Notation symbolique, le tournant de la mathématique arabe*

Azzeddine Lazrek et Khalid Sami
Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences, Marrakech, Maroc

Résumé

Le système de notation symbolique joue un rôle déterminant dans la communication et le développement de la mathématique. L'utilisation des symboles empruntés à l'alphabet de l'écriture pour noter des concepts mathématiques est déjà attestée chez les Babyloniens. D'autres civilisations ont développé des systèmes de notation perfectionnés. Les abréviations, par exemple, étaient d'usage dans l'œuvre de Diophante. Les mathématiciens Arabo-musulmans ont adopté ces abréviations et en ont répandu l'usage. al-Qalasady (vers 1412-1486, Tunisie - Grenade) fit prendre à la notation symbolique un tournant révolutionnaire en 1448 dans son traité *kCf al-asrar En Elm Hrwf al-gbar*. Ibn Qunfud (-1407, Constantine) fit également progresser l'usage des symboles en algèbre. Ceci dit, l'emprunte du temps et du lieu, sur la notation mathématique s'efface avec l'usage. Pourtant, les raisons du choix du symbole, l'évolution de sa forme, sa consécration parmi d'autres symboles qui notent le même concept, tout cela est le fruit d'un cheminement historique dans un contexte socio-culturel déterminé. En Europe, après la renaissance, la notation symbolique fut adaptée à l'écriture de la langue romane (usage de la lettre x pour noter la variable ou l'inconnue, adaptation du symbole $\surd$ pour la racine carrée, etc.). L'histoire de quelques symboles littéraux est riche d'enseignements. Bien des idées reçues seraient alors à reconsidérer.

*http://ucam.ac.ma/fssm/rydarab lazrek@ucam.ac.ma k_sami@ucam.ac.ma

1 Introduction

1.1 Objectifs et motivations

Cette contribution vise à rappeler quelques étapes du développement de l'utilisation des symboles en mathématique. Cela nous permettra, en particulier, d'examiner quelques processus d'adaptation de la notation mathématique à de nouveaux contextes culturels.

L'histoire des mathématiques arabes à fait l'objet de nombreux travaux, mais peu d'études ont été consacrées spécifiquement à l' histoire des symboles mathématiques arabes.

L'étude de l'histoire de la notation symbolique en mathématique peut se ramener, en particulier, à des interrogations sur :

- la date de la (des) première(s) utilisation(s) des symboles ;
- la diversité de symboles utilisés pour le même concept, y compris les symboles qui n'ont pas pu résister à l'épreuve du temps ;
- les raisons du choix de la forme du symbole ;
- l'évolution de la forme du symbole dans le temps ;
- l'influence du contexte culturel et en particulier de la langue sur le choix de la forme du symbole ;
- l'adaptation aux spécificités de la langue lors de l'importation ;
- le lien entre la nomination d'un concept et le symbole correspondant ;
- l'impact du sens de l'écriture sur l'orientation du glyphe du symbole ;
- les contraintes techniques avec le passage à :
  - l'imprimerie avec la typographie classique et la composition des symboles ;
  - l'ordinateur avec la typographie numérique et la composition des expressions symboliques.

Une attention particulière pourra être accordée aux symboles introduits ou utilisés par les Arabes.

Un système symbolique est plus qu'un simple système de notation de désignation car il évoque des opérations, des règles de transformation des symboles et une syntaxe particulière. C'est un véritable langage. L'introduction du calcul symbolique, a contribué grandement à l'utilisation systématique des signes et des symboles littéraux.

La notation symbolique est en principe conventionnelle. On peut utiliser n'importe quel symbole pour un concept donné dans un texte. Il suffit, pour cela, de poser sa définition à l'avance. L'usage consacre ensuite certains symboles. Ceci dit, la consécration de l'usage est fondamentale, Michael Stifel (1487-1567, Allemagne) avait besoin de 200 pages dans son livre d'algèbre pour traiter de l'équation de second degré [7, p. 15]. Isaac Barrow (1630-1677, Grande-Bretagne), maître de Isaac Newton (1642-1727, Grande-Bretagne), eut besoin de 100 pages et d'autant de figures pour résoudre des problèmes de tangentes ou d'aires [7, p. 15-16]. Il n'a pas utilisé de symboles puisqu'ils étaient méconnus à son époque. C. F. Gauss (1777-1855, Allemagne) a mis plus de vingt ans à chercher un signe pour une expression algébrique.

1.2 Points de méthode

Cette étude est limitée à l'histoire des symboles mathématiques. Elle ne s'étend pas aux notions et aux concepts relatifs à ces symboles. L'étude de la nomination des concepts est aussi intéressante du fait que certains symboles tirent leurs origines de cette nomination (ex. Π ou p comme l'initiale de *périmètre* (en grec ou en roman) et c comme l'initiale de *circonférence* (en roman)). L'introduction d'un symbole n'implique pas sa généralisation. La généralisation se fait lentement. Nous exposons ici plus les raisons du choix de certains symboles et leur évolution que l'étude purement historique. On peut remarquer que :

- en général, lorsque plusieurs personnes travaillent sur un sujet scientifique, la découverte est attribuée au plus célèbre d'entre eux ;
- la première utilisation d'un symbole est très difficile à déterminer : dans le temps, dans le lieu géographique, suivant les historiens et les documents disponibles, etc.
- la précision à faire sur :
  - le nom complet de l'inventeur : pour enlever toute ambiguïté possible de surnom ou de lien familial (ex. les frères (Jacques, Jean et Daniel) et fils (Daniel fils de Jean) Bernoulli) ;

- la période vécue par cet inventeur[1] : pour voir l'éventualité d'une communication directe avec d'autres mathématiciens contemporains ;
- le pays ou la ville d'origine : l'influence de la langue maternelle, la possibilité d'un lien géographique avec d'autres mathématiciens, etc.

