut aisément calculer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

***Proposition* 281–** *On a*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Démonstration. En prenant $z = w = \frac{1}{2}$ dans (B.19) on trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Puisque la fonction réelle continue $x \mapsto \Gamma(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[1/4, 1]$ et est positive en 1, on en déduit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}.$$

Enfin, l'expression (B.18) implique $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$. □

On montre ensuite que la fonction Γ ne s'annule pas. Pour cela, on utilise une représentation de Γ sous forme de produit infini. On commence par remarquer que

$$\frac{n^{-z}}{n!}\prod_{j=0}^{n}(z+j) = z\exp\left(z\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \log n\right)\right)\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}. \tag{B.20}$$

D'après le corollaire 274, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(z\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \log n\right)\right) = e^{\gamma z}.$$

L'exemple 279 montre quant-à-lui que le produit

$$\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}$$

définit une fonction entière. On définit donc une fonction entière par

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-z}}{n!} \prod_{j=0}^{n} (z+j).$$

***Proposition* 282** (Représentation de Gauss)– *Pour tout nombre complexe z, on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-z}}{n!} \prod_{j=0}^{n} (z+j).$$

On donne une preuve tirée de [12, Chapter 4]. Elle repose sur le lemme de caractérisation suivant. Une autre preuve peut être lue dans [16, Chapitre V, §23]. Elle est basée sur la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^{+*}$ de la suite de fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n x^{s-1} & \text{si } 0 < x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

vers la fonction $x \mapsto e^{-x} x^{s-1}$.

***Lemme* 283** (Théorème de Wieland)– *Soit* D *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *contenant la bande verticale* $\mathrm{V} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \mathrm{Re}\, z < 2\}$. *Soit f une fonction analytique sur* D

a) bornée sur V

b) vérifiant $f(z+1) = zf(z)$ pour tout $z \in \mathrm{D}$ tel que $z+1 \in \mathrm{D}$.

Alors f admet un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et

$$f(z) = f(1)\Gamma(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

Démonstration. La proposition 280 n'utilise que l'équation fonctionnelle (B.15). Comme pour Γ, la fonction f admet donc un prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et les entiers négatifs ou nuls sont des pôles simples de f, avec

$$\mathrm{Res}_{z=-n} f(n) = \frac{(-1)^n}{n} f(1)$$

Considérons alors la fonction h analytique sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ définie par $h(z) = f(z) - f(1)\Gamma(z)$. On veut montrer que h est nulle. Puisque f et $f(1)\Gamma$ ont les mêmes pôles, aux mêmes ordres et mêmes résidus en ces pôles, la fonction h est entière. Considérons alors la fonction entière H définie par $\mathrm{H}(z) = h(z)h(1-z)$. On a

$$\mathrm{H}(z+1) = zh(z)h(-z) = -h(z)h(1-z) = -\mathrm{H}(z).$$

Puisque H est bornée sur V (ainsi que le sont f et Γ), on en déduit qu'elle est bornée sur $\mathbb{C}$. La fonction H étant entière et bornée, elle est constante (théorème de Liouville).

On a donc $H(z) = h(0)h(1) = 0$ car $h(1) = 0$. On en tire [d] que $h(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ ou $h(1-z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi h est la fonction nulle ce qui termine la preuve. □

On peut remplacer l'hypothèse de bornes par une hypothèse de croissance exponentielle [13]. Le lecteur consultera aussi avec profit le texte de Remmert sur le théorème de Wieland [30].

Démonstration de la proposition 282. On pose

$$F_n(z) = \frac{n^{-z}}{n!} \prod_{j=0}^{n} (z+j)$$

et

$$F(z) = \lim_{n\to+\infty} F_n(z).$$

On a vu que F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ donc sur $\mathrm{R}e\, z > 0$. De

$$F_n(z+1) = \frac{nz}{z+n+1} F_n(z)$$

on déduit $F(z+1) = zF(z)$. Enfin, si $\mathrm{R}e(z) > 0$, on a

$$|F_n(z)| \leq n! n^{\mathrm{R}e(z)} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{R}e(z)+j} = F_n(\mathrm{R}e\, z).$$

On en déduit que $|F(z)| \leq F(\mathrm{R}e\, z)$ et donc, si $1 \leq \mathrm{R}e\, z \leq 2$, alors

$$|F(z)| \leq \max_{x\in[1,2]} F(x).$$

Puisque $F(1) = 1$, le théorème de Wiedland implique $F = \Gamma$. □

Puisqu'on sait déjà que Γ est holomorphe avec des pôles simples en les entiers négatifs ou nuls, on déduit de la représentation de Gauss le corollaire suivant.

***Corollaire* 284–** *La fonction* $\dfrac{1}{\Gamma}$ *est entière et s'annule à l'ordre* 1 *en les entiers négatifs ou nul.*

Remarque 285 - En utilisant (B.20) et le corollaire 274, on trouve la représentation en produit de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

d. Si f et g sont deux fonctions entières telles que $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$. En effet, si f n'est pas la fonction nulle, on considère a tel que $f(a) \neq 0$. Par continuité, il existe une boule ouverte B de centre a telle que f ne s'annule pas sur B. La fonction g est donc nulle sur la boule B. l'ensemble des zéros de g n'est pas discret ce qui implique que g est la fonction nulle.

Remarque 286- La représentation de Gauss implique aussi que

$$\Gamma(\overline{z})^{-1} = \overline{\Gamma(z)^{-1}}.$$

***Proposition* 287** (Formule de Duplication de Legendre)–

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

Démonstration. En choisissant $z = w$ dans (B.19), on trouve

$$\frac{\Gamma(w)^2}{\Gamma(2w)} = \mathrm{B}(w,w).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(w,w) &= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta\cos\theta)^{2w-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2^{2w-2}}\int_0^{\pi/2} (\sin(2\theta))^{2w-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2^{2w-1}}\int_0^{\pi} (\sin(\varphi))^{2w-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2^{2w-2}}\int_0^{\pi/2} (\sin(\varphi))^{2w-1}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2^{2w-1}}\mathrm{B}\left(w,\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma(w)^2}{\Gamma(2w)} = \frac{1}{2^{2w-1}}\frac{\Gamma(w)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(w+\frac{1}{2}\right)}.$$

La formule de duplication de Legendre est obtenue en prenant $w = z/2$ puisque la fonction Γ ne s'annule pas. □

On déduit alors le calcul suivant des valeurs de Γ aux demi-entiers en choisissant $z = 2n$ dans la formule de duplication de Legendre.

***Corollaire* 288–** *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

B.12 Fonction confluente hypergéométrique

On donne dans cete partie les informations dont on a besoin sur la fonction hypergéométrique confluente. Il y aurait beaucoup plus de choses à dire sur les fonctions hypergéométriques que le peu que nous disons ici. Le lecteur intéressé est invité à consulter par exemple les ouvrages [35, 36, 28].

Si $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit le n^{e} symbole de Pochhammer de a par

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Grâce à l'équation (B.16), on a

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

même si $a+n$ est un entier négatif grâce à la proposition 280.

Si $a \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ (ou bien si a et c sont entiers et vérifient $c < a \leq 0$), on définit la fonction confluente hypergéométrique associée à a et c par

$$ {}_1\mathrm{F}_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} (z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Si u_n est le terme général de cette série, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z}{n+1} \frac{a+n}{c+n}$$

d'où l'on déduit qu'elle définit une fonction entière de z et de a et une fonction holomorphe en c sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

Si a est un entier négatif ou nul, alors $(a)_n = 0$ pour tout $n \geq 1-a$. Il en résulte qu'alors ${}_1\mathrm{F}_1 \left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right](z)$ est un polynôme en z de degré $-a$.

On a la représentation intégrale suivante.

***Proposition* 289–** *Si* $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, a > 0$, *alors*

$$ {}_1\mathrm{F}_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} (z) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{zt} \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Puisque $\mathrm{Re}(c-a) > 0$ et $\mathrm{Re}\, a > 0$, on a

$$ {}_1\mathrm{F}_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} (z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+c)} \frac{z^n}{n!}.$$

Grâce à (B.19), on a donc

$$ {}_1\mathrm{F}_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} (z) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, c-a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}(n+a, c-a) \frac{z^n}{n!}.$$

En utilisant la définition de la fonction B d'Euler (B.17), on trouve

$$ {}_1\mathrm{F}_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} (z) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+a-1} \frac{z^n}{n!} \, \mathrm{d}t$$

et donc

$$ {}_1\mathrm{F}_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} (z) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} e^{zt} \, \mathrm{d}t.$$

□

On en déduit la formule de transformation de Kummer.

***Corollaire* 290** (Formule de transformation de Kummer)– *Si c n'est pas un entier négatif alors*

$$ {}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}(z) = e^z\, {}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} c-a \\ a \end{bmatrix}(-z). $$

Démonstration. Si $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, a > 0$, le changement de variable $t = 1-u$ dans l'intégrale de la proposition 289 conduit à

$$ {}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}(z) = e^z\, {}_1\mathrm{F}_1\begin{bmatrix} c-a \\ a \end{bmatrix}(-z). $$

Comme fonction de a, les deux membres de cette égalité sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Par prolongement holomorphe, l'égalité est donc vraie pour tout $a \in \mathbb{C}$. Comme fonction de c, les deux membres de cette égalité sont holomorphes sur $\mathrm{C} \setminus \mathbb{N}$. Par prolongement holomorphe, l'égalité est donc vraie pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ □

B.13 Fonctions J de Bessel

On définit pour $\nu \in \mathbb{N}$, la *fonction* J *de Bessel* d'ordre ν par

$$ \mathrm{J}_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}. $$

La série est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$ et elle définit donc une fonction entière.

***Lemme* 291**– *Soit $\nu \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. La fonction de Bessel J_ν est donnée par*

$$ \mathrm{J}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,\mathrm{d}\theta. $$

Démonstration. Le corollaire 288 conduit à

$$ \mathrm{J}_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}\left(\nu+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)\frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{B.21} $$

avec

$$ \mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2p-1}(\cos\varphi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\varphi $$

(voir § B.11). On conclut en reportant cette expression intégrale dans (B.21). □

En utilisant

$$ \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu}\theta = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{\nu}\left(\frac{2j-1}{2j}\right) $$

on obtient une majoration de J_ν.

***Corollaire* 292–** *Pour tout entier $\nu \geq 0$ et tout réel x la fonction J_ν de Bessel vérifie*

$$|\mathrm{J}_\nu(x)| \leq \frac{1}{\nu!}\left(\frac{|x|}{2}\right)^\nu.$$

Nous obtenons une autre majoration *via* une autre expression intégrale.

***Lemme* 293–** *Soit $\nu \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. La fonction de Bessel J_ν est donnée par*

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Démonstration. Le théorème des résidus implique que

$$\frac{1}{(\nu+n)!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}(0,\rho)} \frac{e^\xi}{\xi^{\nu+n}}\frac{d\xi}{\xi}$$

pour tout $\rho > 0$. La série définissant $\mathrm{J}_\nu(z)$ peut donc être réécrite

$$2i\pi \mathrm{J}_\nu(z) = \int_{\mathrm{C}(0,\rho)} \left(\frac{z}{2\xi}\right)^\nu \exp\left(\frac{z}{2}\left(\frac{2\xi}{z} - \frac{z}{2\xi}\right)\right)\frac{d\xi}{\xi}.$$

On suppose z réel strictement positif. En choisissant $\rho = z/2$ et en faisant le changement de variable $s = 2\xi/z$, on obtient

$$2i\pi \mathrm{J}_\nu(z) = \int_{\mathrm{C}(0,1)} s^{-\nu-1}\exp\left(\frac{z}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right)ds$$

puis

$$2\pi \mathrm{J}_\nu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta + iz\sin\theta}d\theta = 2\int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta.$$

Les deux membres extrêmes de la dernière égalité définissent des fonctions entières de z, par prolongement holomorphe, l'égalité est donc vraie pour tout complexe z. □

***Corollaire* 294–** *Pour tout entier $\nu \geq 0$ et tout réel x la fonction de Bessel vérifie* $|\mathrm{J}_\nu(x)| \leq 1$.

***Lemme* 295–** *Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et $c > 0$. Alors*

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{\nu+1}}.$$

Démonstration. La démonstration est tout à fait similaire au lemme 293. En remplaçant le contour $\mathrm{C}(0,\rho)$ par le contour $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ comme à la figure B.4, on obtient

$$2i\pi \mathrm{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{\mathrm{R}(\mathrm{X})} \xi^{-\nu-1}\exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right)\mathrm{d}\xi. \tag{B.22}$$

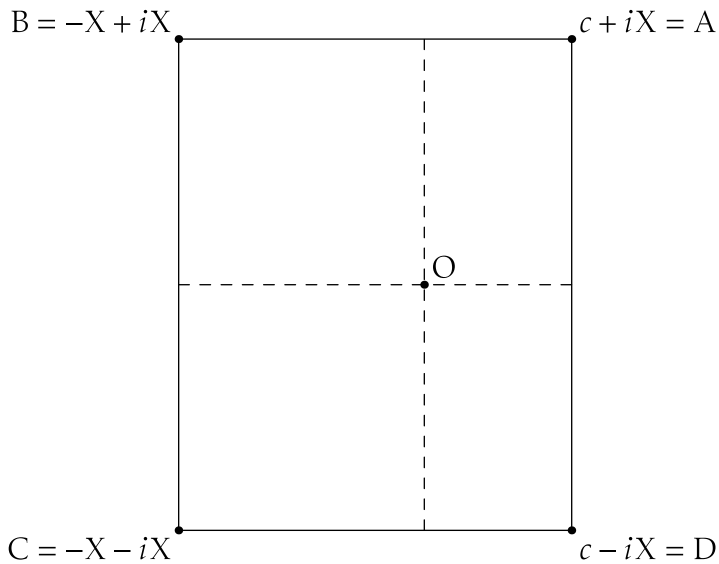


Figure B.4 – Le contour R(X)

Si le résultat est démontré pour tout $z \in \mathbb{R}$, il l'est pour tout $z \in \mathbb{C}$ par prolongement analytique. On suppose donc $z \in \mathbb{R}$. La contribution du segment $[A, B]$ vérifie

$$\begin{aligned}\left|\int_{[A,B]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi\right| &\leq \frac{1}{X^{\nu+1}} \int_{-X}^{c} \exp\left(x - \frac{z^2 x}{4(x^2+X^2)}\right) dx \\ &\leq \frac{1}{X^{\nu+1}} \int_{-\infty}^{c} \exp\left(x - \frac{z^2 x}{4(x^2+X^2)}\right) dx.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c} \exp\left(x - \frac{z^2 x}{4(x^2+X^2)}\right) dx &\leq \int_{-\infty}^{0} \exp\left(x\left(1 - \frac{z^2}{X^2}\right)\right) dx + \int_0^c e^x\, dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} \exp\left(x(1-z^2)\right) dx + \int_0^c e^x\, dx\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant vraie si $X \geq 1$. On en déduit

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{[A,B]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = 0.$$

Puisque

$$\int_{[C,D]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = -\overline{\int_{[A,B]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi}$$

on a aussi

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{[C,D]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = 0.$$

La contribution du segment $[\mathrm{B},\mathrm{C}]$ vérifie

$$\begin{aligned}\left|\int_{[\mathrm{B},\mathrm{C}]}\xi^{-\nu-1}\exp\left(\xi-\frac{z^2}{4\xi}\right)\mathrm{d}\xi\right| &\leq \int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}}\frac{1}{(-\mathrm{X}+it)^{\nu+1}}\exp\left(-\mathrm{X}+\frac{z^2\mathrm{X}}{4(\mathrm{X}^2+t^2)}\right)\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{2e^{-\mathrm{X}}}{\mathrm{X}^{\nu+1}}\int_0^{\mathrm{X}}\exp\left(\frac{z^2\mathrm{X}}{4(\mathrm{X}^2+t^2)}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{2e^{-\mathrm{X}}}{\mathrm{X}^{\nu+1}}\int_0^{1}\exp\left(\frac{z^2}{\mathrm{X}(4+u^2)}\right)\mathrm{d}u\\ &\leq \frac{2e^{-\mathrm{X}}}{\mathrm{X}^{\nu}}\int_0^{1}\exp\left(\frac{z^2}{(4+u^2)}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant vraie si $\mathrm{X}\geq 1$. On en déduit que

$$\lim_{\mathrm{X}\to+\infty}\int_{[\mathrm{B},\mathrm{C}]}\xi^{-\nu-1}\exp\left(\xi-\frac{z^2}{4\xi}\right)\mathrm{d}\xi = 0.$$

Enfin

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(c+it)^{\nu+1}}\exp\left(c+it-\frac{z^2}{4(c+it)}\right)\mathrm{d}t$$

converge absolument. On a donc

$$\lim_{\mathrm{X}\to+\infty}\int_{\mathrm{R}(\mathrm{X})}\xi^{-\nu-1}\exp\left(\xi-\frac{z^2}{4\xi}\right)\mathrm{d}\xi = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{\nu+1}}.$$

On en déduit le résultat grâce à (B.22). □

Remarque 296 - La définition des fonctions de Bessel s'étend au fonction d'ordre ν complexe. On pourra consulter [43] pour plus d'informations sur ces fonctions. Le lemme 295 par exemple demeure vrai mais, pour éviter le problème de la non continuité du logarithme il faut pour sa preuve remplacer le contour d'intégration de la figure B.4 par un contour d'intégration de type Hankel (voir le graphe B.5).

