

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

ALAIN LASCOUX & MARCEL P. SCHÜTZENBERGER

**Le monoïde plaxique**

Estratto dalla collana

Quaderni de 'La ricerca scientifica', n. 109

*Non-commutative structures in Algebra and Geometric Combinatorics*

ROMA, CNR, 1981

# Le monoïde plaxique

ALAIN LASCoux & MARCEL P. SCHÜTZENBERGER

Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation, Université – Paris (France)

Riassunto – *Monoïde 'a placche'*.

La descrizione combinatoria delle rappresentazioni dei gruppi simmetrico e lineare si basa sulle tavole di Young. Un progresso decisivo è stato quello di munire l'insieme delle tavole di una moltiplicazione. Noi sviluppiamo questo punto di vista e diamo le principali proprietà del monoïde 'a placche', che hanno molteplici e varie applicazioni (rappresentazione dei gruppi lineari finiti, algebre di Hecke, coomologia delle varietà 'a bandiere').

## 1 – Préface.

L'étude du monoïde plaxique se situe dans la lignée de plusieurs théories mathématiques développées plus ou moins indépendamment en algèbre et en géométrie.

On peut remonter à un texte de Jacobi (*De Alternantibus...*) ainsi qu'à un exercice destiné aux élèves de l'Ecole Polytechnique dû à Cauchy, où sont introduites les fonctions symétriques fondamentales comme des quotients de fonctions antisymétriques par la plus simple de ces dernières, le déterminant de Vandermonde. Le sujet est alors traité comme branche des 'alternants' à l'intérieur de la vaste famille des 'déterminants'. Kostka calcule en 1880 les premières tables de décomposition des fonctions symétriques, indiquant ainsi les problèmes numératifs attachés à ces fonctions.

Partant d'une toute autre source, Pieri en 1873, et Schubert, quelque quinze ans plus tard, suivis d'autres géomètres énumératifs, se lancent dans l'étude de ce qui sera appelé de nos jours l'anneau de cohomologie des grassmanniennes. De grands progrès sont dûs à Giambelli qui met clairement à jour le lien entre les problèmes d'énumération 'degli spazi secanti' et les fonctions symétriques.

Troisième apport, celui de Schur dont les travaux sur la représentation des groupes linéaires en 1901, prolongeant l'oeuvre de Frobenius, montrent que les représentations irréductibles sont en bijection avec la base fondamentale des fonctions symétriques, celle-là même introduite par Jacobi, à laquelle on attachera désormais son nom : pour chaque matrice, la trace de son image dans une représentation irréductible est la fonction symétrique correspondante de ses valeurs propres. L'indexation de ces objets est assurée par les partitions dont quelques propriétés combinatoires connues depuis Euler commencent à prendre une signification mathématique.

A cette époque, les problèmes de la théorie des représentations sont souvent

traités dans le langage spécialisé des invariants, ce qui signifie que l'on étudie l'action conjointe des groupes linéaires et symétriques sur les produits tensoriels d'espaces vectoriels. C'est le point de départ de Young qui introduit les fameux objets combinatoires, les *tableaux*, pour coder de façon merveilleusement efficace les idempotents des algèbres du groupe symétrique et des représentations. Premier enrichissement, et combien décisif de la notion de partition, qui devient dès lors la *forme* des tableaux de Young.

Le livre classique de Littlewood marque une étape nouvelle. Il intègre une foule de travaux partiels en ramenant systématiquement l'étude des représentations des groupes classiques à celle des fonctions symétriques associées. Il montre de plus très explicitement comment les fonctions de Schur des puissances d'une variable  $q$  peuvent fonder ce calcul des ' $q$ -analogues' ; cette méthode ne sera comprise que beaucoup plus tard.

Le calcul des fonctions symétriques se formule aujourd'hui de façon adéquate dans le cadre de la théorie des  $\lambda$ -anneaux qui permettent d'y réintégrer la cohomologie des grassmanniennes.

Un rôle singulier est joué par la célèbre règle de Littlewood–Richardson (1934) qui illustre une nouvelle extension des tableaux de Young et suggère qu'ils se rattachent à des structures algébriques plus riches. Indépendamment, Specht (1935) et Hodge (1942) montrent que les tableaux peuvent être considérés comme une base, pour le premier, d'un module de représentation du groupe symétrique, pour le second, de l'espace des 'formes polynomiales' sur une variété de Schubert. Ceci conduira aux 'bitableaux' développés avec succès par Rota, De Concini et Procesi.

Enfin, dernière source : les études purement combinatoires sur les tableaux. La construction de Robinson (1938), redécouverte indépendamment et considérablement développée par Schensted (1961), met à jour une profusion de propriétés surprenantes dont les preuves sont souvent malaisées. Certaines, et c'est l'apport décisif de Schensted et de Knuth, rendent possible de munir l'ensemble des tableaux d'une structure de monoïde (non commutatif). D'autres font jouer des propriétés profondes des ensembles ordonnés finis : c'est le théorème de Greene. Dans les deux cas, le point de départ est le monoïde libre sur un alphabet totalement ordonné dont on considère un quotient remarquable, le monoïde plaxique, et l'algèbre engendrée par ce dernier, dans laquelle on définit des fonctions de Schur non commutatives.

On se propose de réintroduire des opérations 'naturelles' qui compensent la perte de l'invariance des méthodes classiques de l'algèbre linéaire en relevant les opérations classiques sur les fonctions symétriques. Il en résulte un calcul plus compliqué, mais plus riche, puisque les variables satisfont des lois de commutativité extrêmement spéciales.

On trouvera dans les pages suivantes les principales propriétés du monoïde plaxique telles que nous les connaissons aujourd'hui et telles que nous y ont mené une série de recherches sur les polynômes de Foulkes/Green et les produits de Kronecker des représentations. Nous avons laissé de côté nombre de propriétés qui sont encore sans applications.

Il nous a paru inutile de réécrire la partie proprement combinatoire qui est traitée en détail et dans un autre esprit dans l'exposé [L&S 1], où le lecteur pourra trouver

une bibliographie complète, et des références à divers travaux intéressants dans des domaines liés. Pour ce qui est des deux auteurs, on se référera dans ce qui suit à

- [L&S 1] SCHÜTZENBERGER, M. P. : « La Correspondance de Robinson », in *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Springer Lect. Not., n° 579, (Strasbourg, 1976).
- [L&S 2] LASCoux, A. : « Calcul de Schur et extensions grassmanniennes des  $\lambda$ -anneaux », même volume que [L&S 1].
- [L&S 3] SCHÜTZENBERGER, P. M. : *Propriétés nouvelles des tableaux de Young*, Séminaire Pisot 1978 (Paris, 1978).
- [L&S 4] LASCoux, A. & SCHÜTZENBERGER, M. P. : « Croissance des polynômes de Foulkes–Green », *C.R. Acad. Sci. Paris*, 288, 95–98 (1979).
- [L&S 5] LASCoux, A. & SCHÜTZENBERGER, M. P. : « A new statistics on words », in *Proceedings de Fort Collins 1978* (à paraître).
- [L&S 6] LASCoux, A. : « Produit de Kronecker des représentations du groupe symétrique », in *Séminaire Dubreuil–Malliavin 1978–1979*, Springer Lect. Not. (à paraître).

A la bibliographie de [L&S 1] il faut ajouter

- GARSIA, A. & GESSEL, I. : « Permutations statistics and partitions », *Adv. Math.*, 31, 288–305 (1979).
- THOMAS, G. : « On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions », *Adv. Math.*, 30, 8–30 (1978).
- WHITE, D. E. : « Some connections between the Littlewood–Richardson rule and the construction of Schensted », preprint 1979.

Il faudrait enfin mentionner la théorie des groupes linéaires finis, des algèbres de Hecke, de la cohomologie des variétés drapeaux sur les corps finis, mais malheureusement, la plupart de ces travaux sont écrits dans un langage trop spécialisé pour être facilement accessible. Le livre de Macdonald, cité en fin de texte, qui reprend le point de vue de Littlewood et le langage élémentaire des fonctions symétriques, remplira en grande partie cette fonction (quoique le monoïde plaxique n'y figure point !).

## 2 – L'équivalence plaxique.

Dans tout ce mémoire,  $(A, \leq)$  est un alphabet fini totalement ordonné et  $A^*$  le monoïde libre qu'il engendre. L'évaluation d'un mot est l'image de ce mot par le morphisme naturel de  $A^*$  sur le monoïde commutatif libre de même base, noté  $\mathbb{N}^A$ .

Le *monoïde plaxique* est le quotient de  $A^*$  par une certaine congruence  $\equiv$  faisant que deux lettres commutent quand elles sont suivies ou précédées d'une troisième qui

se trouve entre elles pour l'ordre de l'alphabet. De façon plus précise, la *congruence plaxique* est définie par les conditions suivantes qui sont dûes à KNUTH [3] :

2.1 – Si  $x < y < z$  sont trois lettres, alors :

$$z x y \equiv x z y \quad \text{et} \quad y z x \equiv y x z$$

Si  $x < y$  sont deux lettres, alors :

$$y x x \equiv x y x \quad \text{et} \quad y y x \equiv y x y$$

Il est clair que deux mots congrus pour  $\equiv$  ont même évaluation. On voit aussi que les deux dernières relations sont les images des premières par les morphismes  $\varphi : A^* \rightarrow A^*$  tels que, respectivement,  $x\varphi = y\varphi$  et  $y\varphi = z\varphi$ . Par conséquent, le morphisme naturel de  $A^*$  sur  $A^*/\equiv$  commute avec l'évaluation et avec tout morphisme injectif  $\varphi : A^* \rightarrow B^*$  envoyant  $A$  dans la base  $B$  de  $B^*$  et respectant l'ordre. Un tel morphisme sera dit *alphabétique*.

Deux autres propriétés utiles découlent immédiatement de la définition.

2.2 – Soit  $B$  un intervalle de  $A$ . Il définit un morphisme  $w \rightarrow w \cap B^*$  envoyant chaque mot  $w$  sur son plus long sous-mot dans  $B^*$  ('effacement' des lettres de  $A \setminus B$ ). Un tel morphisme est dit *morphisme de restriction*, et l'on voit aisément que les relations (2.1) commutent avec les morphismes de restriction aux intervalles.

2.3 – Soit d'autre part  $w \rightarrow \tilde{w}$  l'antiautomorphisme  $A^* \rightarrow A^*$  envoyant chaque mot  $w =: x_1 x_2 \dots x_n$  sur son *retourné*  $\tilde{w} =: x_n \dots x_2 x_1$  ( $x_i \in A$ ) et  $\#$  l'involution  $A \rightarrow A$  telle que  $x \leq y$  ssi  $y\# \leq x\#$  pour toutes les paires de lettres  $x, y$  de  $A$ . On étend ce dernier à un antiisomorphisme  $\# : A^* \rightarrow A^*$  en posant  $w\# =: x_n\# \dots x_1\#$ .

On voit immédiatement que les congruences (2.1) sont échangées par  $\#$ . Donc  $w \equiv w'$  équivaut à  $w\# \equiv w'\#$  identiquement. Il n'en est pas de même pour le retournement  $\sim$ , puisque par exemple, si  $x < y$ , on a  $y\tilde{x}x =: xxy$  mais  $y\tilde{x}y =: xyx \not\equiv xxy$ . Par contre, si par exemple  $x < y < z$ , on a bien  $z\tilde{x}y =: yxz \equiv yzx =: x\tilde{z}y$ . Rappelant qu'un mot *standard* est un mot dans lequel chaque lettre apparaît une fois au plus, on a donc que le retournement commute avec la congruence plaxique pour les mots standards.