• les difficultés rencontrées :

- il nous a été très difficile de trouver les premières utilisations de certains symboles ou de vérifier les prétentions de certaines références ;
- dans les documents étudiés, certains symboles sont orientés tantôt vers la droite tantôt vers la gauche. Les raisons de cela peuvent être rapportées :
  * au support utilisé, le moyen d'écriture, l'écriture manuelle ;
  * involontairement, à l'imprimeur, au transcripteur ou à la main du créateur ;
  * à un problème technique de production ;
  * à un changement volontaire du créateur ;
  * à la traduction du document de la langue d'origine ;
  * au manque d'exactitudes ;
  * au manque d'attention accordée aux symboles.

- il nous a été parfois difficile de reproduire, avec exactitude, certains symboles. Nous avons confectionné la fonte **AntiSym** [11] pour fournir ces symboles historiques ;
- à notre connaissance et à quelques rares exceptions [6], [1] et [2], il y a très peu de travaux dédiés spécialement à l'étude de l'histoire des symboles mathématiques et encore moins pour celle des symboles mathématiques arabes ;
- les anciens manuscrits sont difficiles à lire car les notions et les expressions sont présentées littéralement, à défaut de symboles, et le texte mêle aussi les idées, les réflexions et les méditations de l'auteur ou du transcripteur ;

[1]L'écriture des dates, relatives à la naissance ou au décès, sont rapportées à l'ère chrétienne.

– pour être accessible à un large public, l'histoire des mathématiques est souvent présentée dans le langage mathématique moderne.

2 Premières notations symboliques

Au XX^{e} siècle av. J.-C., à Babylone, on a utilisé le symbole ⅄ pour noter l'inconnue [4, p. 2]. Plus tard, (vers 325-410) à Alexandrie, Diophante, dans *Arithmétiques*, utilise la lettre σ ou Σ, finale de arithmos en grec, pour noter les nombres entiers naturels de manière générale [5, p. 69] [4, p. 8]. Diophante utilise également des abréviations pour désigner des symboles [10, p. 6]. Il utilise la lettre χ pour noter la soustraction par exemple. Les Égyptiens utilisaient le symbole ┘⦣ (une paire de jambes marchant vers la gauche) pour noter l'addition et └∠ (une paire de jambes marchant vers la droite) pour noter la soustraction comme cela est attesté dans le Papyrus Rhind[2] [2] (Cf. Table 2).

Les opérations naissent, a priori, de préoccupations pratiques : le partage de l'héritage, l'écriture des transactions, ... On n'a pas besoin de symboles spéciaux pour noter cela. Les ouvrages des mathématiciens anciens arabes sont presque dépourvus de symboles algébriques.

3 Le tournant de la mathématique arabe

La palme d'or, en matière de notation symbolique, revient à Mohammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850, Bagdad) qui fit un usage massif du symbole ش شـ س (la lettre initiale de شيء *shayA* (chose en arabe) en forme finale, initiale ou dépourvus de points diacritiques) l'utilise pour noter la *variable* ou l'*inconnue* en 820 [19, p. 141]. Cette prétention n'a pas pu être vérifiée. C'est là une véritable révolution dans la notation. L'inconnue est complètement absente du langage naturel. L'usage d'un simple symbole, pour noter l'inconnue, élimine l'anaphore, le renvoi à un sujet, du langage. Au lieu de dire "*le carré d'une chose ajouté à trois fois cette chose ajouté à deux font trente six, quelle est cette chose ?*" il suffira d'écrire "chercher x tel que $x^2+3x+2=36$". Au lieu de se perdre avec la *chose*, on manipule sa représentation x avec beaucoup plus de simplicité. Le calcul verbal est très difficile à manier, car il est facile de

[2]Le Papyrus Rhind, du nom de son découvreur en 1858, est l'œuvre du scribe Ahmès vers 1650 av. J.-C.

perdre de vue les résultats à atteindre ou de faire la confusion entre les données et les résultats d'un problème.

Abd RaHmAn Ibn Khaldun (1332-1406, Tunis-Caire) rapporte que : "Ibn al-Banna a rédigé, sous l'influence de deux prédécesseurs Ibn Mun'im[3] et al-aHdb[4], un résumé[5] des démonstrations de ces deux auteurs et autres résultats concernant les techniques d'utilisation des symboles dans les preuves. Cela sert également dans le raisonnement abstrait et la représentation pour l'œil où réside le secret et l'essence de l'explication des théorèmes de calcul à l'aide des symboles" [6] [8]. On peut ainsi voir que des symboles étaient utilisés par les mathématiciens arabes avant le XIII^{e} siècle. Ce qui se confirme du reste, par une traduction au latin d'un texte arabe, faite par Gerard De Cremone (1114-1187). Il serait pertinent d'étudier l'utilisation des symboles mathématiques chez les mathématiciens arabes à partir du XIII^{e} siècle. En particulier, il serait très intéressant d'étudier le symbolisme dans les œuvres d'Ibn al-Banna (1256-1321, Marrakech).

Ibn MunEim al-Ebdry (-1228, Maghreb Extrême) dans *fqh al-Hsab* utilise des lettres pour désigner les paramètres. Une lettre ou deux lettres surlignées pour les considérer comme un tout. Cette notation provient de la représentation d'un nombre comme une mesure de la longueur d'un segment. Elle fut utilisée plus tard par Jordanus Nemorarius (-1273, Allemagne) dans *Arithmetica decem libris demonstrata* [10, p. 201].

Ahmed Ibn Qunfud (1330-1407, Constantine) fit progresser l'usage des symboles en algèbre dans *HaT anniqab En wjwh al-Hsab* [4, p. 136] [8, p. 120].

