Teoria d'Oscil.lacions

Índex

1 Introducció **2**

2 Moviment Harmònic Simple **2**
2.1 Equació del moviment 3
2.2 Velocitat i acceleració 4
2.3 Sobre la fase 5
2.4 Relació entre el MHS i el MCU 5
2.5 Energia del MHS 5
2.6 El pèndol simple 6

3 Oscil·lador Harmònic Esmorteït **8**
3.1 Tipus de Moviment Harmònic Esmorteït 8
3.2 Moviment Harmònic Infraesmorteït 8

4 Oscil.lacions Forçades **11**
4.1 Equació del moviment 11
4.2 Règim transitori i règim permanent 11
4.3 Ressonància 12

5 Apèndix: Recordatori de les lleis bàsiques de la mecànica **13**
5.1 Kepler(1571-1630) 13
5.2 Galileu (1564-1642) 13
5.3 Llei de Gravitació Universal 13
5.4 Tres Lleis de Newton 14
5.4.1 Principi de la inèrcia 14
5.4.2 Principi d'acció de forces 14
5.4.3 Principi d'acció i reacció 15

1 Introducció

Molts són els sistemes físics que oscil.len. De fet, qualsevol pertorbació a un sistema que està en una posició d'equilibri estable, dóna lloc a un moviment oscil·latori. Què caracteritza aquests moviments? La principal característica d'aquests moviments és que són periòdics, és a dir: es repeteixen. L'exemple més paradigmàtic de moviment oscil.latori és el moviment d'un pèndol.

En general, els sistemes que oscil.len periòdicament són útils desde el punt de vista de la Física. És per això que, ja desde els temps de Galileo, s'usa el pèndol simple per mesurar intèrvals de temps. La importància del pèndol simple rau en el fet de que el període d'oscil.lació no depèn de l'amplitud de l'oscil·lació.

En aquest capítol estudiarem alguns conceptes fonamentals dels sistemes oscil·latoris. Conceptes que ens serviran més endavant per entendre un fenomen físic molt important: el moviment ondulatori.

2 Moviment Harmònic Simple

El tipus més important i comú de moviment oscil·latori és el moviment harmònic simple i és el moviment característic de l'oscil.lador harmònic. L'estudi de l'oscil.lador harmònic és molt important ja que, malgrat que el muntatge mecànic sigui molt simple, és la base per a l'estudi de fenòmens tals com el moviment d'un pèndol simple, vibracions de cordes, vibracions en tubs, corrents elèctric, etc.

Suposem que fem un muntatge com el de la Fig.1

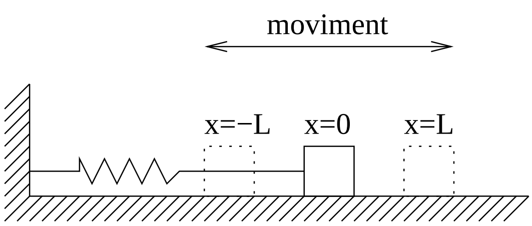


Figura 1: Esquema d'un sistema Massa-Molla

En l'estudi que segueix menysprearem la fricció de la massa respecte el terra, així com la fricció de la massa amb l'aire. Suposarem també que la molla no té pèrdues. Sota aquestes condicions, podem excitar la massa de dues formes diferents:

- Amb un desplaçament inicial: agafem la massa de la seva posició inicial a $x = 0$, la desplaçem fins a $x = L$ i la deixem anar
- Amb una velocitat inicial: mentre la massa està en la seva posició de repòs $x = 0$, li donem un cop (suposem que és un xoc perfectament elàstic) i, en conseqüència, es desplaça fins la posició $x = L$.

