אלגברה ליניארית

תאוריה ותרגילים

פרופ' שלמה הבלין, אוניברסיטת בר אילן

ד"ר יפית מעין, מרכז אקדמי לב

תוכן עניינים

א. תכונות וקטורים 1

1. וקטור 1
2. שוויון וקטורים 1
3. סכום וקטורים 1
4. מכפלת וקטור בסקלר 2
5. וקטור האפס 2
6. מכפלה סקלרית 2
7. תכונות של מכפלה סקלרית של וקטורים 3
8. וקטורים ניצבים (אורתוגונליים) 3
9. מרחק בין וקטורים 4
10. אורך של וקטור 4
11. וקטור יחידה 5
12. נרמול וקטור 5
13. משפט Cauchy Schwartz 5
14. וקטורים מעל המרחב המרוכב 6
15. מכפלה סקלרית של וקטורים ב-**Cn** 7
16. אורך של וקטור ב-**Cn** 8

ב. מטריצות 9

1. שוויון מטריצות 9
2. סכום מטריצות 10
3. מכפלת מטריצה בסקלר 10
4. תכונות של סכום מטריצות 11
5. כפל מטריצות 11
6. תכונות של כפל מטריצות 12
7. סוגי מטריצות ופעולות על מטריצות 12

תכונות של מטריצה משוחלפת 14

תכונת מטריצת היחידה 15

ג. מטריצות ומשוואות ליניאריות 17

1. מטריצות ומשוואות הסיבוב 17

ד. מרחב וקטורי 19
1. תת מרחב (subspace) 21
ה. תלות ליניארית של וקטורים 24
1. צירוף לינארי 24
2. תלות ליניארית 26
ו. בסיס ומימד 28
ז. קואורדינטות 32
1. מעבר מבסיס לבסיס 33
ח. העתקה 36
1. העתקה ליניארית 36
2. גרעין ותמונה של העתקה ליניארית 37
3. אופרטור ליניארי 38
4. פעולות על אופרטורים ליניאריים 41
ט. מטריצות ואופרטורים ליניאריים 43
1. הצגה מטריציאלית של אופרטור ליניארי 43
2. מטריצת מעבר מבסיס לבסיס 47
3. מעבר של אופרטור מבסיס לבסיס 49
4. דמיון מטריצות 51
י. דטרמיננטות 55
1. תכונות של דטרמיננטות 57
2. מינור וקופקטור 59
3. מערכת משוואות (n משוואות ב- n נעלמים) 62
יא. ערכים עצמיים וקטורים עצמיים 63
יב. מרחב מכפלה פנימית 72
1. בסיס אורתונורמלי 72
2. תהליך גרם-שמידט 75

א. <u>תכונות וקטורים</u>

1. <u>וקטור</u>

<u>הגדרה</u>:
קבוצה בת n מספרים ממשיים מסודרים נקראת **וקטור בעל מימד n** (או **וקטור n מימדי**) מעל שדה המספרים הממשיים.

סימון: $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ **כאשר** $u_i \in \mathbf{R}$ $(1 \le i \le n)$
u_i נקראים **רכיבים** (או קואורדינטות) של הוקטור u.

דוגמאות:

1. וקטור 2 מימדי: $(2, -1)$
2. וקטור 3 מימדי: $(5,0,-9)$
3. וקטור 4 מימדי: $(-\pi, 0,1,3)$

קבוצת כל הוקטורים בעלי מימד n מעל שדה המספרים הממשיים נקראת מרחב ממשי n מימדי ומסומנת $\mathbf{R}^n$.

2. <u>שוויון וקטורים</u>

<u>הגדרה</u>:
שני וקטורים u, v נקראים **שווים** כלומר $u = v$ אם הם בעלי אותו מימד ואם כל רכיביהם שווים בהתאמה.

דוגמאות:

4. הוקטורים $(1,5,3), (1,3,5)$ אינם שווים.
5. הוקטורים $(1,2,2), (1,2)$ אינם שווים.
6. מצא את ערכי המשתנים x, y, z אם נתון: $(x, x-y, z+3) = (2,1,-5)$

פתרון: $x = 2$, $x - y = 1$, $z + 3 = -5$

כלומר: $x = 2$, $y = 1$, $z = -8$

3. <u>סכום וקטורים</u>

<u>הגדרה</u>:
סכום של וקטורים הוא וקטור שרכיביו הם סכומים של רכיבי הוקטורים המחוברים בהתאמה.

כלומר:

אם $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

אז $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)$

<u>הערה</u>: סכום של וקטורים ממימדים שונים אינו מוגדר.

דוגמא:

7. נתון: $v = (2,5,-4)$, $u = (1,-3,9)$

חשב: $u + v$

פתרון: $u + v = (2 + 1,5 - 3, -4 + 9) = (3,2,5)$

4. מכפלת וקטור בסקלר

<u>הגדרה</u>:

מכפלת וקטור בסקלר הוא וקטור שרכיביו הם כפולות בסקלר של רכיבי הוקטור המוכפל.

כלומר:

אם $k \in \mathbf{R}$, $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

אז $ku = (ku_1, ku_2, ku_3, \dots, ku_n)$

דוגמא:

8. נתון: $v = (-2,1,0,1)$, $u = (1,-5,2,-3)$

חשב: $2u - 3v$

פתרון: $2u - 3v = 2(1,-5,2,-3) - 3(-2,1,0,1) =$

$(2,-10,4,-6) + (-1)(-6,3,0,3) =$

$(2,-10,4,-6) + (6,-3,0,-3) =$

$(8,-13,4,-9)$

5. וקטור האפס

<u>הגדרה</u>:

וקטור האפס הוא וקטור שכל רכיביו הם אפסים. כלומר: $(0,0,0,\dots,0)$

6. מכפלה סקלרית

<u>הגדרה</u>:

מכפלה סקלרית של וקטורים ב-$\mathbf{R}^n$ היא סכום מכפלות רכיבי הוקטורים המוכפלים בהתאמה.