Ali Ben Mohamed al-Qurayshi al-Qalasady (vers 1412-1486, Tunisie - Grenade) en 1448 dans son traité *kCf al-asrar En Elm Hrwf al-gbar*[6] [15, p. 20], représente une exception remarquable et inattendue, d'après A. P. Youschkevitch [14, p. 103-104] [20, p. 402-403].

---

[3] Ibn Mun'im (-1228, Maghreb Extrême) dans *fqh al-Hsab*.

[4] al-aHdb dans *alkamil* à la fin du XII^{e} siècle.

[5] Ahmed Ibn al-Banna (1256-1321, Marrakech) dans *rfE al-hjab En wjwh aEmal al-Hsab*.

[6] كشف الأسرار عن علم حروف الغبار *Dévoilement des secrets de la science des chiffres al-gbar en arabe.*

4 Adaptation de la notation symbolique

Un certain nombre de facteurs peuvent influer sur le choix de la notation :

- la langue (ex. l'ensemble est noté à l'aide de l'initiale du mot qui le désigne dans la langue : `E` initiale du mot Ensemble en français, `S` initiale du mot Set en anglais, `M` initiale du mot Menge en allemand, م initiale du mot مجموعة en arabe, ...) ;
- la commodité et la simplification de l'écriture ainsi que le souci d'éliminer le risque de confusion entre le signe diacritique de la lettre et les accents symboliques des symboles entraîne l' élimination des signes diacritiques (ex. la lettre ش évolue en س en arabe et la lettre i mathématique devient $\imath$ en roman) ;
- l'exploitation des traits d'écriture (minuscule et majuscule, gras, ...) et la fonte (ex. l'opérateur $\mathcal{F}$ agit sur la fonction f dans l'ensemble F) ;
- la parenté entre familles de caractères et concepts (ex. utilisation des lettres $\imath$, $\jmath$, k, ... pour noter les constantes ou les nombres entiers et les lettres x, y, z, ... pour noter les variables ou les nombres réels). Les lettres minuscules sont utilisées pour les quantités connues et les lettres majuscules pour les quantités inconnues puis, en 1637, on utilise : a, b, c pour les indéterminés et x, y, z pour les inconnues ;
- la variation de taille ou de position (ex. le signe se déplace en diagonale en haut pour indiquer l'exposant x^i ou en bas pour indiquer l'indice x_i) ;
- le sens du déroulement de l'écriture (ex. $\{$ est l'accolade ouvrante en roman dont le sens du déroulement est de gauche vers la droite, par contre c'est l'accolade fermante en arabe dont le sens de déroulement est de la droite vers la gauche).

4.1 Systèmes de numération

Un des traits de notation liés à l'écriture arabe encore présents dans le système de numération actuel est que le sens du système de numération décimal de position se déroule de la droite vers la gauche : la valeur du chiffre croît des unités vers les dizaines, vers les centaines, etc. à mesure que sa position dans l'écriture du nombre se déplace de la droite vers la gauche.

Le système de numération décimal de position fut utilisé initialement en Inde. On suppose que c'est pour cela qu'on parle de *chiffres indiens*. Les Arabes ont répandu l'usage de ce système de numération. Ils le nommeront *Hsab, huruf ou rusum al-gubar*[7] en associant à l'objet "rien" mathématique un symbole (le chiffre *zéro*), soit un élément opératoire. Ils décriront les *algorithmes*[8] des opérations arithmétiques de base (l'addition, la soustraction et la multiplication). Les Européens ont importé ce système de numération et l'ont appelé les *chiffres arabes*. Cette importation n'a pas été accompagnée d'une importation des glyphes des chiffres ni du sens de la direction de lecture des nombres. Le sens de la direction de lecture des nombres en arabe est de droite à gauche, ce qui coïncide avec le sens de position décimale croissante et le sens du déroulement de l'écriture arabe. La direction de l'évaluation des opérations arithmétiques décrites par les Arabes est de droite à gauche aussi. Les Européens ont adapté les glyphes des chiffres aux particularités de l'écriture romane, en particulier, à la direction du déroulement de cette écriture. Ils ont adapté aussi la lecture des nombres à leurs particularités (ex. 123 se lit en romain de gauche à droite *cent vingt trois* et se lit en arabe de droite à gauche ثلاثة وعشرون ومائة). En effet, en roman, la direction de déroulement de la lecture des nombres coïncide avec la direction de l'écriture, c'est-à-dire de gauche à droite. Le glyphe des chiffres arabes occidentaux est resté presque inchangé depuis l'invention de l'imprimerie.

4.2 Symboles littéraux

L'utilisation de l'alphabet de l'écriture de la langue pour les besoins de la notation mathématique est très courante. Le symbole est alors composé d'une ou plusieurs lettres, avec ou sans déformation, de l'initiale ou d'une abréviation du nom de la notion notée (Cf. Table 8 et 3). L'alphabet de l'écriture fut utilisé, entre autres, pour noter :

- les nombres : (ex. *Hsab al-jumal* en arabe (resp. *système ionique* en grec) ا, ب, ج, ... (resp. α, β, γ, ...) notent respectivement 1, 2, 3, ...) (Cf. Table 2) ;
- l'inconnue : (ex. ش en arabe et x en roman) ;

[7] L'écriture se faisait dans du sable *al-gubar* étalée dans une planche.

[8] Le terme *algorithme* vient du nom du mathématicien Mohammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850, Bagdad).

- les fonctions : (ex. pour noter la racine carrée de 6, certains mathématiciens arabes ont écrit $\underset{6}{\text{ج}}$ (ج est l'initiale du mot jdr جذر (racine)), d'autres mathématiciens romans ont alors écrit `R6` (`R` est l'initiale du mot Radix (racine)). La notation arabe a évolué ensuite en $\overline{6}\!\surd$, celle romane a également évolué en $\sqrt{6}$, probablement à partir de la forme arabe ج, plutôt que partant du `R`. En théorie des

  équations, la racine est la valeur d'une inconnue vérifiant une équation particulière.

