Le théorème de la boule de billard chevelue

Benoît Rittaud

Introduction

Cet article présente une démonstration, due à John Milnor et publiée dans le Mathematical Monthly of the Mathematical Association of America, Vol. 85, No. 7., du théorème suivant :

Théorème 1. *Tout champ continu de vecteurs tangents à une sphère de dimension paire s'annule en au moins un point.*

Nous allons tout d'abord donner une approche plus intuitive de l'énoncé, dans le cas de $\mathbf{R}^3$, que nous traduirons en termes mathématiques et que nous démontrerons ensuite.

Approche intuitive

Un énoncé plus restreint mais plus "palpable" de ce théorème peut s'écrire ainsi : toute coiffure continue d'une boule de billard chevelue comporte au moins un épi.

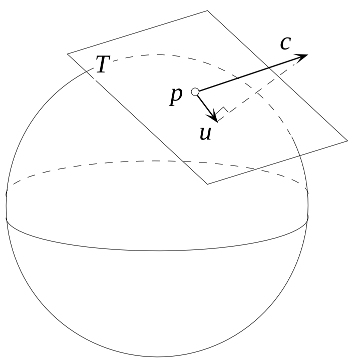

Figure 1 : Construction du champ à partir de la coiffure

Pour commencer, on se place donc d'abord dans l'espace $\mathbf{R}^3$ et l'on considère la sphère unité, notée S^2 : ce sera notre boule de billard ("boule" est à prendre au sens de "sphère"). On suppose que chaque point de la sphère est racine d'un cheveu (tous les cheveux ont même longueur non nulle). La coiffure de la sphère est par ailleurs choisie continue : on s'interdit par exemple de faire une raie. Considérons un point P de S^2, racine du cheveu C (supposé rectiligne). Soit T le plan tangent à S^2 en P. Le vecteur u, projeté de C sur T, est bien tangent à S^2 et dépend continûment de P.

Le champ de vecteurs ainsi défini vérifie bien les hypothèses du théorème de la boule de billard chevelue. Ainsi, affirmer qu'un tel champ s'annule équivaut-il à affirmer qu'il existe un cheveu orthogonal au plan tangent à la sphère en sa racine, c'est-à-dire un épi.

La notation S^2

Il peut au départ paraître curieux de noter S^2, et pas S^3, la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. En fait, cela se justifie par des considérations de dimension : "moralement", la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ est plutôt de dimension 2, bien que n'existant que dans $\mathbf{R}^3$. À la surface de la Terre, par exemple, il ne faut que deux coordonnées pour repérer un point : longitude et latitude (l'altitude n'est, bien entendu, pas prise en compte). Ainsi, lorsque l'on parle de sphère "de dimension paire", il s'agit bien de la sphère unité d'un espace vectoriel de dimension impaire.

La démonstration de John Milnor

Tout d'abord, nous allons montrer un premier résultat intermédiaire :

Théorème 2. *Une sphère possède un champ continûment différentiable de vecteurs unitaires tangents si et seulement si sa dimension est impaire.*

Démonstration. Si l'on est dans $\mathbf{R}^{2n}$, on peut vérifier que :

$$v : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2n-1} \\ u_{2n} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ \vdots \\ u_{2n} \\ -u_{2n-1} \end{pmatrix}$$

est un champ de vecteurs qui vérifie les hypothèses du théorème.

Soit A une couronne de $\mathbf{R}^n$ (sans hypothèse sur la parité de n) :

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a \leq \|x\| \leq b\}.$$

Soit $x \mapsto v(x)$ un champ de vecteurs différentiable (défini sur un voisinage de A que l'on supposera être une couronne compacte A'), et soit $t \in \mathbf{R}$. Posons

$$f_t(x) = x + tv(x).$$

LEMME. *Si $|t|$ est assez petit, alors f_t est injective de differentielle bijective, et le volume de $f_t(A)$ est polynômial en t.*

DÉMONSTRATION. Par compacité de A et différentiable continuité de v, on peut sans beaucoup de difficultés à l'aide du théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout x et tout y de A :

$$\|v(x) - v(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

En effet, par compacité il existe ε tel que, pour tout x dans A, $\|x - y\| < \varepsilon$ implique que le segment d'extrémités x et y est dans A'. Par le théorème des accroissements finis, on a donc que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c_1\|x - y\|, \text{ où } c_1 = \sup_{x \in A'} \|df(x)\|.$$

Pour x et y suffisamment éloignés, la fonction continue $(x, y) \mapsto \|x-y\|$ définie sur le compact $A'' = A \times A - \{(x, y) \in A \times A \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$ ne s'annule pas. On peut alors poser

$$c_2 = \sup_{(x,y) \in A''} \frac{\|v(x) - v(y)\|}{\|x - y\|},$$

ce qui donne la formule cherchée pour $c = \max(c_1, c_2)$.