כלומר:

אם $v=(v_1,v_2,v_3,\dots,v_n)$, $u=(u_1,u_2,u_3,\dots,u_n)$

אז $u\cdot v=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3+\dots+u_n\cdot v_n=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$

דוגמא:

9. נתון: $v=(-2,3,6)$, $u=(1,4,5)$

חשב: $u\cdot v$

פתרון: $u\cdot v=(-2,3,6)\cdot(1,4,5)=(-2)\cdot 1+3\cdot 4+6\cdot 5=40$

7. תכונות של מכפלה סקלרית של וקטורים

יהיו $u,v,w\in \mathbf{R}^n$ וקטורים ויהי $k\in R$ סקלר. אז מתקיים:

א. חוק החילוף (קומוטטיביות) $u\cdot v=v\cdot u$

ב. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) $(ku)\cdot v=k(u\cdot v)$

ג. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) $(u+v)\cdot w=u\cdot w+v\cdot w$

8. וקטורים ניצבים (אורתוגונליים)

הגדרה:

שני וקטורים נקראים ניצבים אם מכפלתם הסקלרית שווה 0.

כלומר:

אם $u\cdot v=0$, אז u,v הם ניצבים.

דוגמא:

10. נתונים שני וקטורים: $u=(1,3,-5,0)$, $v=(2,1,1,6)$. בדוק האם וקטורים אלו ניצבים.

פתרון:

מאחר שמתקיים: $u\cdot v=(2,1,1,6)\cdot(1,3,-5,0)=2\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot -5+6\cdot 0=0$

הרי שוקטורים אלו ניצבים.

הערה: ההגדרה האלגברית הנזכרת לעיל של מכפלה סקלרית שקולה להגדרה הגיאומטרית הידועה של מכפלה סקלרית:

יהיו $\vec{R}_1,\vec{R}_2$ וקטורים כלשהם ותהי θ הזווית שביניהם. אז: $\vec{R}_1\cdot\vec{R}_2=|\vec{R}_1|\cdot|\vec{R}_2|\cdot\cos\theta$

לצורך הפשטות, נוכיח את שקילות ההגדרות עבור וקטורים דו מימדיים:

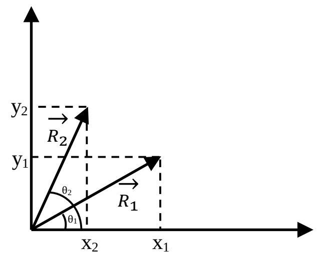
יהיו: $\vec{R}_1=(x_1,y_1)\,,\vec{R}_2=(x_2,y_2)$

אז לפי ההגדרה האלגברית כאן מתקיים: $\vec{R}_1\cdot\vec{R}_2=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

נחשב גודל זה במישור הממשי (ראה איור א-1):

$$\vec{R}_1\cdot\vec{R}_2=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=|\vec{R}_1|\cos\theta_1\cdot|\vec{R}_2|\cos\theta_2+|\vec{R}_1|\sin\theta_1\cdot|\vec{R}_2|\sin\theta_2$$
$$=|\vec{R}_1|\cdot|\vec{R}_2|\cdot\cos(\theta_2-\theta_1)=|\vec{R}_1|\cdot|\vec{R}_2|\cdot\cos\theta$$

■



איור א-1

9. מרחק בין וקטורים

הגדרה:

מרחק בין וקטורים ב-$\mathbf{R}^n$ הוא שורש סכום ריבועי ההפרשים של רכיבי הוקטורים בהתאמה.

כלומר:

אם $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

אז $d(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

דוגמא:

11. חשב את המרחק בין הוקטורים $v = (2,-3,6)$, $u = (1,0,5)$.

פתרון:

$$d(u,v) = \sqrt{(1-2)^2 + \left(0-(-3)\right)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + \left(0-(-3)\right)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{11}$$

10. אורך של וקטור

הגדרה:

אורך של וקטור ב-$\mathbf{R}^n$ הוא שורש סכום ריבועי רכיביו.

כלומר:

אם $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

אז $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2}$

דוגמא:

12. חשב את אורך הוקטור $u = (1,-2,3,1)$.

פתרון: $\|u\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{15}$

מסקנה:

המרחק בין וקטורים הוא אורך וקטור ההפרש בין הוקטורים: $d(u,v) = \|u - v\|$

11. וקטור יחידה

<u>הגדרה:</u>
וקטור יחידה הוא וקטור שאורכו 1.

כלומר: e הוא וקטור יחידה אם $\|e\|=1$.

12. נרמול וקטור

<u>הגדרה:</u>
חלוקת וקטור באורכו נקראת **נרמול הוקטור**.

כלומר: $e_u = \frac{u}{\|u\|}$.

הוקטור e_u הוא וקטור יחידה באותו כיוון כמו הוקטור u.

13. משפט Cauchy Schwartz

<u>משפט 1:</u>
לכל 2 וקטורים u, v מתקיים: $\|u\| \cdot \|v\| \le |u \cdot v|$.

הוכחה:

אם $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)\ ,\ v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

אז $|u \cdot v| = |u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n| \le |u_1 \cdot v_1| + |u_2 \cdot v_2| + \cdots + |u_n \cdot v_n| =$

$$= \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i|$$

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2}$$

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2}$$

נעזר באי השיוויון: $(x-y)^2 \ge 0$ או $2xy \le x^2 + y^2$

אם $x = \frac{|u_i|}{\|u\|}\ ,\ y = \frac{|v_i|}{\|v\|}$

אז $2\frac{|u_i|}{\|u\|}\frac{|v_i|}{\|v\|} \le \frac{|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{|v_i|^2}{\|v\|^2}$

נבצע סכום לכל i בשני האגפים:

$$2\frac{\sum_i |u_i v_i|}{\|u\|\|v\|} \le \frac{\sum_i |u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{\sum_i |v_i|^2}{\|v\|^2} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 2$$

$$\frac{\sum_i |u_i v_i|}{\|u\|\|v\|} \le 1$$

$$\sum_i |u_i v_i| \le \|u\|\|v\|$$

$$|u \cdot v| \le \|u\|\|v\|$$

■

על סמך אי השיוויון הקודם, ניתן להגדיר זווית בין 2 וקטורים באופן הבא:

<u>הגדרה</u>:

הזווית בין 2 וקטורים u, v היא הזווית θ המקיימת:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

<u>הערה</u>: הגדרה זו נותנת אמנם את הזווית בין 2 וקטורים במרחב הממשי.

יש לשים לב שאם $u \cdot v = 0$ אמנם $\theta = \frac{\pi}{2}$, כלומר הוקטורים ניצבים, כמו שהגדרנו לעיל.