Luca Pacioli (1445-vers 1510, Italie) utilise les symboles co., ce. et cu., les abréviations de cosa ou causa, censo ou census et cudo (une chose, le carré de l'inconnue, le cube de l'inconnue en Italie) respectivement [4, p. 10].

L'initiale de shei ou shai, transcrit xei (res ou radix en latin) (chose en arabe) (xay en espagnol). La phone ش étant notée **x** en espagnol [19, p. 141], la lettre x notera dorénavant l'inconnue par René Descartes (1596-1650, France) en 1637 dans *La Géométrie* [6, vol. 1, p. 381] [1].

4.3 Dessins géométriques

En arabe :

- le sens d'avancement dans un cercle est le sens positif conventionnel qui est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre ;
- le sens d'un angle est le sens positif conventionnel ;
- le sens descendant d'une droite oblique est du haut à droite vers le bas à gauche ;
- le sens descendant d'une droite horizontale est de la droite vers la gauche ;
- le sens de succession des colonnes d'un tableau est de la droite vers la gauche ;

C'est l'inverse de ses sens qu'on trouve en roman.

5 Les systèmes symboliques actuels

Actuellement, dans les pays arabes, l'écriture de la composante symbolique des textes mathématiques prend différentes formes qu'on peut répartir grossièrement en deux grandes options [13] [17] [11] :

- à l'*occidentale* comme dans les textes mathématiques de la langue anglaise ou bien comme ceux de la langue française. Les symboles sont alors empruntés principalement à l'une ou à l'autre de ces deux langues, selon la prépondérance de l'influence culturelle. La direction de l'écriture des expressions symboliques suit également celle de la langue d'origine, de gauche à droite, en opposition de l'écriture du texte qui suit le sens de l'écriture de la langue naturelle arabe, de droite à gauche ;

- à l'*orientale* où des symboles spécifiques sont alors d'usage. L' écriture des expressions symboliques suit le sens de l'écriture de la langue naturelle, de droite à gauche.

Dans le premier cas, l'écriture des expressions mathématiques pose un bon nombre de problèmes. On peut en citer en particulier [12] (Cf. Table 1):

- les symboles ne sont pas tous unifiés sur le plan international. On trouve, par exemple, dans les pays anglophones les symboles `ln`, `LN` et `tan` auxquels correspondent dans les pays francophones `log`, `Log` et `tg` respectivement, pour signifier le logarithme, le logarithme népérien et la tangente. Dans les pays anglophones on utilise le signe (.) pour séparer la partie fractionnaire de la partie décimale d'un nombre et le signe (,) pour séparer les milliers des centaines alors que dans les pays francophones, l'usage de ces deux signes est inversé. Selon l'influence de l'ancien colonisateur, le langage mathématique arabe empruntera l'une ou l'autre convention (Cf. Table 9). Ainsi, pour la même langue naturelle arabe, les conventions de l'écriture de la composante symbolique divergent ;

- la bi-directionalité de l'écriture : l'écriture de la langue arabe se déroule de la droite vers la gauche, alors que celle des expressions symboliques suit le sens inverse. Il en résulte de grandes difficultés d'agencement et de coordination des différentes unités. Par exemple, lorsqu'on écrit à la main, une ligne peut commencer par une phrase écrite en langue naturelle et se terminer par une expression symbolique. Il faut donc déterminer à l'avance la longueur de cette expression pour éviter l' enchâssement entre les deux morceaux d'écriture ;

- l'utilisation de symboles étrangers dont la lecture ou la prononciation, fait appel à des vocables qui ne sont pas tout à fait ceux écrits. Cela mènerait à terme à la désuétude des termes arabes correspondants en plus des problèmes pédagogiques. Quand on utilise le symbole `sin` pour désigner le *sinus*, soit on prononce `sin` et on n'utilise pas le terme *jyb*, soit on prononce *jyb* et on lit ce qui n'est pas écrit ;

- la relation entre le glyphe du symbole et le nom du concept ou la signification de son contenu. Le symbole somme $\sum$, par exemple, est la première lettre du mot *somme* écrit avec l'alphabet grec. La même chose pour le symbole intégrale $\int$ et sa signification *Somme*. Cette relation s'évanouit complètement lorsqu'on adopte le système symbolique occidental pour l'écriture du langage mathématique arabe ;

- l'utilisation simultanée de deux systèmes de ponctuation dont les fonctions sont identiques pour des dessins de symboles différents. Doit-on utiliser la virgule arabe ou la virgule romane, par exemple, pour la séparation des éléments d'une liste ?

Les différences de notation entre le système typographique français et celui anglo-saxon (Cf. Table 9), comme systèmes parmi les plus utilisés dans le monde, montrent à l'évidence qu'**il n'y a pas de système international de notation**, contrairement à ce que pensaient ceux qui avaient décidé l'importation et l'adoption du système français au Maroc [21]. L'étude des différences de notation entre le système de notation français et celui anglo-saxon peut aider à faire des choix pour le système symbolique arabe.

Il y a une pratique différente entre les systèmes de notation dans les différents domaines des mathématiques (la théorie de la mesure, les probabilités, la logique, ...) (ex. l'utilisation des symboles $\vee$, $\cup$, $\sqcup$ et $+$ pour la même notion suivant le domaine).

La rigueur absolue en mathématique va contre la tolérance excessive en physique (ex. la notation de la fonction utilise f ou $f(x)$).