2.4 – Ceci conduit à introduire une opération dite de *standardisation* associant un mot standard à tout mot  $w$  de  $A$ . Pour cela, on indexe les diverses occurrences de chaque lettre dans  $w$  par un indice  $i =: 1, 2, \dots$  de gauche à droite. Le mot résultant,  $\text{Stand}(w)$ , est un mot standard sur l'alphabet  $A \times N$  ordonné lexicographiquement.

Par exemple, si  $w =: b a a c b$  on a  $\text{Stand}(w) =: b1 a1 a2 c1 b2$ . Il est immédiat que si deux mots  $w$  et  $w'$  ne diffèrent que par l'une des congruences élémentaires plaxiques (2.1), on a encore  $\text{Stand}(w) \equiv \text{Stand}(w')$ .

Les diverses propriétés que nous venons de décrire sont rassemblées dans l'énoncé suivant :

2.5 – PROPOSITION :

La congruence plaxique commute à l'évaluation, à l'involution  $\#$ , aux morphismes de restriction aux intervalles et à la standardisation.

2.6. – L'intérêt du monoïde plaxique est lié au fait qu'il possède une section remarquable ; l'image de cette section est l'ensemble des tableaux  $T$  que nous décrivons ci-après. On appelle *redressement* et on note  $R$  l'application  $A^* \rightarrow T$  envoyant chaque mot  $w$  sur l'unique tableau  $wR \in T$  auquel il est congru. En d'autres termes,  $tR = t$  si le mot  $t$  est un tableau, et  $w \equiv w'$  ssi  $wR = w'R$ .

2.7 – Il est commode d'appeler *ligne* (resp. *colonne*) tout mot  $v = x_1 x_2 \dots x_k$  dont les lettres  $x_i$  vont en croissant, c'est-à-dire satisfont  $x_1 \leq x_2 \leq \dots x_k$  (resp.  $x_1 > x_2 > \dots x_k$ ).

Soit une lettre  $x$  et une ligne  $v$  ; si  $vx$  n'est pas une ligne, alors  $v = v' y v''$  avec  $v' = x_1 \dots x_i$ ,  $x_i \leq x$  et  $y > x$ .

On vérifie facilement que les relations plaxiques (2.1) entraînent

$$v x \equiv y v' x v''.$$

Par exemple,  $(bcdde) c \equiv d (bccde)$ .

De même, si  $u$  est une colonne :

ou bien  $xu$  est une colonne,

ou bien l'on a  $u = u' y u''$ ,  $u'x$  colonne,  $y \leq x$

et alors,

$$x u \equiv u' x u'' y$$

En particulier  $xu \equiv ux$  lorsque  $x$  est une lettre de  $u$ .

Ces règles de 'multiplication' ont été découvertes par SCHENSTED [7] auquel on doit les premiers résultats importants de toute cette théorie. Le cas de commutation d'une lettre et d'une colonne se généralise en

2.8 – *Remarque* : Deux colonnes commutent si et seulement si l'une est un sous-mot de l'autre.

2.9 – Appelons *forme* d'un mot  $w$  la suite  $\overline{w}$  des longueurs de ses lignes (i.e. des facteurs maximaux qui sont des lignes). Par exemple, la forme de  $t = debccdaabc$  est 2 4 4, puisque les lignes de  $t$  sont  $de$ ,  $bccd$  et  $aabc$ . Ceci posé, un mot  $t$  est un *tableau* ssi d'une part sa forme est une suite croissante au sens large (i.e. une partition), d'autre part, pour chaque  $i$ , le sous mot formé des  $i$ -ièmes lettres de chaque ligne de  $t$  est une colonne. Par exemple, le mot  $t$  ci-dessus est un tableau dont les sous-mots-colonnes sont  $dba$ ,  $eca$ ,  $cb$  et  $dc$ .

Ceci se voit plus facilement quand on emploie l'écriture plane d'un tableau obte-

nue en disposant ses lignes les unes au dessus des autres, en commençant sur la même colonne :

$$t =: \begin{array}{c} d e \\ b c c d \\ a a b c \end{array}$$

Le diagramme des points occupés par les lettres de  $t$  est classiquement dit *diagramme de Ferrers* de la partition  $\overline{t}$  de la longueur  $|t|$  de  $t$ ; l'écriture planaire d'un tableau fournit l'objet combinatoire classique dit *tableau de Young*. Les règles de Schensted (2.7) donnent un moyen commode de trouver le tableau équivalent au produit d'un tableau par une lettre, donc par induction, de redresser (au sens 2.6) tout mot.

Par exemple, pour le tableau ci-dessus,  
 $t b =: d e b c c d a a b c b \equiv d e b c c d c a a b b \equiv d e d b c c c a a b b \equiv e d d b c c c a a b b =: (t b) R$ , ce dernier tableau ayant l'écriture plane

$$\begin{array}{c} e \\ d d \\ b c c c \\ a a b b \end{array}$$

On notera que les règles de Schensted impliquent qu'un tableau soit congru au produit de ses sous-mots-colonnes (pour l'exemple,  $t \equiv d b a e c a c b d c$ ), et c'est à partir de cette écriture d'un tableau qu'on peut facilement le multiplier sur la gauche par une lettre.

Nous renvoyons au Colloque de Strasbourg [L&S 1] pour plus de détails sur les propriétés classiques des tableaux, et nous nous bornons ici à énoncer

## 2.10 – THÉORÈME DE LA SECTION :

L'ensemble des tableaux est une section de la congruence plaxique, c'est-à-dire, dans chaque classe d'équivalence, il y a un tableau et un seul.

2.11 – Les relations entre la forme d'un tableau et celle de son produit par une ligne ou une colonne sont contenues dans le Théorème de Pieri. En voici tout d'abord le cas le plus simple

### THÉORÈME DE PIERI POUR UNE LETTRE :

Si  $t$  est un tableau et  $x$  une lettre, la forme de  $(t x) R$  et la forme de  $(x t) R$  sont obtenues en ajoutant un point au diagramme de  $t$ . Réciproquement, si  $I'$  est le diagramme d'une partition obtenu enlevant un point à  $\overline{t}$ , il existe des factorisations uniques  $t \equiv t' x'$  et  $t \equiv x'' t''$  telles que  $x', x''$  soient des lettres et  $t', t''$  des tableaux de forme  $I'$ .

Par exemple, si  $\overline{t} = (2, 4, 4)$  comme ci-dessus,  $I'$  ne peut être que  $(1, 4, 4)$  ou que  $(2, 3, 4)$  et pour chacune de ces formes, on trouve les factorisations (uniques!) de  $t = d e b c c a a b c b$ :

$$\begin{array}{c} d e b c c a a b c b \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad a \quad c \end{array}$$

$$t \equiv (d\ bcce\ aabd)\ c \equiv d\ (e\ bccd\ aabc)$$

et

$$t \equiv (de\ bcc\ aabd)\underset{c}{\cancel{d}} \equiv b\ (de\ ccd\ aabc).$$

Si  $t \equiv x\ t'$ , avec  $x \in A$ , on posera  $(x, t') = t\ \gamma^h$  où  $h$  est l'indice de la ligne de  $t$  qui est plus courte que celle de  $t'$  (en convenant que  $t\ \gamma^h = \emptyset$  si l'opération n'est pas possible, c'est-à-dire si la ligne d'indice  $h + 1$  de  $t$  n'est pas strictement plus courte que celle d'indice  $h$ ). Plus généralement, on écrira

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_n, t') = t\ \gamma^{h_1 h_2 \dots h_n}$$

où  $\gamma^{h_1 \dots h_n}$  désigne le produit des opérateurs  $\gamma^h$ .

**2.12 – THÉORÈME DE PIERI :**

Soit  $(x_1 \dots x_n, s) = t\ \gamma^{h_1 \dots h_n}$ . Alors le mot  $x_1 \dots x_n$  est une ligne si et seulement si  $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n$  et une colonne si et seulement si  $h_1 > h_2 > \dots > h_n$ .

Inversement, si  $w = x_1 \dots x_n$  est une ligne (resp. colonne) et  $s$  un tableau, il existe suite (unique) d'entiers  $h_1, \dots, h_n$  telle que

$$t\ \gamma^{h_1 \dots h_n} = (w, s),$$

où  $t = (w\ s)\ R$ .

Il n'y a pas que la factorisation par une ligne ou une colonne que l'on sache décrire :

**2.13 – LEMME DE LA PETITE ÉQUERRE :**

Soient des entiers  $h_1 > h_2$  et un tableau  $t$  tel que  $t\ \gamma^{h_1} = (y, s)$  et  $t\ \gamma^{h_2} = (y', s')$ . Alors on a  $y \geq y'$  et il existe  $h_3$  satisfaisant  $h_1 > h_3 \geq h_2$  pour lequel  $t\ \gamma^{h_1 h_2 h_3} \neq \emptyset$  ; pour de tels  $h_3$  : Si  $y = y'$ , on a  $t\ \gamma^{h_1 h_2 h_3} = (y\ x\ z, s')$  et  $t\ \gamma^{h_2 h_1 h_3} = (y\ z\ x, s')$  où  $x < y \leq z$  (et donc  $y\ x\ z \equiv y\ z\ x$ ), sinon  $t\ \gamma^{h_1 h_2 h_3} = (y\ y'\ x, s')$  et  $t\ \gamma^{h_2 h_1 h_3} = (y'\ y\ x, s')$  où  $y \geq x > y'$  (et donc  $y\ y'\ x \equiv y'\ y\ x$ ).

**2.14 –** Notons  $L^{(k)}$  l'ensemble des mots qui envisagés comme suite de lettres sont union disjointe de  $k$  lignes.  $L^{(1)}$  est simplement l'ensemble  $L$  des lignes et  $L^{(k)}$  le produit de schuffle de  $k$  fois  $L$ . Ainsi  $c\ b\ e\ a\ d\ c\ c$  appartient à  $L^{(3)}$  puisqu'il est produit de schuffle des trois lignes  $ce, bd$  et  $acc$  (et aussi bien, de  $ce, bcc$  et  $ad, etc...$ ).

La forme immanente d'un mot  $w$  est la suite  $(m_k, \dots, m_2, m_1)$  telle que  $m_i + \dots + m_2 + m_1$  soit la longueur maximale des sous-mots de  $w$  qui appartiennent à  $L^{(i)}$ . La forme immanente d'une ligne (resp. colonne) de longueur  $n$  est donc  $(n)$  (resp.  $(1, 1, \dots, 1)$ ). Plus généralement, la forme immanente d'un tableau est simplement sa forme (cfr. 2.9).

On vérifierait que, par exemple, la forme immanente de  $dbaedabc$  est  $(2, 2, 4)$  en raison des sous-mots  $abc \in L^{(1)}$  et  $badabc \in L^{(2)}$ . Une conséquence assez surprenante du théorème de GREENE [2] est que  $m_1 \geq m_2 \geq \dots$



## 2.15 – THÉORÈME :

La congruence plaxique est la plus grande congruence  $\equiv$  sur  $A^*$  telle que pour chaque paire de mots  $w, w'$  on ait  $w \equiv w'$  si et seulement si pour tout  $u, v \in A^*$  les mots  $u w v$  et  $u w' v$  ont même forme immanente.