14. <u>וקטורים מעל המרחב המרוכב</u>

<u>הגדרה</u>:

קבוצה בת n מספרים מרוכבים מסודרים נקראת **וקטור בעל מימד n** (או וקטור n מימדי) **מעל שדה המספרים המרוכבים**.

סימון: $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ **כאשר** $u_i \in \mathbf{C}$ $(1 \le i \le n)$.

קבוצת כל הוקטורים בעלי מימד n מעל שדה המספרים המרוכבים נקראת מרחב מרוכב n מימדי ומסומנת $\mathbf{C}^n$.

פעולות חיבור וכפל בסקלר (מרוכב) מוגדרות כפי שהוגדרו בוקטורים מעל שדה המספרים הממשיים.

דוגמאות:

13. $(2 + 3i, 4 - i, 3) + (3 - 2i, 4i, 3 - 5i) = (5 + i, 4 + 3i, 6 - 5i)$

14. $2i(2 + 3i, 4 - i, 3) = (-6 + 4i, 2 + 8i, 6i)$

אולם, מכפלה סקלרית ואורך של וקטור ב-$\mathbf{C}^n$ מוגדרים אחרת מאשר מכפלה סקלרית ואורך של וקטור ב-$\mathbf{R}^n$, כפי שיפורט בנושא הבא.

15. מכפלה סקלרית של וקטורים ב-C^n

<u>הגדרה</u>:
מכפלה סקלרית של וקטורים ב-C^n היא סכום מכפלות רכיבי הוקטור הראשון במכפלה בצמודים של רכיבי הוקטור השני במכפלה, בהתאמה.

כלומר:

אם $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

אז $u \cdot v = u_1 \cdot {v_1}^* + u_2 \cdot {v_2}^* + u_3 \cdot {v_3}^* + \dots + u_n \cdot {v_n}^* = \sum_{i=1}^{n} u_i {v_i}^*$

<u>הערות</u>:

א. הגדרה זו כוללת גם את ההגדרה של מכפלה סקלרית של וקטורים מעל שדה המספרים הממשיים, שכן אז: ${v_i}^* = v_i$.

ב. לפי הגדרה זו מתקיים: $u \cdot v \neq v \cdot u$.

דוגמאות:

15. נתון: $v = (3-2i, 5, 4-6i)$,$u = (2+3i, 4-i, 2i)$

חשב את $u \cdot v$ ואת $v \cdot u$.

פתרון:

$$u \cdot v = (2+3i)(3-2i)^* + (4-i)5^* + 2i(4-6i)^* =$$
$$= (2+3i)(3+2i) + (4-i)5 + 2i(4+6i) =$$
$$= 13i + 20 - 5i - 12 + 8i = 8 + 16i$$

$$v \cdot u = (3-2i)(2+3i)^* + 5(4-i)^* + (4-6i)2i^* =$$
$$= (3-2i)(2-3i) + 5(4+i) + (4-6i)(-2i) =$$
$$= -13i + 20 + 5i - 8i - 12 = 8 - 16i$$

כלומר, מתקיים כאן: $(u \cdot v) = (v \cdot u)^*$

ואמנם, אפשר להוכיח זאת באופן כללי:

<u>משפט 2</u>:
לכל 2 וקטורים מתקיים $(u \cdot v) = (v \cdot u)^*$

הוכחה:

אם $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

אז $u \cdot v = u_1 \cdot {v_1}^* + u_2 \cdot {v_2}^* + u_3 \cdot {v_3}^* + \dots + u_n \cdot {v_n}^*$

$$v \cdot u = v_1 \cdot {u_1}^* + v_2 \cdot {u_2}^* + v_3 \cdot {u_3}^* + \dots + v_n \cdot {u_n}^*$$
$$(v \cdot u)^* = (v_1 \cdot {u_1}^*)^* + (v_2 \cdot {u_2}^*)^* + (v_3 \cdot {u_3}^*)^* + \dots + (v_n \cdot {u_n}^*)^* =$$
$$= v_1 \cdot {u_1}^* + v_2 \cdot {u_2}^* + v_3 \cdot {u_3}^* + \dots + v_n \cdot {u_n}^* = u \cdot v$$

■

16. אורך של וקטור ב-C^n

הגדרה:

אורך של וקטור ב-C^n הוא שורש סכום מכפלות כל רכיב בצמוד שלו.

כלומר:

אם $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

אז $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1 u_1^* + u_2 u_2^* + \cdots + u_n u_n^*} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2}$

מסקנה:

$u \cdot u$ וכן $\|u\|$ **הם ממשיים וחיוביים כאשר** $u \neq 0$ **ושווים 0 אם"ם** $u = 0$.

דוגמא:

16. נתון: $u = (2i, 5 + i, 6)$

חשב את $u \cdot u$ ואת $\|u\|$.

פתרון: $u \cdot u = (2i)(2i)^* + (5 + i)(5 + i)^* + 6(6)^* =$

$= (2i)(-2i) + (5 + i)(5 - i) + 6 \cdot 6 = 4 + 26 + 36 = 66$

אורך u: $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{66}$

ב. מטריצות

הגדרה:

מטריצה היא סמל מהצורה $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, כאשר a_{ij} סקלרים ממשיים או מרוכבים.

$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ נקראת **שורה** i של המטריצה.

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ נקראת **עמודה** j של המטריצה.

a_{ij} נקרא **רכיב** (אלמנט) מטריצה שמקומו שורה i ועמודה j.

מטריצה בעלת m שורות ו-n עמודות נקראת **מטריצה מסדר** $\mathbf{m \times n}$.

דוגמא:

1. מטריצה מסדר 2×3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

   שורות המטריצה הן: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

   עמודות המטריצה הן: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

1. שוויון מטריצות

הגדרה:

שתי מטריצות A,B נקראות **שוות** כלומר A=B אם הן מאותו סדר ואם כל רכיביהן שווים בהתאמה.

כלומר:

אם הרכיב הכללי של $A_{m\times n}$ הוא a_{ij} והרכיב הכללי של $B_{m\times n}$ הוא b_{ij},

אז: $A_{m\times n} = B_{m\times n}$ אם $a_{ij} = b_{ij}$ לכל i ו-j.

הערות:

א. מטריצה בעלת שורה אחת או עמודה אחת יכולה להחשב כוקטור שורה או עמודה (וכן וקטור יכול להחשב כמטריצה).

ב. סקלר יכול להחשב כמטריצה מסדר 1×1.