6 Conclusion

D'après ce qui précède, on peut conclure que :

- il y a une grande influence de la langue, de la culture et plus généralement du contexte culturel et de l'état d'avancement des mathématiques, sur le choix d'un symbole pour noter un concept donné ;

- les occidentaux adaptaient le système symbolique à leurs spécificités : la langue, l'alphabet, le sens d'orientation, ... aussi bien en ce qui concerne la forme des chiffres de numération, dits arabes, que pour certains symboles (ex. `x`, `aeq`, $\surd$) ;

- la naissance, l'utilisation et l'évolution de la notation mathématique sont riches en enseignements sur l'histoire des concepts ;

- le développement du calcul algébrique a entraîné un usage massif des abréviations puis celui des symboles ;

- l'utilisation des abréviations a commencé depuis Diophante au IV$^{\text{e}}$ siècle. Elle a été adoptée et étendue par les mathématiciens arabes à partir du XII$^{\text{e}}$ siècle. Elle a été répandue grâce aux mathématiciens occidentaux à partir du XV$^{\text{e}}$ siècle ;

- les Arabes ont devancé les occidentaux dans la symbolisation. Plus tard, il y eut une coupure, le système symbolique occidental fut ensuite importé en arabe ;

- la surcharge des symboles, certains symboles se sont vu multiplier leurs fonctions (ex. le symbole $+$ (loi de composition additive) pour les nombres entiers, les nombres complexes, les fonctions, les propositions, les matrices, ...) ;

- certains symboles n'ont pas pu résister face à d'autres symboles (ex. `p` ou `c` par rapport à π) ;

- il n'y a pas de système symbolique international. Il y a de grandes divergences entre le système français et celui anglais.

Références

[1] *http://members.aol.com/jeff570.*

[2] *http://www.citeweb.net/le93.*

[3] Grange Batelière, *Grand Encyclopédie Alpha des sciences et des techniques - Mathématiques*, Éditions Atlas, Paris, 1976.

[4] Bordas, *Bibliothèque pratique de l'enseignant - Mathématiques*, Bordas, Paris, 1985.

[5] Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris (Édition 1974), 1969.

[6] Florian Cajori, *A history of mathematical notation*, (The Open Court Publishing Company, La Salle, 1928-1929) Dover Publications, NewYork, 1993.

[7] Jean Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Hermann, 1986.

[8] Ahmed Djebbar, *Enseignement et rechercher mathématiques dans le Maghreb des XIII^{e}-XIV^{e} siècles*, Publications Mathématiques d'Orsay, Paris (1981), no. 81-02.

[9] Roshdi Rashed et Régis Morelon, *Histoire des sciences arabe, Tome 2 : Mathématiques et physique*, Éditions du seuil, Paris, 1997.

[10] Driss Lamrabet, *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, Rabat, 1994.

[11] Azzeddine Lazrek, *Vers un système de traitement du document scientifique arabe*, Thèse d'État ès-Science, Université Cadi Ayyad (2002), Marrakech.

[12] Azzeddine Lazrek and Khalid Sami, *Arabic mathematical documents, Typesetting for a better learning*, Proceeding of the International Symposium on Innovation in Information & Communication Technology (2002), 165–180, Amman, Jordan.

[13] Khalid Sami, *Sur certains aspects de la formulation et de l'écriture de la mathématique en langue arabe*, Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve (1992).

[14] Adolf P. Youschkevitch, *Mathématiques arabes (VIII^{e}-XV^{e} siècles)*, Traduit par M. Cazenave et K. Jaouiche, Librairie Philosophique J. VRIN, 1976.

[15] محمد سويسي، كشف الأسرار عن علم حروف الغبار لابو الحسن علي بن محمد القرشي القلصادي، تحقيق بيت الحكمة، قرطاج، تونس، 1988 .

(Mohamed Swsy, *Dévoilement des secrets de la science des chiffres al-Gbar* de Abw al-Hsn Ely bn Mohamed al-qrCy al-qlSady, Maison de la sagesse, qrTaj, Tunisie, 1988.)

[16] جون ماكليش، العدَد من الحضارات القديمة حتى عصور الكمبيوتر، ترجمة خضر الأحمر وموفق دعبول، عالم المعرفة، الكويت، 1999 .

(John Mcleish, *Number, from ancient civilisations to the computer*, Traduction Xedr al-AaHmer et Muwefiq dEbwl, Univers du savoir, Koweït, 1999.)

[17] خالد سامي، حول اتجاه كتابة الرموز الرياضية في الكتب المدرسية في المغرب، المؤتمر السنوي الرابع لتعريب العلوم، الجمعية المصرية لتعريب العلوم، القاهرة، مصر، 1998 .

(Khalid Sami, *Sur la direction de l'écriture des symboles mathématiques dans les manuels scolaires au Maroc*, 4e congrès d'arabisation des sciences, Association d'arabisation des sciences et Université Ayn Shams, Le Caire, Égypte, 1998.)

[18] رنيه تاتون، تاريخ الحساب، ترجمة موريس شربل، منشورات عويدات، بيروت، باريس، 1986 .

(René Taton, *Histoire du calcul*, Traduction Mouris Charbel, Publications Ewydat, Beyrouth - Paris, 1986.)

[19] عمر فروخ، تاريخ العلوم عند العرب، دار العلم للملايين، بيروت، 1970 .

(Emr frwX, *Histoire des sciences chez les arabes*, Maison du savoir pour des millions, Beyrouth, Liban, 1970.)

[20] محمد عبد الرحمان مرحبا، الجامع في تاريخ العلوم عند العرب، منشورات عويدات، بيروت باريس، الطبعة الثانية، 1988 .

(Mohamed Ebd al-rHman mrHba, *Recueil sur l'histoire des sciences chez les arabes*, Publications Ewydat, Beyrouth - Paris, 1988.)

[21] وزارة التربية الوطنية، تعريب تدريس الرياضيات في السلك الأول، مكتبة المعارف، الرباط، 1984 .

(Ministère de l'Éducation Nationale, *Arabisation de l'enseignement des mathématiques au premier cycle*, Librairie du savoir, Rabat, 1984.)