Sigui quina sigui l'excitació, les característiques del moviment sempre seran:

- El moviment serà periòdic: en intèrvals de temps iguals, la massa adquireix la mateixa posició i les mateixes característiques del moviment

- El moviment és oscil·lant al voltant de la posició de repòs que designarem per $x = 0$
- La separació màxima del cos respecte la seva posició d'equilibri ($x = L$ i $x = -L$) és sempre la mateixa

Quan la massa és desplaçada de la seva posició d'equilibri, la molla fa una força (força elàstica) $-kx$ donada per la Llei de Hooke:

$$F = -k \cdot x \tag{1}$$

on la k és la rigidesa de la molla (propietat intrínseca) i la x és el desplaçament de la massa. El signe negatiu indica que la força sempre s'oposa al moviment: quan la molla està comprimida fa força en sentit positiu de l'eix x i viceversa.

2.1 Equació del moviment

Recordeu que segons la segona llei de Newton,

$$\sum \vec{F} = m \cdot a \tag{2}$$

i sabent que la única força que actua sobre el sistema és la força elàstica donada per la Llei de Hooke, escriurem:

$$-k \cdot x = m \cdot a \longrightarrow a = -\frac{k}{m} \cdot x \tag{3}$$

L'acceleració és proporcional al desplaçament i té sentit oposat al d'aquest. Aquesta és una característica general del moviment harmònic simple. De fet, sempre que l'acceleració d'un objecte és proporcional i oposada al seu desplaçament, l'objecte es mou amb moviment harmònic simple. A partir de l'equació (3) i tenint en compte que l'acceleració és la derivada segona de la posició respecte del temps ($a = \frac{d^2x}{dt^2}$) obtenim l'equació diferencial que defineix el moviment de l'oscil·lador harmònic simple:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \tag{4}$$

que és el mateix que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad amb \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

La ω_0 té unitats de radians/segon i és la freqüència pròpia del sistema. Noteu que ω_0 no depèn de les condicions inicials, sinó de les característiques internes de l'oscil.lador: de la seva massa i de la constant de molla.

L'eq.(5) és una equació diferencial ordinària de segon ordre. Es pot demostrar que la solució d'aquesta equació és de la forma[1]:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{6}$$

on A i φ són l'amplitud màxima i la constant de fase, respectivament. Aquests dos paràmetres depenen de les condicions inicials del problema, és a dir, que els podem modificar externament. Anomenarem *fase* a tota l'expressió que hi ha a l'interior del sin, és a dir, a $\omega_0 t + \varphi$. Les característiques del moviment són:

[1] Comproveu que (6) és efectivament solució de (5).

- Donat que els valors màxims i mínims de la funció sin són $+1$ i -1, el moviment resultant queda confinat a la regió compresa entre $+A$ i $-A$.
- La funció sin és periòdica de periode 2π, per tant, el moviment es repetirà quan l'argument de la funció sin (és a dir, la fase) s'incrementi 2π:

D'altra banda, i seguint els principis bàsics de la trigonometria, l'equació (6) també es pot esctiure com:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi') \qquad \text{on} \qquad \varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Definim el *periode* T (en segons) com el temps que triga una partícula en completar una vibració complerta, i la *freqüència* f (en Hz) com el nombre d'oscil·lacions per segon. Matemàticament, es relacionen com:

$$T = \frac{1}{f} \tag{8}$$

A partir de l'eq.(6) podem deduir el valor del periode i la freqüència en funció de les constants del sistema. Quan passa un periode l'oscil·lació es torna a repetir, cosa que implica $\omega_0 \cdot T = 2\pi$; per tant:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{9}$$

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.2 Velocitat i acceleració

Hem vist que la posició de la massa en moviment vé descrita per l'eq.(6). Si fem la derivada respecte el temps, obtindrem l'expressió de la velocitat en funció del temps:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{10}$$

i si tornem a derivar respecte el temps, obtenim l'acceleració:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 \cdot x \tag{11}$$

que aplicant l'eq.(5), observem que concorda amb la segona llei de Newton:

$$a = -\frac{k}{m}x \tag{12}$$

Les característiques de la velocitat són:

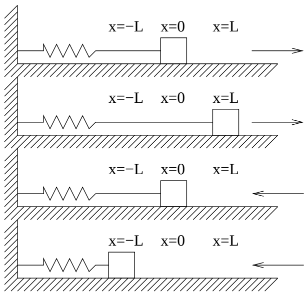
- La velocitat és màxima quan la massa passa pel punt $x = 0$ en sentit positiu de l'eix x i mínima quan passa pel punt $x = 0$ en sentit negatiu de l'eix x. El mòdul d'aquesta velocitat màxima ve donat per: $|v_{max}| = A\omega_0$.
- La velocitat és nul.la en les posicions de $x = A$ i $x = -A$.