2. סכום מטריצות

<u>הגדרה</u>:
סכום של מטריצות הוא מטריצה שרכיביה הם סכומים של רכיבי המטריצות המחוברות בהתאמה.

כלומר:

אם
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

אז:
$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>הערה</u>: סכום של מטריצות מסדרים שונים אינו מוגדר.

דוגמא:

2. נתון:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

חשב את סכום המטריצות.

פתרון:
$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. מכפלת מטריצה בסקלר

<u>הגדרה</u>:
מכפלת מטריצה בסקלר היא מטריצה שרכיביה הם כפולות בסקלר של רכיבי המטריצה המוכפלת.

כלומר:

אם
$$k \in \mathbf{R}\ ,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

אז

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

דוגמא:

3. נתון:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

חשב את מכפלת המטריצה ב-5.

פתרון:

$$\mathbf{5}A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 0 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

4. תכונות של סכום מטריצות

תהי V קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$. לכל שלוש מטריצות $A, B, C \in V$ ולכל סקלר $k \in \mathbf{R}$ מתקיים:

א. חוק החילוף (קומוטטיביות) $A + B = B + A$

ב. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) $(A + B) + C = A + (B + C)$

ג. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) $k(A + B) = kA + kB$

ד. $A + (-A) = 0$

5. כפל מטריצות

הגדרה:

תהיינה A ו- B מטריצות כך שמספר העמודות של A שווה למספר השורות של B, לדוגמא A היא מטריצה מסדר $m \times n$ ו- B היא מטריצה מסדר $n \times k$. אז מכפלת המטריצות AB היא מטריצה שהרכיב הכללי שלה C_{ij} הוא המכפלה הסקלרית של השורה ה-i של מטריצה A בעמודה ה-j של מטריצה B.

כלומר:

אם

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B_{n\times k} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

אז
$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ . & \dots & .\\ a_{i1} & \dots & a_{in}\\ . & \dots & .\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k}\\ . & \dots & . & \dots & .\\ . & \dots & . & \dots & .\\ . & \dots & . & \dots & .\\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k}\\ . & \dots & .\\ . & c_{ij} & .\\ . & \dots & .\\ c_{m1} & \dots & c_{mk}\end{pmatrix}$$

כאשר:
$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

<u>הערה</u>: מכפלת AB מוגדרת רק אם A היא מטריצה שבה מספר העמודות שווה למספר השורות במטריצה B.

דוגמאות:

4. $$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s & t\\ u & v & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar+bu & as+bv & at+bw\\ cr+du & cs+dv & ct+dw\end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1+5\cdot 2 & 3\cdot 0+5\cdot 6\\ 7\cdot 1+4\cdot 2 & 7\cdot 0+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 30\\ 15 & 24\end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 7 & 1\cdot 5+0\cdot 4\\ 2\cdot 3+6\cdot 7 & 2\cdot 5+6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 48 & 34\end{pmatrix}$$

הדוגמא האחרונה מראה שכפל מטריצות אינו מקיים את חוק החילוף (כפל מטריצות אינו קומוטטיבי). כלומר AB לא בהכרח שווה ל- BA.
אולם, ישנן מספר תכונות המתקיימות במכפלת מטריצות.

6. <u>תכונות של כפל מטריצות</u>

א. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות): $(AB)C=A(BC)$

ב. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות): $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

7. <u>סוגי מטריצות ופעולות על מטריצות</u>

1. **מטריצת האפס** היא מטריצה שכל רכיביה הם אפסים.
כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

2. **מטריצה ריבועית** היא מטריצה שבה מספר העמודות שווה למספר השורות, כלומר מטריצה מסדר $n\times n$:

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

אלכסון המטריצה כולל את האיברים $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$

דוגמא:

7. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ היא מטריצה **ריבועית מסדר** 3×3.

3. **מטריצה אלכסונית** היא מטריצה ריבועית בה כל האיברים שאינם באלכסון שווים ל-0.

כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

דוגמא:

8. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ היא מטריצה אלכסונית.

4. **מטריצה חצי אלכסונית** היא מטריצה ריבועית בה כל האיברים מצד אחד של האלכסון שווים ל-0.

כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

דוגמא:

9. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ היא מטריצה חצי אלכסונית.

5. **מטריצה משוחלפת** של A היא המטריצה שבה השורות של מטריצה A נכתבות באותו סדר, כעמודות.

סימון: A^t או A' או $\tilde{A}$.

כלומר:

אם

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

אז

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>הערה</u>: אם A היא מטריצה מסדר $m \times n$ אז A^t היא מטריצה מסדר $n \times m$

דוגמא:

10. נתון: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

חשב את A^t.

פתרון: $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

__**תכונות של מטריצה משוחלפת**__

תהיינה A,B מטריצות ויהי $k \in \mathbf{R}$ סקלר. אז מתקיים:

א. $(A+B)^t = A^t + B^t$

ב. $(A^t)^t = A$

ג. $(kA)^t = kA^t$

ד. $(AB)^t = B^tA^t$

דוגמא:

11. נתון: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

חשב את AB, $(AB)^t$.

פתרון: $AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = B^tA^t$$

6. **מטריצה צמודה** למטריצה A היא המטריצה שאיבריה הם הצמודים לאיברים של A, בהתאמה.

סימון: A^*.

דוגמא:

12. נתון: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5-i & 3 \\ i+7 & 5i & -i \end{pmatrix}$

חשב את A^*.

פתרון: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5+i & 3 \\ -i+7 & -5i & i \end{pmatrix}$

7. **מטריצה צמודה משוחלפת** היא המטריצה הצמודה של המטריצה המשוחלפת של A או המטריצה המשוחלפת של המטריצה הצמודה של A. כלומר $(A^t)^*$ או $(A^*)^t$ (סדר הפעולות אינו משמעותי).

סימון: A^+.

דוגמא:

13. נתון: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5-i & 3 \\ i+7 & 5i & -i \end{pmatrix}$

חשב את A^+.

פתרון: $A^+ = \begin{pmatrix} 1 & -i+7 \\ 5+i & -5i \\ 3 & i \end{pmatrix}$

8. **מטריצה הרמטית** היא מטריצה המקיימת $A^+ = A$. כלומר, לכל רכיב של A מתקיים $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

<u>הערה</u>: מטריצה הרמטית היא בהכרח מטריצה ריבועית.