Nous donnons enfin une troisième caractérisation de la congruence plaxique qui fait percevoir ses liens avec la théorie des fonctions symétriques. Soit  $Z(A^*)$  l'algèbre libre engendrée par  $A$ . A chaque entier  $n \geq 0$ , on associe la somme  $S(1^n)$  de toutes les colonnes  $x_n x_{n-1} \dots x_1$  ( $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$ ) de longueur  $n$ . Son image dans l'algèbre commutative libre est la fonction de Schur l'indice  $1^n$ . On sait que dans l'algèbre  $Z(A^*/\equiv)$  du monoïde plaxique, on a identiquement

$$S(1^n) S(1^m) \equiv S(1^m) S(1^n) \quad (m, n \geq 0).$$

## 2.16 – THÉORÈME :

La congruence plaxique est la plus petite congruence sur  $A^*$  commutant à l'évaluation, aux morphismes injectifs d'alphabets ordonnés et aux morphismes de restriction aux intervalles, et telle que les  $S(1^m)$  engendrent une sous-algèbre commutative de  $Z(A^*/\equiv)$ .

*Remarque :* on dit, en théorie des monoïdes d'alphabets totalement ordonnés, qu'une relation d'équivalence est *naturelle* si elle est préservée par tout morphisme d'alphabet injectif et croissant  $A \rightarrow B$ ; on a donc que la congruence plaxique est naturelle.

*Démonstration du théorème :*

Nous vérifierons seulement que les conditions figurant dans l'énoncé du théorème suffisent à déterminer la congruence plaxique.

Soient trois lettres  $x < y < z$ . L'équation

$$S(1) S(11) \equiv S(11) S(1)$$

se décompose suivant l'évaluation, et après élimination des termes identiques, les équations de plus bas degré que l'on obtient sont :

$$(1) \quad x y x \equiv y x x$$

$$(2) \quad y y x \equiv y x y$$

$$(3) \quad x z y + y z x \equiv z x y + y x z$$

Cette dernière congruence implique :

ou bien

$$(3') \quad x z y \equiv z x y \quad \text{et} \quad y z x \equiv y x z$$

ou bien

$$(3'') \quad xzy \equiv yxz \quad \text{et} \quad yzx \equiv zxy$$

Le premier cas [relations (1), (2) et (3'')] constitue bien l'ensemble des relations plaxiques (2.1). On élimine le second cas, c'est-à-dire la relation (3''), par la condition de restriction aux intervalles, puisque en prenant le plus petit intervalle contenant  $x$  et  $y$  (c'est-à-dire en effaçant  $z$ ), on devrait avoir  $xy \equiv yz$ .

Il est remarquable que le deuxième système de congruences [(1), (2) et (3'')] implique aussi que les  $S(1^n)$  engendrent une sous-algèbre commutative. La vérification repose sur la remarque que deux mots standards sont congrus si et seulement si d'une part, ils ont le même nombre d'inversion, et d'autre part, le sous-mot des deux lettres extrêmes (pour l'ordre sur  $A$ ) est le même. Par exemple, la classe de  $adbc$  pour la congruence (3'') est composée de, outre  $adbc$ ,  $acdb$ ,  $badc$ ,  $bcad$ ,  $cabd$ .

2.17 – Nous donnons maintenant une propriété importante de l'ensemble des mots dont le redressé est un tableau donné.

L'opération de standardisation a été définie en (2.4). A un changement d'alphabet près, on peut considérer le standardisé d'un mot comme une permutation de l'ensemble  $1, \dots, n$ . Notons que le standardisé d'un tableau est un tableau ; inversement, pour chaque tableau standard donné, il existe au plus un tableau d'évaluation donnée dont il est le standardisé. Par exemple, le tableau  $24135$  peut être le standardisé des tableaux  $bdace$ ,  $bdacd$ ,  $bcabd$ ,  $bcabc$  (ou des tableaux qui s'en déduisent par changement d'alphabet) puisqu'en passant de 1 à 2 et de 3 à 4, on doit passer d'une lettre à une lettre ultérieure.

L'ensemble des mots dont un tableau standard est le redressé est beaucoup plus complexe, mais il a une structure remarquable. Pour le décrire, notons d'abord qu'un mot standard  $w$  peut être considéré comme une permutation de son alphabet, et qu'on peut donc lui associer un mot standard  $w^{-1}$  (sur le même ensemble de lettres).

Le *Ia-symbole*,  $w\mathfrak{H}$ , d'un mot  $w$  est le tableau standard obtenu en redressant l'inverse du standardisé de  $w$ .

2.18 – THÉORÈME (Cauchy, G. de B. Robinson – cfr. [L&S 1], p. 88)

L'application  $w \rightarrow (wR, w\mathfrak{H})$  est une bijection de l'ensemble des mots sur les paires de tableaux de même forme, le deuxième étant standard (d'évaluation  $12 \dots |w|$ ).

Par exemple, il y a cinq mots standards dont le redressé est  $24$  .  
 $135$

Ce sont :

$$24513 \quad , \quad 14253 \quad , \quad 24135 \quad , \quad 21453 \quad , \quad 21435 \quad ,$$

dont les *Ia-symboles* respectifs sont

$$\begin{array}{ccccc} 45 & 35 & 34 & 25 & 24 \\ 123 & , & 124 & , & 125 & , & 134 & , & 135 \end{array}$$

et ces derniers tableaux constituent bien l'ensemble des tableaux standards de forme (2,3).

## 2.19 – PROPRIÉTÉ :

Soix  $w x$  ( $x \in A$ ) un mot de longueur  $n$ . Le  $Ia$ -symbole de  $w$  est la restriction à  $\{1, \dots, n-1\}$  de celui de  $w x$ .

Comme les formes de  $w x \mathfrak{R}$  et  $w \mathfrak{R}$  sont respectivement égales à celle de  $w x R$  et  $w R$ , ceci montre que  $(wx) \mathfrak{R}$  est obtenu en ajoutant le chiffre  $n$  au point du diagramme de  $(wx) R$  qui n'est pas dans  $w R$ .

## 2.20 – PROPRIÉTÉ :

Deux mots ayant meme  $\mathfrak{R}$ -symbole ont même forme.

*Preuve :*

Une file d'un mot est un sous-mot maximum croissant dont l'alphabet est un intervalle de  $A$ . On vérifie que la forme  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$  d'un mot est égale à la suite des longueurs des files de son  $\mathfrak{R}$ -symbole, celles-ci étant ordonnées par ordre croissant de leur première lettre. □

Par exemple, le mot  $b a a c a d c a$  a la forme  $1 \ 3 \ 2 \ 1$ . Son  $\mathfrak{R}$ -symbole est  $\begin{matrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{matrix}$  dont les files successives sont (1), (234), (56), (7).

## 2.21 – PROPRIÉTÉ :

Si  $w$  est un mot standard, le redressé du retourné  $\tilde{w}$  de  $w$  est le tableau transposé du tableau  $w R$  (c'est-à-dire le tableau obtenu en échangeant les lignes et les colonnes).

Par exemple, si  $w = \begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{matrix}$ , son redressé est  $\begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}$  et celui de  $\tilde{w}$  est  $\begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ .

La propriété la plus anciennement connue de monoïde plaxique apparait dans la 'Règle de Littlewood-Richardson' dont nous donnons ici une version améliorée. Le produit extérieur des représentations des groupes symétriques induit une multiplication sur les sommes de partition ; les coefficients de structure sont des entiers non négatifs, dits aussi *coefficients de multiplication des fonctions de Schur*, que nous re- lions à l'opération de schuffle.

## 2.22 – THÉORÈME (Littlewood-Richardson, cfr. [L&amp;S 6]) :

Soit  $t', t''$  deux tableaux tels que  $x' < x''$  pour toute paire de lettres figurant respectivement dans  $t', t''$ , et soit  $I = \overline{t'}$ ,  $J = \overline{t''}$ . Alors il existe un ensemble fini de tableaux  $T_{I,J}$  tels que

$$\{t' R^{-1} \mathfrak{M} t'' R^{-1}\} = \{t R^{-1} : t \in T_{I,J}\}.$$

Le nombre des tableaux de forme  $K$  dans  $T_{I,J}$  est la constante de structure d'indice  $K$  dans le produit des fonctions de Schur d'indices respectifs  $I$  et  $J$ .

COROLLAIRE :

Cette constante est donc le nombre de tableaux de forme  $K$  dans l'ensemble de mots  $\{t' R^{-1} M t'' R^{-1}\}$ .

(On note  $M$  l'opération de schuffle, shuffle en anglais, qui a été introduite en (2.14).

En combinant le théorème de Cauchy (2.18) avec la deuxième définition de la congruence plaxique (2.15), on obtient la

2.23 – PROPRIÉTÉ :

Soit  $(m_k, \dots, m_1)$  la forme immanente d'un mot  $w$ . Pour chaque permutation  $(m'_k, \dots, m'_1)$  de celle-ci, il existe un et un seul mot  $w'$  congru à  $w$  dont la forme est  $(m'_k, \dots, m'_1)$ .

Par exemple, la forme ( $= 2, 4, 4$ ) de  $w = de\ bccd\ aabc$  est égale à sa forme immanente, puisque  $w$  est un tableau. On trouve que  $w$  est congru à  $bcd\ e\ cd\ aabc$  et  $bcd\ e\ aacd\ bc$ , ces deux mots ayant pour formes respectives  $(4, 2, 4)$  et  $(4, 4, 2)$ .

Il résulte en particulier de cette propriété que chaque tableau  $t$  de forme  $(m_k, \dots, m_2, m_1)$  est le redressé d'un (et d'un seul) mot  $s$  de forme  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ . On montre que pour tout  $i$  le sous-mot de  $s$  formé des  $i$ -èmes lettres de chaque ligne (comptées à partir de la droite) est une colonne, ceci permet une écriture plane que l'on appellera un *antitabseau*.

L'exemple ci-dessus montre que l'antitabseau associé au tableau de  $bccd\ aabc$  est  $bcd\ e\ aacd\ bc$  que l'on peut écrire planairement :

$$\begin{array}{c} b\ c\ d\ e \\ a\ a\ c\ d \\ b\ c. \end{array}$$

Soit un mot  $w$ ,  $B$  l'ensemble des lettres figurant dans  $w$ , et  $\#_B$  l'antiisomorphisme de  $B$  (cfr. 2.3). Il est clair que  $w$  est un tableau si et seulement si  $w\ \#_B$  est un antitabseau.

On note  $t \rightarrow t \#$  l'involution sur l'ensemble des tableaux qui consiste à prendre l'image par  $\#_B$  de l'antitabseau associé ( $B$  dépend du tableau considéré). Par construction,  $t \#$  a même forme que  $t$  lui-même.