Prenons à présent t tel que $|t| < 1/c$. Alors :

$$\begin{aligned} f_t(x) = f_t(y) \quad &\Rightarrow \quad x - y = t(v(y) - v(x)) \\ &\Rightarrow \quad \|x - y\| \leq |tc|.\|x - y\| \\ &\Rightarrow \quad \|x - y\| = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Donc, f_t est bien injective. Par ailleurs, la Jacobienne de f_t s'écrit

$$I + t\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right].$$

Le déterminant $D_t(x)$ de la Jacobienne est donc polynômial en t. Il est par ailleurs aisé de voir que son terme constant est 1 (faire $t = 0$), donc $D_t(x)$ est strictement positif pour $|t|$ assez petit (donc la différentielle est inversible), x étant borné. Donc, $|D_t(x)| = D_t(x)$ pour t assez petit, et :

$$\mathrm{vol}(f_t(A)) = \int_{f_t(A)} dx = \int_A |D_t(x)|dx = \int_A D_t(x)dx,$$

ce qui est bien polynômial en t. ∎

Prenons à présent un champ de vecteurs unitaires v tangent à la sphère, de classe C^1, et étendons-le à A en posant $v(r.u) = r.v(u)$. On a alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout vecteur u de norme r :

$$\|u + t.v(u)\| = r\sqrt{1 + t^2}.$$

LEMME. *Pour t assez petit, $f_t : u \mapsto u + tv(u)$ envoie surjectivement la sphère de rayon r de $\mathbf{R}^n$ sur celle de rayon $r\sqrt{1 + t^2}$.*

DÉMONSTRATION. Comme vu plus haut, si $|t|$ est assez petit, le déterminant de la Jacobienne ne s'annule pas. Par le théorème d'inversion locale, f_t est ouverte, et donc, si C est une couronne ouverte contenant $r.S^{n-1}$ (sphère de rayon r), $f_t(C)$ est un ouvert. Puisque l'image par f_t d'un vecteur de norme s est de norme $s\sqrt{1 + t^2}$, un vecteur n'appartenant pas à $r.S^{n-1}$ ne peut avoir une image dans $r\sqrt{1 + t^2}.S^{n-1}$, et donc

$$f_t(C) \cap r\sqrt{1 + t^2}.S^{n-1} = f_t(r.S^{n-1}).$$

Ainsi, $f_t(r.S^{n-1})$ est un ouvert de la sphère de rayon $r\sqrt{1 + t^2}$ (topologie induite). D'autre part, $r.S^{n-1}$ est compacte, donc $f_t(r.S^{n-1})$ également, donc $f_t(r.S^{n-1})$ est fermé ; $f_t(r.S^{n-1})$ étant ouvert et fermé (non vide) de la sphère de rayon $r\sqrt{1 + t^2}$ qui est connexe (pour $n \geq 2$), $f_t(r.S^{n-1})$ est cette dernière sphère. ∎

On a donc montré que $f_t(A)$ est égal à

$$\{x \in \mathbf{R}^n / a\sqrt{1 + t^2} \leq \|x\| \leq b\sqrt{1 + t^2}\}.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{vol}(f_t(A)) = \left(\sqrt{1 + t^2}\right)^n \times \mathrm{vol}(A).$$

Si n est impair, cette formule indiquerait que le volume de l'image de A n'est pas polynômial en t, ce qui est contradictoire avec notre premier lemme. ∎

THÉORÈME 3 (LA BOULE DE BILLARD CHEVELUE). *Il n'existe pas de champ continu de vecteurs tangents partout non nul sur une sphère de dimension paire.*

DÉMONSTRATION. Par l'absurde, supposons construit un tel champ Φ. Il possède, bien sûr, un plus petit vecteur (la sphère étant compacte), dont la longueur est notée l. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, ou bien par un produit de convolution, il est possible d'approximer notre champ par un autre champ Ψ, C^1 celui-là, et tel que, pour un $\varepsilon > 0$ fixé et pour tout point x de la sphère on ait :

$$\|\Phi(x) - \Psi(x)\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour $\varepsilon < l$, le nouveau champ C^1 ainsi construit ne s'annule pas. Pour en déduire une contradiction avec le théorème 2, il ne reste plus qu'à adapter Ψ pour le rendre tangent à la sphère. Pour cela, on projette simplement chaque vecteur $\Psi(x)$ sur le plan tangent à la sphère en x. L'inégalité triangulaire montre assez aisément que ce nouveau champ C^1 ne s'annule pas, ce qui contredit bien ce que nous avons montré plus haut. ∎

Conclusion

La démonstration de John Milnor ne s'arrête pas au simple théorème de la boule de billard chevelue : l'auteur démontre ensuite le théorème de Brouwer, conséquence assez directe de ce que nous avons vu. Ainsi donc, sur la Terre, existe-t-il toujours un point en lequel le vent ne souffle pas. Une extension naturelle de notre problème pourrait être à présent de se demander quels sont les types de surfaces compactes pour lesquelles le théorème de la boule de billard chevelue ne s'applique pas. Dans $\mathbf{R}^3$, par exemple, on peut montrer qu'il n'y a que le tore (et, bien sûr, toutes les surfaces qui lui sont homéomorphes) qui puisse être chevelu sans épi.

À suivre...

◇ Benoît Rittaud
École normale supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69007 Lyon
brittaud@ens.ens-lyon.fr