דוגמא:

14. נתון: $A = \begin{pmatrix} 8 & 6-i \\ 6+i & 3 \end{pmatrix}$

בדוק האם המטריצה הינה הרמטית.

פתרון: $A^t = \begin{pmatrix} 8 & 6+i \\ 6-i & 3 \end{pmatrix}$

$(A^t)^* = \begin{pmatrix} 8 & 6-i \\ 6+i & 3 \end{pmatrix} = A$

ולכן A היא מטריצה הרמטית.

9. **מטריצת היחידה** (או **מטריצת הזהות**) היא מטריצה ריבועית שרכיבי האלכסון הראשי שלה הם 1 וכל שאר הרכיבים הם אפסים.

סימון: I_n או I.

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

סימון נוסף למטריצת היחידה, הוא ע"י הדלתא של קרונקר : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

<u>**תכונת מטריצת היחידה**</u>

לכל מטריצה ריבועית A מתקיים: $AI = IA = A$

<u>הערה</u>: תכונה זו דומה לתכונה של הסקלר 1, ולכן מטריצה זו נקראת 'מטריצת היחידה'.

דוגמא:

15. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

10. **מטריצה אוניטרית** היא מטריצה שמכפלתה בצמודה המשוחלפת שלה נותנת מטריצת יחידה.

כלומר: $AA^{+}=I$ (**במקרה זה מתקיים גם** $A^{+}A=I$)

דוגמא:

17. נתון: $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

בדוק האם המטריצה הינה אוניטרית.

פתרון: $A^{+}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

$$AA^{+}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן A היא מטריצה אוניטרית.

11. **מטריצה הופכית** למטריצה A היא מטריצה שמכפלתה ב-A שווה למטריצת היחידה.

סימון: A^{-1}.

כלומר: $A^{-1}A=I$. (**במקרה זה מתקיים גם** $A\,A^{-1}=I$)

<u>הערה</u>: אם $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ היא מטריצה מסדר 2×2, אז: $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(בתנאי שמתקיים: $ad-bc\neq 0$; אחרת אין ל-A מטריצה הופכית)

דוגמא:

18. נתון: $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

חשב את A^{-1}.

פתרון: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 8/42 & -1/21 \\ -3/42 & 1/7 \end{pmatrix}$

בדיקה: $A\,A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8/42 & -1/21 \\ -3/42 & 1/7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ג. מטריצות ומשוואות ליניאריות

מערכת של משוואות ליניאריות:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

ניתנת לכתיבה בכתיב מטריציאלי:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}$$

או בקיצור: $AX = B$, כאשר: $A = (a_{ij}), X = (x_i), B = (b_i)$.

במקרה זה, מטריצה A נקראת **מטריצת המקדמים**.

במקרים רבים, הכתיב המטריציאלי נוח ויעיל יותר מאשר כתיבת מערכת משוואות לינאריות.

דוגמא:

1. נתונה מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 5x - 7y + 3z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

כתוב מערכת זו בכתיב מטריציאלי.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. מטריצות ומשוואות הסיבוב

בהינתן נקודה (x,y) במישור, ניתן לבטא את שיעוריה (x',y') במערכת צירים מסובבת בזווית θ בעזרת מערכת המשוואות הבאה:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

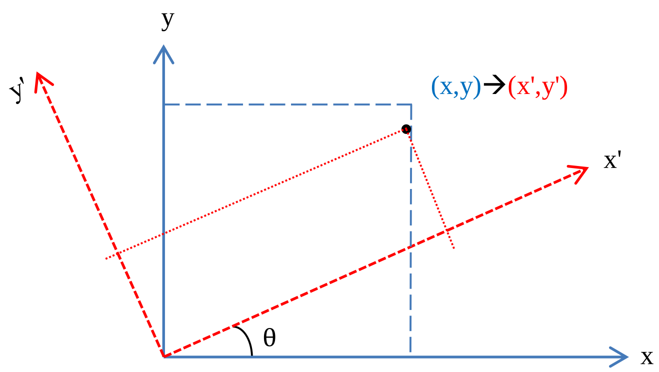
משוואות אלו נקראות משוואות סיבוב של נקודה במישור.

בכתיב מטריציאלי:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

המטריצה $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ נקראת **מטריצת סיבוב** בדו-מימד. הכפלת מטריצת הסיבוב בוקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ מסובבת אותו בזווית θ (מבלי לשנות את אורכו).

למטריצת סיבוב מסדר 3×3 יש חשיבות רבה בסיבוב של גוף תלת מימדי קשיח.



איור ג-1

ד. <u>מרחב וקטורי</u>

<u>הגדרה</u>:
מרחב וקטורי S מעל שדה F, הוא קבוצה של וקטורים שמוגדרות עליהם פעולות חיבור וכפל באברי השדה (סקלרים ממשיים או מרוכבים), כך שלכל $u, v, w \in S$ וקטורים ולכל $k_1, k_2 \in F$ סקלרים, מתקיימים שמונת התנאים הבאים:

1. סגירות לחיבור ולכפל בסקלר: אם $u, v \in S$ אזי $u + v \in S$, ואם $k \in F$ סקלר אזי $k \cdot u \in S$.
2. חוק החילוף (קומוטטיביות): $u + v = v + u$
3. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) לחיבור: $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. קיום איבר ניטרלי לחיבור: קיים איבר ב-S הנקרא "0" והמקיים $u + 0 = u$ לכל $u \in S$.
5. קיום איבר נגדי לחיבור: לכל $u \in S$ קיים איבר $-u \in S$ המקיים $u + (-u) = 0$.
6. סקלר היחידה: קיים איבר $1 \in F$ המקיים $1 \cdot u = u$ לכל $u \in S$.
7. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) לכפל בסקלר: $(k_1k_2)u = k_1(k_2u)$
8. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות): $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$

$k(u + v) = ku + kv$

דוגמאות למרחבים וקטוריים:

1. תהי S קבוצת כל הוקטורים ממימד n עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שהוגדרו לעיל (פרק 0 נושאים 4,3).

בדוק האם S מהווה מרחב וקטורי.

פתרון:

1. סגירות לחיבור

אם $u, v \in S$ כלומר $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

אז $u + v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \ldots, a_n + b_n) \in S$

סגירות לכפל בסקלר

אם $k\in F$ סקלר

אז $k \cdot u = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n) \in S$

2. חוק החילוף

$u + v = v + u$ לפי הגדרת חיבור וקטורים לעיל (פרק 0 נושאים 4,3).