Les característiques de l'acceleració són:

- L'acceleració és màxima quan la massa està al punt $x = -A$ i mínima quan la massa està a la posició $x = A$. El mòdul d'aquesta acceleració màxima ve donat per: $|a_{max}| = A\omega_0^2$.
- L'acceleració és nul.la quan la massa passa pel punt $x = 0$.

2.3 Sobre la fase

La constant de fase φ depen de quin instant de temps escollim com a $t = 0$. Si, per exemple, escollim $t = 0$ quan la massa passa per la posició d'equilibri $x = 0$ amb velocitat positiva (part superior de la Fig.2), la constant de fase serà zero i l'equació del moviment serà, simplement $x = L\sin(\omega_0 t)$ on ara L és l'amplitud del moviment (A=L). Si escollim $t = 0$ quan $x = L$ obtindrem que la constant de fase ha de ser $\varphi = \frac{\pi}{2}$. A la Fig.2 mostrem els casos més típics.



$$\varphi = 0 \rightarrow x = L\sin(\omega_0 t) = L\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = L\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = L\cos(\omega_0 t)$$
$$\varphi = \pi \rightarrow x = L\sin(\omega_0 t + \pi) = L\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$
$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = L\sin(\omega_0 t + \frac{3\pi}{2}) = L\cos(\omega_0 t + \pi)$$

Figura 2: Diferents posicions de la massa en funció de la seva fase

2.4 Relació entre el MHS i el MCU

El fet de treballar amb una freqüència angular ω_0 ens permet relacionar el MHS amb un Moviment Circular Uniforme MCU de velocitat angular ω_0. Considerem una partícula que es mou amb velocitat angular ω_0 constant sobre una circumferència. El desplaçament angular de la partícula respecte l'eix de les x ve donat per:

$$\theta = \omega_0 t + \varphi \tag{13}$$

on φ és el desplaçament angular en l'instant $t = 0$. A la Fig.3 podem deduir la interpretació del MHS com la projecció sobre l'eix X de l'extrem d'un vector rotatori de longitud igual a la amplitud A, i que gira amb una velocitat angular ω (igual que la freqüència del MHS) en el sentit contrari de les agulles del rellotge.

2.5 Energia del MHS

Hem vist que en el moviment oscil·latori del sistema massa-molla (Figura 1) la posició, la velocitat i l'acceleració varien amb el temps. Això implica que tant l'energia potencial com la cinètica varien amb el temps. Tot i així, l'energia total es manté constant (en el supòsit que no hi ha fricció). L'energia potencial

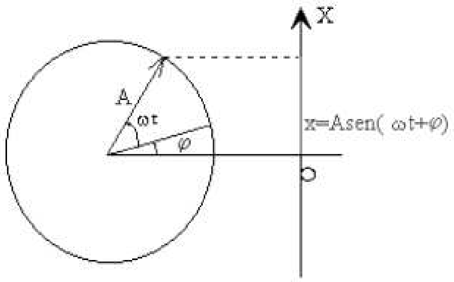


Figura 3: Relació entre el MHS i el MCU

d'una molla de constant k en ser estirada una distància x de la seva posició d'equilibri ve donada per:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{14}$$

Per altra banda, l'energia cinètica d'un objecte de massa m que es mou amb velocitat v és:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{15}$$

L'energia total serà doncs:

$$E_{\text{total}} = U + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{16}$$

Fixem-nos que quan el desplaçament és màxim, $x = A$ la velocitat és nul.la. L'energia total serà doncs:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{17}$$

Concloem doncs que *l'energia total del moviment harmònic simple és proporcional al quadrat de la seva amplitud.*

L'equació (17) també es pot obtenir sumant directament l'energia potencial i la cinètica emprant les equacions per a la posició i la velocitat en funció del temps.