2.24 – PROPOSITION (cfr. [L&S 1], p. 94) :

Pour tout mot  $w$ , on a

$$(w\ \#) R = (w R) \#$$

et

$$(w\ \#) \mathfrak{R} = (w \mathfrak{R}) \#$$

Ainsi, pour  $w = bdaacaa$ , on trouve

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} d \\ w R = b\ c \\ a\ a\ a\ a \end{array} ; \quad \begin{array}{c} 6 \\ w \mathfrak{R} = 3\ 4 \\ 1\ 2\ 5\ 7 \end{array} ; \quad w\ \# = d\ d\ b\ d\ d\ a\ c ; \\ \begin{array}{c} d \\ (w\ \#) R = b\ d \\ a\ c\ d\ d \end{array} ; \quad \begin{array}{c} 6 \\ w\ \# \mathfrak{R} = 3\ 7 \\ 1\ 2\ 4\ 5 \end{array} \end{array}$$

**3 – Quelques propriétés algébriques du monoïde plaxique.**

**3.1** – Une *partition*  $I$  est une suite décroissante d'entiers  $\geq 0$ . On lui associe canoniquement l'élément du monoïde commutatif  $N^A$  dans lequel le degré de la  $j$ -ième lettre de  $A$  (pour l'ordre sur  $A$ ) est  $jI$  identiquement. Un tel élément, ainsi que les mots de  $A^*$  dont il est l'évaluation seront dits *partitionnels*. Ainsi, à la partition  $0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3$  (lue de droite à gauche) est associé l'élément suivant de  $N^A$ , noté  $a^3\ b^2\ c^1$ :  $a \rightarrow 3, b \rightarrow 2, c \rightarrow 1, x \rightarrow 0 \forall x > c$ , qui est l'évaluation des mots de  $A^*$ :  $aaabbc, aababc, abaabc, \dots$  Un mot est *homogène* si et seulement si il a le même degré en toutes les lettres qui y figurent.

Le plus grand mot colonne homogène de degré 1 sera noté (ou  $e_A$ ). Comme une lettre  $x$  commute avec une colonne si et seulement si elle y figure, ainsi qu'on l'a vu en (2.8), on a la

**3.2 – PROPRIÉTÉ :**

Le centre de  $A^*/\equiv$  est le sous-monoïde  $e^*$ .

Le quotient du monoïde plaxique par son centre sera désigné par  $T/e^*$ . Dans le cas où  $A$  n'a que deux lettres, c'est un objet classique appelé *monoïde bicyclique* (cfr. [1] et [4]).

**3.3** – Si  $g$  est une colonne, nous notons  $\widehat{g}$  la colonne complémentaire formée des lettres n'apparaissant pas dans  $g$ . Ainsi, pour  $A = \{1, 2, \dots, 5\}$ , la colonne complémentaire de  $g = 4\ 2$  est  $\widehat{g} = 5\ 3\ 1$ . La colonne complémentaire de  $e = e_A$  est la colonne vide  $\widehat{e} = e^0$  qui est l'élément neutre du monoïde libre  $A^*$ .

Plus généralement, soit  $t$  un tableau. Ainsi qu'il a été dit en (2.9), il est congru au produit  $g_1\ g_2\ \dots\ g_r$  de ses mots-colonnes (lues de gauche à droite). Nous définissons le *complément*  $\widehat{t}$  de  $t$  comme le redressé du produit  $\widehat{g}_r\ \dots\ \widehat{g}_2\ \widehat{g}_1$ . En fait on vérifie facilement que  $\widehat{\widehat{t}} = t$ ,  $\widehat{g}_r, \dots, \widehat{g}_1$  sont les colonnes successives de  $\widehat{t}$ . Par exemple, si

$$t = \begin{matrix} 5 \\ 2\ 4 \\ 1\ 1\ 3\ 4 \end{matrix}, \quad \widehat{g}_4\ \widehat{g}_3\ \widehat{g}_2\ \widehat{g}_1 = \begin{matrix} 5321 & 5421 & 532 & 43 \end{matrix}$$

ce qui est bien le produit des colonnes de

$$\widehat{t} = \begin{matrix} 5\ 5 \\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 1\ 2\ 3 \end{matrix}.$$

Il est clair que  $\widehat{t}_1 = \widehat{t}_2$  quand  $t_1$  et  $t_2$  ne diffèrent que par le nombre de leurs colonnes complètes. Par conséquent, la complémentation  $t \rightarrow \widehat{t}$  est une involution sur lui-même du quotient par son centre du monoïde plaxique.

**3.4 – PROPRIÉTÉ :**

La complémentation est un antiisomorphisme de  $T / e^*$  sur lui-même.

*Preuve :*

Soit  $x$  une lettre. On vérifie que si  $x'$  est une autre lettre, on a  $x' \widehat{x} \equiv \widehat{x} x'$  si  $x \neq x'$  et  $x \widehat{x} = \widehat{x}_+ x_+$  sinon (où  $x_+$  est le successeur de  $x$  dans  $A$ ). Il s'en déduit que si les trois lettres  $x, y$  et  $z$  sont telles que  $x \leq y < z$  on a  $\widehat{y} \widehat{x} \widehat{z} \equiv \widehat{y} \widehat{z} \widehat{x}$ ; on vérifie pareillement les autres congruences plaxiques (2.1). Donc l'antiisomorphisme de  $A$  sur lui-même envoyant chaque mot  $w = x_1 x_2 \dots x_n$  (avec  $x_i \in A$ ) sur  $\widehat{x}_n \dots \widehat{x}_2 \widehat{x}_1$  préserve la congruence plaxique. Comme, par ailleurs, il est clair que si  $w$  est une colonne, alors  $\widehat{x}_n \dots \widehat{x}_1 \equiv e^{n-1} \widehat{w}$ , ceci conclut la preuve.

On vérifie tout aussi aisément la

**3.5 – PROPRIÉTÉ :**

L'involution  $t \rightarrow \widehat{t}$  commute avec l'involution  $t \rightarrow t\#$

**3.6 –** Un mot de *Yamanouchi* est un mot dont tous les facteurs droits sont partitionnels. Un *tableau de Yamanouchi* est un mot de Yamanouchi qui est un tableau. On note  $Y$  leur ensemble.

**3.7 – PROPRIÉTÉ :**

(i) Pour chaque partition  $I$ , il existe un et un seul tableau  $t = y_I$  de forme  $I$  qui satisfasse l'une des cinq conditions équivalentes suivantes :

- (1) les colonnes de  $t$  sont des intervalles initiaux de  $A$
- (2)  $t$  est partitionnel et chaque lettre ne figure que dans une seule ligne
- (3)  $t$  est partitionnel et ses colonnes commutent deux à deux
- (4)  $t$  a une évaluation égale à sa forme  $I$
- (5)  $t$  est un tableau de Yamanouchi

(ii) l'application  $I \rightarrow y_I$  est un isomorphisme du monoïde des partitions (considéré comme sous-monoïde de  $N^A$ ) sur le monoïde  $Y$ , i.e. on a

$$y_{I+J} = (y_I y_J) R$$

où  $I + J$  est la partition :  $x(I + J) = xI + xJ$  pour tout  $x \in A$

(iii)  $(\widehat{t}) R \in e^*$  si  $t \in Y$

(iv)  $Y$  est l'ensemble des tableaux  $t$  tels que

$$(T t) R \cap e^* \neq \emptyset$$

(v)  $Y R^{-1}$  est l'ensemble des mots de Yamanouchi.

*Preuve :*

Pour ce qui est de (i), l'équivalence de (1), (2), (3) et (4) est immédiate, de même que l'implication (2)  $\Rightarrow$  (5). Réciproquement, soit  $v_h v_{h-1} \dots v_1$  la factorisation en lignes d'un tableau de Yamanouchi. Comme chaque ligne est un produit de lettres dans l'ordre croissant, la condition d'être un mot de Yamanouchi entraîne que  $v_1$  n'est composée que de  $a$ , puis  $v_2$  que de  $b, \dots$ , ce qui montre que (5) implique (2) et achève la preuve de (i).

Celle de (ii) est un simple calcul dans le monoïde plaxique en raison de (3) et (1), et il en est de même de (iii).

Supposons maintenant que  $(t' t) \mathbf{R} = t'' \in e^*$  pour un certain tableau  $t'$ . La première ligne de  $t''$  contient celle de  $t$  qui doit donc être de la forme  $a^n$ . De même on voit que la deuxième ligne de  $t$  est  $b^n$ , etc..., établissant ainsi (iv).

Pour finir, soit  $xw$  ( $x \in A$ ) un mot de Yamanouchi ; à fortiori,  $w$  est un mot de Yamanouchi, et par induction, on peut supposer que  $w \mathbf{R} \in Y$ . En raison de (2), il en est de même pour  $(xw) \mathbf{R}$  puisque par hypothèse, le degré  $|xw|_x$  de  $x$  dans  $xw$  est au plus égal au degré  $|xw|_{x_-}$  de la lettre  $x_-$  précédant  $x$  (dans  $A$ ). Réciproquement, soit  $xw : (xw) \mathbf{R} \in Y$  ; cette condition entraîne que  $w \mathbf{R} \in Y$  et que  $|xw|_x \leq \leq |xw|_{x_-}$ , et donc par induction, que  $w$ ,  $xw$  et tous les facteurs droits de  $w$  soient partitionnels.  $\square$

### 3.8 – COROLLAIRE :

Le monoïde  $T/e^*$  est simple, c'est-à-dire que pour tout  $w \in A^*$ , il existe  $w', w'' \in A^*$  tels que  $(w' w w'') \in e^*$ .

*Preuve :*

D'après (iii), il suffit de vérifier que pour chaque mot  $w$  on peut choisir un élément  $J$  de  $N^A$  tel que  $w d^J \dots b^J a^J$  soit partitionnel.

Nous mentionnons sans preuve la propriété suivante dans laquelle la condition donnée sur  $t$  est facilement levée au moyen d'un morphisme injectif  $A^* \rightarrow B^*$ .

### 3.9 – PROPRIÉTÉ :

Soient  $k + 1 = \text{card } A$  et  $t$  un tableau dans lequel chaque lettre de  $A$  figure une fois au moins. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $t \equiv t^2 \pmod{e^*}$ ,
- (2)  $t \equiv s^k$  où  $s$  est un tableau homogène qui contient toutes les lettres ; on a alors de plus  $t \equiv s^{k+n}$  pour tout  $n \geq 0$ ,
- (3)  $t \equiv s s'$ , où  $s$  et  $s'$  sont deux tableaux tels que  $s' s \equiv 1 \pmod{e^*}$  (et donc,  $s$  est un tableau de Yamanouchi et  $s'$  son unique inverse mod  $e^*$ ),
- (4)  $t \equiv \prod g_i \prod \hat{g}_i$ , où  $g_i$  est une colonne qui est un intervalle commençant (par la première lettre de  $A$ ) et  $\hat{g}_i$  la colonne complémentaire, l'ordre des facteurs  $g_i$  (resp.  $\hat{g}_i$ ) étant arbitraire.

D'après le point (4), en regroupant les colonnes égales, on voit donc que les idempotents (modulo le centre) sont en bijection avec  $N^k$ , et que deux idempotents commutent lorsque l'un est supérieur à l'autre (pour l'ordre de  $N^k$ ).