B.14 Une autre présentation de E_2

On a vu que pour tout $k\geq 4$ les séries d'Eisenstein admettait le développement de Fourier

$$\mathrm{E}_k(z) = 1-\frac{2k}{\mathrm{B}_k}\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_{k-1}(n)e(nz).$$

On remarque que le membre de droite reste défini et normalement convergent sur tout compact de $\mathcal{H}$ pour $k=2$. On prend donc ce développement comme définition pour E_2 et on montre que la fonction ainsi définie est bien $\mathrm{D}\Delta/\Delta$. Il suffit pour cela de montrer que c'est une forme quasimodulaire de poids 12 et profondeur 1.

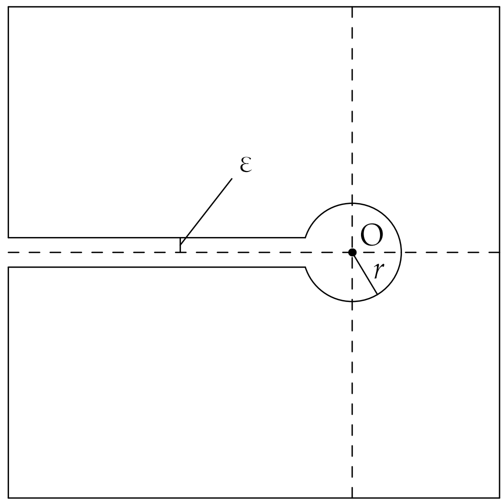


Figure B.5 – Un contour de type Hankel

Théorème 297– *Si* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *alors*

$$(cz+d)^{-2}\mathrm{E}_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{E}_2(z) + \frac{6}{i\pi}\cdot\frac{c}{cz+d}$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$.

Démonstration. On définit

$$\mathrm{T}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ n=0\Rightarrow m\neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_1(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ m=0\Rightarrow n\neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2}.$$

Ces séries ne sont *a priori* pas absolument convergentes. On commence par démontrer qu'elles convergent simplement. On introduit

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ n\in\{0,1\}\Rightarrow m\neq 0}} \left(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n}\right)$$

et

$$\mathrm{H}_1(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ m=0\Rightarrow n\notin\{0,1\}}} \left(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n}\right)$$

et on calcule ces séries. Si $m \neq 0$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n}\right) = 0$$

(c'est une série téléscopique) et si $m = 0$, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2.$$

Ainsi $\mathrm{H}_1(z) = 2$. La série $\mathrm{H}(z)$ vérifie

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{S}(n) \quad \text{avec} \quad \mathrm{S}(n) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \{0,1\} \Rightarrow m \neq 0}} \left(\frac{1}{mz + n - 1} - \frac{1}{mz + n} \right).$$

Si $n \notin \{0, 1\}$ alors

$$\mathrm{S}(n) = \frac{1}{z} u_m \quad \text{avec} \quad u_m = \frac{1}{m + (n-1)/z} - \frac{1}{m + n/z}$$

La série définissant $\mathrm{S}(n)$ est donc absolument convergente et

$$\mathrm{S}(n) = \frac{1}{z} \left(u_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} (u_m + u_{-m}) \right).$$

La somme en m se réécrit

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\left[\frac{1}{m + (n-1)/z} + \frac{1}{-m + (n-1)/z} \right] - \left[\frac{1}{m + n/z} + \frac{1}{-m + n/z} \right] \right).$$

Les deux termes entre crochets définissent des sommes absolument convergentes. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(n) = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{(n-1)/z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m + (n-1)/z} + \frac{1}{-m + (n-1)/z} \right) \right] \\ - \frac{1}{z} \left[\frac{1}{n/z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m + n/z} + \frac{1}{-m + n/z} \right) \right] \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{S}(n) = \frac{\pi}{z} \left[\operatorname{cotan} \frac{\pi(n-1)}{z} - \operatorname{cotan} \frac{\pi n}{z} \right]$$

pour $n \geq 2$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(0) + \mathrm{S}(1) = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{mz - 1} - \frac{1}{mz} + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{mz} - \frac{1}{mz + 1} &= \frac{2}{z} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{1}{m - 1/z} + \frac{1}{-m - 1/z} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{z} \operatorname{cotan} \frac{\pi}{z} + 2. \end{aligned}$$

On a alors

$$H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} S(n) + S(0) + S(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} S(n) = 2 - 2\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{z}\operatorname{cotan}\frac{\pi n}{z}$$
$$= 2 - \frac{2i\pi}{z}.$$

On déduit ensuite des calculs de $H(z)$ et $H_1(z)$ la convergence et la valeur de $T(z)$ et $T_1(z)$. On a

$$\begin{aligned} H_1(z) - T_1(z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ m=0\Rightarrow n\notin\{0,1\}}} \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} - 1 \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ m^2+n^2(n-1)^2\neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} - 1. \end{aligned}$$

On compare la somme de droite à la série de terme général $|mz+n|^{-3}$. Si z est dans un compact, la preuve de la proposition 38 nous indique qu'il existe $C>0$ tel que, pour tous entiers m et n tels que $(m,n)\neq(0,0)$ et $(m,n)\neq(0,1)$, on a

$$\left|\frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}\right| \leq \frac{C}{(m^2+n^2)\sqrt{m^2+(n-1)^2}}.$$

La série de terme général le membre de droite converge puisque pour $n\notin\{0,1\}$ il est majoré par $2C(m^2+n^2)^{-3/2}$ qui est le terme d'une série convergente d'après la preuve de la proposition 38. On en déduit la convergence abolue de $H_1 - T_1$ (et donc la convergence de T_1). De la même façon,

$$H(z) - T(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m^2+n^2(n-1)^2\neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} + 1$$

converge absolument de sorte que $T(z)$ converge et $H_1 - T_1 = T - H$. On en tire

$$T(z) = T_1(z) - \frac{2i\pi}{z}.$$

Comme dans la preuve de la proposition 39 on a

$$E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n)e(nz) = \frac{3}{\pi^2}T_1(z).$$

Or,

$$\begin{aligned} T_1\left(-\frac{1}{z}\right) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ m=0\Rightarrow n\neq 0}} \frac{1}{(-m/z+n)^2} = z^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ m=0\Rightarrow n\neq 0}} \frac{1}{(-m+nz)^2} = z^2 T(z) \\ &= z^2 T_1(z) - \frac{2i\pi}{z}. \end{aligned}$$

On en déduit
$$E_2|_2 S = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(S)$$
et on a évidemment
$$E_2|_2 T = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(T).$$
Grâce au lemme 123, on a pour toute matrice A et B de $SL_2(\mathbb{Z})$ l'implication
$$E_2|_2 A = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(A) \text{ et } E_2|_2 B = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(B) \Rightarrow E_2|_2 (AB) = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(AB)$$
de sorte que S et T engendrant $SL_2(\mathbb{Z})$ on a
$$E_2|_2 A = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(A)$$
pour toute matrice A de $SL_2(\mathbb{Z})$. □

Annexe C

Compléments d'arithmétique

C.1 Compléments sur les fonctions arithmétiques

C.1.1) Compléments sur la fonction somme de diviseurs

La taille de $\sigma_0(n)$ est majorée dans le lemme suivant.

***Lemme* 298–** *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $C(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$\sigma_0(n) \leq C(\varepsilon) n^{\varepsilon}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Démonstration. On fixe $\varepsilon > 0$. Supposons d'abord que $n = p^{\nu}$ avec $\nu \geq 1$. On a alors

$$\sigma_0(p^{\nu}) = \nu + 1 \leq 2\nu = \frac{2}{\log p} \log p^{\nu} \leq \frac{2}{\log 2} \log p^{\nu}.$$

Or, $\log(n)/n^{\varepsilon}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc il existe $N_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geq N_0(\varepsilon)$ on a

$$\frac{2}{\log 2} \log n \leq n^{\varepsilon}.$$

En particulier, pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geq 1$ tels que $p^{\nu} \geq N_0(\varepsilon)$ on a $\sigma_0(p^{\nu}) \leq p^{\varepsilon\nu}$. Considérons maintenant un entier quelconque n. On écrit sa décomposition en facteurs premiers

$$n = \prod_{p|n} p^{v_p(n)}$$

puis $n = n_1 n_2$ où n_2 contient les « grands facteurs premiers » de n_2 :

$$n_2 = \prod_{\substack{p|n \\ p^{v_p(n)} \geq N_0(\varepsilon)}} p^{v_p(n)}.$$

On a $(n_1, n_2) = 1$ donc $\sigma_0(n) = \sigma_0(n_1)\sigma_0(n_2)$. Or,

$$\sigma_0(n_2) = \prod_{\substack{p\mid n\\ p^{v_p(n)}\geq \mathrm{N}_0(\varepsilon)}} \sigma_0\left(p^{v_p(n)}\right) \leq \prod_{\substack{p\mid n\\ p^{v_p(n)}\geq \mathrm{N}_0(\varepsilon)}} p^{\varepsilon v_p(n)} = n_2^{\varepsilon}.$$

On a donc

$$\sigma_0(n) \leq \sigma_0(n_1)\sigma_0(n_2) \leq \sigma_0(n_1)n^{\varepsilon}. \tag{C.1}$$

Ensuite

$$\sigma_0(n_1) = \prod_{\substack{p\mid n\\ p^{v_p(n)}< \mathrm{N}_0(\varepsilon)}} \sigma_0\left(p^{v_p(n)}\right).$$

On a

$$\sigma_0\left(p^{v_p(n)}\right) = \sum_{d\mid p^{v_p(n)}} 1 \leq \sum_{d=1}^{p^{v_p(n)}} 1 \leq p^{v_p(n)}$$

donc

$$\sigma_0(n_1) \leq \prod_{\substack{p\mid n\\ p^{v_p(n)}< \mathrm{N}_0(\varepsilon)}} p^{v_p(n)} \leq \mathrm{N}_0(\varepsilon)^{\#\{p\mid n:\ p^{v_p(n)}\leq \mathrm{N}_0(\varepsilon)\}}. \tag{C.2}$$

Ensuite,

$$\#\{p \mid n:\ p^{v_p(n)} \leq \mathrm{N}_0(\varepsilon)\} \leq \#\{\ell \in \mathbb{N}^*:\ \ell \leq \mathrm{N}_0(\varepsilon)\}$$

donc $\sigma_0(n_1) \leq \mathrm{N}_0(\varepsilon)^{\mathrm{N}_0(\varepsilon)}$. On termine en posant $\mathrm{C}(\varepsilon) = \mathrm{N}_0(\varepsilon)^{\mathrm{N}_0(\varepsilon)}$ et en utilisant l'inégalité (C.1). □

Remarque 299 - Dans la majoration (C.2), on aurait pu remplacer $\mathrm{N}_0(\varepsilon)$ par

$$\mathrm{M}_0(\varepsilon) = \max\{\sigma_0(\ell):\ \ell \leq \mathrm{N}_0(\varepsilon)\}.$$

Fort de cette remarque le lecteur pourra démontrer le résultat suivant. Soit f une fonction multiplicative telle que

$$\left|f\left(p^{\nu}\right)\right| \leq p^{\mathrm{A}\nu}\mathrm{Q}(\nu)$$

pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geq 1$, où $\mathrm{A} \geq 0$ et Q est un polynôme ne dépendant pas de p. Alors, il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \geq 0$ et tout $n \geq 1$ on a $|f(n)| \leq \mathrm{C}n^{\mathrm{A}+\varepsilon}$. Le lecteur fatigué pourra lire la preuve du lemme 2.1.8 de [22]

C.1.2) Fonction nombre de diviseurs premiers

La fonction *nombre de diviseurs premiers* est la fonction notée ω qui a tout entier $n \geq 2$ associe le cardinal de l'ensemble des diviseurs premiers de n et à 1 associe 0 :

$$\omega(n) = \#\{p \in \mathcal{P}:\ p \mid n\}.$$

Ce n'est pas une fonction multiplicative. En revanche,

$$\begin{aligned}\omega(rd) &= \{p \in \mathcal{P}\colon\ p \mid rd\} = \{p \in \mathcal{P}\colon\ p \mid r\} \cup \{p \in \mathcal{P}\colon\ p \mid d\}\\ &\leq \{p \in \mathcal{P}\colon\ p \mid r\} + \{p \in \mathcal{P}\colon\ p \mid d\} = \omega(r) + \omega(d).\end{aligned}$$

En se souvenant que 2^{ω} est le nombre de parties d'un ensemble à ω éléments, on voit que $2^{\omega(n)}$ est le nombre d'entiers divisant n et sans facteur carré. On a donc

$$2^{\omega(n)} \leq \sigma_0(n) \tag{C.3}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

***Proposition* 300–** *La fonction $n \mapsto 2^{\omega(n)}$ est multiplicative.*

Démonstration. Si n est un entier, il est sans facteur carré si et seulement si $\mu(n) \neq 0$ donc si et seulement si $\mu(n)^2 = 1$. On a donc

$$2^{\omega}(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d)^2 = \mathbb{1} * \mu^2$$

et cette égalité implique la multiplicativité de la fonction 2^{ω}. □

C.2 Séries de Dirichlet

Si $a\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est une fonction arithmétique, on définit sa série de Dirichlet par

$$\mathrm{D}(a,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n) n^{-s}.$$

Le résultat suivant nous permettra de déterminer la région de convergence des séries de Dirichlet.

***Proposition* 301–** *Soit a une fonction arithmétique. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $\varepsilon > 0$ une constante $\mathrm{C}(\varepsilon)$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$ on a*

$$|a(n)| \leq \mathrm{C}(\varepsilon) n^{\alpha+\varepsilon}.$$

i) La série de Dirichlet $\mathrm{D}(a,s)$ converge absolument sur le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 1 + \alpha$.

ii) Soit $\varepsilon > 0$, la série $\mathrm{D}(a,s)$ converge normalement sur le demi-plan fermé $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \alpha + \varepsilon$. Elle y définit donc une fonction holomorphe.

Démonstration. Remarquons que pour tout $n \geq 1$ entier, on a $|n^s| = n^{\mathrm{Re}\, s}$.

1. Soit s de partie réelle strictement supérieure à $1 + \alpha$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \alpha + \eta$. On a donc

$$|a(n) n^{-s}| \leq \mathrm{C}\left(\frac{\eta}{2}\right) n^{-1-\eta/2}$$

d'où l'on déduit la convergence absolue de $\mathrm{D}(a,s)$.

2. On a
$$\max_{s:\ \mathrm{Re}\,s\geq 1+\alpha+\varepsilon} |a(n)n^{-s}| \leq \mathrm{C}\left(\frac{\eta}{2}\right)n^{-1-\eta/2}$$
d'où l'on tire la convergence normale de $\mathrm{D}(a,s)$ sur $\mathrm{Re}\,s \geq 1+\alpha+\varepsilon$. Enfin, l'holomorphie résulte de ce qu'une suite normalement convergente de fonctions holomorphes définit une fonction holomorphe.

□

La proposition d'unicité suivante permet d'utiliser les manipulations de séries de Dirichlet pour obtenir des égalités arithmétiques.

***Proposition* 302–** *Soit a une fonction arithmétique. On suppose que sa série de Dirichlet converge uniformément sur un demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ *où elle est nulle. Alors a est la fonction nulle.*

Démonstration. Si a n'est pas la fonction nulle alors on peut définir
$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^*:\ a(n) \neq 0\}.$$
Soit $\varepsilon > 0$ et $\sigma > \sigma_a + \varepsilon$. Alors
$$0 = \mathrm{D}(a,\sigma)n_0^{\sigma} = a(n_0) + n_0^{\sigma}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a(n)n^{-\sigma}.$$
Puisque $\mathrm{D}(a,s)$ converge uniformément sur $\mathrm{Re}\,s \geq \sigma_a + \varepsilon$, la suite $a(n)n^{-\sigma_a-\varepsilon}$ tend vers 0 lorsque n teld vers l'infini. On en déduit l'existence de $\mathrm{C}(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geq 1$ entier,
$$|a(n)| \leq \mathrm{C}(\varepsilon)n^{\sigma_a+\varepsilon}.$$
Pour $\sigma > \sigma_a + 1 + 2\varepsilon$, on a donc
$$n_0^{\sigma}\left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a(n)n^{-\sigma}\right| \leq \mathrm{C}(\varepsilon)n_0^{\sigma}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^{-\sigma+\sigma_a+\varepsilon}.$$
Ces sommes tendent vers 0 lorsque σ tend vers $+\infty$ car
$$\begin{aligned}
n_0^{\sigma}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^{-\sigma+\sigma_a+\varepsilon} &\leq n_0^{\sigma}\left[(n_0+1)^{-\sigma+\sigma_a+\varepsilon} + \int_{n_0+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\sigma-\sigma_a+\varepsilon}}\right]\\
&\leq n_0^{\sigma}\left[(n_0+1)^{-\sigma+\sigma_a+\varepsilon} + \frac{1}{\sigma-1-\sigma_a-\varepsilon}(n_0+1)^{1-\sigma+\sigma_a+\varepsilon}\right]\\
&\leq \left(\frac{1}{\sigma-1-\sigma_a-\varepsilon} + \frac{1}{n_0+1}\right)(n_0+1)^{1+\sigma_a+\varepsilon}\left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^{\sigma}.
\end{aligned}$$
On en déduit que $a(n_0) = 0$ ce qui contredit sa définition. □

Le résultat suivant justifie la définition, donnée dans la définition 6, du produit de Dirichlet.