2.6 El pèndol simple

L'exemple més familiar de moviment oscil·latori és el moviment del pèndol. El moviment d'un pèndol és harmònic simple tan sols si l'amplitud del moviment és petita.

Considerem la Figura 4 on tenim una bola de massa m penjada del sostre per una corda de longitud L. Les forces que actuen sobre la bola són el seu pes mg i la tensió T de la corda. Quan la corda fa un angle ϕ respecte la vertical, el pes es pot descomposar en dues components: una component en la direcció de la corda ($mg \sin \phi$) i una component en la direcció perpendicular a la corda ($mg \cos \phi$). Sigui s la longitud de l'arc mesurada a partir de la part més baixa del cercle. Recordem la relació entre l'angle ϕ i l'arc s: $s = L\phi$.

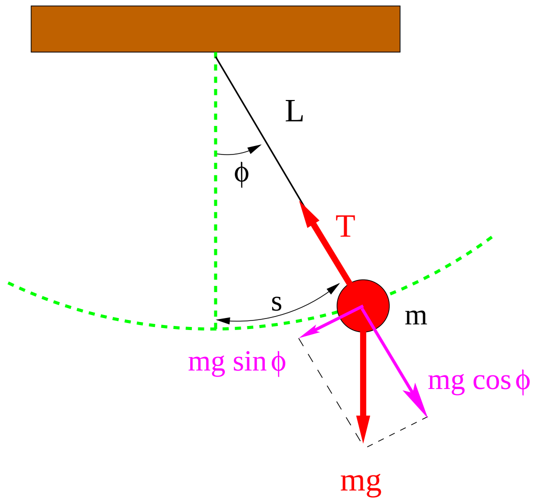


Figura 4: Un pèndol de massa m subjecte per una corda de longitud L.

La component tangencial de l'acceleració de la bola és $\frac{d^2s}{dt^2}$. Aplicant la llei de Newton a la component tangencial:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\phi \tag{18}$$

que és equivalent a:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\left(\frac{s}{L}\right) \simeq -\frac{g}{L}s \quad . \tag{19}$$

En la última igualtat hem suposat que l'angle ϕ és prou petit com per aproximar $\sin\phi \simeq \phi$. Observem que l'equacio (19) ens diu que l'acceleració és proporcional al desplaçament. Així doncs, el moviment del pèndol per a petits desplaçaments és harmònic simple. Noteu que l'equació (19) es pot escriure com:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -w_0^2 s \qquad \text{amb} \qquad w_0^2 = \frac{g}{L} \quad . \tag{20}$$

La solució a aquesta equació és simplement $s = s_0\sin(w_0t + \varphi)$, on s_0 és el màxim desplaçament d'arc. El període del moviment és:

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad . \tag{21}$$

Noteu dues característiques del moviment del pèndol simple:

- El període no depen de la massa de la bola.
- El període i la freqüència no depenen de l'amplitud d'oscil·lació. Aquesta és una característica típica del moviment harmònic simple.

3 Oscil·lador Harmònic Esmorteït

En les situacions reals, els moviments harmònics disminueixen la seva amplitud al llarg del temps, fins que el sistema es para. Això és degut a les forces de fricció entre la massa i la superfície en la que es recolza, entre la massa i l'aire, etc. En molts casos, aquest fregament es pot considerar poporcional a la velocitat, i amb signe oposat ja que les forces de fricció sempre s'oposen al moviment. Així doncs, ens queda:

$$F_{\text{fricció}} = -\lambda \cdot v = -\lambda \cdot \frac{dx}{dt} \tag{22}$$

on λ és la constant de proporcionalitat o coeficient de fricció. Ara, l'equació diferencial a resoldre serà:

$$\begin{aligned} m \cdot a &= -k \cdot x - \lambda \cdot v \\ m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= -k \cdot x - \lambda \cdot \frac{dx}{dt} \\ m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

que es pot escriure com:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \;\; ; \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \;\; ; \qquad 2\gamma = \frac{\lambda}{m} \tag{24}$$

on ω_0 és la *freqüència natural* d'oscil·lació (a la que oscil·laria el sistema en absència de fregament) i γ és la *constant d'esmorteïment*.