Table 1: Quelques anomalies du système de notation importé

Prononciation Lecture	Notation importée	Notation arabe	Texte
إكس	x	س	شيء
بي	π	ٯ	نسبة محيط الدائرة على قطرها
سين	sin	جا	الدالة جيب
سيكما من … إلى …	Σ	مج	المجموع
	1,2,3 و 4	4 و 3, 2, 1	المتتالية
مائة وثلاثة وعشرون ثلاثة وعشرون ومائة	123	١٢٣ 123	العدد
	3,141 3.141	٣,١٤١ 3,141	

Table 2: Premières notations symboliques

Concept	Symboles	Premières utilisations
Inconnue	⅄	Les Babyloniens au XX[e] siècle av. J.-C. [4, p. 2]. Les Babyloniens n'avaient pas de symboles pour l'inconnue [20, p. 118]
	σ Σ	Diophante (vers 325-vers 410, Alexandrie) dans *Arithmétiques* [5, p. 69] [4, p. 8] [20, p. 120]. La lettre finale de *arithmos* en grec. (uniquement pour les nombres entiers naturels, les nombres négatifs étaient méconnus à son époque). Il utilise des abréviations pour désigner des symboles [10, p. 6]
Addition	juxtaposition	Les Babyloniens au XX[e] siècle av. J.-C. [3, p. 284]. Actuellement, $3\frac{1}{2}$ représente $3+\frac{1}{2}$.
	┘ ⋋	Les Égyptiens dans le *Papyrus Rhind*, du nom de son découvreur en 1858, écrit par le scribe Ahmès vers 1650 av. J.-C., [2]. (Une paire de jambes marchant vers la gauche).
Soustraction	Y ≻	Les Babyloniens au XX[e] siècle av. J.-C. [6, v. 1, p. 6] [3, p. 284].
	∟ ∠	Les Égyptiens dans *Papyrus Rhind*, du nom de son découvreur au XIX[e] siècle, écrit par le scribe Ahmès, [2]. (Une paire de jambes marchant vers la droite).
	χ	Diophante (vers 325-vers 410, Alexandrie) [21, p. 68].
Racine carrée	⌜ ou ⸢	Les Égyptiens [19, p. 23] [6, vol. 1, p. 18].

Table 3: Notation de l'inconnue

Concept	Symboles	Premières utilisations
Inconnue	ش, شيء, س, شـ	Mohammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850, Bagdad) en 820 [19, p. 141].
	مال pour x^2 كعب pour x^3 مال مال pour x^4 مال كعب pour x^5	Mohammad al-Karkhi (-1029, Baghdad) dans *Fkhri* ou *al-badiE* [6]. C'est une symbolisation importante pour la factorisation polynomiale [8].
	ش ou ∴ pour x م pour x^2	Ibn al-Yasmyn (-1204, Maghreb Extrême) dans *TlqyH al-afkar fy alEml b-rswm al-gbar* [10, p. 238] [8, p. 20].
	جـ ، شـ ، مـ ، كـ عـ $\overset{1}{\underset{4}{\text{سـ}}}\overset{0}{\underset{5}{\text{عـ}}}$ ⟌ $\overset{2}{\underset{3}{\text{مـ}}}\overset{3}{\underset{2}{\text{كـ}}}\overset{7}{\underset{1}{\text{ككـمـ}}}$ pour $x^7 + 2x^3 + 3x^2 = 4x + 5$	Ali Ben Mohamed al-Qurayshi al-Qalasady (vers 1412-1486, Tunisie - Grenade) en 1448 dans *kCf al-asrar En Elm Hrwf al-gbar* [15, p. 20,90] [14, p. 104]. La lettre initiale de *jhl* ou *jdr*, *shyA*, *mal* et *kEb* pour l'inconnue, un objet inconnu, le carré de l'inconnue et le cube de l'inconnue respectivement. al-Qalasady utilise la lettre initiale de *Eded* (nombre) pour une constante ou la puissance 0 [8, p. 49]. Parfois, il surmonte les lettres, marquant les puissances, de la valeur de la puissance [8, p. 49].
	جـ ou حـ $\underset{6}{\text{حمكـ}}$ pour $\frac{6}{x^5}$	Shihab addine Ibn al-Majdi (1365-1447, Caire) dans *HAwi llubAb* utilise la lettre initiale de *jz'* (partie) pour l'inversion des puissances [8, p. 122].
	co., ce., cu.	Luca Pacioli (1445-vers 1510, Italie) [4, p. 10]. Les abréviations de cosa, censo et cudo (le radical, la possession et le cube pour une chose, le carré de l'inconnue, le cube de l'inconnue en italien) respectivement.