***Proposition* 303–** *Soit a et b deux fonctions arithmétiques. On suppose que la série de Dirichlet associée à a est absolument convergente sur le demi-plan* $\mathrm{Re}\, s > \sigma_a$ *et que la série de Dirichlet associée à b est absolument convergente sur le demi-plan* $\mathrm{Re}\, s > \sigma_b$*. Alors, le produit des séries de Dirichlet est la série du produit de Dirichlet de a et b : pour s tel que* $\mathrm{Re}\, s > \max(\sigma_a, \sigma_b)$*, on a*

$$\mathrm{D}(a,s)\mathrm{D}(b,s) = \mathrm{D}(a*b,s)$$

et la série $\mathrm{D}(a*b,s)$ *est absolument convergente sur* $\mathrm{Re}\, s > \max(\sigma_a, \sigma_b)$.

Démonstration. La convergence absolue des deux séries implique qu'on peut les mutliplier et permuter les termes en obtenant une somme toujours absolument convergente :

$$\mathrm{D}(a,s)\mathrm{D}(b,s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a(n)n^{-s}\sum_{m=1}^{+\infty} b(m)m^{-s}\right) = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}\\ nm=q}} a(n)b(m)\right)q^{-s}.$$

Le dernier terme entre parenthèses est bien $a*b(q)$. □

Enfin, les applications mutliplicatives admettent des séries de Dirichlet qui peuvent être vues comme des produits infinis (voir § B.9) sur les nombres premiers (appelés *produits eulériens*).

***Proposition* 304–** *Soit a une fonction arithmétique multiplicative. On suppose que sa série de Dirichlet converge absolument sur* $\mathrm{Re}\, s > \sigma_a$*. Alors, pour tout s tel que* $\mathrm{Re}\, s > \sigma_a$ *on a*

$$\mathrm{D}(a,s) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{a\left(p^{\nu}\right)}{p^{\nu s}}.$$

Démonstration. La produit converge pour $\mathrm{Re}\, s > \sigma_a$ car

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left|\frac{a(p^{\nu})}{p^{\nu s}}\right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|a(n)|}{n^s}$$

converge pour $\mathrm{Re}\, s > \sigma_a$ (voir la proposition 276). Par ailleurs, en notant

$$\mathcal{E}(\mathrm{N}) = \{n \in \mathbb{N} : (p \mid n \text{ et } p \in \mathcal{P}) \Rightarrow p \leq \mathrm{N}\}$$

l'ensemble des entiers [a] dont les diviseurs premiers valent au plus N on a

$$\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\leq \mathrm{N}}}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{a(n)}{n^s} = \sum_{n\in\mathcal{E}(\mathrm{N})}\frac{a(n)}{n^s}.$$

a. Noter que cet ensemble contient 1

Puisque $\mathcal{E}(\mathrm{N})$ contient $\{1,2,\dots,\mathrm{N}\}$ on a

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(n)}{n^s}-\sum_{n\in\mathcal{E}(\mathrm{N})}\frac{a(n)}{n^s}\right|\leq\sum_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\mathcal{E}(\mathrm{N})}\frac{|a(n)|}{n^{\mathrm{Re}\,s}}\leq\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\frac{|a(n)|}{n^{\mathrm{Re}\,s}}.$$

On obtient le résultat énoncé en faisant tendre N vers l'infini. □

Exemple 305 - Rappelons que ζ est la fonction définie pour $\mathrm{Re}\,s>1$ par

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

C'est donc la série de Dirichlet associée à la fonction multiplicative $\mathbb{1}$. On a alors

$$\zeta(s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{p^{\nu s}}$$

ce qui, par sommation des séries géométriques, se simplifie en

$$\zeta(s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Exemple 306 - La fonction de Möbius μ vérifie $|\mu(n)|\leq 1$ pour tout $n\geq 1$. Sa fonction de Dirichlet $\mathrm{D}(\mu,s)$ est donc asolument convergente pour $\mathrm{Re}\,s>1$. La fonction μ est multiplicative et si $\nu\geq 2$, on a $\mu(p^\nu)=0$ alors que $\mu(p)=-1$. On a donc

$$\mathrm{D}(\mu,s)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

pour $\mathrm{Re}\,s>1$. On en déduit $\mathrm{D}(\mu,s)\zeta(s)=1$ dès que $\mathrm{Re}\,s>1$. On en déduit immédiatement que $\mu*\mathbb{1}=\delta$ obtenant ainsi une autre preuve du lemme 9 d'inversion de Möbius.

Exemple 307 - Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. La fonction $\mathrm{I}^\alpha\colon n\mapsto n^\alpha$ admet une série de Dirichlet absolument convergente pour $\mathrm{Re}\,s>1+\mathrm{Re}\,\alpha$. Cette série de Dirichlet est

$$\mathrm{D}(\mathrm{I}^\alpha,s)=\zeta(s-\alpha).$$

La fonction σ_α étant le produit de convolution de $\mathbb{1}$ et I^α, on en déduit que la série de Dirichlet $\mathrm{D}(\sigma_\alpha,s)$ converge absolument pour $\mathrm{Re}\,s>\max(1,1+\mathrm{Re}\,\alpha)$ et qu'elle vaut

$$\mathrm{D}(\sigma_\alpha,s)=\zeta(s)\zeta(s-\alpha).$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la proposition 304, le corollaire 12 et l'équation (A.4).

C.3 Quelques fonctions sommatoires arithmétiques

***Lemme* 308–** *Pour tout $x \geq 1$ on a*

$$\sum_{n\leq x} \sigma_0(n) = x(\log(x) + 2\gamma - 1) + \mathrm{O}(\sqrt{x}).$$

La preuve est une conséquence directe du théorème général suivant, connu sous le nom de principe de l'hyperbole de de Dirichlet. Le terme d'erreur peut-être amélioré en $x^{1/3}\log(x)$ (voir [39, Théorème I.6.11]).

***Théorème* 309–** *Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On définit pour tout $x \geq 1$ les fonctions sommatoires*

$$\mathrm{F}\colon \mapsto \sum_{1\leq n\leq x} f(n) \quad \textit{et} \quad \mathrm{G}\colon \mapsto \sum_{1\leq n\leq x} g(n).$$

Pour tout $x \geq 1$ et $y \in [1,x]$ on a

$$\sum_{1\leq n\leq x} f*g(n) = \sum_{1\leq n\leq y} g(n)\mathrm{F}\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{1\leq n\leq x/y} f(n)\mathrm{G}\left(\frac{x}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{G}(y).$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq n\leq x} f*g(n) &= \sum_{ab\leq x} f(a)g(b)\\ &= \sum_{\substack{ab\leq x\\ b\leq y}} f(a)g(b) + \sum_{\substack{ab\leq x\\ b>y}} f(a)g(b)\\ &= \sum_{b\leq y} g(b)\sum_{a\leq x/b} f(a) + \sum_{a\leq x/y} f(a)\sum_{y<b\leq x/a} g(b)\end{aligned}$$

puis

$$\sum_{y<b\leq x/a} g(b) = \mathrm{G}\left(\frac{x}{a}\right) - \mathrm{G}(y).$$

□

Le lemme 308 est obtenu en appliquant le principe de l'hyperbole de Dirichlet avec $y = \sqrt{x}$ à $f = g = 1$ et en utilisant le corollaire 274. Les corollaires suivants sont alors conséquence immédiate de la formule de sommation d'Abel (voir § B.7).

***Corollaire* 310–** *Pour tout $x \geq 1$ on a*

$$\sum_{n\leq x} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} = \sqrt{x}\log(x) + \mathrm{O}\left(\sqrt{x}\right).$$

***Corollaire* 311–** *Pour tout $\theta > 1$, il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que pour tout $x \geq 1$ on a*

$$\sum_{n\leq x} \frac{\sigma_0(n)}{n^{\theta}} \leq \mathrm{C}\frac{\log(2x)}{x^{\theta-1}}.$$

C.4 Sommes de Kloosterman

Si m, n, c sont des entiers, on définit la somme de Kloosterman

$$\mathrm{Kl}(m,n;c) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} \exp\left(2i\pi\frac{mx+n\{x,c\}}{c}\right)$$

où $\{x,c\}$ désigne l'inverse de x modulo c. L'objet de cette annexe est d'étudier quelques propriétés de ces sommes en en particulier la loi de multiplicativité croisée (lemme 315) et la relation de Selberg (proposition 317).

Nous commençons par établir quelques cas dégénérés.

***Lemme* 312–** *Soit p un nombre premier et n un entier divisible par p. Alors* $\mathrm{Kl}(n,1;p) = -1$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Kl}(n,1;p) &= \sum_{x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{\{x,p\}}{p}\right) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{1}{p}\right)^x \\ &= e\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1-e\left(\frac{p-1}{p}\right)}{1-e\left(\frac{1}{p}\right)} = -1.\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant est immédiat.

***Lemme* 313–** *Si m et n sont des entiers alors* $\mathrm{Kl}(m,n;1) = 1$.

***Lemme* 314–** *Soit p un nombre premier et n un multiple de p. Si $\alpha \geq 2$ alors* $\mathrm{Kl}(n,1;p^\alpha) = 0$.

Démonstration. On a

$$\mathrm{Kl}(n,1;p^\alpha) = \sum_{\substack{x=1\\(x,p)=1}}^{p^\alpha-1} e\left(\frac{nx+\{x,p^\alpha\}}{p^\alpha}\right).$$

On note q et r les quotient et reste de la division euclidienne de x par $p^{\alpha-1}$. L'inverse de r modulo p^α est aussi inverse de r modulo $p^{\alpha-1}$ et on vérifie aisément que

$$\{x,p^\alpha\} = \{r,p^\alpha\} - \{r,p^\alpha\}^2 q p^{\alpha-1}.$$

On écrit $n = p^v k$ avec $v \geq 1$ et $(k,p) = 1$ et on a alors

$$\mathrm{Kl}(n,1;p^\alpha) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}/p^{\alpha-1}\mathbb{Z}\\(r,p)=1}} e\left(\frac{kp^v r - \{r,p^\alpha\}}{p^\alpha}\right) \sum_{q\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} e\left(-\frac{\{r,p^\alpha\}^2}{p}q\right).$$

La somme en q est nulle. □

Le résultat suivant est un résultat de multipicativité.

***Lemme* 315** (Lemme de multiplicativité croisée)– *Soit c et c' deux entiers premiers entre eux. Pour tous entiers m et n on a*

$$\mathrm{Kl}(m,n;cc') = \mathrm{Kl}(m\{c',c\},n\{c',c\};c)\,\mathrm{Kl}(m\{c,c'\},n\{c,c'\};c').$$

Démonstration. Puisque c et c' sont premiers entre eux, l'identité de Bezout donne des entiers u et v tels que $uc+vc'=1$. On a alors

$$\frac{1}{cc'} = \frac{u}{c'} + \frac{v}{c} \in \frac{\{c,c'\}}{c'} + \frac{\{c',c\}}{c} + \mathbb{Z}$$

puis

$$\mathrm{Kl}(m,n;cc') = \sum_{x\in\left(\mathbb{Z}/cc'\mathbb{Z}\right)^\times} e\left(\frac{\{c,c'\}(mx+n\{x,c'\})}{c'}\right) e\left(\frac{\{c',c\}(mx+n\{x,c\})}{c}\right).$$

Noter que la première exponentielle ne dépend que de la classe de x modulo c' alors que la seconde ne dépend que de la classe de x modulo c. Le théorème chinois fournit un isomorphisme de groupe

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{Z}/cc'\mathbb{Z}\right)^\times & \to & \left(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}\right)^\times \times \left(\mathbb{Z}/c'\mathbb{Z}\right)^\times \\ x \pmod{cc'} & \mapsto & (x \pmod{c}, x \pmod{c'}). \end{array}$$

En particulier l'image de $\{x,cc'\}$ est $(\{x,c\},\{x,c'\})$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Kl}(m,n;c) &= \sum_{x_1\in\left(\mathbb{Z}/c'\mathbb{Z}\right)^\times} \sum_{x_2\in\left(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}\right)^\times} e\left(\frac{\{c,c'\}(mx_1+n\{x_1,c'\})}{c'}\right) e\left(\frac{\{c',c\}(mx_2+n\{x_2,c\})}{c}\right) \\ &= \mathrm{Kl}(m\{c,c'\},n\{c,c'\};c')\,\mathrm{Kl}(m\{c',c\},n\{c',c\};c). \end{aligned}$$

□

Remarque 316 - Si c et c' sont premiers entre eux, le changement de variables $y=\{c',c\}x$ montre que

$$\mathrm{Kl}(mc',nc';c) = \mathrm{Kl}\left(mc'^2,n;c\right). \tag{C.4}$$

***Proposition* 317** (Relation de Selberg)– *Si m,n,c sont des entiers alors*

$$\mathrm{Kl}(m,n;c) = \sum_{d|(m,n,c)} \mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2},1;\frac{c}{d}\right).$$

Démonstration. Si n est premier à c, la relation de Selberg se réduit à $\mathrm{Kl}(m,n;c) = \mathrm{Kl}(mn,1;c)$ qui résulte du changement de variable $y=\{n,c\}x$ dans la définition. Montrons ensuite qu'on peut se ramener au cas où c est une puissance d'un nombre premier. Soit c et c' deux entiers premiers entre eux, nous allons montrer que si la relation est vraie pour $\mathrm{Kl}(m,n;c)$ et $\mathrm{Kl}(m,n;c')$ pour tous entiers m et n alors elle est vraie pour $\mathrm{Kl}(m,n;cc')$ pour tous m et n. On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{d|(cc',m,n)} d\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2},1;\frac{cc'}{d}\right) &= \sum_{\substack{d|(c,m,n)\\ d'|(c',m,n)}} dd'\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2d'^2},1;\frac{c}{d}\cdot\frac{c'}{d'}\right)\\ &= \sum_{\substack{d|(c,m,n)\\ d'|(c',m,n)}} dd'\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2d'^2}\left\{\frac{c}{d},\frac{c'}{d'}\right\}^2,1;\frac{c'}{d'}\right)\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2d'^2}\left\{\frac{c'}{d'},\frac{c}{d}\right\}^2,1;\frac{c}{d}\right)\end{aligned}$$

d'après le lemme 315 et l'équation (C.4). On a

$$\left\{\frac{c}{d},\frac{c'}{d'}\right\} = \left\{c,\frac{c'}{d'}\right\}d \pmod{\frac{c'}{d'}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{d|(cc',m,n)} d\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2},1;\frac{cc'}{d}\right) &= \sum_{\substack{d|(c,m,n)\\ d'|(c',m,n)}} dd'\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d'^2}\left\{c,\frac{c'}{d'}\right\}^2,1;\frac{c'}{d'}\right)\\ &\qquad\times\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}\left\{c',\frac{c}{d}\right\}^2,1;\frac{c}{d}\right)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{d|(cc',m,n)} d\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2},1;\frac{cc'}{d}\right) &= \sum_{d|(m\{c',c\},n\{c',c\},c)} d\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}\left\{c',\frac{c}{d}\right\}^2,1;\frac{c}{d}\right)\\ &\qquad\times\sum_{d'|(m\{c,c'\},n\{c,c'\},c')} d'\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d'^2}\left\{c,\frac{c'}{d'}\right\}^2,1;\frac{c'}{d'}\right).\end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{d|(m\{c',c\},n\{c',c\},c)} d\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}\left\{c',\frac{c}{d}\right\}^2,1;\frac{c}{d}\right) = \mathrm{Kl}(m\{c',c\},n\{c',c\};c)$$

$$\sum_{d'|(m\{c,c'\},n\{c,c'\},c')} d'\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d'^2}\left\{c,\frac{c'}{d'}\right\}^2,1;\frac{c'}{d'}\right) = \mathrm{Kl}(m\{c,c'\},n\{c,c'\};c')$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{d|(m,n,cc')} d\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2},1;\frac{cc'}{d}\right) &= \mathrm{Kl}(m\{c',c\},n\{c',c\};c)\,\mathrm{Kl}(m\{c,c'\},n\{c,c'\};c')\\ &= \mathrm{Kl}(m,n;cc')\end{aligned}$$

et on est réduit à démontrer la formule de Selberg lorsque $c = p^\alpha$, ce qu'on va faire par récurrence. Supposons $\alpha = 1$: si p ne divise pas n ou si p ne divise pas m on a déjà montré le résultat. Si $p \mid n$ et $p \mid n$ alors

$$\mathrm{Kl}(m,n;p) = \varphi(p) = p-1$$

et

$$\sum_{d \mid (m,n,p)} d\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{d^2},1;\frac{p}{d}\right) = \mathrm{Kl}(mn,1;p) + p\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{p^2},1;1\right)$$

d'après les lemmes 312 et 313. Supposons donc vraie la formule pour $c = p^\alpha$. Être premier à $p^{\alpha+1}$ étant équivalent à être premier à p, le seul cas non traîté est celui ou $p \mid m$ et $p \mid n$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Kl}\left(m,n;p^{\alpha+1}\right) &= \sum_{x\in\left(\mathbb{Z}/p^{\alpha+1}\mathbb{Z}\right)^\times} e\left(\frac{\frac{m}{p}x + \frac{n}{p}\left\{x,p^{\alpha+1}\right\}}{p^\alpha}\right)\\ &= p\sum_{x\in\left(\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}\right)^\times} e\left(\frac{\frac{m}{p}x + \frac{n}{p}\left\{x,p^{\alpha}\right\}}{p^\alpha}\right)\end{aligned}$$

puisque $x \mapsto e\left(\frac{\frac{m}{p}x+\frac{n}{p}\{x,p^\alpha\}}{p^{\alpha+1}}\right)$ ne dépend que de la classe de $x \pmod{p^\alpha}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{Kl}\left(m,n;p^{\alpha+1}\right) = p\,\mathrm{Kl}\left(\frac{m}{p},\frac{n}{p};p^\alpha\right) &= \sum_{d\mid\left(\frac{m}{p},\frac{n}{p},p^\alpha\right)} pd\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{(pd)^2},1;\frac{p^{\alpha+1}}{pd}\right)\\ &= \sum_{\delta\mid(m,n,p^\alpha)} \delta\,\mathrm{Kl}\left(\frac{mn}{\delta^2},1;\frac{p^{\alpha+1}}{\delta}\right) - \mathrm{Kl}\left(mn,1;p^{\alpha+1}\right).\end{aligned}$$