La solució exacte d'aquesta equació diferencial és força complexe i està més enllà dels objectius d'aquest curs.

3.1 Tipus de Moviment Harmònic Esmorteït

Depenent de la relació entre la freqüència natural d'oscil·lació ω_0 i la constant d'esmorteïment γ, tenim 3 tipus de moviments esmorteïts:

- $\gamma < \omega_0$.- Infrasmorteït: l'amplitud de l'oscil·lació decau lentament.
- $\gamma = \omega_0$.- Esmorteïment crític: la freqüència d'oscil·lació és zero, i el sistema s'aproxima gradualment fins la posició d'equilibri. Aquest tipus d'esmorteïment s'usa quan es vol una eliminació ràpida de les oscil·lacions, com per exemple en els sistemes de mesura, esmorteïdors en vehicles, etc.
- $\gamma > \omega_0$.- Sobreesmorteït: el sistema no oscil·la, sinó que es mou lentament fins al seu punt d'equilibri.

3.2 Moviment Harmònic Infraesmorteït

Ara estudiarem el cas en que la constant d'esmorteïment γ és petita. Des d'un punt de vista intuitiu, esperem que el sistema oscil·li amb una freqüència ω semblant a la freqüència natural d'oscil·lació ω_0 i amb una amplitud que vagi decreixent lentament amb el temps (vegeu la figura 5).

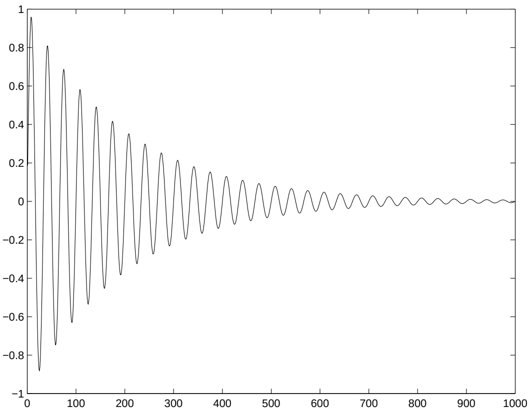


Figura 5: Moviment Harmònic Esmorteït en funció del temps

Un oscil·lador lleugerament amortit, només perdrà una petita part de l'energia mecànica en cada cicle. El ritme de variació de l'energia mecànica total serà doncs igual a la potència consumida per la força de fricció:

$$P = \frac{dE}{dt} = F_{\text{friccio}} v = -\lambda v^2 \quad . \tag{25}$$

Aquesta potència és negativa indicant que el sistema perd energia. Considerant que la pèrdua energètica per cicle és prou petita, podem substituir v^2 per el seu valor mitjà $(v)_m^2 = E/m$. Així obtenim:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\lambda}{m} E \quad , \tag{26}$$

que indica un decreixement exponencial de l'Energia. Efectivament:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{\lambda}{m} dt \longrightarrow \ln E = -\frac{\lambda}{m} t + C \tag{27}$$

on C és una constant arbitrària d'integració. Exponenciant a ambdós membres:

$$E = e^{-\lambda t/m + C} = e^C e^{-\lambda t/m} = E_0 e^{-\lambda t/m} \quad , \tag{28}$$

on E_0 és una constant que indica l'energia a $t = 0$. En termes del temps de relaxació τ ens queda:

$$E = E_0 e^{-t/\tau} \quad , \tag{29}$$

on $\tau = m/\lambda$ és el temps que triga l'energia en disminuir un factor $1/e$. Fixemnos que quan el coeficient de fricció λ és petit, τ és gran, i l'oscil·lador només perd una fracció molt petita de la seva energia en una oscil·lació. En aquest cas, podem obtenir la pèrdua d'energia ΔE en un període T:

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{\lambda}{m} T \quad . \tag{30}$$

Normalment, la pèrdua d'energia d'un oscil·lador lleugerament esmorteït es descriu mitjançant el factor de qualitat $\mathcal{Q}$ definit per:

$$\mathcal{Q} = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} \quad , \tag{31}$$

on E és l'energia total i $|\Delta E|$ és l'energia perduda en un periode.