Les propriétés algébriques du monoïde plaxique s'étendent sans difficulté à diverses généralisations de ce dernier. La plus simple consiste, pour un alphabet ayant un nombre fini  $k$  de lettres, à prendre come 'tableau généralisé' les  $k(k-1)/2$ -tuples de réels non négatifs  $(t_{ij})$  appartenant au polytope convexe  $T$  défini par les inégalités :

$$0 \leq \Sigma \{t_{i+1,j} : 1 \leq j \leq j'\} \leq \Sigma \{t_{i,j} : 1 \leq j \leq j'\} \quad (i = 1, 2 \dots k-1 ; j' = 1, \dots i).$$

La multiplication est alors une application continue  $T \times T \rightarrow T$  linéaire par morceaux qui se réduit à l'opération  $(t, t') \rightarrow (t t')$  quand les  $t_{ij}$  sont entiers.

**4 - Automorphisme de conjugaison.**

4.1 - On rappelle que dans tout semi-groupe  $S$  la relation de *conjugaison* est la plus petite équivalence  $\sim$  telle que  $s' s'' \sim s'' s'$  pour tout couple d'éléments de  $S$ . Cette relation est la relation habituelle quand  $S$  est un groupe et elle n'est triviale que si  $S$  est un semi-groupe commutatif. Nous vérifierons dans la section suivante qu'en ce qui concerne le monoïde plaxique les classes de conjugaison ont une structure remarquable et qu'elles sont les images inverses (par  $Ev^{-1}$ ) des éléments du monoïde commutatif libre. Dans cette section, nous établissons un résultat préliminaire permettant de passer d'une classe à une autre.

Soit  $\gamma_A$  le groupe symétrique sur  $A$ . Il a une représentation naturelle sur le groupe  $\text{Aut}(N^A)$  des automorphismes du monoïde commutatif libre  $N^A$  :

$$\text{si} \quad \gamma_A \ni \sigma : A \rightarrow A \quad \text{et} \quad N^A \ni I : A \rightarrow N,$$

alors

$$\sigma I \quad \text{est le composé} \quad A \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{I} N.$$

On obtient un relèvement naïf de cette représentation en une représentation de  $\gamma_A$  dans le groupe des bijections de  $A^*$ , noté  $\text{Bij}(A^*)$ , en posant :

$$\text{si} \quad w = x_1 \dots x_n \in A^*, \quad \sigma \in \gamma_A, \quad \text{alors} \quad w \bar{\sigma} = (x_1 \sigma) \dots (x_n \sigma).$$

Ce relèvement ne possède pas de bonnes propriétés vis-à-vis de la congruence plaxique. Nous en définissons un autre que nous appelons *relèvement plaxique*, et l'image de  $\gamma_A$  par ce relèvement dans  $\text{Bij}(A^*)$  est dit *groupe des automorphismes de conjugaison* de  $A^*$ , et noté  $\text{Aut}(A^*)$ . L'image de  $\sigma \in \gamma_A$  dans  $\text{Aut}(A^*)$  sera notée par la même lettre.

Nous devons procéder par étape en définissant d'abord le relèvement pour les transpositions de lettres consécutives.

4.2 - Soient  $c, d = c_+$  deux lettres consécutives,  $B = \{c, d\}$  et  $\tau$  la transposition de ces deux lettres. On définit  $w \tau$ , pour  $w \in B^*$  par



- (1)  $w \tau \mathfrak{H} = w \mathfrak{H}$   
 (2) le relèvement de  $\tau$  est une bijection de  $B^*$  telle que

$$\begin{array}{ccc} & & \tau \\ & & \longrightarrow \\ B^* & & B^* \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\ & & \tau \\ N^B & & N^B \end{array}$$

soit un diagramme commutatif.

La condition (2) signifie que si  $|w|_c = m$ ,  $|w|_d = n$ , alors  $|w \tau|_c = n$  et  $|w \tau|_d = m$ ; il est clair que les deux conditions déterminent  $w \tau$  et que  $w = w \tau$  si et seulement si  $w$  a même degré en  $c$  et  $d$ .

4.3 – On étend  $\tau$  en une bijection de  $A^*$  dans  $A^*$  par

- (3)  $\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$   
 (4) pour tout intervalle  $B$  de  $A$  tel que  $\{B \tau\} = \{B\}$ , alors

$$(w \cap B^*) \tau = (w \tau) \cap B^*$$

c'est-à-dire,  $\tau$  commute aux morphismes de restriction aux intervalles globalement invariants.

*Preuve :*

On raisonne par récurrence sur le nombre de lettres de  $A$  et l'on voit que si  $w = x_1 \dots x_n$  et  $w \tau = x'_1 \dots x'_n$ , alors  $n = n'$ ,  $x_i \neq c, d \Rightarrow x'_i = x_i$  et le sous-mot  $w \tau \cap \{c, d\}^*$  est égal au mot  $(w \cap \{c, d\}^*) \tau$  construit plus haut.  $\square$

Plus explicitement, on construit  $w \tau$  comme suit :

si  $w = x_1 \dots x_m d w_1 c x_{m+1} \dots$ , avec  $w_1 \cap \{c, d\}^* = \emptyset$ , alors

$$w \tau = x'_1 \dots x'_m d w_1 c x'_{m+1} \dots$$

si et seulement si

$$(x_1 \dots x_m x_{m+1} \dots) \tau = (x'_1 \dots x'_m x'_{m+1} \dots).$$

La méthode consiste donc à isoler successivement des facteurs  $d w_1 c$  tels que  $w_1 \cap \{c, d\}^* = \emptyset$ , qui sont invariants par  $\tau$ , en terminant par

$$(c^m d^n) \tau = c^n d^m.$$

On constate que l'image d'un tableau est un tableau.

4.4 – LEMME :

Soit  $\tau'$  une autre transposition de lettres consécutives ne commutant pas avec  $\tau$ . Soit  $B$  l'intervalle (à trois lettres) qui est l'union des orbites de  $\tau$  et  $\tau'$ . Soit  $t$  un tableau appartenant à  $B^*$ . Alors

$$((t \tau) \tau') \tau = ((t \tau') \tau) \tau'.$$

Un exemple remplacera la vérification de ce Lemme :

Lorsque  $t = e \, d d \, c c c$ , on a

$$\begin{array}{ccc}
 & e & \\
 t & = & d \, d \\
 & & c \, c \, c \\
 \\
 t \, \tau & = & \begin{array}{c} e \\ d \, d \\ c \, c \, d \end{array} & \begin{array}{c} e \\ d \, e \\ c \, c \, c \end{array} = t \, \tau' \\
 \\
 t \, \tau \, \tau' & = & \begin{array}{c} e \\ d \, e \\ c \, c \, e \end{array} & \begin{array}{c} e \\ d \, e \\ c \, d \, d \end{array} = t \, \tau' \, \tau \\
 \\
 t \, \tau \, \tau' \, \tau & = & \begin{array}{c} e \\ d \, e \\ c \, d \, e \end{array} = t \, \tau' \, \tau \, \tau'
 \end{array}$$

Nous sommes maintenant en position de donner la définition du relèvement plaxique, en même temps que certaines de ses propriétés, qui le caractérisent.

4.5 – PROPOSITION :

(1) l'application  $\tau \in \gamma_A \rightarrow \tau \in \text{Bij}(A^*)$  définie en (4.3) s'étend en une représentation de  $\gamma_A$ , dont l'image est dite  $\text{Aut}(A^*)$ .

(2) pour tout  $\sigma \in \gamma_A$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \sigma & \\
 & A^* \dashrightarrow A^* & \\
 \text{cv} \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\
 & \sigma & \\
 & N^A \dashrightarrow N^A &
 \end{array}$$

(3) pour tout  $\sigma \in \text{Aut}(A^*)$ ,  $\sigma \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$

(4) pour tout mot  $w$  de  $A^*$ , pour tout intervalle  $B : \{B \sigma\} = B$ , alors

$$w \sigma \cap B^* = (w \cap B^*) \sigma$$

(5) tout élément de  $\text{Aut}(A^*)$  commute au redressement.

*Démonstration :*

Soit  $\sigma$  un élément de  $\gamma_A$ . On peut le factoriser en un produit de transpositions de lettres consécutives et relever ce produit de transpositions d'après la construction (4.3). Il est clair que ce relèvement vérifie les propriétés (2), (3), (4), (5) puisqu'il les vérifie pour les transpositions de lettres consécutives, comme il a été vu plus haut. Il nous reste donc à montrer que le relèvement de  $\sigma$  ne dépend pas de sa factorisation en produit de transpositions, c'est-à-dire, d'après les relations de Coxeter :

- si  $\tau$  et  $\tau'$  commutent dans  $\gamma_A$ , alors  $\tau \tau' = \tau' \tau$  dans  $Bij(A^*)$
- si  $\tau, \tau'$  ne commutent pas (ce qui implique que  $\tau' \tau \tau' = \tau \tau' \tau$ ), alors  $\tau' \tau \tau' = \tau \tau' \tau$  en tant qu'éléments de  $Bij(A)$ .

Le premier cas est évident, puisque  $\tau$  et  $\tau'$  ont des orbites disjointes et que leur relèvement n'agit que sur les lettres dans ces orbites respectives.

Soient donc, dans le deuxième cas, trois lettres consécutives  $c, d, e$ ,  $B$  l'intervalle  $\{c, d, e\}$  et  $\tau$  la transposition de  $c$  et  $d$ ,  $\tau'$  la transposition de  $d$  et  $e$ . Soit  $\theta \in Bij(A^*)$  le produit des relèvements  $\tau \tau' \tau$  et  $\theta'$  le produit  $\tau' \tau \tau'$ .

Soit  $w \in A^*$ ; par construction,  $w \theta$  et  $w \theta'$  ne peuvent différer que pour les lettres appartenant à  $B$ . D'après la Propriété (4) de (4.3),

$$w \theta \cap B^* = (w \cap B^*) \theta \quad (\text{resp. } w \theta' \cap B^* = (w \cap B^*) \theta').$$

Les mots  $(w \cap B^*) \theta$  et  $(w \cap B^*) \theta'$  ont même  $\mathfrak{A}$ -symbole d'après (4.3 (3)), et finalement, d'après la vérification (4.4), comme  $\theta$  et  $\theta'$  commutent au redressement, les mots  $(w \cap B^*) \theta$  et  $(w \cap B^*) \theta'$  ont aussi même redressé. Cela assure, d'après le théorème de Cauchy-Robinson (2.18) qu'ils sont identiques, et donc que  $w \theta$  et  $w \theta'$  le sont.

Il nous reste à justifier le nom de *groupe des automorphismes de conjugaison*, pour l'image de  $\gamma_A$  dans  $Bij(A^*)$ . C'est le but du théorème suivant.

#### 4.6 - THÉORÈME DE CONJUGAISON :

Soit  $\sigma \in \text{Aut}(A^*)$  et  $w_i, w'_i$  ( $i = 1, 2$ ) quatre mots :  $|w_i| = |w'_i|$ , tels que  $(w_1 w_2) \sigma = w'_1 w'_2$ . Alors

- (1)  $w_i \mathfrak{A} = w'_i \mathfrak{A}$  ( $i = 1, 2$ )
- (2) pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $(w_2 w_1)^n \sigma = (w'_2 w'_1)^n$ .

Il suffit de vérifier l'énoncé dans le cas où  $\sigma$  est la transposition de deux lettres consécutives, ce qui se fait sans difficulté.

#### 4.7 - THÉORÈME :

La restriction de tout automorphisme de conjugaison à un sousmonoïde commutatif de  $A^*/\equiv$  est un isomorphisme (de monoïde).