Enfin, $\mathrm{Kl}\left(mn,1;p^{\alpha+1}\right) = 0$ par le lemme 314. □

Annexe D

Problèmes

D.1 Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction ζ de Riemann

I) Polynômes de Bernoulli.

1) Montrer que les relations

$$\begin{cases} b_0(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ b'_k(t) = k b_{k-1}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \displaystyle\int_0^1 b_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

définissent une unique suite de fonctions C^1 et que ces fonctions sont des polynômes.

2) On pose $\mathrm{B}_k = b_k(0)$. Montrer que

$$b_k(1-t) = (-1)^k b_k(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{cases} b_{2k}(1) = \mathrm{B}_{2k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ b_{2k+1}(1) = \mathrm{B}_{2k+1} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

II) Une intégrale.

1) On pose

$$\mathrm{I}(k,m) = \int_0^1 b_{2k}(t) \cos(\pi m t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout entier $k \geq 0$ et tout entier $m \geq 1$. Montrer que $\mathrm{I}(0,m) = 0$ et que, pour tout $k \geq 1$ entier,

$$\mathrm{I}(k,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ est impair} \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(\pi m)^{2k}} & \text{si } m \geq 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

2) On pose $b_k^* = b_k - \mathrm{B}_k$ et

$$\mathrm{I}_k^*(m) = \int_0^1 b_{2k}^*(t)\cos(\pi m t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathrm{I}_k^*(m).$$

III) Calcul de $\zeta(2k)$.

1) Montrer que

$$\cos(mx) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

pour tous $m \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0,\pi]$.

2) Montrer que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\int_0^1 b_{2k}^*(t)\frac{\sin\left(\frac{2\mathrm{N}+1}{2}\pi t\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 b_{2k}^*.$$

3) Soit $k \geq 1$. On pose

$$f(t) = \frac{b_{2k}^*(t)}{2\sin\frac{\pi t}{2}}$$

pour tout $t \in]0,1]$. Montrer que

$$\lim_{\mathrm{R}\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\mathrm{R}t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4) En déduire une valeur de $\zeta(2k)$.

IV) Une méthode d'analyse complexe.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout $z \in \mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$ on pose

$$f_{2r}(x,z) = \frac{e^{xz}}{(e^z-1)z^{2r}}.$$

1) Montrer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{b_m(x)}{m!}z^m = \frac{ze^{xz}}{e^z-1}.$$

2) Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,(2k+1)\pi)} f_{2r}(x,z)\,dz = \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ 1\le|m|\le k}} \frac{e^{2i\pi mx}}{(2i\pi m)^{2r}}.$$

3) Si $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$ avec $\mathrm{R} = (2k+1)\pi$, montrer que si $|\cos\theta| \geq \frac{1}{\mathrm{R}}$ alors

$$|e^z - 1| \geq \frac{1}{2}. \tag{D.1}$$

Si $|\cos\theta| \leq \frac{1}{\mathrm{R}}$, montrer que $\cos(\mathrm{R}\sin\theta) \leq -\frac{1}{2}$ et montrer que la majoration (D.1) reste valide.

4) Si $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$ avec $\mathrm{R} = (2k+1)\pi$, montrer la minoration

$$|f_{2r}(x,z)| \leq \frac{3}{((2k+1)\pi)^{2r}}$$

et en déduire

$$b_{2r}(x) = (-1)^{r-1}2(2r)!(2\pi)^{-2r}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}}.$$

5) En déduire la valeur de $\zeta(2r)$.

Sources – [5], [38, Ex. I.0.1].

D.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux.

I) Pour tout $(z,w)\in\mathcal{H}\times\mathbb{C}$, on définit

$$\vartheta(z,w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z+2i\pi n w}$$

1) Montrer que pour tout $z\in\mathcal{H}$, la série de fonctions

$$w\mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z+2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

2) Montrer que pour tout $w\in\mathbb{C}$, la série de fonctions

$$z\mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z+2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathcal{H}$.

3) Reprendre les questions I1) et I2) pour

$$(z,w)\mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}.$$

4) Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}.$$

est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{H}$.

II) Le but de cette question est de démontrer la formule de transformation theta de Jacobi :

$$\sqrt{\frac{z}{i}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+w)^2 z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(-1/z)+2i\pi n w} \tag{D.2}$$

pour tout $(z,w)\in\mathcal{H}\times\mathbb{C}$.

On fixe $z\in\mathcal{H}$ et on considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}.$$

1) Montrer que
$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{2i\pi m w}$$
avec
$$a_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi(zw^2-2mw)}\,\mathrm{d}u \quad (w = u+iv)$$
pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $v \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que
$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z t^2}\,\mathrm{d}t$$
pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

3) On rappelle que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$
Montrer la formule de transformation theta de Jacobi (D.2).

III) On définit sur $\mathcal{H}$ les fonctions ϑ_0, ϑ_1 et ϑ_2 par
$$\vartheta_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z},$$
$$\vartheta_1(z) = \vartheta_0(z+1)$$
$$\vartheta_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+1/2)^2 z}.$$

1) Montrer que
$$\vartheta_1(z) = \vartheta\left(z, \frac{1}{2}\right)$$
pour tout $z \in \mathcal{H}$.

2) Montrer les égalités
$$\vartheta_1(z+1) = \vartheta_0(z)$$
$$\vartheta_2(z+1) = e^{i\pi/4}\vartheta_2(z)$$
$$\vartheta_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\vartheta_2(z)$$
$$\sqrt{\frac{i}{z}}\,\vartheta_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta_1(z)$$
pour tout $z \in \mathcal{H}$.

3) Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{C}$ tel que
$$\Delta(z) = \mathrm{C}\left(\vartheta_0(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z)\right)^8$$
pour tout $z \in \mathcal{H}$.

4) Calculer C.

IV) Soit g définie sur $\mathcal{H}$ par

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}.$$

1) Montrer que

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta\left(-\frac{3}{z}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}\right)$$

et en déduire

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{i\pi/(12z)} \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\pi(u^2/12)z} \cos\left(\frac{\pi u}{6}\right)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$.

2) Montrer que

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} e^{i\pi(z+1/z)/12} g(z).$$

3) Pour tout $z \in \mathcal{H}$, montrer que

$$\Delta(z) = e^{2i\pi z}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right)^{24}.$$

4) Pour tout complexe q de module strictement inférieur à 1, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n).$$

5) Soit n un entier naturel non nul. Une partition de n est un ensemble $\{x_1, \ldots, x_k\}$ d'entiers naturels non nuls tels que $n = x_1 + \ldots + x_k$ et $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. L'entier k s'appelle le nombre de parts de la partition. On note A_n le nombre de partitions de n en un nombre de parts pair et B_n le nombre de partitions de n en un nombre de parts impair. On étend en posant $\mathrm{A}_0 = 1$ et $\mathrm{B}_0 = 0$.

a) Pour tout complexe q de module strictement inférieur à 1, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n) q^n = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n).$$

b) Montrer le théorème des nombres pentagonaux d'Euler : pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n & \text{si } n \neq \dfrac{3m^2+m}{2} \text{ tout } m \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n + 1 & \text{s'il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ pair tel que } n = \dfrac{3m^2+m}{2} \\ \mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n - 1 & \text{s'il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ impair tel que } n = \dfrac{3m^2+m}{2}. \end{cases}$$

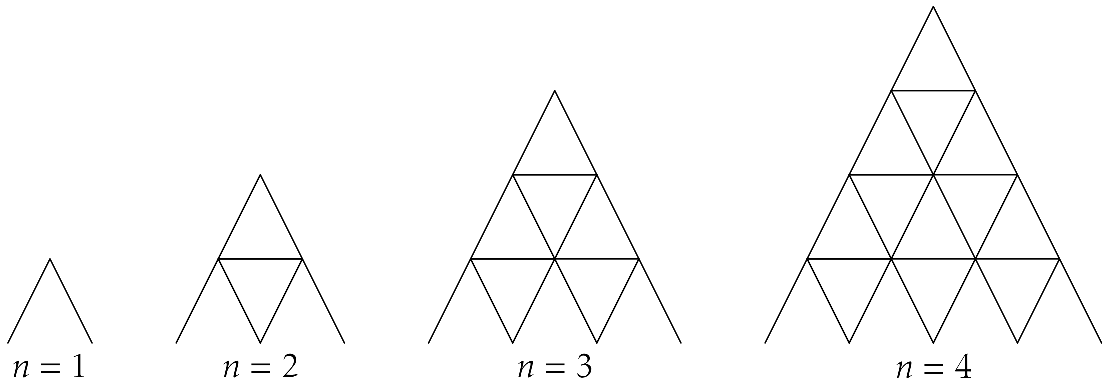


FIGURE D.1 – Exemples de châteaux de cartes

c) On construit des châteaux de cartes comme sur la figure IV(5)c. Aucune carte n'est utilisée pour le socle du château. Montrer que le nombre de cartes nécessaires à la réalisation d'un château à n étages est $\dfrac{3n^2+n}{2}$. Ce nombre s'appelle le n^{e} nombre pentagonal de deuxième type.

Sources – [12, VI.4, VII.1].

D.3 Le théorème des quatre carrés

I) Le groupe Γ_ϑ.
On note Γ_ϑ l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$\mathrm{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{M} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 2.$$

On note Γ_0 le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que Γ_ϑ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et que Γ_0 est un sous-groupe de Γ_ϑ.
2) Soit $\widetilde{\mathcal{F}_\vartheta} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1 \text{ et } |\mathrm{R}e(z)| \leq 1\}$. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, il existe $\mathrm{M} \in \Gamma_0$ tel que $\mathrm{M}z \in \widetilde{\mathcal{F}_\vartheta}$. En déduire

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\mathrm{M} \in \Gamma_\vartheta} \mathrm{M}\widetilde{\mathcal{F}_\vartheta}.$$

3) On note $\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1 \text{ et } |\mathrm{R}e(z)| \leq 1/2\}$ et

$$\mathcal{F}_\vartheta = \mathcal{F} \cup \mathrm{T}\mathcal{F} \cup (\mathrm{TS})\mathcal{F}.$$

Déduire de la question précédente que

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\mathrm{M} \in \Gamma_\vartheta} \mathrm{M}\mathcal{F}_\vartheta.$$

4) a) Soit $\mathrm{M} \in \Gamma_\vartheta$ et $z \in \mathring{\mathcal{F}} = \{z \in \mathcal{H} : |z| > 1 \text{ et } |\mathrm{R}e(z)| < 1/2\}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \Gamma_0$ tel que $\mathrm{N}(\mathrm{M}z) \in \mathcal{F}_\vartheta$.
b) En déduire que $\Gamma_\vartheta = \Gamma_0$.

II) Le groupe $\Gamma_0(\mathrm{N})$.
Soit $\mathrm{N} \geq 1$ un entier. On note $\Gamma_0(\mathrm{N})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ défini par

$$\Gamma_0(\mathrm{N}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{\mathrm{N}} \right\}.$$

et $\Gamma(\mathrm{N})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ défini par

$$\Gamma(\mathrm{N}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : b \equiv c \equiv 0 \pmod{\mathrm{N}} \quad \text{et} \quad a \equiv d \equiv 1 \pmod{\mathrm{N}} \right\}.$$

1) Soit c, d et N trois entiers tels que $(c,d,\mathrm{N})=1$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $t\in\mathbb{Z}$ tel que $(c+td,\mathrm{N})=1$. On note $\mathrm{K}(\mathrm{N})$ le noyau de N, c'est-à-dire l'entier défini par

$$\mathrm{K}(\mathrm{N})=\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid\mathrm{N}}}p.$$

C'est donc un entier qui n'est divisible par aucun carré d'entier (on dit que $\mathrm{K}(\mathrm{N})$ est un entier sans facteur carré).

a) Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{Z}$, on a

$$(c+td,\mathrm{N})=1 \quad\text{si et seulement si}\quad (c+td,\mathrm{K}(\mathrm{N}))=1.$$

On peut donc supposer N sans facteur carré, ce qu'on fait dans la suite de cette question.

b) Montrer l'existence de t lorsque $(d,\mathrm{N})=\mathrm{N}$. On suppose dans la suite que $(d,\mathrm{N})\neq\mathrm{N}$.

c) On note χ la fonction caractéristique des entiers premiers à N. On a donc

$$\chi(n)=\begin{cases}1 & \text{si } (n,\mathrm{N})=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

pour tout $n\in\mathbb{Z}$. On note

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}=\sum_{t \pmod{\mathrm{N}}}\chi(c+td)$$

la somme portant sur un système de représentants des entiers modulo N. Montrer que S_{N} ne dépend pas du système de représentants choisis.

d) Montrer que

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}=(d,\mathrm{N})\sum_{t \pmod{\mathrm{N}/(d,\mathrm{N})}}\chi(c+td)$$

puis

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}}=(d,\mathrm{N})\sum_{u \pmod{\mathrm{N}/(d,\mathrm{N})}}\chi(u).$$

e) Montrer que $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}>0$ et conclure.

2) On note π_{N} la surjection canonique de Z dans $\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z}$ et λ_{N} l'application :

$$\begin{array}{cccc}\lambda_{\mathrm{N}} & : & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z}\right)\\ & & \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix}\pi_{\mathrm{N}}(a) & \pi_{\mathrm{N}}(b)\\ \pi_{\mathrm{N}}(c) & \pi_{\mathrm{N}}(d)\end{pmatrix}.\end{array}$$

a) Montrer que le groupe $\Gamma(\mathrm{N})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'image de λ_{N}.

b) Montrer qu'il existe c et d entiers tels que $(c,d) = 1$, $\pi_N(\gamma) = \pi_N(c)$ et $\pi_N(\delta) = \pi_N(d)$.

c) Montrer qu'il existe a et b entiers tels que $ad - bc = 1$, $\pi_N(\alpha) = \pi_N(a)$ et $\pi_N(\beta) = \pi_N(b)$.

d) Quelle est l'image de λ_N ?

3) Soit d et c deux entiers tels que $(d,c,N) = 1$. On note

$$\mathcal{N}(N) = \#\left\{(\pi_N(a), \pi_N(b)) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : ad - bc \equiv 1 \pmod N\right\}.$$

a) Montrer que l'application $\mathcal{N}$ est multiplicative.

b) Si p est premier et $v \geq 0$, calculer $\mathcal{N}(p^v)$.

c) Montrer que le nombre de couples $(\pi_N(c), \pi_N(d))$ d'éléments de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ tels que $(c,d,N) = 1$ est

$$\left\{(\pi_N(c), \pi_N(d)) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : (c,d,N) = 1\right\} = \sum_{r|N} \mu(r)\left(\frac{N}{r}\right)^2.$$

(On rappelle que $\mu * \mathbb{1} = \delta$.)

d) Quel est la cardinal de $SL_2\left(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right)$?

e) Quel est le cardinal de $\Gamma(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$?