3. חוק הקיבוץ לחיבור

$(u + v) + w = u + (v + w)$ לפי הגדרת חיבור וקטורים לעיל (פרק 0 נושאים 4,3).

4. קיום איבר ניטרלי לחיבור

וקטור האפס $(0,0 \ldots ,0) = 0$ המקיים $\alpha + 0 = \alpha$ לכל $\alpha \in S$.

5. קיום איבר נגדי לחיבור

לכל $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$ קיים $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \in S$, המקיים: $\alpha + (-\alpha) = 0$.

6. סקלר היחידה

לכל $u \in S$ מתקיים: $1 \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ לפי הגדרת כפל בסקלר.

7. חוק הקיבוץ לכפל בסקלר

$(c_1 \cdot c_2)(a_1, a_2, \dots, a_n) = c_1(c_2 a_1, c_2 a_2, \dots, c_2 a_n)$, לפי הגדרת כפל בסקלר.

8. חוק הפילוג

$$(c_1 + c_2)(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((c_1 + c_2)a_1, (c_1 + c_2)a_2, \dots, (c_1 + c_2)a_n)$$
$$= c_1(a_1, a_2, \dots, a_n) + c_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$c(a_1, a_2, \dots, a_n) + c(b_1, b_2, \dots, b_n) = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n) + (cb_1, cb_2, \dots, cb_n)$$
$$= (ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2, \dots, ca_n + cb_n) = c(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$= c\{(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)\}$$

לפי הגדרת חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר.

לסיכום, הראנו שקבוצת הוקטורים ממימד n מהווה מרחב וקטורי.

■

2. תהי S קבוצת כל הוקטורים מהצורה (a,a,b) עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שהוגדרו לעיל. קל להוכיח ש-S מהווה מרחב וקטורי.

3. תהי S קבוצת כל הוקטורים מהצורה (a,b,1) עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שהוגדרו לעיל. קל להוכיח ש-S **אינה** מהווה מרחב וקטורי.

הוכחה: סגירות לחיבור אינה מתקיימת.

יהיו $(a, b, 1), (c, d, 1) \in S$

אך: $(a, b, 1) + (c, d, 1) = (a + c, b + d, 2) \notin S$

■

4. תהי S קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר שהוגדרו לעיל. בדוק האם S מהווה מרחב וקטורי.

פתרון:

1. סגירות לחיבור ולכפל בסקלר

אם $A, B \in S$ אזי $A + B \in S$ ואם c סקלר אזי $c \cdot A \in S$ לפי הגדרת פעולות החיבור והכפל בסקלר של מטריצות (פרק 0 נושאים 4,3).

2. חוק החילוף

$A + B = B + A$ לפי הגדרת חיבור מטריצות לעיל (פרק 0 נושאים 4,3).

3. חוק הקיבוץ

$(A + B) + C = A + (B + C)$ לפי הגדרת חיבור מטריצות לעיל (פרק 0 נושאים 4,3).

4. קיום איבר ניטרלי לחיבור

מטריצת האפס $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$ המקיימת $A + 0 = A$ לכל $A \in S$.

5. קיום איבר נגדי לחיבור

לכל $A \in S$ קיים $-A \in S$ המקיים $A + (-A) = 0$

6. סקלר היחידה

לכל $A \in S$ מתקיים $1 \cdot A = A$ לפי הגדרת כפל בסקלר.

7. חוק הקיבוץ לכפל בסקלר

$(c_1c_2)A = c_1(c_2A)$ לפי הגדרת כפל מטריצה בסקלר.

8. חוק הפילוג

$(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$

$c(A + B) = cA + cB$

לפי הגדרת חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר.

לסיכום, הראנו שקבוצת המטריצות מסדר $m \times n$ מהווה מרחב וקטורי.

■

1. תת מרחב (subspace)

<u>הגדרה:</u>

קבוצת איברים מתוך המרחב הוקטורי המהווה בעצמה מרחב וקטורי נקראת **תת-מרחב**.

דוגמאות:

a. יהי V המרחב הוקטורי של כל הוקטורים התלת מימדיים. נגדיר קבוצה חלקית המכילה את כל הוקטורים מהצורה $(a, b, 0)$, ונוכיח שקבוצה זו מהווה תת מרחב.

א. קבוצת וקטורים אלו היא קבוצה חלקית למרחב הוקטורי התלת מימדי.

ב. קבוצת וקטורים אלו מקיימת את כל התנאים של מרחב וקטורי:

i. סגירות לחיבור ולכפל בסקלר

אם $u, v \in S$ אזי $u + v \in S$ ואם c סקלר אזי $c \cdot u \in S$ לפי הגדרת הקבוצה ופעולות החיבור והכפל בסקלר.

ii. חוק החילוף

$u + v = v + u$ מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

iii. חוק הקיבוץ

$(u + v) + w = u + (v + w)$ מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

iv. קיום איבר ניטרלי לחיבור

וקטור האפס $0 = (0,0,0)$, המקיים $u + 0 = u$ לכל $u \in S$.

v. קיום איבר נגדי לחיבור

לכל $u = (a, b, 0) \in S$ קיים $-u = (-a, -b, 0) \in S$, המקיים $u + (-u) = 0$.

vi. סקלר היחידה

לכל $u = (a, b, 0) \in S$ מתקיים $1 \cdot (a, b, 0) = (a, b, 0)$

vii. חוק הקיבוץ לכפל בסקלר

$(c_1c_2)u = c_1(c_2u)$ מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

viii. חוק הפילוג

$(c_1 + c_2)u = c_1u + c_2$

$(c_1 + c_2)u = c_1u + c_2u$

$c(u + v) = cu + cv$

מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

לסיכום, הראנו שקבוצת הוקטורים מהצורה $(a, b, 0)$ מהווה תת מרחב.

■

b. יהי V המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר $n \times n$. נגדיר קבוצה חלקית המכילה את כל המטריצות הסימטריות, כלומר המטריצות המקיימות $a_{ij} = a_{ji}$.

דוגמאות למטריצות סימטריות: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

נוכיח שקבוצה זו מהווה תת מרחב.

א. קבוצת מטריצות אלו היא קבוצה חלקית למרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות.