Ja hem vist que l'energia d'un oscil·lador és proporcional al quadrat de la seva amplitud. Usant l'equació (28) podem veure com decau amb el temps l'amplitud del moviment d'un oscil·lador lleugerament esmorteït. Sigui A l'amplitud en un cert instant de temps i A_0 l'amplitud a $t = 0$, aleshores:

$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{E}{E_0} = e^{-(\lambda/m)t} \tag{32}$$

així:

$$A = A_0 e^{-(\lambda/2m)t} = A_0 e^{-\gamma t} \quad , \tag{33}$$

on γ és la constant d'esmorteïment. De fet, això és consistent amb la solució a l'equació (24) en el règim infraesmorteït ($\gamma < \omega_0$) que està donada per:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\omega_e \cdot t + \varphi) \qquad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{34}$$

on A_0 és l'amplitud inicial i ω_e és la freqüència real del moviment. L'amplitud, com acabem de veure, decreix al ritme d'una exponencial negativa. A la Figura 5 podem veure clarament com la amplitud del moviment decau des de l'amplitud inicial A fins a zero. Finalment, podem relacionar la freqüència real d'oscil·lació amb el factor de qualitat Q:

$$\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad . \tag{35}$$

Així podem veure clarament que la freqüència ω_e a la que realment oscil·la el sistema és sovint pràcticament igual a la de l'oscil·lador sense esmorteïment.

La solució (34) és vàlida només en el cas infraesmorteït ($\gamma < \omega_0$). Si anem incrementant l'esmorteïment, arribarem a un valor crític en que la constant d'esmorteïment és igual a la freqüència natural d'oscil·lació ($\gamma_c = \omega_0$). Sempre que $\gamma \geq \gamma_c$ el sistema no oscil·la sino que retorna a la seva posició d'equilibri lentament. De fet, en el cas d'esmorteïment crític, el sistema retorna a l'equilibri més ràpidament que en el cas sobreesmorteït. Com més gran és la constant d'esmorteïment, més triga el sistema en retornar a la posició d'equilibri (veure figura 6).

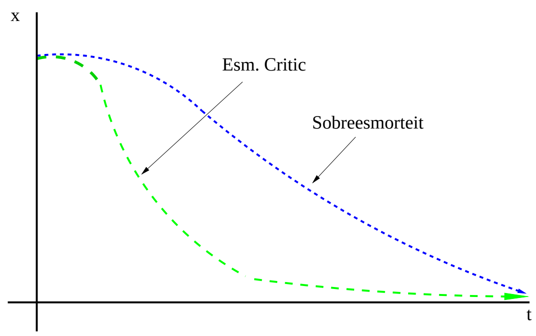


Figura 6: La posició en funció del temps per a un oscil·lador sobreesmorteït i un amb esmorteïment crític.

4 Oscil.lacions Forçades

Fins ara, hem vist les oscil·lacions naturals d'un cos, produides quan l'apartem de la seva posició d'equilibri i el deixem anar. Les oscil.lacions forçades es produeixen quan s'aplica una força externa i periòdica sobre un sistema. L'estudi d'aquests fenòmens és extremadament important en la mecànica, acústica, electrònica, etc.