4) a) Quelle est l'image de $\Gamma_0(N)$ par λ_N ?

b) Quel est la cardinal de cette image ?

c) Quel est le cardinal de $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$?

III) Formes modulaires de niveau 4.

Une forme modulaire de poids 4 et de niveau 4 est une fonction holomorphe f de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

i) pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de $\Gamma_0(4)$, pour tout $z \in \mathcal{H}$,

$$(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z) \tag{D.3}$$

ii) pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de $SL_2(\mathbb{Z})$, l'application

$$z \mapsto (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \tag{D.4}$$

est bornée sur le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{I}m z \geq 1\}$.

1) Soit $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ holomoprhe. On suppose que f vérifie la condition (D.3) et admet un développement de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nz}.$$

L'objectif de cette question est de donner une condition simple sur la suite de coefficients $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ impliquant que f est modulaire de poids k et niveau 4. On suppose, dans la suite de cette question, que la suite $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance au plus polynômiale : il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a $|\widehat{f}(n)| \leq \mathrm{A}n^{\mathrm{B}}$.

a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à croissance au plus polynômiale. Soit $h \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi nz}.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que

$$|h(z)| \leq \frac{c}{\left|e^{-2\pi \mathrm{I}m\, z} - 1\right|^b}$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$ tel que $\mathrm{I}m\, z < 1$. En déduire l'existence de réels A et $\mathrm{B} > 0$ tels que

$$|h(z)| \leq \mathrm{A}\,(\mathrm{I}m\, z)^{-\mathrm{B}}$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$ tel que $\mathrm{I}m\, z < 1$.

b) Soit $\mathrm{M} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On pose $g = \left(f \underset{k}{|} \mathrm{M}\right)$, ainsi

$$g(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \quad (z \in \mathcal{H}).$$

i) Montrer que

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) e^{2i\pi nz} \quad \text{avec} \quad \widehat{g}(-n) = \int_0^1 g(x+iy) e^{2\pi n(x+iy)}\, \mathrm{d}x$$

pour tout $n > 0$ et tout $y > 0$. [Indication : en posant $\mathrm{T} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on pourra considérer $\left(f \underset{k}{|} \mathrm{MT}\right)$ et montrer que $\mathrm{MT} \in \Gamma_0(4)$.]

ii) Montrer que si M n'est pas une puissance de T, on a $\mathrm{I}m\,\mathrm{M}z \to 0$ lorsque $\mathrm{I}m\, z \to +\infty$.

c) Montrer que f est une forme modulaire de poids k et de niveau 4.

2) On note $\mathcal{M}_k(4)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des formes modulaires de poids k et de niveau 4. Le but de cette question est de majorer la dimension de cet espace. On choisit un système de représentants $(\mathrm{M}_i)_{1\leq i\leq 6}$ de $\Gamma_0(4)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\mathrm{M}_1 = \mathrm{I}$.
   a) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $i \in \{1,\ldots,6\}$, il existe un unique $j \in \{1,\ldots,6\}$ tel que $\mathrm{M}_i\mathrm{M} \in \Gamma_0(4)\mathrm{M}_j$.
   b) Pour toute forme modulaire f de poids k et niveau 4, montrer que la fonction
   $$\mathrm{F} = \prod_{i=1}^{6}\left(f \underset{k}{|} \mathrm{M}_i\right)$$
   est modulaire de poids $6k$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
   c) On note $\mathcal{F}$ un domaine fondamental de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\mathring{\mathcal{F}}$ son intérieur. Soit $a \in \mathring{\mathcal{F}}$. On suppose que a est un zéro d'ordre v de f. Montrer que a est un zéro d'ordre au moins v de F.
   d) On suppose que $\dim \mathcal{M}_k(4) \geq 2 + \dfrac{k}{2}$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{M}_k(4)$ s'annulant en a à l'ordre au moins $1 + \dfrac{k}{2}$.
   e) Montrer que $\dim \mathcal{M}_k(4) \leq 1 + \dfrac{k}{2}$.

IV) La fonction ϑ.
On définit les fonctions θ et ϑ par
$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n^2 z} \quad \text{et} \quad \vartheta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}.$$

1) L'objectif de cette question est de démontrer la formule de Poisson. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout compact et définit donc une fonction notée F.
   a) Pour tout m, montrer que $\widehat{\mathrm{F}}(m) = \widehat{f}(m)$.
   b) En déduire
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

2) L'objectif de cette question est d'établir une équation fonctionnelle pour ϑ.
   a) Soit $t > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, établir que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi n x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi n^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\,\mathrm{d}u.$$
   b) Soit $t > 0$, montrer que
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t}.$$

c) En déduire que

$$\vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\vartheta(z)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$.

3) Le but de cette question est de montrer que θ^4 est modulaire de poids 2 et niveau 4.

a) Soit $\mathrm{M} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\vartheta$. Montrer que si a et d sont impairs et b et c sont pairs alors

$$\vartheta(\mathrm{M}z)^4 = (cz+d)^2\vartheta(z)^4.$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. [Indication : on pourra écrire $\mathrm{M} = \pm \mathrm{T}^{2a_0}\mathrm{S}\mathrm{T}^{2a_1}\cdots\mathrm{S}\mathrm{T}^{2a_n}$ et montrer que n est pair.]

b) Soit $\mathrm{M} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{M}' \in \Gamma_\vartheta$ telle que

i) $\lambda_2(\mathrm{M}') = \mathrm{I}$

ii) $2(\mathrm{M}z) = \mathrm{M}'(2z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}$.

c) Montrer que $\theta^4 \in \mathcal{M}_2(4)$.

V) Le théorème des quatre carrés.

1) On définit sur $\mathcal{H}$ une fonction Φ en posant

$$\Phi(z) = \frac{4}{3}\mathrm{E}_2(4z) - \frac{1}{3}\mathrm{E}_2(z)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. Montrer que $\Phi \in \mathcal{M}_2(4)$.

2) Montrer que M2(4) est de dimension 2.

3) En déduire que

$$\#\{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 :\ n = a^2+b^2+c^2+d^2\} = 8 \sum_{\substack{d \mid n \\ d \not\equiv 0 \pmod 4}} d.$$

D.4 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique

Soit ∂ une dérivation sur $\mathcal{M}_*$, homogène de degré 2. C'est donc un endomorphisme linéaire de $\mathcal{M}_*$ vérifiant $\partial(fg) = \partial(f)g + f\partial(g)$ pour tous f et g dans $\mathcal{M}_*$ et

$$\partial\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+2}$$

pour tout entier $k \geq 0$.

On fixe $\phi_2 \in \mathcal{M}_2^{\leq 1}$ non nulle et $\Phi_4 \in \mathcal{M}_4$ et, pour tout $f \in \mathcal{M}_k$ on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \partial f + k\phi_2 f \\ \mathrm{d}\phi_2 &= \Phi_4 + \phi_2^2. \end{aligned}$$

1) a) Montrer que d définit une dérivation homogène de degré 2 sur $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$.

Pour toutes $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ et $f \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$, on pose

$$[f,g]_{\mathrm{d},n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r}\binom{\ell+n-1}{r} \mathrm{d}^r f\, \mathrm{d}^{n-r} g.$$

On suppose $k > 0$ et $\ell > 0$.

b) Montrer que dans l'anneau des séries formelles $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{[f,g]_{\mathrm{d},n}}{(n+k-1)!(n+\ell-1)!} \mathrm{X}^n = \widetilde{f}(-\mathrm{X})\widetilde{g}(\mathrm{X})$$

avec $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ deux séries formelles que l'on déterminera.

On définit deux suites $(f_r)_{r\geq 0}$ et $(g_r)_{r\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$ en posant

$$e^{-\phi_2 \mathrm{X}}\widetilde{f}(\mathrm{X}) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{f_r}{r!(r+k-1)!}\mathrm{X}^r \quad \text{et} \quad e^{-\phi_2 \mathrm{X}}\widetilde{g}(\mathrm{X}) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{g_r}{r!(r+\ell-1)!}\mathrm{X}^r.$$

c) Pour tout $r \geq 0$, donner une expression de f_r en fonction de $(\mathrm{d}^j f)_{0\leq j\leq r}$ et en déduire que $f_r \in \mathcal{M}_{k+2r}^{\leq\infty}$.

d) Par récurrence, montrer que pour tout $r \geq 0$, on a

$$\begin{cases} f_r \in \mathcal{M}_{k+2r} \\ \partial f_r = f_{r+1} - r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \end{cases}$$

(en posant $rf_{r-1} = 0$ si $r = 0$).

e) Que vaut $[f,g]_{\mathrm{d},n}$ en fonction de $(f_r)_{r\geq 0}$ et $(g_r)_{r\geq 0}$?

2) Si $f \in \mathcal{M}_k$ et $g \in \mathcal{M}_\ell$ avec $k, \ell > 0$, on pose

$$[f,g]_{\partial,\Phi_4,n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r}\binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r}$$

où $(f_r)_{r\geq 0}$ et $(g_r)_{r\geq 0}$ sont définies par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_0 = g \\ g_{r+1} = \partial g_r + r(r+\ell-1)\Phi_4 g_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

(en posant $r f_{r-1} = 0$ et $r g_{r-1} = 0$ si $r = 0$). Montrer que $[f,g]_{\partial,\Phi_4,n} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$ et relier $[f,g]_{\partial,\Phi_4,n}$ à $[f,g]_{\mathrm{d},n}$.

3) Si $f \in \mathcal{M}_k$ et $g \in \mathcal{M}_\ell$, on rappelle que le n^{e} crochet de Rankin-Cohen de f et g est défini par

$$[f,g]_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r}\binom{n+\ell-1}{r} \mathrm{D}^r f \, \mathrm{D}^{n-r} g.$$

Déduire de ce qui précède une expression de $[f,g]_n$ puis

$$[\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_\ell]_n \subset \mathcal{M}_{k+\ell+2n}.$$

Sources – [45], [41].

Annexe E

Corrigés des problèmes

E.1 Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction ζ de Riemann

I) Polynômes de Bernoulli.

1) Appelons b_0 le polynôme défini par $b_0(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \geq 1$, on note $\mathrm{H}(k)$ l'hypothèse : il existe une unique suite de fonctions C^1 notées $b_1, \ldots, b_k$ vérifiant $b_n' = nb_{n-1}$ et $\int_0^1 b_n = 0$ pour tout n tel que $1 \leq n \leq k$; de plus, ces fonctions sont des polynômes. On a $b_1' = b_0$ si et seulement si $b_1(t) = t + b_1(0)$ et l'hypothèse supplémentaire $\int_0^1 b_1 = 0$ est satisfaite si et seulement si $b_1(0) = -\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$. L'hypothèse $\mathrm{H}(1)$ est donc satisfaite. Soit $k \geq 1$ tel que l'hypothèse $\mathrm{H}(k)$ est satisfaite. On a $b_{k+1}' = (k+1)b_k$ si et seulement si

$$b_{k+1}(t) = b_{k+1}(0) + (k+1)\int_0^t b_k \tag{E.1}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'hypothèse supplémentaire $\int_0^1 b_{k+1} = 0$ est alors satisfaite si et seulement si

$$0 = b_{k+1}(0) + (k+1)\int_{t=0}^1 \int_{x=0}^t b_k(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = b_{k+1}(0) + (k+1)\int_0^1 (1-x)b_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction b_{k+1} est donc définie de façon unique par

$$\begin{aligned} b_{k+1}(t) &= (k+1)\int_0^t b_k - (k+1)\int_0^1 (1-x)b_k(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (k+1)\int_0^t b_k + (k+1)\int_0^1 x b_k(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{E.2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et c'est un polynôme. L'hyopthèse H(0) est vraie et pour tout $k \geq 1$, si l'hypothèse H(k) est vraie alors l'hypothèse H($k+1$) est vraie. Par récurrence, on en déduit qu'il existe une unique suite de fonctions C^1 notée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $b_n' = nb_{n-1}$ et $\int_0^1 b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Enfin, ces fonctions sont toutes des polynômes.

2) On définit une suite de polynômes $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\beta_n(t) = (-1)^n b_n(1-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors $\beta_0 = 1$. De plus, $\beta_n'(t) = (-1)^{n+1} b_n'(1-t)$ et donc $\beta_n'(t) = (-1)^{n+1} n b_{n-1}(1-t) = n\beta_{n-1}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Enfin,

$$\int_0^1 \beta_n = (-1)^n \int_0^1 b_n(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 b_n(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

Par unicité de la suite de polynôme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc $\beta_n = b_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Grâce à (E.1) avec $t = 1$, on a

$$b_{k+1}(1) = b_{k+1}(0) + (k+1)\int_0^1 b_k = b_{k+1}(0)$$

dès que $k \geq 1$. De plus, $b_0(1) = 1 = b_0(0)$. Ainsi a-t-on $b_k(1) = B_k$ pour tout $k \in \mathbb{N} - \{1\}$. D'autre part, si $k \geq 0$, $b_{2k+1}(1-t) = -b_{2k+1}(t)$ donc $b_{2k+1}(1) = -b_{2k}(0)$. Si $k \geq 1$, il résulte que $B_{2k+1} = b_{2k+1}(0) = 0$.

II) Une intégrale.

1) On a

$$I(0,m) = \int_0^1 \cos(\pi m t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \dfrac{1}{m}(\sin(\pi m) - \sin 0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $m \geq 1$ et $k \geq 1$, une intégration par parties conduit à

$$I(k,m) = -\frac{1}{\pi m}\int_0^1 b_{2k}'(t)\sin(\pi m t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2k}{\pi m}\int_0^1 b_{2k-1}(t)\sin(\pi m t)\,\mathrm{d}t.$$

Une nouvelle intégration par partie donne

$$I(k,m) = \frac{2k}{(\pi m)^2}[(-1)^m b_{2k-1}(1) - b_{2k-1}(0)] - \frac{2k}{(\pi m)^2}\int_0^1 b_{2k-1}'(t)\cos(\pi m t)\,\mathrm{d}t.$$

et donc

$$I(k,m) = \frac{2k}{(\pi m)^2}[(-1)^m b_{2k-1}(1) - b_{2k-1}(0)] - \frac{2k(2k-1)}{(\pi m)^2}\int_0^1 b_{2k-2}(t)\cos(\pi m t)\,\mathrm{d}t. \tag{E.3}$$

Si $k = 1$, on a donc

$$\mathrm{I}(1,m) = \frac{1}{(\pi m)^2}[(-1)^m + 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{(\pi m)^2} & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases} \tag{E.4}$$

Si $k \geq 2$, alors $b_{2k-1}(1) = b_{2k-1}(0) = 0$ et l'équation (E.3) se réécrit

$$\mathrm{I}(k,m) = -\frac{2k(2k-1)}{(\pi m)^2}\mathrm{I}(k-1,m).$$

Par récurrence, on en tire

$$\mathrm{I}(k,m) = (-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2(\pi m)^{2k-2}}\mathrm{I}(1,m).$$

On en déduit

$$\mathrm{I}(k,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ est impair} \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(\pi m)^{2k}} & \text{si } m \geq 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

grâce à (E.4).

2) On calcule

$$\mathrm{I}_k^*(m) = \mathrm{I}(k,m) - \mathrm{B}_k \int_0^1 \cos(\pi m t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\mathrm{I}_k^*(m) = \mathrm{I}(k,m)$ si $m \geq 1$. Compte-tenu de la question précédente, on a

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathrm{I}_k^*(m) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{\pi^{2k}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k).$$

III) Calcul de $\zeta(2k)$.

1) La relation $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ implique

$$\cos(mx) = \frac{\sin\left(\dfrac{2m+1}{2}x\right) - \sin\left(\dfrac{2m-1}{2}x\right)}{2\sin\dfrac{x}{2}} \tag{E.5}$$

pour tous $m \in \mathbb{Z}$ et $x \in]0,\pi]$. Un développement limité du membre de droite en 0 montre que ce membre de doite est $1 + o(x)$. On peut donc prolonger le membre de droite par continuité en 0 en le définissant comme valant 1 en 0. Comme $1 = \cos(m \cdot 0)$, l'égalité (E.5) reste valable pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $x = 0$.