ב. קבוצת מטריצות אלו מקיימת את כל התנאים של מרחב וקטורי:

i. סגירות לחיבור ולכפל בסקלר

אם $A, B \in S$ אזי $A + B \in S$ ואם c סקלר אזי $c \cdot A \in S$ לפי הגדרת הקבוצה ופעולות החיבור והכפל בסקלר.

ii. חוק החילוף

$A + B = B + A$ מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

iii. חוק הקיבוץ

$(A + B) + C = A + (B + C)$ מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

iv. קיים איבר ניטרלי לחיבור

מטריצת האפס $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$ המקיימת $A + 0 = A$ לכל $A \in S$.

v. קיום איבר נגדי לחיבור

לכל $A \in S$ קיים $-A \in S$, המקיים $A + (-A) = 0$.

vi. סקלר היחידה

לכל $A \in S$ מתקיים $1 \cdot A = A$.

vii. חוק הקיבוץ לכפל בסקלר

$(c_1c_2)A = c_1(c_2A)$ מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

viii. חוק הפילוג

$(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$

$c(A + B) = cA + cB$

מתקיים בכל המרחב הוקטורי V.

לסיכום, הראנו שקבוצת המטריצות הסימטריות מהווה תת מרחב.

ה. תלות ליניארית של וקטורים

1. צירוף ליניארי

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה סקלרים K, ויהיו $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. אזי כל וקטור ב-$V$ מהצורה $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ כאשר $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$, נקרא **צירוף ליניארי** של הוקטורים $v_1, v_2, \dots, v_n$.

דוגמאות:

1. נתונים שני וקטורים: $(2,3,0)$; $(3,0,-1)$.

נבצע את הפעולה הבאה:
$$2(3,0,-1) + 5(2,3,0) = (16,15,-2)$$

הוקטור $(16,15,-2)$ הוא **צירוף ליניארי** של הוקטורים הנ"ל.

2. הוקטור $(5,3,-6)$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$, שכן:
$$(5,3,-6) = 5(1,0,0) + 3(0,1,0) - 6(0,0,1)$$

למעשה, כל וקטור (a,b,c) הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$:
$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

3. כתוב את הוקטור $v = (1,-2,5)$ כצירוף ליניארי של הוקטורים הבאים:
$$e_1 = (1,1,1);\ e_2 = (1,2,3)\ ;\ e_3 = (2,-1,1)$$

פתרון: צריך למצוא סקלרים x,y,z המקיימים: $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

כלומר:
$$(1,-2,5) = x(1,1,1) + y(1,2,3) + z(2,-1,1) = (x,x,x) + (y,2y,3y) + (2z,-z,z)$$
$$= (x + y + 2z, x + 2y - z, x + 3y + z)$$

מתקבלת מערכת של שלוש משוואות בשלושה נעלמים:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + y + 2z = 1 \\ (2) & x + 2y - z = -2 \\ (3) & x + 3y + z = 5\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + y + 2z = 1 \\ (2) - (1) & y - 3z = -3 \\ (3) - (1) & 2y - z = 4\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + y + 2z = 1 \\ (2) - (1) & y - 3z = -3 \\ (3') - (2') & 5z = 10\end{array}\right\}$$

$z = 2$
$y = 3$
$x = -6$

ולכן: $v = -6e_1 + 3e_2 + 2e_3$

4. כתוב את הפולינום $v = t^2 + 4t - 3$ כצירוף ליניארי של הפולינומים $e_1 = t^2 - 2t + 5$, $e_2 = 2t^2 - 3t$; $e_3 = t + 3$.

פתרון: צריך למצוא סקלרים x,y,z המקיימים $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

כלומר: $t^2 + 4t - 3 = x(t^2 - 2t + 5) + y(2t^2 - 3t) + z(t + 3)$

$= xt^2 - 2xt + 5x + 2yt^2 - 3yt + zt + 3z$

$= (x + 2y)t^2 + (-2x - 3y + z)t + 5x + 3z$

מתקבלת מערכת של שלוש משוואות בשלושה נעלמים:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + 2y = 1 \\ (2) & -2x - 3y + z = 4 \\ (3) & 5x + 3z = -3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + 2y = 1 \\ 2(1) + (2) & y + z = 6 \\ (3) - 5(1) & -10y + 3z = -8\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + 2y = 1 \\ 2(1) + (2) & y + z = 6 \\ (3') + 10(2') & 13z = 52\end{array}\right\}$$

$z = 4$
$y = 2$
$x = -3$

ולכן: $v = -3e_1 + 2e_2 + 4e_3$

5. בדוק האם הוקטור $(2,5)$ יכול להכתב כצירוף ליניארי של הוקטורים $e_1 = (1,0)$; $e_2 = (2,0)$.

פתרון: צריך לבדוק האם קיימים סקלרים x,y המקיימים $v = xe_1 + ye_2$,

כלומר: $(2,5) = x(1,0) + y(2,0) = (x + 2y, 0)$

מתקבלת מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{aligned}&(1)\ x + 2y = 2\\&(2)\quad 5 = 0\end{aligned}$$

למערכת משוואות זו אין פתרון מכיוון שמשוואה (2) מהווה סתירה. מכאן שהוקטור $(2,5)$ לא יכול להכתב כצירוף ליניארי של שני הוקטורים הנ"ל.

יש לשים לב שהוקטור הנ"ל **כן** יכול להכתב כצירוף ליניארי של שני הוקטורים הללו:

$$e_1 = (1,1)\ ;\ e_2 = (2,0)$$

צריך למצוא סקלרים x,y המקיימים $v = xe_1 + ye_2$

כלומר: $(2,5) = x(2,0) + y(1,1) = (2x + y, y)$

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ \ 2x + y = 2\\&(2)\quad\ \ y = 5\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&x = -{}^{3}\!/_{2}\\&y = 5\end{aligned}$$

ולכן: $v = -{}^{3}\!/_{2}\,e_1 + 5e_2$

2. <u>תלות ליניארית</u>

<u>הגדרה:</u>
נתונים m וקטורים $v_1, v_2, \dots, v_m$ השייכים למרחב וקטורי V. הוקטורים נקראים **תלויים ליניארית**, (או ת"ל או תלויים), אם קיימים m סקלרים שלא כולם 0 המקיימים $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$; אחרת (כלומר, אם כולם אפסים), הוקטורים נקראים **בלתי תלויים ליניארית** (או בת"ל או בלתי תלויים).