4.1 Equació del moviment

Considerarem el cas en que la força externa és periòdica del tipus:

$$F = F_0 \cos(\omega' t) \tag{36}$$

on F_0 és l'amplitd màxima de la força externa i ω' és la freqüència d'aquesta força externa (no confondre-les amb la ω o amb la ω_0). Amb això, l'equació del moviment ens quedarà:

$$\begin{aligned} m \cdot a &= -k \cdot x - \lambda v + F_0 \cos(\omega' t) \\ m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= -k \cdot x - \lambda \cdot \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega' t) \\ m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x &= F_0 \cos(\omega' t) \end{aligned} \tag{37}$$

que és el mateix:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega' t) \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad 2\gamma = \frac{\lambda}{m} \tag{38}$$

La solució estacionària d'aquesta equació diferencial es pot escriure com:

$$x(t) = A \sin(\omega' t + \phi) \tag{39}$$

on les constants A i ϕ vénen donades per:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega'^2\gamma^2}} \qquad tg(\phi) = \frac{\omega'^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega'} \tag{40}$$

4.2 Règim transitori i règim permanent

Realment, el moviment del sistema està dividit en dues parts:

Règim transitori: Durant els primers instants del moviment del sistema, l'efecte de l'esmorteiment és apreciable, però decau ràpidament fins a extingir-se. No l'hem estudiat.

Règim permanent: Quan el règim transitori ha desaparegut, ens queda el règim permanent on el sistema vibrarà a la freqüència imposada per la força externa.

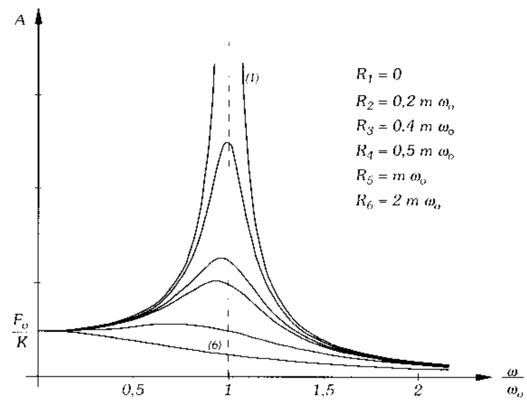


Figura 7: Ressonància d'un sistema en règim forçat segons la freqüència i esmorteïment

4.3 Ressonància

A l'eq.(40) hem vist com l'amplitud del moviment depèn de la freqüència de la força externa que apliquem ω'. Això vol dir, que si anem provant per totes les diferents freqüències, l'amplitud del moviment anirà canviant. Quan l'amplitud del sistema sigui màxima, direm que el sistema ha entrat en ressonància:

Un sistema entra en ressonància quan per un determinat valor de la freqüència externa, l'amplitud de l'oscil.lació forçada esdevé màxima

El valor de la freqüència de ressonància del sistema esmorteït amb excitació forçada es pot aconseguir minimitzant el denominador de l'eq.(40), ja que farem l'amplitud màxima:

$$\omega_r = \sqrt{w_0^2 - \frac{\lambda^2}{2m^2}} \tag{41}$$

És a dir, que la freqüència de ressonància del sistema forçat s'apropa a la freqüència pròpia del sistema en règim lliure a mida que disminueix el fregament. A la Figura 7 tenim la representació del desplaçament segons la freqüència de la vibració externa, per diferents valors de l'esmorteïment.

En els sistemes mecànics (ponts, xassís de motors, rentadores, etc) es busca minimitzar la ressonància, ja que això podria dur a la destrucció del sistema. Per exemple, quan un grup de soldats passa per un pont, deixen de marcar el pas, ja que la freqüència del pas pot coincidir amb la freqüència de ressonància del pont i trencar-se. De forma similar, és famós el pont de Tacoma que es va trencar degut a un vent rafegat. També és tipic el trencament d'una copa de vidre amb un so. Hi ha altres casos, però, on la ressonància és buscada, com és el cas dels instruments musicals, sintonitzadors de ràdio, etc. La caixa de ressonància d'un instrument musical, amplifica el so de forma natural mentre que quan canviem el dial en un receptor de radio, estem modificant la freqüència de ressonància d'un sistema, de tal forma que coincideixi amb la freqüència de l'emisora que volem escoltar. Els equalitzadors paramètrics de les taules de mescles són un altre bon exemple.