2) On sait que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{m=1}^{N} I_k^*(m)$$

et

$$I_k^*(m) = \int_0^1 b_{2k}^*(t)\cdot\frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi t\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi t\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2}}\,dt.$$

Comme pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^*$ on a

$$\frac{\sin\left(\ell\frac{\pi t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \sim \ell$$

au voisinage de 0, on peut scinder l'intégrale précédente en deux intégrales convergentes

$$I_k^*(m) = I_*(k,m) - I_*(k,m-1)$$

avec

$$I_*(k,m) = \int_0^1 b_{2k}^*(t)\frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi t\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2}}\,dt.$$

On en tire

$$\sum_{m=1}^{N} I_k^*(m) = I_*(k,N) - I_*(k,0) = I_*(k,N) - \frac{1}{2}\int_0^1 b_{2k}^*.$$

Puisque qu'on a montré que la somme de terme général $(I_k^*(m))_{m\geq 1}$ converge, le membre de droite converge et

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{+\infty} I_k^*(m) = \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 b_{2k}^*(t)\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\pi t\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2}}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 b_{2k}^*.$$

3) La fonction f est C^1 sur $]0,1]$ de dérivée

$$f'(t) = \frac{4kb_{2k-1}(t)\sin\frac{\pi t}{2} - \pi b_{2k}^*(t)\cos\frac{\pi t}{2}}{4\sin^2\frac{\pi t}{2}}.$$

Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}&4kb_{2k-1}(t)\sin\frac{\pi t}{2} - \pi b_{2k}^*(t)\cos\frac{\pi t}{2}\\ &\qquad = [2k\pi B_{2k-1} - \pi b_{2k}'(0)]t + \left[2k\pi b_{2k-1}'(0) - \frac{\pi}{2}b_{2k}''(0)\right]t^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

Or $b'_{2k}(0) = 2kb_{2k-1}(0) = 2k\mathrm{B}_{2k-1}$ et $b''_{2k}(0) = 2kb'_{2k-1}(0) = 2k(2k-1)\mathrm{B}_{2k-2}$ donc

$$4kb_{2k-1}(t)\sin\frac{\pi t}{2} - \pi b^*_{2k}(t)\cos\frac{\pi t}{2} = \pi k(2k-1)\mathrm{B}_{2k-2}\mathrm{B}_{2k-2}t^2 + o(t^2).$$

On a donc

$$f'(t) = \frac{2k(2k-1)}{\pi}\mathrm{B}_{2k-2} + o(1). \tag{E.6}$$

Montrons que f est prolongeable par continuité en une fonction C^1 sur $[0,1]$. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} b^*_{2k}(t) = b_{2k}(t) - b_{2k}(0) &= b'_{2k}(0)t + \frac{b''_{2k}(0)}{2}t^2 + o(t^2) \\ &= 2kb_{2k-1}(0)t + 2k(2k-1)b_{2k-2}(0)t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

On en déduit, toujours au voisinage de 0 le développement limité

$$f(t) = \frac{2k}{\pi}\mathrm{B}_{2k-1} + \frac{2k(2k-1)}{\pi}\mathrm{B}_{2k-2}t + o(t)$$

Ainsi, f est prolongeable en une fonction dérivable (toujours notée f) vérifiant $f(0) = \mathrm{B}_{2k-1}$ (quantité nulle dès que $k \geq 2$) et $f'(0) = \dfrac{2k(2k-1)}{\pi}\mathrm{B}_{2k-2}$. Grâce à (E.6), la fonction f' a pour limite $f'(0)$ en 0 et donc f est C^1.
Si $\mathrm{R} \neq 0$, on peut donc intégrer par partie l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\sin(\mathrm{R}t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{R}}\cos(\mathrm{R})f(1) + \frac{1}{\mathrm{R}}f(0) + \frac{1}{\mathrm{R}}\int_0^1 f'(t)\cos(\mathrm{R}t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui conduit à

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(\mathrm{R}t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\mathrm{R}}\left(2\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$$

où $\|\ \|_\infty$ désigne la norme infinie sur $[0,1]$. On en déduit

$$\lim_{\mathrm{R}\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\mathrm{R}t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4) On a montré que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{2\mathrm{N}+1}{2}\pi t\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 b^*_{2k}.$$

Grâce à la question précedente, on a donc

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = -\frac{1}{2}\int_0^1 b^*_{2k} = \frac{\mathrm{B}_{2k}}{2}.$$

On en tire

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}\mathrm{B}_{2k}.$$

IV) Une méthode d'analyse complexe.

1) On note $\| \ \|_\infty$ la norme infinie sur $[0,1]$. Grâce à (E.2), on a $\|b_m\|_\infty \leq 2m\|b_{m-1}\|_\infty$ dès que $m \geq 2$ et donc $\|b_m\|_\infty \leq 2^{m-3}m!\|b_2\|_\infty \leq 2^m m!$. On en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} z^m$$

de fonctions de z est normalement convergente sur tout compact du disque ouvert D de centre 0 et de rayon 1/2 et que, pour tout z dans D, cette série de fonctions de x est normalement convergente sur $[0,1]$.

Première méthode – La fonction $z \mapsto \dfrac{ze^{zx}}{e^z - 1}$ étant holomorphe sur la couronne $\{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z| < 2\pi\}$, elle admet un développement de Laurent autour de 0 donné par

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

où, quelque soit $\mathrm{R} \in]0,\pi[$, le réel $f_n(x)$ est défini par

$$f_n(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z|=\mathrm{R}} \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} = \frac{\mathrm{R}^{1-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{x\mathrm{R}e^{i\theta}}}{e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1} e^{i(1-n)\theta} \,\mathrm{d}\theta \tag{E.7}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La singularité en 0 est effaçable (la fonction est prolongeable par continuité en 0) de sorte que $f_n = 0$ si $n > 0$. Pour tout réel $\mathrm{K} > 0$ et pour tout $x \in [-\mathrm{K},\mathrm{K}]$, on a

$$\left| \frac{e^{x\mathrm{R}e^{i\theta}}}{e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1} e^{i(1-n)\theta} \right| \leq \frac{e^{\mathrm{KR}|\cos\theta|}}{\left|e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1\right|} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{KR}|\cos\theta|}}{\left|e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1\right|} < \infty.$$

On en déduit que f_n est dérivable (sur $[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$ et donc sur $\mathbb{R}$) de dérivée

$$f_n'(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z|=\mathrm{R}} \frac{z^2e^{zx}}{e^z - 1} \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} = \frac{\mathrm{R}^{2-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{x\mathrm{R}e^{i\theta}}}{e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1} e^{i(2-n)\theta} \,\mathrm{d}\theta \tag{E.8}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Enfin, pour tout réel $\mathrm{K} > 0$ et pour tout $x \in [-\mathrm{K},\mathrm{K}]$, on a

$$\left| \frac{e^{x\mathrm{R}e^{i\theta}}}{e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1} e^{i(2-n)\theta} \right| \leq \frac{e^{\mathrm{KR}|\cos\theta|}}{\left|e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1\right|} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{KR}|\cos\theta|}}{\left|e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1\right|} < \infty$$

donc $f'n$ est continue sur $[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$ et donc sur R. Les fonctions f_n sont donc C^1. De plus, grâce à (E.7), on a $f_0 = 1$ et grâce à (E.8) on a $f_n' = nf_{n-1}$ si $n \geq 1$. Enfin, en écrivant $x\mathrm{R}\cos\theta < \mathrm{R}$ pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=0}^{1} \left| \frac{e^{x\mathrm{R}e^{i\theta}}}{e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1} e^{i(1-n)\theta} \right| \mathrm{d}x \,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{\mathrm{R}}}{e^{\mathrm{R}e^{i\theta}} - 1} \right| \mathrm{d}\theta < \infty$$

de sorte que

$$\int_0^1 f_n = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|z|=\mathrm{R}} \frac{z}{e^z-1}\left(\int_{x=0}^1 e^{zx}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|z|=\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} = 0$$

si $n \neq 0$. On déduit alors de la première question du problème que $f_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$ de sorte que

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Deuxième méthode – Fixons $z \in \mathrm{D}$ et posons

$$\mathrm{A}(x) = (e^z-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n(x)}{n!}z^n.$$

On a

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\ell-1}\frac{b_n(x)}{(\ell-n)!n!}\right)z^\ell = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\ell-1}\binom{\ell}{n}b_n(x)\right)\frac{z^\ell}{\ell!} = z\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\ell}\frac{1}{\ell+1}\binom{\ell+1}{n}b_n(x)\right)\frac{z^\ell}{\ell!}.$$

Étudions les polynômes

$$\mathrm{S}_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell}\frac{1}{\ell+1}\binom{\ell+1}{n}b_n(x).$$

Si $\ell \geq 1$, on a

$$\mathrm{S}_\ell'(x) = \sum_{n=1}^{\ell}\frac{1}{\ell+1}\binom{\ell+1}{n}nb_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{\ell-1}\frac{n+1}{\ell+1}\binom{\ell+1}{n+1}b_n(x) = \sum_{n=0}^{\ell-1}\binom{\ell}{n}b_n(x)$$

et donc $\mathrm{S}_\ell'(x) = \ell\mathrm{S}_{\ell-1}(x)$. Par ailleurs, $\mathrm{S}_0 = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{S}_\ell = 1$. Si on définit $\mathrm{T}_\ell(x) = x^\ell$, on a aussi $\mathrm{T}_\ell'(x) = \ell\mathrm{T}_{\ell-1}(x)$ puis $\mathrm{T}_0 = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{T}_\ell = 1$. On a donc

$$\begin{cases} \mathrm{S}_0 - \mathrm{T}_0 = 0, \\ (\mathrm{S}_k - \mathrm{T}_k)' = k(\mathrm{S}_{k-1} - \mathrm{T}_{k-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \displaystyle\int_0^1 (\mathrm{S}_k - \mathrm{T}_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En raisonnant comme dans la premièe question du problème, on a donc $\mathrm{S}_k - \mathrm{T}_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Finalement

$$\mathrm{A}(x) = z\sum_{\ell=0}^{+\infty}x^\ell\frac{z^\ell}{\ell!} = ze^{xz}$$

et donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}$$
pour tout $x \in [0,1]$ et tout $z \in \mathrm{D}$. L'expression de droite fournit un prolongement holomorphe de la fonction de z de gauche sur $\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$.

2) Fixons $x \in [0,1]$. La fonction $z \mapsto \dfrac{e^{xz}}{(e^z-1)z^{2r}}$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$ qui ne s'annule pas sur le cercle C_k de centre 0 et rayon $(2k+1)\pi$. Le théorème des résidus permet donc d'écrire
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}_k} f_{2r}(x,z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\substack{\rho \in 2i\pi\mathbb{Z} \\ |\rho| < (2k+1)\pi}} \mathrm{Res}_{z=\rho} f_{2r}(x,z).$$
En $\rho \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, la fonction $z \mapsto f_{2r}(x,z)$ a un pôle simple de résidus $\dfrac{e^{2i\pi m x}}{(2i\pi m)^{2r}}$. Évaluons le résidu en 0. C'est le coefficient de $\dfrac{1}{z}$ dans le développement de Laurent de $f_{2r}(x,z)$ autour de $z = 0$, c'est donc le coefficient de z^{2r-1} dans le développement en série entière de $\dfrac{e^{zx}}{e^z-1}$ autour de $z = 0$. C'est donc encore le coefficient de z^{2r} dans le développement en série entière de $\dfrac{ze^{zx}}{e^z-1}$ autour de $z = 0$. Grâce à la question précédente, le résidus de $z \mapsto f_{2r}(x,z)$ en 0 est donc $\dfrac{b_{2r}(x)}{(2r)!}$. Ainsi,
$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}_k} f_{2r}(x,z)\,\mathrm{d}z &= \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^* \\ |2i\pi m| < (2k+1)\pi}} \frac{e^{2i\pi m x}}{(2i\pi m)^{2r}} \\ &= \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^* \\ |m| < k}} \frac{e^{2i\pi m x}}{(2i\pi m)^{2r}} \end{aligned}$$

3) Si $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$, alors
$$\begin{aligned} |e^z - 1|^2 &= e^{2\mathrm{R}\cos\theta} - 2e^{\mathrm{R}\cos\theta}\cos(\mathrm{R}\sin\theta) + 1 \\ &= (e^{\mathrm{R}\cos\theta} - 1)^2 + 2e^{\mathrm{R}\cos\theta}(1 - \cos(\mathrm{R}\sin\theta)) \end{aligned} \tag{E.9}$$
donc
$$|e^z - 1| \geq \left| e^{\mathrm{R}\cos\theta} - 1 \right|.$$
Si $x \geq 0$ alors $|e^x - 1| \geq x$. Si $x \leq -\ln(2)$ alors $|e^x - 1| \geq \dfrac{1}{2}$. On a donc $|e^x - 1| \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$. En particulier, $|e^z - 1| \geq \dfrac{1}{2}$ si $\mathrm{R}|\cos\theta| \geq 1$. Si

$\mathrm{R}|\cos\theta| \leq 1$ alors
$$\mathrm{R}\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{R}^2}} \leq \mathrm{R}|\sin\theta| \leq \mathrm{R}.$$
Or, $\mathrm{R} = (2k+1)\pi$ donc $0 < \frac{1}{\mathrm{R}} \leq \frac{1}{\pi}$. Si $x \in \left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ alors $\sqrt{1-x^2} \geq 1 - \frac{\pi}{3}x$ d'où
$$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \leq \mathrm{R}|\sin\theta| \leq (2k+1)\pi.$$
On en déduit que $\cos(\mathrm{R}\sin\theta) \leq -\frac{1}{2}$. Par (E.9), on a donc
$$|e^z - 1|^2 \geq 2e^{\mathrm{R}\cos\theta}(1-\cos(\mathrm{R}\sin\theta)) \geq 3e^{\mathrm{R}\cos\theta} \geq \frac{3}{e} \geq 1$$
et donc $|e^z - 1| \geq 1$. Finalement, on a
$$|e^z - 1| \geq \frac{1}{2}$$
pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

4) Si $\mathrm{R}\cos\theta \leq 0$ alors
$$\left|\frac{e^{xz}}{(e^z-1)z^{2r}}\right| = \frac{e^{x\mathrm{R}\cos\theta}}{|e^z-1|\mathrm{R}^{2r}} \leq \frac{2}{\mathrm{R}^{2r}}.$$
Si $\mathrm{R}\cos\theta \geq 0$, on a $x \in [0,1]$ et on écrit
$$\frac{e^{xz}}{e^z-1} = e^{(x-1)z}\left(1 + \frac{1}{e^z-1}\right)$$
pour obtenir
$$\left|\frac{e^{xz}}{e^z-1}\right| \leq e^{(x-1)\mathrm{R}\cos\theta}\left(1+\frac{1}{|e^z-1|}\right) \leq 3$$
puis
$$\left|\frac{e^{xz}}{(e^z-1)z^{2r}}\right| \leq \frac{3}{\mathrm{R}^{2r}}.$$
On a donc
$$|f_{2r}(x,z)| \leq \frac{3}{\mathrm{R}^{2r}}$$
pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

5) On réécrit
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}(0,(2k+1)\pi)} f_{2r}(x,z)\,\mathrm{d}z = \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ 1\leq|m|\leq k}} \frac{e^{2i\pi mx}}{(2i\pi m)^{2r}}$$
en
$$\mathrm{J}_k = \frac{(2k+1)}{2}\int_0^{2\pi} f_{2r}\left(x,(2k+1)\pi e^{i\theta}\right)e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + 2\frac{(-1)^r}{(2\pi)^{2r}}\sum_{m=1}^{k}\frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}}.$$

On a

$$|J_k| \leq \frac{3\pi(2k+1)}{((2k+1)\pi)^{2r}}$$

et donc J_k tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. On a déduit

$$b_{2r}(x) = 2(2r)!\frac{(-1)^{r-1}}{(2\pi)^{2r}}\sum_{m=1}^{k}\frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}}. \tag{E.10}$$

pour tout $x \in [0,1]$. C'est le développement en série de Fourier de la fonction 1-périodique qui coïncide avec b_{2r} sur $[0,1]$.

6) En choisissant $x = 0$ dans (E.10), on trouve

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m^{2r}} = (-1)^{r-1}\frac{(2\pi)^{2r}}{2(2r)!}B_{2r}.$$

E.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux.

I) 1) Pour tout $z \in \mathcal{H}$, tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| = e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z - 2\pi n \operatorname{Im} w} \leq e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z + 2\pi |n| \cdot |\operatorname{Im} w|}. \tag{E.11}$$

On fixe $z \in \mathcal{H}$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. La fonction $w \mapsto |\operatorname{Im} w|$ est continue donc bornée sur K. Il existe donc $\mathrm{M} \geq 0$ tel que

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z + \pi |n| \mathrm{M}}.$$

Pour $|n| \geq (\mathrm{M}+1)/\operatorname{Im} z$, on a donc

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi |n|}.$$

On en déduit que les séries

$$w \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \quad \text{et} \quad w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

convergent normalement sur K puis que la série

$$w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit donc une fonction entière.