Table 4: Quelques systèmes de numération

Époque / Nombres	Mayas	Mésopotamiens Babyloniens	Égyptiens	Romains	Arabes *Hsab al-jmal*	Grecs Système Ionique	Grecs Système Attique	Arabes rumy	Indes-Arabes *al-gbar*
0		espace[9]	espace[2]						0 ou o ou .
1	.	Y ou ▼ (clou)	| (trait)	I	أ	α ou α′	I	[illegible]	1 ou ١
2	..	YY	||	II	ب	β		[illegible]	2 ou ٢
3	...	YYY	|||	III	ج	γ		[illegible]	3 ou ٣
4	....	YYY Y	||||	IV	د	δ		[illegible]	4 ou ٤
5	—	YYY YY	||| ||	V	ه	ε	Γ ou Π (penta)	[illegible]	5 ou ٥
6	˙ —	YYY YYY	||| |||	VI	و	ϛ ou F' (digamma)	ΓI	[illegible]	6 ou ٦
7	.. —	YYY YYY Y	|||| |||	VII	ز	ζ		[illegible]	7 ou ٧
8	... —	YYY YYY YY	|||| ||||	VIII	ح	η		[illegible]	8 ou ٨
9	.... —	YYY YYY YYY	||| ||| |||	IX	ط	θ	ΓIIII	[illegible]	9 ou ٩
10	= =	<	∩ (arc)	X	ي	ι	Δ (déka)	[illegible]	
11	˙ =	<Y	∩|	XI	يا	αι	ΔI		
19		< YYY YYY YYY	∩ ||| ||| |||	XIX	يط	θι	ΔΓIIII		
20		<<	∩∩	XX	ك	κ	ΔΔ	[illegible]	
30		<<<		XXX	ل	λ		[illegible]	
40		<<< <		XXXX	م	μ		[illegible]	
50	.. =	<<< <<		L	ن	ν		[illegible]	
60					س	ξ		[illegible]	
70		Y<			ع	o		[illegible]	
80		Y<<			ف	π		[illegible]	
90		Y<<<		XC	ص	ϟ (koppa)		[illegible]	
100		| ou |	𓍢 ou 𓍢	C (Centum)	ق	ρ	H (hecta)	[illegible]	
200					ر	σ		[illegible]	
300					ش	τ		[illegible]	
400					ت	υ		[illegible]	
500				D	ث	φ		[illegible]	
600					خ	χ		[illegible]	
700					ذ	ψ		[illegible]	
800					ض	ω		[illegible]	
900					ظ	απ′ (sampi)		[illegible]	
1 000			𓆼 ou 𓆼 (fleur)	M ↀ	غ	͵α	X (chilioi)	[illegible]	
10 000			𓂭 ou 𓂭 (doit)	$\overline{X}$		α M	μ ou M (muriadê)		
100 000			𓆐 ou 𓆐 (poisson)			ι M			

Table 5: Quelques systèmes de numération - suite -

Époque / Nombres	Mayas	Mésopotamiens Babyloniens	Égyptiens	Romains	Arabes *Hsab al-jmal*	Grecs: Système Ionique	Grecs: Système Attique	Arabes rumy	Indes-Arabes *al-gbar*
1 000 000			 (homme)	$\overline{\overline{I}}$					
10 000 000									
$\frac{1}{3}$						γ''			
$\frac{2}{3}$						$\beta'\overline{\gamma}'$			
$\frac{1}{8}$						η''			
$\frac{1}{20}$						κ''			

Table 6: Représentation des nombres

Concept	Symboles	Premières utilisations
Fraction	$\genfrac{}{}{0pt}{}{\frac{2}{3}}{4}$ pour 2 3/4 puis $\frac{3}{4}2$ pour 2 3/4	Mohammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850, Bagdad) en 820 [9, p. 20]. Ibn al-Hassar (-1114, Andalous-Marrakech) vers 1200 dans *kitab al-byan wa tidkar fy Elm msaAl al-gbar* [1]. Nicolas Oresme (1325-1382, France) [2]. La barre est omise dans les imprimés parce qu'elle était difficile à reproduire en typographie.
Nombre décimal ou fraction décimale		Abu alHasan al-Uqlidisi (920-980, Arabe) [1] [10, p. 176]. Abbas Ibn Yahya al-Maghribi al-Samaw'al (1125-1180, Maghreb Extrême) [1]. Ghiyat al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi (1380-1429, Samarqand) dans *The key to arithmetic* [1] [10, p. 176]. al-Kashi dans *al-Risali al-mohitijie* donne la valeur de π en séparant la partie décimale 3 sah-hah ou sahih (complet ou correct en arabe) de la partie fractionnaire 1415926535898732 [1]. Léonard de Pise surnommé Leonardo Fibonacci (1170-1250, Italie) suit les Arabes en mettant la partie fractionnaire d'un nombre à sa gauche [1].
	123⓪4①5②6③7④ 123(0)4(1)5(2)6(3)7(4) 123(0)4567 $123\frac{4567}{10000}$ $123\frac{4}{10},\frac{5}{100},\frac{6}{1000},\frac{7}{10000}$ $''''7'''6''5'4 \quad 123$	Simon Stevin dit aussi Simon Bruges (vers 1548-1620, Belge flamand) en 1585 dans *La disme* (The decimal) [2] [3, p. 33].
	123 0 4567	Joost Bürgi (1552-1632, Suisse) en 1592.

Table 7: Représentation des nombres - suite-

Concept	Symboles	Premières utilisations
	123 | 4567	al-Kashi (1380-1429, Samarqand). Mizrahi (1455-, Turquie) [9, p. 69]. Christoph Rudolff (vers 1500-vers 1545, Allemagne) en 1530 [6, vol. 1, p. 316] [1]. François Viète (1540-1603, France) en 1579 [6, vol. 1, p. 316] [1] ou en 1598.
	123 , 4567 4567 . 123	Yang Hui (1238-1298, Chine) en 1261 [1]. John Napier (1550-1617, Écosse) en 1617 dans *Rabdologia* [6, vol. 1, p. 324] [1]. (le point ou la virgule sont écrits au niveau de la ligne)
	$\frac{4567}{1000}123$	Henry Briggs (1561-1630, Grande-Bretagne) en 1619.
Fraction sexagésimale	$3°8'29''44'''$ 3;8,29,44	al-Kashi (1380-1429, Samarqand) [9, p. 126-127]. (en degrés, minutes, secondes, tierces, ...)
Fraction continue	$\frac{1023}{7654}8$ pour $8+\frac{3}{4}+\frac{2}{5.4}+\frac{1}{7.6.5.4}$ pour $8+\frac{3}{4.5.6.7}+\frac{2}{5.6.7}+\frac{1}{7}$	al-Hassar (-1114, Andalous-Marrakech) vers 1200 dans *kitab al-byan wa tidkar fy Elm msaAl al-gbar* [10, p. 237]. Ibn al-Yasamin (-1228, Maghreb Extrême) dans *kitab talqyh al-afkar* [8].
Fraction discontinue	$\frac{4\|3\|2\|1}{8\|7\|6\|5}$ pour $\frac{1}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{8}$	Ali Ben Mohamed al-Qurayshi al-Qalasady(vers 1412-1486, Tunisie - Grenade) en 1448 dans *kCf al-asrar En Elm Hrwf al-gbar* [15, p. 20,90] [14, p. 104].
Proportion	$12 \therefore 8 \therefore 6 \therefore 4$ pour 4*12 = 6*8 ou 4/6 = 8/12	Ali Ben Mohamed al-Qurayshi al-Qalasady (vers 1412-1486, Tunisie - Grenade) en 1448 dans *kCf al-asrar En Elm Hrwf al-gbar* [15, p. 88] [14, p. 104].