Suivant la remarque déjà amplement utilisée, il nous suffit de considérer le cas d'une transposition  $\tau$  de lettres consecutive  $c, d$ . Il nous faut prouver que si deux mots  $w, w'$  commutent dans  $A^*/\equiv$ , alors  $w \tau, w' \tau$  commutent de même. D'après la construction du relèvement, on peut supposer que  $w, w' \in \{c, d\}^*$ .

Soit donc  $w \equiv (d c)^p c^n d^m$ ,  $w' \equiv (d c)^{p'} c^{n'} d^{m'}$ , avec par exemple  $n \leq n'$ ,  $p' \leq p$ . La condition  $w w' \equiv w' w$  équivaut à l'une des deux suivantes :

$$m = n \leq n', m' \quad \text{ou} \quad n' = n \leq m, m' ;$$

on vérifie alors directement que

$$(w w') \tau = w \tau \cdot w' \tau \equiv w' \tau \cdot w \tau = (w' w) \tau \quad \square$$

Soit  $J : A \rightarrow N$  une évaluation. Il existe une et une seule partition  $I$  telle que  $J \sigma = I$  pour au moins une permutation  $\sigma$  de  $A$  et on peut choisir cette dernière de telle sorte que  $x \sigma \leq y \sigma$  quand  $x J = y J$  et  $x \leq y$ ; cette permutation (et l'automorphisme de conjugaison associé par le relèvement plaxique) est la *rectification* de  $J$ . Si donc  $w$  a pour évaluation  $J$  et  $\sigma$  est la rectification de  $J$ , alors  $w \sigma$  est un mot partitionnel qui est dit le *rectifié* de  $w$ .

4.8 – La construction suivante facilite le calcul du rectifié d'un mot :

Soit  $w \in A^*$ ,  $J$  l'évaluation de  $w$ . Soit  $B$  un intervalle initial  $= [a \dots d]$  de  $A$ , et soit  $b \in B$  tel que  $x J \geq b J \forall x \in B$ . Soit  $\sigma$  la permutation circulaire sur les lettres  $[b \dots d] : \sigma : a \dots b_- b b_+ \dots d d_+ \dots \rightarrow a \dots b_- b_+ \dots d b d_+ \dots$

Alors  $w \sigma$  s'obtient par constructions de 'filères' successives : par lettre *voisine* d'une lettre  $x_i = x$  dans un mot, on entend la première lettre  $x_+$  à gauche de  $x_i$  dans la *lecture circulaire* de ce mot (c'est-à-dire, on repart de l'extrémité droite du mot si l'on ne trouve pas de  $x_+$  à gauche de  $x_i$ ). On prend alors une lettre  $b$ , puis les voisins successifs des lettres atteintes, jusqu'à la lettre  $d$  incluse. On élimine le mot standard ainsi obtenu et l'on recommence l'opération à partir de n'importe quelle autre lettre  $b$ . Finalement, on isole ainsi un sous-mot homogène  $w'$  de  $w$ , d'évaluation  $(b \dots d)^{bJ}$ . Le mot  $w \sigma$  s'obtient alors par l'opération :  $x_i = x \rightarrow x_-$  si  $x \in [b_+ \dots d]$  et  $x_i \notin w'$ , et  $x_i$  inchangé sinon.

Exemple :

$$\begin{aligned} w &= e a e b c d a e b d a c c e d d \\ \longrightarrow e a e b \underline{c} d a e \underline{b} d a c c e d d & \quad (\text{construction de la première filière}) \\ \longrightarrow e a e \underline{b} \underline{c} d a e \underline{b} \underline{d} a c \underline{c} e d \underline{d} & \quad (\text{deuxième filière}) \\ \longrightarrow e a e b c c a e b d a b c e c d & = x \sigma \end{aligned}$$

Une lettre  $x$  sera dite *en place* dans un tableau  $t$  si et seulement si ses  $|t|_x$  occurrences se trouvent dans les premières (à partir de la gauche) colonnes de  $t$ . Moyennant cette définition, on alors :

4.9 – REMARQUE :

Les conditions suivantes sur un tableau  $t$  sont équivalentes :

- ses mots colonnes commutent deux-à-deux
- sa forme et son évaluation rectifiée sont la même partition
- son rectifié est un tableau de Yamanouchi
- toutes ses lettres sont en place.

*Preuve :*

L'équivalence des trois premières caractérisations résulte immédiatement de (4.7) et (3.7) puisque les automorphismes de conjugaison préservent la propriété d'un mot d'être une colonne. Celle de la dernière avec la première est immédiate en raison des règles de commutation entre colonnes (2.8).  $\square$

## 5 – Cyclage.

L'étude des polynômes de Foulkes/Green repose sur celle des classes de conjugaison dans le monoïde plaxique, ces dernières étant munies d'une structure d'ordre obtenue en restreignant la conjugaison à une relation spéciale dite de *cyclage*.

Soient  $J : A \rightarrow N$  une évaluation et  $W^J$  (resp.  $T^J$ ) l'ensemble des mots (resp. tableaux) ayant cette évaluation. On vient de voir qu'il existe un automorphisme de conjugaison unique  $\sigma = \sigma_J$  envoyant bijectivement  $W^J$  (resp.  $T^J$ ) sur l'ensemble  $W^I$  (resp.  $T^I$ ), où  $I = J \sigma$  est la partition obtenue en réordonnant  $J$ . L'ensemble  $T^J$  contient un tableau ligne unique  $v_J$  dont l'image par  $\sigma$  est l'unique tableau ligne  $v_I \in T^I$  (puisque  $\sigma$  conserve la forme).

Nous rappelons un résultat connu [L&S 3 et L&S 4] :

### 5.1 – PROPRIÉTÉ :

Il existe une et une seule application  $v : W^I \rightarrow N$ , la *cocharge*, satisfaisant identiquement les conditions suivantes :

- (1)  $w v = (w R) v$
- (2)  $v_I v = \mathbf{0}$
- (3) Si  $w = x w'$  ( $x \in A$ ), alors  $(w' x) v \geq w v$  quand  $x = a$   
et  $(w' x) v = w v - 1$  quand  $x > a$ .

De fait, quand  $w$  est un mot standard (c'est-à-dire quand  $I = (1, \dots, 1)$ ) la cocharge de  $w$  est l'index du Major de la permutation  $w^{-1} \neq$  (cfr. [5]) et c'est THOMAS [8] qui a montré le lien entre cette statistique classique et les polynômes de Foulkes-Green. Pour les partitions plus générales, la cocharge de  $w$  est la somme des cocharges sur un système de sous-mots standards de  $w$  déterminés par un algorithme qui rend cette somme extrémale.

Grâce au théorème de conjugaison (4.6), nous pouvons définir la cocharge d'un mot  $w$  de  $W^J$  comme étant égale à celle du mot  $w \sigma_J$ .

Rappelons maintenant que si  $t$  est un tableau dont la  $h$ -ième ligne est strictement plus courte que la  $(h + 1)$ -ième, le Théorème de Pieri (2.11) permet de définir une paire unique  $(x, s) = t \gamma^h$  telle que  $(x s) R = t$ ,  $x \in A$  et  $s$  est un tableau dont la forme ne diffère de celle de  $t$  que par suppression d'un point à la  $h$ -ième ligne. Le tableau  $(s x) R$  est conjugué de  $t$  (par  $x$ ) dans le monoïde plaxique. Nous dirons que c'est le  *$h$ -cyclage de  $t$  par  $x$*  si et seulement si sa cocharge est strictement inférieure à celle de  $t$ . Par conséquent, d'après la Proposition (5.1), quand l'évaluation de  $t$  est une

partition, cette condition est remplie si et seulement si  $x \neq a$ . Dans le cas contraire où  $t \in T^J$ , le théorème de conjugaison (4.6) montre que  $(s x) R \sigma_J = (s' x') R$ , où la paire  $(x', s')$  est égale à  $(t \sigma_J) \gamma^h$ , et  $(s x) R$  est alors un cyclage si et seulement si  $x' \neq a$ .

Il est important de noter que d'après la Proposition (5.1), l'opération de cyclage réduit la cocharge d'exactlyement une unité. On observera aussi que si  $t \gamma^h = (x, s)$ , le tableau  $(s x) R$  est toujours un cyclage quand  $h \geq 2$ . Quand  $h = 1$ , c'est aussi un cyclage si et seulement si  $x \neq a$  lorsque le degré de  $a$  dans  $t$  est maximal (i.e.  $a J \geq y J$  pour tout  $y \in A$ ). Nous ne connaissons pas de condition nécessaire et suffisante simple permettant de vérifier directement si  $t \rightarrow (s x) R$  est ou non un cyclage, sans passer par le calcul de  $t \sigma_J$ .

Soit par exemple

$$t = \begin{array}{c} c d \\ b b c \\ a a a d e \end{array} ;$$

il admet trois factorisations  $(x_h, s_h)$  correspondant à  $h = 1, 2, 3$  respectivement :

$$t \equiv (b) \begin{array}{c} c d \\ b c d \\ a a a e \end{array} , \quad t \equiv (b) \begin{array}{c} c d \\ b c \\ a a a d e \end{array} , \quad t \equiv (c) \begin{array}{c} d \\ b b c \\ a a a d e \end{array} ,$$

les tableaux  $t_h = (s_h x_h) R$  étant :

$$t_1 = \begin{array}{c} c d \\ b b d e \\ a a a b \end{array} , \quad t_2 = \begin{array}{c} c d \\ b c d \\ a a a b e \end{array} , \quad t_3 = \begin{array}{c} d \\ b b c d \\ a a a c e \end{array}$$

Ces trois tableaux sont des cyclages, puisque l'évaluation de  $t$  est une partition et que  $x_h \neq a$ .

Considérons par contre le tableau  $t' = t f^n$ ; on a

$$t' \gamma^h = (x_h s_h f^n) \quad \text{et} \quad (s_h f^n x_h) R = t_h f^n.$$

Pour  $h = 2$  ou  $3$ , ce sont encore des cyclages de  $t'$ . Par contre, pour  $h = 1$  lorsque  $n = 4 + m$ ,  $m \geq 0$ ,  $t_1 f^n$  n'est pas un cyclage de  $t'$  : en effet,  $t' \sigma_J$  est égal à

$$\begin{array}{c} c d \\ b b b \\ a a a a \dots a c d e e f \end{array} = t'' \quad \text{et} \quad t'' \gamma^1 = (a, s'').$$

5. 2 – PROPRIÉTÉ :

Soit  $T^J$  l'ensemble des tableaux d'évaluation  $J$ . Le cyclage est la relation de consécutivité d'un ordre partiel sur  $T^J$  dont l'élément minimum unique est le tableau ligne  $v_J$ , et qui admet la cocharge comme fonction de hauteur. Les éléments maximaux

de cette relation sont les tableaux dont la longueur de la première ligne est le maximum des degrés des lettres ; parmi ceux-ci l'élément de hauteur maximum est l'unique tableau  $t \in T^J$  dont la forme est la partition  $I = J \sigma_J$ .

*Preuve :*

Puisque la structure de cyclage de  $T^J$  est l'image de celle de  $T^J$  par l'automorphisme  $\sigma_J^{-1} : T^J \rightarrow T^J$ , il suffit de vérifier l'énoncé dans le cas d'une partition ; la description des éléments maximaux résulte alors de (4.9) et le reste de la proposition de (5.1).