5 Apèndix: Recordatori de les lleis bàsiques de la mecànica

5.1 Kepler(1571-1630)

Va descriure el moviment dels planetes amb 3 lleis:

- Les òrbites dels planetes al voltant del sol són el.líptiques.
- Els planetes recorren àrees iguals en temps iguals.
- El quadrat del temps que triga un planeta en donat una volta sencera és proporconal al cub del semieix major de la seva el.lipsi.

5.2 Galileu (1564-1642)

Galileu estudià el moviment dels cossos, formulant les següents lleis:

Forces de Fricció: Si res no actua sobre un objecte, i aquest avança a una velocitat determinada en línia recta, aquesta velocitat es mantindrà sempre, i l'objecte seguirà aquesta línia recta.

Caiguda lliure: Els cossos en caiguda lliure són atrets per la terra amb una velocitat que varia de forma constant, independentment de la seva massa.

5.3 Llei de Gravitació Universal

Newton (1642-1727) anuncià la Llei de Gravitació Universal de la següent manera:

Tots els cossos s'atrauen entre sí amb una força directament proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa

que matemàticament s'escriu com:

$$F = G\frac{M \cdot M'}{d^2} \tag{42}$$

on G és la constant de gravitació universal i val:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{Kg^2}\right] \tag{43}$$

La conclusió que podem extreure d'aquesta llei és que tots els cossos s'atrauen entre ells, però les seves masses són tant petites que les forces són realment despreciables. Només cossos amb masses elevadíssimes són capaces de fer-nos visible aquestes forces (planetes, estels...)

5.4 Tres Lleis de Newton

La dinàmica és la part de la Física que estudia les forces en relació amb els moviments que produeixen als sistemes. Aquesta, es basa en tres principis bàsics formulats per Newton, que són:

- Principi de la inèrcia.
- Principi d'acció de forces.
- Principi d'acció i reacció.

5.4.1 Principi de la inèrcia

Tot cos continua el seu estat de repòs o de moviment rectilini uniforme a menys que hi actui sobre ell una força nets (resultant de totes les forces que actuen sobre ell)

Així doncs, és la força la única causa capaç de produir una acceleració en un cos. Aquesta llei és molt semblant als postulats de Galileo, però introdueix el fet de que deixa de tenir sentit la distinció entre objectes en repòs i objectes que es desplacen a velocitat constant. Tot això desemboca en l'estudi de diferentes sistemes de referència.

- A partir d'aquí introduim el concepte de *sistema inercial*: sistema de referència que es desplaça a velocitat constant.
- Qualsevol sistema de referència que es mou amb velocitat constant respecte un altre sistema inercial, és també un sistema inercial.
- La Terra es pot considerar com un sistema inercial, si menyspreem la petita acceleració centrípeta causada per la seva translació al voltant del sol i l'acceleració de la superfície respecte el centre, causada per la rotació sobre sí mateixa.

D'altra banda, el concepte de *força neta* aporta la idea de que les forces es combinen (sumen) com si fossin vectors. L'important no és tractar doncs cadascuna de les forces, sinó traballar amb la resultant.

5.4.2 Principi d'acció de forces

L'acceleració d'un objecte és inversament proporcional a la seva massa i proporcional a la força neta externa que actua sobre ell

Matemàticament, s'escriu[2]:

$$F = m \cdot a \qquad a = \frac{F}{m} \tag{44}$$

Aquesta definició ens indica que la massa d'un cos és una propietat intrínseca del cos i que no depèn de la seva localització. En canvi, el pes d'un objecte és la força resultant de la seva atracció amb la Terra, i per tant, depèn de la seva localització.

[2]Malgrat la forma més usada és la primera, la segona és la més intuitiva ja que presenta l'acceleració com a conseqüència de la força

5.4.3 Principi d'acció i reacció

Les forces actuen per parells: si el cos A exerceix una força sobre el cos B, aquest exerceix sobre A una força igual però de signe contrari.

Compte, perquè aquesta llei és molt fàcil de malinterpretar: Les forces d'acció i reacció no s'equilibren i s'anul.len, ja que s'apliquen sobre cossos diferents.

Finalment, aquestes tres lleis de Newton només ens diuen com els cossos s'atrauen entre ells, no perquè ho fan.