Table 8: Quelques symboles littéraux

Concept	Symboles	Premières utilisations
Égalité	ل	Ali Ben Mohamed al-Qurayshi al-Qalasady (vers 1412-1486, Tunisie - Grenade) en 1448 dans *kCf al-asrar En Elm Hrwf al-gbar* [15, p. 20] [14, p. 104]. La lettre terminale de يعدل (*ya'dil* égal) pour une expression.
	aeq	L'initiale de aequales ou aequantur ou aequabitus (égalité en italien) [6, vol. 1, p. 297] [1].
	$=$	Robert Recorde (1510-1558, Grande-Bretagne) en 1557 dans *The Whetstone of Witte* en défendant son choix dit « Si j'ai choisi une paire de parallèles, c'est parce qu'elles sont deux lignes jumelles, et que rien n'est plus pareil que deux jumeaux » [6, vol. 1, p. 306] [2] [1].
Racine carrée	⌜ ou ⌜	Les Égyptiens [19, p. 23] [6, vol. 1, p. 18].
	جـ ou حـ حـ$_2$ pour $\sqrt{2}$ حـ حـ$_2$ pour $\sqrt{\sqrt{2}}$ ^{3}حـ$_2$ pour $3\sqrt{2}$ $^{\frac{1}{3}}$حـ$_2$ pour $\frac{1}{3}\sqrt{2}$	Abul-Hasan Ali Ben Mohamed al-Qurayshi al-Qalasady (vers 1412-1486, Tunisie - Grenade) en 1448 dans *kCf al-asrar En Elm Hrwf al-gbar* [15, p. 20] [14, p. 104] [10, p. 238]. Ibn al-Yasmyn (-1204, Maghreb Extrême). [8, p. 47]
	R ou ℞	Léonard de Pise surnommé Leonardo Fibonacci (1170-1250, Italie) en 1220 dans *Practica geometriae* [6, vol. 1, p. 90] [1]. Nicolas Chuquet (1445-1500, France) en 1484 dans *Triparty en la science des nombres* [6, vol. 1, p.] [1]. L'initiale de Root (racine en anglais) de square root. L'expression sur laquelle porte le radical est soulignée [6, vol. 1, p. 101,385] [1]. Il généralise l'utilisation du soulignement de l'expression appliquée à une opération. Frans Van Schooten (1615-1660) en 1646 utilise le surlignement de l'expression appliquée à une opération [1].
	$\surd$	Christoph Rudolff (1500-1545, Allemagne) en 1525 (sans la barre) [2] [1]. L'initiale de radix (radical), déformé, d'après Leonhard Euler (1707-1783, Suisse) en 1755 dans *Institutiones calculi differentialis* [1].
	$\sqrt{}$	René Descartes (1596-1650, France) en 1637 dans *La Géométrie* [6, vol. 1, p. 375] [1]. (avec la barre : vinculum) C'est une déformation de جـ par René Descartes d'après Mohamed Souissi [15, p. 20].

Table 9: Quelques différences de notation entre le système français et celui anglo-saxon

Notion	Notation française	Notation anglaise
Séparation de la partie décimale	3,141	3.141
Séparation des tranches de milliers	1.234	1,234
Division	/	$\div$
Abréviations des fonctions usuelles	log ou $\log_{10}$ Log ou $\log_e$ tg cotg tghy arcsin argsinhy	ln LN tan cot ou cotan tanh ou th asin asinh
Nombre combinatoire	Cn	(n)
Détermination d'un ensemble	$\{x \vert x > 0\}$	$\{x : x > 0\}$
Intervalle ouvert - à droite	$[0, 10[$	$[0, 10)$
- à gauche	$]0, 10]$	$(0, 10]$
Limite - à droite	$f_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ $= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x)$	$f(0^+) = \lim\limits_{x \to \uparrow 0} f(x)$
- à gauche	$f_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ $= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x)$	$f(0^-) = \lim\limits_{x \to \downarrow 0} f(x)$
Partie fractionnaire	(x)	$\{x\}$
Norme d'un vecteur	AB	$\vert AB \vert$
Angle	$\widehat{AOB}$	$\angle AOB$
Produit scalaire	$X.Y$	$\langle X, Y \rangle$
Négation propositionnelle	$\bar{p}$ ou $\neg p$ ou $\rceil p$	$\tilde{p}$ ou $\sim p$
Complément d'un ensemble	$\overline{A}$	A'
Fonction négligeable	$g = o(f)$	$g \ll f$
Composition de fonctions f puis g	gof	fog
Suite	(x_n)	$\langle x_n \rangle$
Place de l'unité de mesure	25 \$	\$ 25
Date	14.9.2001	14/9/2001 9/14/2001
Numérotation d'équation	(5) $\pi \simeq 22/7$	$\pi \simeq 22/7$ (5)
Ponctuation	Un espace avant **:**	Pas d'espace avant **:**
Forme des chiffres du système de numération décimal	1 $\cancel{7}$ 9	١ 7 ٩
Choix des symboles littéraux	E (Ensemble)	S (Set)
Unités de mesure - longueur	 cm 1 pouce = 2,70648 cm mètre	 " 1 pouce = 2,54016 cm mille
Notions - milliard	 mille millions	 un million de millions