Certaines proposition s'énoncent plus facilement en utilisant la charge  $w \nu$  (cfr. [L&S 3]) que nous définissons ici comme la différence  $w_0 v - w v$ , où  $w_0$  est le mot de Yamanouchi dont l'évaluation est la rectifiée de celle de  $w$ . On a alors :

**5.3 – PROPRIÉTÉ :**

La charge d'un tableau  $t$  est égale à :

- (i) celle d'une quelconque de ses puissances
- (ii) celle de tout mot  $w' z x w''$  si  $t \equiv w' x z w''$  et  $x, z$  sont deux lettres non consécutives dans  $A$
- (iii) celle du tableau complémentaire de  $t$  défini en (3.3).

*Preuve :*

On peut supposer  $t$  partitionnel. Nous ne reproduisons pas les preuves de (i) et (ii) qui découlent immédiatement de l'algorithme de calcul des charges exposé ailleurs (cfr. [L&S 5]). La preuve de (iii) résulte de l'égalité  $t \nu = \hat{t} \nu (= 0)$  pour les tableaux de Yamanouchi et du lemme qui suit

**5.4 – LEMME :**

Soient  $w$  un mot, et  $\hat{y}$  la colonne complémentaire d'une lettre  $y \neq a$ . On a  $(w \hat{y}) v = 1 + (\hat{y} w) v$ , où  $v$  désigne la cocharge.

*Preuve :*

On peut, au moyen d'un automorphisme de conjugaison, se ramener au cas où l'évaluation de  $w \hat{y}$  est une partition. Le résultat se vérifie directement quand  $w$  est une ligne et on procède par induction sur la cocharge de  $w y$ .

Si donc  $w$  n'est pas une ligne, il existe une lettre  $x \neq a$  telle que  $w \equiv \tilde{x} w'$ .

Supposons d'abord  $x \neq y$ . On a alors  $\hat{y} x \equiv x \hat{y}$ , et donc le diagramme commutatif suivant, où l'on a figuré la variation de la cocharge

$$\begin{array}{ccc}
 x \hat{y} w' \equiv \hat{y} x w' \equiv \hat{y} w & \overset{?}{\dashrightarrow} & w \hat{y} \equiv x w' \hat{y} \\
 \downarrow -1 & & \downarrow -1 \\
 \hat{y} w' x & \overset{+1}{\dashrightarrow} & w' x \hat{y} \equiv w' \hat{y} x
 \end{array}$$

Les deux flèches verticales sont des cyclages, et donc d'après (5.1), la cocharge baisse de 1 ; par ailleurs, la cocharge augmente de 1 pour la flèche du bas, d'après l'hypothèse d'induction ; il en est donc de même pour la flèche du haut, comme annoncé.

On traite le cas où  $x = y$  pareillement, en remplaçant la relation de commutation  $\widehat{y} x \equiv x \widehat{y}$  par  $\widehat{y} y \equiv y \widehat{y}$  dans le cas où  $y \neq b = a_+$ , et l'on vérifie directement le lemme pour  $x = y = b$ .

Les deux propriétés qui suivent servent à prouver certaines inégalités entre les polynômes de Foulkes/Green que nous avons publiées ailleurs [L&S 4].

5.5 – PROPRIÉTÉ :

Soient  $I$  et  $J$  deux évaluations telles que  $aJ = 1 + aI$  et  $xJ = xI$  pour les autres lettres. L'application  $t \rightarrow (a t) R$  est une bijection de  $T^I$  sur le sous-ensemble  $T'$  des tableaux de  $T^J$  n'admettant pas de 1-cyclage et ayant leur seconde ligne strictement plus courte que la première. L'application inverse est un morphisme de cyclage.

*Preuve :*

Soit  $t' \in T^J$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $t' \equiv a t$  est que sa deuxième ligne  $v'_2$  soit strictement plus courte que sa première ligne  $v'_1$  et que la  $i$ -ème lettre de  $v'_2$  soit strictement supérieure à la  $i+1$ -ème lettre de  $v'_1$  pour  $i = 1, 2, \dots, |v'_2|$ . Ceci montre immédiatement que  $T' = \{(a t) R : t \in T^I\}$ , puisqu'un tableau  $t' \in T^J$  n'admet un 1-cyclage que si  $|v'_1| > |v'_2|$  et si la  $i$ -ème lettre de  $v'_2$  est inférieure ou égale à la  $i+1$ -ème de  $v'_1$  pour un certain  $i$ .

Supposons maintenant que  $t' = (a t) R$ , où  $t \in T^I$ , admette un  $h$ -cyclage par une lettre  $x$  ( $\neq a$  par définition du cyclage). On a donc  $h \geq 2$  et si  $t' \equiv x s'$  on voit que les deux premières lignes du tableau  $s'$  satisfont les mêmes conditions que celles de  $t'$ . Donc  $s' = a s$ , où  $(x s) R = t$  et où  $t \rightarrow (s x) R$  est un  $h$ -cyclage.  $\square$

Notons  $\delta$  l'opération consistant à changer en un  $b$  le dernier  $a$  de la première ligne d'un tableau  $t$ . Par exemple, si

$$t = \begin{matrix} b c \\ a a b d \end{matrix} \quad \text{on a} \quad t\delta = \begin{matrix} b c \\ a b b d \end{matrix} .$$

Si  $I$  est l'évaluation de  $t$ , on note  $I \delta = J$  celle de  $t \delta$ .

5.6 – PROPRIÉTÉ :

Soit  $I$  une évaluation telle que  $a I > b I$ . L'opération  $\delta$  est une bijection de  $T^I$  sur l'ensemble  $T'$  des tableaux de  $T^J$  qui ont au moins un  $b$  sur la première ligne. C'est un morphisme de cyclage.

*Preuve :*

Le fait que  $\delta : T^I \rightarrow T'$  est bijectif est immédiat, car si  $t' \in T'$ , l'hypothèse  $a I > b I$  implique que le mot obtenu en changeant en un  $a$  le premier  $b$  de sa première ligne est encore un tableau.



Soit maintenant  $t \equiv x s \rightarrow (s x) R$  un  $h$ -cyclage de  $t \in T^I$  par la lettre  $x$ . En considérant la première ligne de  $t$  on voit que  $t \delta \equiv x (s \delta) \rightarrow (s \delta x) R$  est aussi un  $h$ -cyclage de  $t \delta$ .  $\square$

Soient  $v$  une ligne et  $t$  un tableau de même évaluation que  $v$ . Si  $p$  est la cocharge de  $t$  il existe au moins une suite de cyclages par les lettres  $x_1, \dots, x_p$  menant de  $t$  à  $v$ . Le mot  $w = x_1 x_2 \dots x_p$  est appelé un *mot de cyclage* de  $t$ . Il satisfait l'équation  $t w \equiv w v$  et nous conjecturons que toute solution de cette équation qui n'est pas un mot de cyclage de  $t$  a une longueur strictement supérieure à  $p$ .

Quand  $t$  est partitionnel, l'algorithme de calcul des charges montre directement que tous les mots de cyclage de  $t$  ont la même évaluation. Un résultat plus fort est obtenu au moyen de l'opération  $K$  décrite à la fin de la section.

Soit  $r + 1$  le nombre de lettres de l'alphabet du tableau  $t$ .

### 5.7 – THÉORÈME :

Tout mot de cyclage de  $t$  est congru au produit  $t_1 t \dots t_r$ , où  $t_j$  est le tableau obtenu en supprimant la première ligne dans le tableau  $t K^{j-1}$  ( $j = 1, \dots, r$ ).

La preuve du théorème repose sur deux lemmes d'intérêt indépendant.

### 5.8 – LEMME DE L'HEXAGONE :

Soit  $t$  un tableau admettant un  $h_1$ -cyclage  $t \rightarrow t_1$  par une lettre  $y$  et un  $h_2$ -cyclage  $t \rightarrow t'_1$  par  $y'$ , où  $h_1 > h_2$  et  $h_1 \neq 2$ . Il existe des lettres  $y_2, y_3, y'_2, y'_3$  et un tableau  $t_3$  tels que  $y y_2 y_3 \equiv y' y'_2 y'_3$  et que  $t_3$  soit à la fois un cyclage de  $t_1$  par le mot  $y_2 y_3$  et de  $t'_1$  par  $y'_2 y'_3$ .

*Preuve :*

On applique le lemme de l'équerre (2.13) en prenant  $h_3 = h_1 - 1$ . Les lettres cherchées sont définies par

$$t \gamma^{h_1 h_2 h_3} = (y y_2 y_3, s'') \quad ; \quad t' \gamma^{h_2 h_1 h_3} = (y' y'_2 y'_3, s''')$$

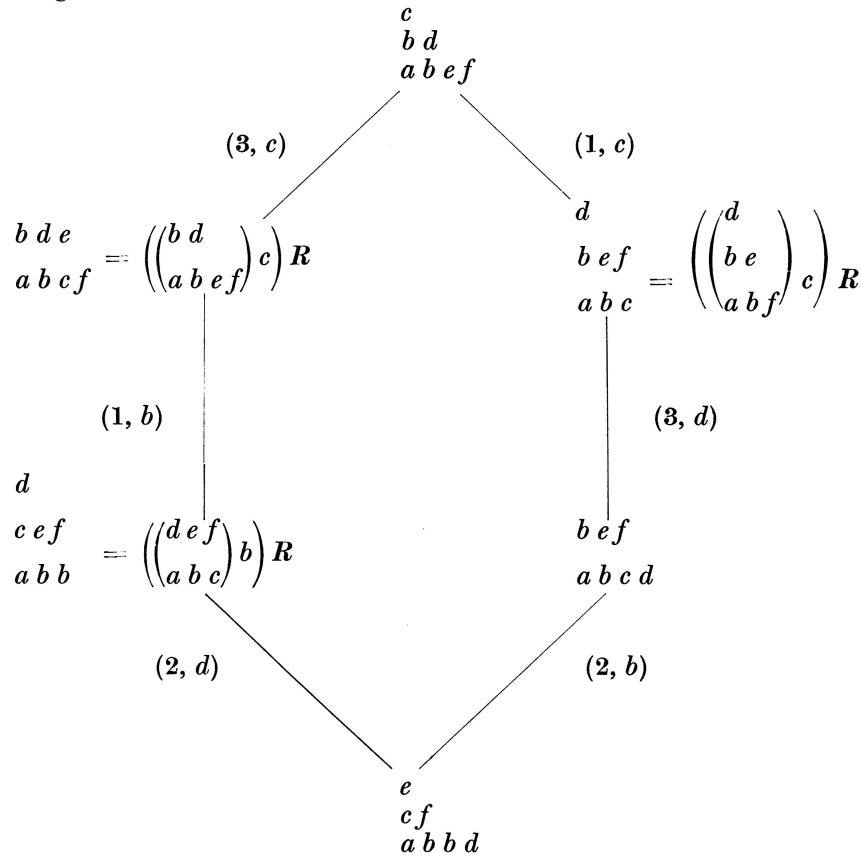
et le tableau  $t_3$  est  $(s'' y y_2 y_3) R = (s''' y' y'_2 y'_3) R$ .