2) On fixe $w \in \mathbb{C}$. Soit K un compact de $\mathcal{H}$. La fonction $z \mapsto \operatorname{Im} z$ est continue sur K. Il existe donc $\mathrm{M} > 0$ tel que $\operatorname{Im} z \geq \mathrm{M}$ pour tout $z \in \mathrm{K}$. Par (E.11) on a donc

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi \mathrm{M} n^2 + 2\pi |n| \cdot |\operatorname{Im} w|}.$$

Pour $|n| \geq (1 + 2|\operatorname{Im} w|)/\mathrm{M}$, on a donc

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi |n|}.$$

On en déduit que les séries

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \quad \text{et} \quad z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

convergent normalement sur K puis que la série

$$z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathcal{H}$ et définit donc une fonction entière.

3) La démarche est semblable pour

$$(z,w) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}.$$

Pour tout $z \in \mathcal{H}$, tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left|e^{i\pi z(n+w)^2}\right| = e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} e^{-\pi\left(2n \operatorname{Im}(zw) + \operatorname{Im}(zw^2)\right)} \leq e^{-\pi n^2 y} e^{\pi|n|\left(2|\operatorname{Im}(zw)| + \left|\operatorname{Im}(zw^2)\right|\right)}.$$

On fixe $z = x + iy \in \mathcal{H}$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K} & \to & \mathbb{R} \\ w & \mapsto & 2|\mathrm{I}m(zw)| + \left|\mathrm{I}m(zw^2)\right| \end{array}$$

est continue donc bornée. Il existe donc $\mathrm{M} \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $w \in \mathrm{K}$, on a

$$\left|e^{i\pi z(n+w)^2}\right| \leq e^{-\pi n^2 y + \pi|n|\mathrm{M}}.$$

Pour $|n| \geq (1+\mathrm{M})/y$, on a donc $\left|e^{i\pi z(n+w)^2}\right| \leq e^{-\pi|n|}$. On en déduit que les séries

$$w \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2} \quad \text{et} \quad w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

convergent normalement sur K puis que la série

$$w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit donc une fonction entière.

On fixe $w \in \mathbb{C}$. Soit K un compact de $\mathcal{H}$. Les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & 2|\mathrm{I}m(zw)| + \left|\mathrm{I}m(zw^2)\right| \end{array}$$

et la fonction Im restreinte à K sont continues donc bornées, et en particulier Im est minorée par une constante non nulle. Il existe donc $\mathrm{M} > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathrm{K}$, on a

$$\left|e^{i\pi z(n+w)^2}\right| \leq e^{-\pi \mathrm{M} n^2 + \pi|n|\mathrm{M}}.$$

Pour $|n| \geq (1+\mathrm{M})/\mathrm{M}$, on a donc $\left|e^{i\pi z(n+w)^2}\right| \leq e^{-\pi|n|}$. On en déduit que les séries

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2} \quad \text{et} \quad z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

convergent normalement sur K puis que la série

$$z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathcal{H}$ et définit donc une fonction entière.

4) Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $3n^2 + n \geq |n|$. On en déduit

$$\left|(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right| \leq e^{-\pi|n|\cdot \mathrm{Im}\, z}.$$

Soit K un compact de $\mathcal{H}$. Il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\mathrm{I}m\, z \geq \mathrm{M}$ pour tout $z \in \mathrm{K}$ et donc

$$\left|(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right| \leq e^{-\pi \mathrm{M}|n|}.$$

On en déduit la convergence normale de

$$z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}$$

sur K. Cette série définit donc une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$.

II) 1) La fonction f est entière et 1-périodique. Elle admet donc un développement de Fourier

$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{2i\pi m w}$$

avec

$$a_m = \int_0^1 f(w) e^{-2i\pi m w}\, \mathrm{d}u \quad (w = u + iv)$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$a_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{i\pi z(n+w)^2 - 2i\pi m w}\, \mathrm{d}u \tag{E.12}$$

l'interversion sera justifiée en (E.13). Par changement de variable $w \leftarrow w + n$, on trouve

$$a_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{i\pi(zw-2m)w}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(zw-2m)w}\, \mathrm{d}u.$$

2) On écrit

$$e^{i\pi(zw-2m)w} = e^{i\pi z\left[(w-m/z)^2 - m^2/z^2\right]}$$

pour obtenir

$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(w-m/z)^2}\, \mathrm{d}u.$$

On choisit $v = \mathrm{Im}\, \dfrac{m}{z}$ et on obtient

$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(u - m\,\mathrm{Re}(1/z))^2}\, \mathrm{d}u = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2}\, \mathrm{d}x. \qquad \text{(E.13)}$$

Cette intégrale est finie, cela justifie l'interversion faite en (E.12).

3) Si $z \in i\mathbb{R}^{+*}$, on écrit $z = iy$ et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{y}} = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2}.$$

Fixons un compact de $\mathcal{H}$. Si z est dans ce compact, alors $\mathrm{Im}\, z$ est minorée par une constante non nulle. La fonction

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2}\, \mathrm{d}x \qquad \text{(E.14)}$$

est donc holomorphe sur $\mathcal{H}$. La fonction $z \mapsto (z/i)^{-1/2}$ étant aussi holomorphe sur $\mathcal{H}$, on obtient par prolongement analytique de (E.14) l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2}\, \mathrm{d}x = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2}$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$. On a alors

$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2}.$$

Ainsi,

$$f(w) = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi m^2(-1/z)} e^{2i\pi m w}$$

puis

$$\sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi m^2(-1/z) + 2i\pi m w}$$

qui est la formule de transformation theta de Jacobi.

III) 1) On a

$$\vartheta_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n^2} e^{i\pi n^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi n^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n/2} = \vartheta\left(z, \frac{1}{2}\right).$$

2) On a

$$\vartheta_0(z+2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} e^{2i\pi n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} = \vartheta_0(z)$$

et donc
$$\vartheta_1(z+1) = \vartheta_0(z).$$
Ensuite
$$\vartheta_2(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n^2+n+1/4)} e^{i\pi(n+1/2)^2 z} = e^{i\pi/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+1/2)^2 z}$$
et puisque n^2+n est pair,
$$\vartheta_2(z+1) = e^{i\pi/4}\vartheta_2(z).$$
Enfin,
$$\vartheta_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(-1/z)+2i\pi n/2} = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+1/2)^2 z}$$
par la relation de transformation theta de Jacobi, et donc
$$\vartheta_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta_2(z).$$
En changeant z en $-1/z$ dans cette égalité, on trouve
$$\sqrt{\frac{i}{z}}\vartheta_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta_1(z).$$

3) Soit $D(z) = (\vartheta_0(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z))^8$. On a
$$D(z+1) = (\vartheta_1(z)\vartheta_0(z)\vartheta_2(z))^8 (e^{i\pi/4})^8 = D(z)$$
et
$$D\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\vartheta_0\left(-\frac{1}{z}\right)\sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta_2(z)\left(\frac{i}{z}\right)^{-1/2}\vartheta_1(z)\right)^8.$$
En utilisant la relation de transformation theta avec $w = 0$ on a
$$\vartheta_0\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(-1/z)} = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta_0(z)$$
donc
$$D\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^4\left(\frac{z}{i}\right)^4\left(\frac{z}{i}\right)^4 (\vartheta_0(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z))^8$$
d'où
$$z^{-12}D\left(-\frac{1}{z}\right) = D(z).$$

La fonction D vérifie donc la relation de modularité de poids 12. Sur $\mathrm{I}m\,z \geq 1$, les fonctions ϑ_0, ϑ_1 et ϑ_2 sont bornées donc D est bornée. On en déduit que D est modulaire de poids 12. Elle admet donc un développement de Fourier

$$\mathrm{D}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e^{2i\pi n z}.$$

Enfin,

$$|\vartheta_2(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(n+1/2)^2\,\mathrm{I}m\,z}$$

donc ϑ_2 puis D tendent vers 0 quand $\mathrm{I}m\,z$ tend vers $+\infty$. On en déduit que D est parabolique ($d_0 = 0$). C'est donc un multiple de Δ.

4) On a $\Delta = \mathrm{C}(\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_2)^8$. On écrit

$$\vartheta_0(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z}$$

pour obtenir

$$\vartheta_0(z) = 1 + \mathrm{O}\left(e^{i\pi z}\right),$$

et

$$\vartheta_1(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\pi n^2} e^{i\pi n^2 z}$$

pour obtenir

$$\vartheta_1(z) = 1 + \mathrm{O}\left(e^{i\pi z}\right).$$

Enfin,

$$\vartheta_2(z) = e^{i\pi z/4}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{i\pi n(n-1)z} + e^{i\pi n(n+1)z}\right)\right)$$

donne

$$\vartheta_2(z) = 2e^{i\pi z/4} + \mathrm{O}\left(e^{9i\pi z/4}\right).$$

On a donc

$$(\vartheta_0(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z))^8 = 256e^{2i\pi z} + \mathrm{O}\left(e^{2i\pi z}\right).$$

Ainsi, $\mathrm{C} = 1/256$ et

$$\Delta = \frac{1}{256}(\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_2)^8.$$

IV) 1) On a

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(3z) + 2i\pi n(z+1)/2} = \vartheta\left(3z + \frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)$$

donc

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta\left(-\frac{3}{z}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}\right).$$

Par la formule de Jacobi, on trouve

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{z}\right) &= \sqrt{\frac{z}{3i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2z}\right)^2 \frac{z}{3}} = \sqrt{\frac{z}{3i}} \sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{4}\left(u-\frac{1}{z}\right)^2\frac{z}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{i\frac{\pi}{12z}} \sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z - i\frac{\pi}{6}u}. \end{aligned}$$

Le changement de variable $u \leftarrow -u$ implique

$$\sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z - i\frac{\pi}{6}u} = \sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z + i\frac{\pi}{6}u}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z - i\frac{\pi}{6}u} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z - i\frac{\pi}{6}u} + \sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z + i\frac{\pi}{6}u}\right) \\ &= \sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z} \cos\left(\frac{\pi}{6}u\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{i\frac{\pi}{12z}} \sum_{u\in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2 z} \cos\left(\frac{\pi}{6}u\right).$$

2) Puisque

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}u\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \equiv 3 \pmod 6 \\ (-1)^k \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } u = \pm 1 + 6k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

on trouve

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{3i}} \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{12z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi\frac{z}{12}(\pm 1+6k)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{i}} e^{i\frac{\pi}{12}(z+1/z)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2\pm k)z}.$$

Le changement de variable $k \leftarrow -k$ conduit à

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2-k)z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2+k)z}$$

et donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2\pm k)z} = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2+k)z}$$

puis

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} e^{i\frac{\pi}{12}(z+1/z)} g(z).$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'entier $3n^2+n = n(1+3n)$ est pari et donc $e^{i\pi(3n^2+n)} = 1$. Il en résulte que $g(z+1) = g(z)$ puis

$$e^{2i\pi(z+1)}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)(z+1)}\right)^{24} = e^{2i\pi z}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right)^{24}.$$

De

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}e^{i\frac{\pi}{12}(z+1/z)}g(z)$$

on tire

$$z^{-12}e^{2i\pi(-1/z)}g\left(-\frac{1}{z}\right)^{24} = e^{2i\pi z}g(z)^{24}.$$

La fonction $z \mapsto e^{2i\pi z}g(z)^{24}$ satisfait donc la relation de modularité de poids 12. Enfin, puisque $3n^2+n$ est toujours pair, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r(m)e^{2i\pi mz}$$

avec

$$r(m) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ 3n^2+n=2m}}(-1)^n.$$

Comme $3n^2+n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $r(m) = 0$ si $m < 0$ et donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} = \sum_{m=0}^{+\infty} r(m)e^{2i\pi mz}$$

puis

$$e^{2i\pi z}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right)^{24} = \sum_{m=1}^{+\infty} t(m)e^{2i\pi mz}$$

pour une fonction $t\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$. On en déduit que $z \mapsto e^{2i\pi z}g(z)^{24}$ est une forme parabolique de poids 12 et donc qu'il existe $\mathrm{D} > 0$ tel que

$$e^{2i\pi z}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right)^{24} = \mathrm{D}\Delta(z).$$

On a $r(0) = 0$ (puisque 0 est racine simple de $3\mathrm{X}^2+\mathrm{X}$) et donc

$$e^{2i\pi z}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right)^{24} = 1 + \mathrm{O}(e^{2i\pi z})$$

d'où $\mathrm{D} = 1$. Finalement,

$$e^{2i\pi z}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right)^{24} = \Delta(z).$$

4) Il résulte de la question précédente et du développement en produit de Δ que

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{2i\pi nz}\right)^{24}=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}\right)^{24}.$$

Il existe donc une racine vingt-quatrième de l'unité $\xi(z)$ telle que

$$\xi(z)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{2i\pi nz}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}.$$

Le produit de gauche ne s'annulant pas sur $\mathcal{H}$, la fonction ξ y est continue donc constante. En comparant le premier terme de chaque développement de Fourier, on trouve $\xi = 1$ puis

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{2i\pi nz}\right).$$

5) a) Pour tout entier $\mathrm{N}\geq 1$, on a

$$\prod_{n=1}^{\mathrm{N}}(1-q^n)=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\sum_{1\leq n_1<\ldots<n_k\leq \mathrm{N}}(-1)^k q^{n_1+\cdots+n_k}=\sum_d q^d\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\sum_{\substack{1\leq n_1<\ldots<n_k\leq \mathrm{N}\\ n_1+\cdots+n_k=d}}(-1)^k.$$

Ensuite

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\sum_{\substack{1\leq n_1<\ldots<n_k\\ n_1+\cdots+n_k=d}}(-1)^k=\sum_k\sum_{\substack{1\leq n_1<\ldots<n_k\\ n_1+\cdots+n_k=d}}(-1)^k=\mathrm{A}_d-\mathrm{B}_d$$

d'où

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)=\sum_{d=0}^{+\infty}(\mathrm{A}_d-\mathrm{B}_d)q^d.$$

b) On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{A}_n-\mathrm{B}_n)q^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)}$$

Pour tous entiers a et b, l'équation $a(3a+1)=b(3b+1)$ équivaut à $3(a^2-b^2)=b-a$ et n'a donc comme seule solution que $a=b$. On a donc $\mathrm{A}_n=\mathrm{B}_n=0$ sauf s'il existe $m\in\mathbb{Z}$, nécessairement unique, tel que $n=\dfrac{m(3m+1)}{2}$ auquel cas $\mathrm{A}_n-\mathrm{B}_n=(-1)^m$.

c) Pour construire un château à $n+1$ cartes, on construit un château à n cartes, on lui ajoute une base horizontale en utilisant n cartes puis on ajoute le nouvel étage à l'aide de $n+1$ pieds, soit $2(n+1)$ cartes. Si u_n est le nombre de cartes nécessaires pour construire un château de n cartes, on a donc

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3n + 2 \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

On a donc

$$u_n = \sum_{d=1}^{n} (u_d - u_{d-1}) = \sum_{d=1}^{n} (3d - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

E.3 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique

1) a) On a $\phi_2 \in \mathbb{C}^* \mathrm{E}_2$ donc $\mathcal{M}_* \leq \infty = \mathbb{C}[\phi_2, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_6]$. De plus, si $f \in \mathcal{M}_k \leq s$, alors

$$f = \sum_{j=0}^{s} \mathrm{F}_j \phi_2^j \quad \text{avec} \quad \mathrm{F}_j \in \mathcal{M}_{k-2j}.$$

On définit une application linéaire $\widetilde{\mathrm{d}}$ de $\mathcal{M}_k^{\leq\infty}$ dans $\mathcal{M}_{k+2}^{\leq\infty}$ en posant

$$\widetilde{\mathrm{d}} f = \sum_{j=0}^{s} \mathrm{d}(f)\phi_2^j + \sum_{j=1}^{s} j\mathrm{F}_j \phi_2^{j-1}\,\mathrm{d}\phi_2 \tag{E.15}$$

pour toute $f \in \mathcal{M}_k^{\leq\infty}$, et on étend par linéarité cette application en un endomorphisme linéaire de $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$. Montrons que c'est une dérivation de $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$. Soit

$$f = \sum_{j=0}^{s} \mathrm{F}_j \phi_2^j \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=0}^{t} \mathrm{G}_j \phi_2^j.$$

Si $j > s$ on pose $\mathrm{F}_j = 0$ et si $j > t$ on pose $\mathrm{G}_j = 0$. On a alors

$$fg = \sum_j \left(\sum_{a+b=j} \mathrm{F}_a \mathrm{G}_b \right) \phi_2^j \quad \text{et} \quad \sum_{a+b=j} \mathrm{F}_a \mathrm{G}_b \in \mathcal{M}_{k+\ell-2j}.$$

Ainsi,

$$\widetilde{\mathrm{d}}(fg) = \sum_j \mathrm{d}\left(\sum_{a+b=j} \mathrm{F}_a \mathrm{G}_b \right) \phi_2^j + \sum_j j \left(\sum_{a+b=j} \mathrm{F}_a \mathrm{G}_b \right) \phi_2^{j-1}\,\mathrm{d}\phi_2.$$

L'application d induit par linéarité une dérivation sur $\mathcal{M}_*$. On a donc

$$\widetilde{\mathrm{d}}(fg) = \sum_j \left(\sum_{a+b=j} \mathrm{d}(\mathrm{F}_a)\mathrm{G}_b + \mathrm{F}_a\,\mathrm{d}(\mathrm{G}_b) \right) \phi_2^j + \sum_j j \left(\sum_{a+b=j} \mathrm{F}_a \mathrm{G}_b \right) \phi_2^{j-1}\,\mathrm{d}\phi_2$$

ce qu'on réécrit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{d}}(fg) &= \sum_j \left(\sum_{a+b=j} \mathrm{F}_a\,\mathrm{d}(\mathrm{G}_b) \right) \phi_2^j + \sum_j \left(\sum_{a+b=j} \mathrm{F}_a b \mathrm{G}_b \right) \phi_2^{j-1}\,\mathrm{d}\phi_2 \\
&\quad + \sum_j \left(\sum_{a+b=j} \mathrm{d}(\mathrm{F}_a)\mathrm{G}_b \right) \phi_2^j + \sum_j \left(\sum_{a+b=j} a\mathrm{F}_a \mathrm{G}_b \right) \phi_2^{j-1}\,\mathrm{d}\phi_2 \\
&= f\widetilde{\mathrm{d}}(g) + \widetilde{\mathrm{d}}(f)g.
\end{aligned}$$

Il en résulte bien que $\widetilde{\mathrm{d}}$ est une dérivation sur $\mathcal{M}_*^{\infty}$. Puisque $\widetilde{\mathrm{d}} f = \mathrm{d} f$ si $f \in \mathcal{M}_*$ et $\widetilde{\mathrm{d}}\phi_2 = \mathrm{d}\phi_2$, on étend bien l'application d en une dérivation homogène de degré 2 sur $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$ en posant $\mathrm{d} = \widetilde{\mathrm{d}}$.

b) On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{[f,g]_{\mathrm{d},n}}{(n+k-1)!(n+\ell-1)!}\mathrm{X}^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{r+s=n}(-1)^r\frac{\binom{k+n-1}{s}\binom{\ell+n-1}{r}}{(n+k-1)!(n+\ell-1)!}\,\mathrm{d}^r f\,\mathrm{d}^s g\right)\mathrm{X}^n\\ &= \sum_{r\in\mathbb{N}}(-1)^r\frac{\mathrm{d}^r f}{r!(k+r-1)!}\mathrm{X}^r\sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{d}^s g}{s!(\ell+s-1)!}\mathrm{X}^s\\ &= \widetilde{f}(-\mathrm{X})\widetilde{g}(\mathrm{X})\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{f}(\mathrm{X}) = \sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{d}^r f}{r!(k+r-1)!}\mathrm{X}^r \quad \text{et} \quad \widetilde{g}(\mathrm{X}) = \sum_{s\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{d}^s g}{s!(\ell+s-1)!}\mathrm{X}^s.$$

c) De

$$\begin{aligned}e^{-\phi_2\mathrm{X}}\widetilde{f}(\mathrm{X}) &= \sum_{a\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^a\phi_2^a}{a!}\mathrm{X}^a\sum_{b\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{d}^b f}{b!(k+b-1)!}\mathrm{X}^b\\ &= \sum_r\left(\sum_{b=0}^r\frac{(-1)^{r-b}\phi_2^{r-b}\,\mathrm{d}^b f}{(r-b)!b!(k+b-1)!}\right)\mathrm{X}^r\end{aligned}$$

on tire

$$f_r = \sum_{b=0}^r(-1)^{r-b}\frac{r!(r+k-1)!}{(r-b)!b!(k+b-1)!}\phi_2^{r-b}\,\mathrm{d}^b f$$

d) On a $f_0 = f \in \mathcal{M}_k$ et $f_1 = -k\phi_2 f + \mathrm{d}f = \partial f_0$ donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang initial. Soit $r \geq 0$ tel que $f_j \in \mathcal{M}_{k+2j}$ et $\partial f_j = f_{j+1} - j(j+k-1)\Phi_4 f_{j-1}$ pour tout $j \in \{0,\dots,r\}$. On a $f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1}$ donc $f_{r+1} \in \mathcal{M}_{k+2(r+1)}$. Par définition de d, on a

$$\partial f_{r+1} = \mathrm{d}f_{r+1} - (k+2r+2)\phi_2 f_{r+1}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_{r+1} &= \sum_{b=0}^{r+1}(-1)^{r-b+1}\frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+1)!b!(k+b-1)!}\left((r+1-b)\phi_2^{r-b}\,\mathrm{d}\phi_2\,\mathrm{d}^b f + \phi_2^{r-b+1}\,\mathrm{d}^{b+1}f\right)\\ &= \mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2+\mathrm{S}_3\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{b=0}^r(-1)^{r-b+1}\frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b)!b!(k+b-1)!}\phi_2^{r-b+2}\,\mathrm{d}^b f,$$

$$\mathrm{S}_2 = \sum_{b=0}^{r+1}(-1)^{r-b+1}\frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+1)!b!(k+b-1)!}\phi_2^{r-b+1}\,\mathrm{d}^{b+1}f,$$

et

$$S_3 = \sum_{b=0}^{r} (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b)!b!(k+b-1)!} \Phi_4 \phi_2^{r-b} \, d^b f.$$

On calcule

$$S_2 = \sum_{b=1}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!(b-1)!(k+b-2)!} \phi_2^{r-b+2} \, d^b f$$
$$= \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-2)!} b \phi_2^{r-b+2} \, d^b f$$

et

$$S_1 = \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-1)!} (r-b+1)(r-b+2) \phi_2^{r-b+2} \, d^b f.$$

Ainsi,

$$S_1 + S_2 = \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-1)!} [b(b+k-1)-(r-b+1)(r-b+2)] \phi_2^{r-b+2} \, d^b f.$$

On a alors

$$\partial f_{r+1} = \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-1)!} [b(b+k-1) - (r-b+1)(r-b+2)$$
$$+ (k+2r+2)(r+2-b)] \phi_2^{r-b+2} \, d^b f + \Phi_4 \sum_{b=0}^{r} (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b)!b!(k+b-1)!} \phi_2^{r-b} \, d^b f.$$

Le terme entre crochets vaut $(r+2)(k+r+1)$ donc

$$\partial f_{r+1} = f_{r+2} - (r+1)(r+k)\Phi_4 f_r$$

puis

$$f_{r+2} = \partial f_{r+1} + (r+1)(r+k)\Phi_4 f_r$$

qui est la formule attendue.

e) On a

$$\widetilde{f}(-X)\widetilde{g}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{r+s=n} \frac{(-1)^r}{r!(r+k-1)!s!(s+\ell-1)!} f_r g_s \right) X^n$$

d'où

$$[f, g]_{d,n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r} \binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r}.$$

2) On a $f_r \in \mathcal{M}_{k+2r}$ et $g_r \in \mathcal{M}_{\ell+2n-2r}$ pour tous r donc $[f,g]_{\partial,\Phi_4,n} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$. Par unicité de la suite $(f_r)_{r\geq 0}$ définie par la récurrence

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

on déduit de la question précédente que

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{f_r}{r!(r+k-1)!}\mathrm{X}^r = e^{-\phi_2 \mathrm{X}}\widetilde{f}(\mathrm{X}).$$

De même

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{g_r}{r!(r+\ell-1)!}\mathrm{X}^r = e^{-\phi_2 \mathrm{X}}\widetilde{g}(\mathrm{X}).$$

On a donc

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+k-1}{n-r}\binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r} = [f,g]_{\mathrm{d},n}$$

puis $[f,g]_{\partial,\Phi_4,n} = [f,g]_{\mathrm{d},n}$.

3) On résume ce qui précède. Soit ∂ est une dérivation homogène de degré 2 sur $\mathcal{M}_*$. Soit $\phi_2 \in \mathcal{M}_2^{\leq 1}$ non nulle et $\Phi_4 \in \mathcal{M}_4$. On définit sur $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$ une dérivation d en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \partial f + k\phi_2 f \\ \mathrm{d}\phi_2 &= \Phi_4 + \phi_2^2. \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{M}_k$ et $g \in \mathcal{M}_\ell$, on pose

$$[f,g]_{\mathrm{d},n} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+k-1}{n-r}\binom{n+\ell-1}{r}\mathrm{d}^r f\,\mathrm{d}^{n-r}g.$$

On a alors $[f,g]_{\mathrm{d},n} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$ et

$$[f,g]_{\mathrm{d},n} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+k-1}{n-r}\binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r}$$

où $(f_r)_{r\geq 0}$ et $(g_r)_{r\geq 0}$ sont définies par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_0 = g \\ g_{r+1} = \partial g_r + r(r+\ell-1)\Phi_4 g_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

(en posant $rf_{r-1} = 0$ et $rg_{r-1} = 0$ si $r = 0$).
Pour ∂, on choisit la dérivation de Serre définie pour tout $k \geq 0$ par

$$\begin{array}{rccc} \partial : & \mathcal{M}_k & \to & \mathcal{M}_{k+2} \\ & f & \mapsto & \mathrm{D}f - \dfrac{k}{12}\mathrm{E}_2 f. \end{array}$$

et prolongée par linéarité à $\mathcal{M}_*$. On choisit $\phi_2 = \frac{1}{12}\mathrm{E}_2$. Si $f \in \mathcal{M}_k$, on a alors $\mathrm{d}f = \mathrm{D}f$. On choisit ensuite $\Phi_4 = -\frac{1}{144}\mathrm{E}_4$ de sorte que $\mathrm{d}\phi_2 = \phi_2^2 + \Phi_4$ implique $\mathrm{dE}_2 = \frac{1}{12}\mathrm{E}_2^2 - \frac{1}{14}\mathrm{E}_4 = \mathrm{DE}_2$. Ainsi a-t-on $\mathrm{d} = \mathrm{D}$ sur toute l'algèbre $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$. On a donc, quelques soient $f \in \mathcal{M}_k$ et $g \in \mathcal{M}_\ell$, l'égalité $[f,g]_{\mathrm{d},n} = [f,g]_n$ puis

$$[f,g]_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r}\binom{\ell+n-1}{r} f_r g_{n-r}$$

avec $(f_r)_{r\geq 0}$ et $(g_r)_{r\geq 0}$ définies par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \left(\mathrm{D} - \dfrac{k+2r}{12}\mathrm{E}_2\right) f_r - \dfrac{1}{144} r(r+k-1)\mathrm{E}_4 f_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g_0 = g \\ g_{r+1} = \left(\mathrm{D} - \dfrac{k+2r}{12}\mathrm{E}_2\right) g_r - \dfrac{1}{144} r(r+\ell-1)\mathrm{E}_4 g_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

En particulier, $[f,g]_n \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$.

Bibliographie

[1] Martin Aigner, *A course in enumeration*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 238, Springer, Berlin, 2007. MR 2339282 (2008f :05001)

[2] Andrew Baker, *Matrix groups*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London Ltd., London, 2002, An introduction to Lie group theory. MR MR1869885 (2002k :20001)

[3] Marcel Berger and Bernard Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, second ed., Mathématiques. [Mathematics], Presses Universitaires de France, Paris, 1992. MR MR1207362 (93j :53001)

[4] Daniel Bertrand, $\Theta(\tau, z)$ *and transcendence*, Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Math., vol. 1752, Springer, Berlin, 2001, pp. 1–11. MR 1837823

[5] Ó. Ciaurri, L. M. Navas, F. J. Ruiz, and J. L. Varona, *A simple computation of* $\zeta(2k)$ *by using Bernoulli polynomials and a telescoping series*, ArXiv e-prints (2012).

[6] David Cox, John Little, and Donal O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, third ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. MR 2290010 (2007h :13036)

[7] David A. Cox, John Little, and Donal O'Shea, *Using algebraic geometry*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 185, Springer, New York, 2005. MR 2122859 (2005i :13037)

[8] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse. Tome III : Chapitres XVI et XVII*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1970. MR MR0270377 (42 #5266)

[9] François Dumas, *Rational equivalence for poisson polynomial algebras*, Available at `http://math.univ-bpclermont.fr/~fdumas/fichiers/montevideo.pdf`, 2011, Notes for a series of lectures given in december 2011 during a visit at the Universidad de la República (Montevideo) on the occasion of the XXI Encuentro Rioplatense de Álgebra y Geometría Algebraica, supported by the IFUM (Instituto Franco-Uruguayo de Matemática) of CNRS.

[10] William John Ellison, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris, 1975, En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique

de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366. MR MR0417077 (54 #5138)

[11] Eberhard Freitag, *Funktionentheorie 2*, Springer Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[12] Eberhard Freitag and Rolf Busam, *Complex analysis*, second ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009. MR MR2513384

[13] Bent Fuglede, *A sharpening of Wielandt's characterization of the gamma function*, Amer. Math. Monthly **115** (2008), no. 9, 845–850. MR 2463296 (2009m :33005)

[14] Roger Godement, *Analyse mathématique. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Convergence, fonctions élémentaires. [Convergence, elementary functions]. MR MR1671443 (2000k :00004)

[15] ______, *Analyse mathématique. III*, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann. [Analytic functions, differentials and manifolds, Riemann surfaces]. MR MR2164651 (2006i :30001)

[16] ______, *Analyse mathématique. II*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 2003, Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes. [Differential and integral calculus, Fourier series, holomorphic functions]. MR MR1998211 (2004f :00002)

[17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, sixth ed., Academic Press Inc., San Diego, CA, 2000, Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. MR MR1773820 (2001c :00002)

[18] Henryk Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. MR 98e :11051

[19] Jürgen Jost, *Compact Riemann surfaces*, third ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006, An introduction to contemporary mathematics. MR MR2247485 (2007b :32024)

[20] Anthony W. Knapp, *Elliptic curves*, Mathematical Notes, vol. 40, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. MR MR1193029 (93j :11032)

[21] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Groups and symmetries*, Universitext, Springer, New York, 2010, Texte original français disponible aux éditions de l'École polytechnique. `http://www.editions.polytechnique.fr/`. MR MR2553682

[22] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 13, Société Mathématique de France, Paris, 2004. MR MR2122960 (2005k :11003)

[23] François Laudenbach, *Calcul diiférentiel et intégral*, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2005, `http://www.editions.polytechnique.fr/`.

[24] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, 2003. MR MR1930091 (2003k :58001)

[25] Dominique Manchon, *Introduction aux variétés de Poisson et à la formalité*, Cours de Mastère 2ème année, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Novembre-Décembre 2004. Non publié.

[26] François Martin and Emmanuel Royer, *Formes modulaires et périodes*, Formes modulaires et transcendance, Sémin. Congr., vol. 12, Soc. Math. France, Paris, 2005, pp. 1–117. MR MR2186573 (2007a :11065)

[27] James S. Milne, *Fields and galois theory (v4.22)*, 2011, Disponible à l'adresse www.jmilne.org/math/.

[28] Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf, and Doron Zeilberger, A = B, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1996, With a foreword by Donald E. Knuth, With a separately available computer disk. MR 1379802 (97j :05001)

[29] Frédéric Pham, *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*, InterEditions, Paris, 1992, Cours, études et exercices pour la maîtrise de mathématiques. [Course, studies and exercises for the Masters in mathematics]. MR MR1195791 (93k :58001)

[30] Reinhold Remmert, *Wielandt's theorem about the* Γ*-function*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), no. 3, 214–220. MR 1376175 (97b :33001)

[31] H. L. Resnikoff, *On differential operators and automorphic forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 334–346. MR 0204651 (34 #4490)

[32] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2. MR 58 #16473

[33] ———, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke* T_p, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102. MR MR1396897 (97h :11048)

[34] Nils-Peter Skoruppa, *A quick combinatorial proof of Eisenstein series identities*, J. Number Theory **43** (1993), no. 1, 68–73. MR MR1200809 (94f :11029)

[35] L. J. Slater, *Confluent hypergeometric functions*, Cambridge University Press, New York, 1960. MR 0107026 (21 #5753)

[36] Lucy Joan Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966. MR 0201688 (34 #1570)

[37] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis, II, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. MR 1976398 (2004d :30002)

[38] Gérald Tenenbaum, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 2, Société Mathématique de France, Paris, 1996, With the collaboration of Jie Wu. MR 1397501 (97h :11001)

[39] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième ed., Échelles, Belin, Paris, 2008.

[40] William P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy. MR MR1435975 (97m :57016)

[41] Fernando Rodriguez Villegas and Don Zagier, *Square roots of central values of Hecke* L*-series*, Advances in number theory (Kingston, ON, 1991), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1993, pp. 81–99. MR 1368412 (96j :11069)

[42] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York, 1983, Corrected reprint of the 1971 edition. MR MR722297 (84k :58001)

[43] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Reprint of the second (1944) edition. MR 1349110 (96i :33010)

[44] Herbert S. Wilf, *generatingfunctionology*, third ed., A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 2006. MR 2172781 (2006i :05014)

[45] Don Zagier, *Modular forms and differential operators*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104** (1994), no. 1, 57–75, K. G. Ramanathan memorial issue. MR 1280058 (95d :11048)