Il suffit de vérifier que toutes les opérations sont bien des cyclages, ce qui est clair lorsque  $h_2 \geq 2$  ou quand  $y \neq y'$ . Quand  $h_2 = 1$  et  $y = y'$ , on a  $y_2 = y'_3$ , avec  $y'_3 \neq a$  puisque  $h_3 = h_1 - 1 \geq 2$  par hypothèse, montrant que l'opération  $(s y) R = y_2 s' \rightarrow (s' y_2) R$  est bien un cyclage.  $\square$

### 5.9 – EXEMPLE :

$$\text{Soit} \quad t = \begin{array}{c} c \\ b d \\ a b e f \end{array} \quad \text{et} \quad h_1 = 3, \quad h_2 = 1.$$

On a l'hexagone



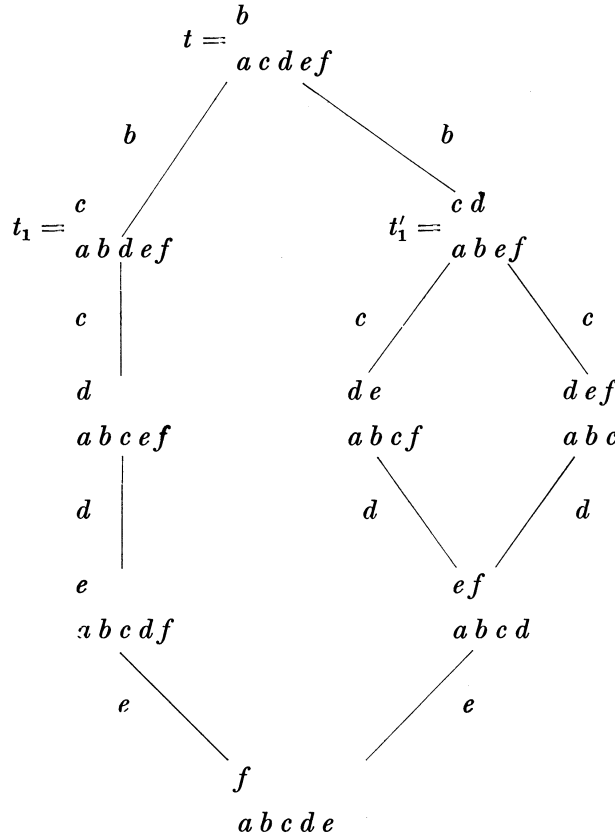
$(n, x)$  désignant le  $n$ -cyclage par la lettre  $x$ .

Ce lemme suffit pour montrer par induction sur la cocharge que deux mots de cyclage sont congrus quand aucune des deux chaînes correspondantes ne contient de 1-cyclage. Pour compléter la preuve, un second lemme est nécessaire. Les seuls démonstrations que nous en connaissions font appel à une série de calcul trop spéciaux pour que nous les reproduisions ici et nous nous bornerons à en donner l'énoncé. Dans celui-ci, nous appelons *cyclage restreint* tout cyclage qui n'est pas un 1-cyclage d'un tableau qui a au moins trois lignes (il n'y a donc pas de restriction sur les cyclages des tableaux à deux lignes) ; la *structure de cyclage restreint* de  $t_1$  est le plus petit ensemble contenant  $t_1$  et tout tableau obtenu à partir d'un tableau de l'ensemble par cyclage restreint. Enfin, un morphisme de cyclage est *complet* si et seulement si il conserve les lettres de cyclage.

5.10 – LEMME :

Soit  $t$  un tableau admettant un 2-cyclage  $t \rightarrow t_1$  et un 1-cyclage  $t \rightarrow t'_1$  par la même lettre. Il existe alors un morphisme de cyclage complet de la structure de cyclage restreint de  $t_1$  dans celle de  $t'_1$ .

5.11 – EXEMPLE : (illustrant en même temps la nécessité de la condition  $h_1 \neq 2$  dans le lemme de l'hexagone et le fait que le morphisme du Lemme (5.10) n'est pas bijectif)



Dans le cas particulier d'un tableau à deux lignes, s'il existe deux cyclages, ils sont nécessairement par la même lettre. En utilisant le lemme de l'hexagone (5.8), le lemme précédent achève de prouver que deux mots de cyclage d'un tableau sont congrus. Le fait qu'ils soient congrus au mot décrit dans le théorème résulte alors d'une simple induction sur la cocharge en considérant le cyclage de  $t$  par sa première lettre (en tant que mot).

5.12 – Soit  $t$  un tableau d'évaluation  $J$ , et  $b$  la première lettre (pour l'ordre de  $A$ ) telle que  $xJ \neq 0$ . On suppose que  $bJ \geq xJ \vee x$ ; on note dans ce cas par  $tK$  le tableau  $(vt')R$ , où  $t = t' b^p v$ ,  $p = |t|_b$ . L'opération  $K$  permet une récurrence sur le nombre de lettres de l'alphabet d'un tableau dans plusieurs démonstrations; l'énoncé suivant (qui a des applications à la multiplication des fonctions de Hall-Littlewood) illustre cette technique.

5.13 – PROPOSITION :

Soit  $B$  un intervalle initial de  $A$  et  $J$  une évaluation telle que l'image de  $B$  par la rectification  $\sigma$  de  $J$  soit un intervalle  $C$ . Pour chaque tableau  $t$  d'évaluation  $J$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) toutes les lettres de  $B$  sont en place dans  $t$
- (ii) les lettres de  $C$  sont en place dans  $(t \sigma) K^r$ , où  $r$  est le nombre de lettres précédant  $C$  dans  $A$ .

*Démonstration :*

Tout d'abord, la condition que l'image de  $B$  par la rectification de  $J$  soit un intervalle équivaut à :

$$\forall x \notin B, \text{ ou bien } x J > \max_{y \in J} y J, \text{ ou bien } x J \leq \inf_{y \in J} y J.$$

On peut supposer que le maximum de  $J$  n'est pas atteint sur  $B$ , sinon les assertions (i) et (ii) sont identiques.

Par ailleurs, si un tableau  $t'$  a une évaluation  $J'$  telle que  $a J' \geq x J' \forall x$ , alors pour tout automorphisme  $\sigma'$  tel que  $a \sigma' = a$ , on a  $(t K) \sigma' = (t \sigma') K$  d'après le théorème de conjugaison (4.6).

Grâce à cette remarque et au moyen d'un automorphisme de conjugaison laissant  $B = [a, b, \dots, c, d]$  invariant, lequel permet de supposer que  $e J = \max x J$  (avec  $e = d_+$ , successeur de  $d$ ), on est ramené par récurrence à montrer l'équivalence de (i) et

- (iii) Soit  $\sigma'$  l'automorphisme  $a, b, \dots, d, e, \dots \rightarrow e, a, b, \dots, d, \dots$  laissant fixes les lettres plus grandes que  $e$  ; alors dans  $(t \sigma') K$ , les lettres  $b, \dots, d, e$  sont en place.

La démonstration de la proposition repose alors sur le fait (4.9) que pour les lettres d'un intervalle  $D$  et un tableau  $t$ , l'assertion : « les lettres de  $D$  sont en place dans  $t$  » est équivalent à : «  $\forall \sigma : \{D \sigma\} = \{D\}$ , les lettres de  $D$  sont en place dans  $t \sigma$  ».

Pour ne pas avoir à surcharger l'exposé par la notation des automorphismes de conjugaison nécessaires, nous désignerons par  $t(a^H b^H \dots)$  l'image de  $t$  par l'automorphisme tel que  $H = J_\sigma$ , en n'écrivant pas les lettres pour les quelles  $x H = x J$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) La condition que  $b, \dots, c, d, e$  soient en place dans  $t' = t(a^J b^J \dots d^J e^J) K$  implique que les lettres  $b, \dots, c, d$  soient en place dans  $t(a^J b^J \dots d^J e^J)$  : on ne peut en effet pas extraire (au sens 2.12) de lettres  $b, \dots, d$  par la gauche dans  $t'$ . Comme  $a$  est nécessairement en place, après un automorphisme de conjugaison sur  $a, \dots, d$  on voit que les lettres  $a, \dots, d$  sont en place dans  $t(a^J \dots c^J d^J e^J)$ . Il n'est pas difficile de vérifier que, après transposition de  $d$  et  $e$ , les lettres  $a, \dots, d$  sont encore en place.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $\tau$  la transposition de  $d$  et  $e$  ; comme  $d$  est en place dans  $t$  et que  $d J \geq x J \forall x \leq d$ , l'automorphisme  $\tau$  n'opère que sur la première ligne de  $t$ . Les lettres  $a, \dots, d$  sont donc en place dans  $t(a^J \dots c^J d^J e^J)$  tout autant que dans  $t(a^J b^J \dots d^J e^J)$ . Dans ce dernier tableau, étant donné qu'il y a strictement plus de lettres  $a$  que de  $b, \dots, d$  respectivement, il n'y a pas de  $b, \dots, d$  en première ligne ; ces let-

tres sont en place et le restent dans  $t(a^{e^J} b^{a^J} \dots e^{d^J}) K$ ; en outre, comme le nombre de  $e$  n'est pas inférieur au maximum du nombre de  $b, \dots, d$ , la lettre  $e$  se trouve en place apres l'opération  $K$ .  $\square$

5.14 – EXEMPLE :

$$t(= t(a^2 b^3 c^1 d^4 e^5)) = \begin{array}{c} d e \\ c d e \\ b b d \\ a a b d e e e \end{array} ;$$

$$t(a^2 b^3 c^1 d^5 e^4) = \begin{array}{c} d e \\ c d e \\ b b d \\ a a b d d e e \end{array} ; \quad t(a^5 b^2 c^3 d^1 e^4) = \begin{array}{c} d e \\ c c e \\ b b c \\ a a a a e e \end{array} ;$$

$$t(a^5 b^2 c^3 d^1 e^4) K = \begin{array}{c} e \\ d e \\ c c e \\ b b c \end{array} R = \begin{array}{c} e \\ d e \\ c c e \\ b b c e \end{array}$$

#### REFERENCES

Outre les références désignées par [L&S  $n$ ] qui sont détaillées dans la préface, on renvoie à :

- [1] CLIFFORD, A. H. & PRESTON, G. B. : « Theory of Semigroups », *Providence, Amer. Math. Soc.* (1961), Math. Surveys, n. 7.
- [2] GREENE, C. : « An extension of Schensted's theorem », *Adv. Math.*, **14**, 254–265 (1974).
- [3] KNUTH, D. E. : « Permutation matrices and generalised Young tableaux », *Pac. J. Math.*, **34**, 709–727 (1970).
- [4] LALLEMENT, G. : *Semigroups and Combinatorial Applications* (New York, Wiley, 1979).
- [5] MACDONALD, I. G. : *Symmetric functions and Hall polynomials* (à paraître).
- [6] ROBINSON, G. DE B. : « On the representations of the symmetric group », *Am. J. Math.*, **60**, 746–760 (1938).
- [7] SCHENSTED, C. : « Longest increasing and decreasing sequences », *Can. J. Math.*, **13**, 179–191 (1961).
- [8] THOMAS, G. P. : « Further results on Baxter sequences and generalized Schur functions », *Combinatoire et représentation du groupe symétrique* (Strasbourg, 1976), Springer Lect. Notes, n. 579.