<u>הערות</u>

א. מושג התלות הליניארית קשור למושג צירוף ליניארי. אם הוקטורים תלויים ליניארית זאת אומרת שאפשר לכתוב את אחד מהוקטורים הללו כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים ולכן הם נקראים תלויים ליניארית.

ב. אם אחד הוקטורים, נניח v_1, הוא וקטור האפס, אזי תמיד הוקטורים יהיו תלויים ליניארית לפי הגדרה זו. שכן: $1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_m = 0$ ולא כל המקדמים הם אפסים.

דוגמאות

6. הוקטורים $u = (1,3,-1)\ ;\ v = (1,-1,0)\ ;\ w = (5,3,-2)$ הם תלויים ליניארית, שכן:

$$2(1,3,-1) + 3(1,-1,0) - 1(5,3,-2) = (0,0,0)$$

7. בדוק האם הוקטורים $u = (1,-2,1)\ ;\ = (2,1,-1)\ ;\ w = (7,-4,1)$ הם תלויים ליניארית.

פתרון: צריך לבדוק האם קיימים סקלרים x,y,z שלא כולם אפסים המקיימים:

$$x(1,-2,1) + y(2,1,-1) + z(7,-4,1) = (0,0,0)$$

כלומר: $(x, -2x, x) + (2y, y, -y) + (7z, -4z, z) = (0,0,0)$

$$(x + 2y + 7z, -2x + y - 4z, x - y + z) = (0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & x + 2y + 7z = 0 \\ (2) & -2x + y - 4z = 0 \\ (3) & x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & x + 2y + 7z = 0 \\ 2(1) + (2) & 5y + 10z = 0 \\ (3) - (1) & -3y - 6z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & x + 2y + 7z = 0 \\ (2) & y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

מתקבלת מערכת של שתי משוואות בשלושה נעלמים ולכן יש אינסוף פתרונות לבעיה, כלומר אינסוף אפשרויות לסקלרים x,y,z המקיימים:

$$x(1,-2,1) + y(2,1,-1) + z(7,-4,1) = (0,0,0)$$

ולכן הוקטורים הנ"ל תלויים ליניארית.

8. בדוק האם הוקטורים $u = (0,5,4,2)$; $= (0,0,-3,1)$; $w = (7,2,4,-2)$ תלויים ליניארית.

פתרון: צריך לבדוק האם קיימים סקלרים x,y,z שלא כולם אפסים המקיימים:

$$x(0,5,4,2) + y(0,0,-3,1) + z(7,2,4,-2) = (0,0,0,0)$$

כלומר:

$$(0,5x,4x,2x) + (0,0,-3y,y) + (7z,2z,4z,-2z) = (0,0,0,0)$$

$$(7z, 5x + 2z, 4x - 3y + 4z, 2x + y - 2z) = (0,0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & 7z = 0 \\ (2) & 5x + 2z = 0 \\ (3) & 4x - 3y + 4z = 0 \\ (4) & 2x + y - 2z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

התקבל פתרון יחיד לסקלרים $x,y,z : x = y = z = 0$ ולכן הוקטורים הנ"ל הם בלתי תלויים ליניארית.

<u>הערה</u>: ניתן לבדוק תלות ליניארית בין וקטורים בדרך נוספת, המחליפה את הצורך בפתרון מערכת משוואות:

רושמים את הוקטורים הנתונים בעמודות או בשורות, ומגיעים למטריצה חצי אלכסונית ע"י פעולות כפל שורה אחת בקבוע וחיבורה לשורה אחרת. אם מגיעים למטריצה עם שורת אפסים אזי הוקטורים תלויים ליניארית. אם לא ניתן להגיע לשורה של אפסים אזי הוקטורים בלתי תלויים ליניארית.

דוגמא:

9. בדוק האם הוקטורים $u = (1,5,4)$; $v = (2,3,-3)$; $w = (1,6,2)$ תלויים ליניארית.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -9 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שלא ניתן להגיע לשורת אפסים ולכן הוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית.

ו. <u>בסיס ומימד</u>

<u>הגדרה</u>:
מרחב וקטורי V יקרא **בעל מימד n** אם ישנם n וקטורים $e_1, e_2, \dots, e_n$ בלתי תלויים ליניארית שפורשים את V, כלומר שכל וקטור ב-V יכול להיכתב כצירוף ליניארי שלהם. במקרה זה קבוצת הוקטורים $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ נקראת **בסיס** למרחב הוקטורי.

סימון: $\dim V = n$.

<u>משפט 1</u>:
יהי V מרחב וקטורי סופי (ממד סופי) אזי לכל בסיס שלו יהיו אותו מספר איברים.

דוגמאות:

1. למרחב וקטורי תלת מימדי R^3 יש בסיס הנקרא טבעי:

$$e_1 = (1,0,0)\ ;\ e_2 = (0,1,0)\ ;\ e_3 = (0,0,1)$$

וקטורים אלו הם בלתי תלויים ליניארית: $xe_1 + ye_2 + ze_3 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$

וניתן לבנות מהם כל וקטור במרחב התלת מימדי.
$\dim R^3 = 3$ כי בבסיס ישנם 3 וקטורים.

2. למרחב הוקטורי V של כל הוקטורים באורך n יש בסיס טבעי:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\dots,0) \\ e_3 &= (0,0,1,\dots,0) \\ &\ \ \vdots \\ e_n &= (0,0,0,\dots,1) \end{aligned}$$

$\dim V = n$ כי בבסיס ישנם n וקטורים.

3. המטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ מהוות בסיס טבעי למרחב הוקטורי של כל המטריצות מסדר 2×2. הממד הוא 4 כי בבסיס ישנם 4 "וקטורים".

4. יהי W מרחב וקטורי של כל הפולינומים ב-t ממעלה $\geq n$. אזי הקבוצה $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ היא בלתי תלויה ליניארית, וע"י צירוף ליניארי של איבריה אפשר לקבל כל איבר ב-W, ולכן קבוצה זו נקראת בסיס ל-W. מכאן ניתן להסיק ש: $\dim W = n+1$.

<u>הערה</u>: המרחב הוקטורי של כל הפולינומים אינו בעל מימד סופי היות ואי אפשר לבטא את כל הפולינומים ע"י צירוף ליניארי של קבוצה סופית של וקטורים.

<u>משפט 2</u>:

יהי V מרחב וקטורי המקיים $\dim V = n$ אזי:

א. כל n+1 וקטורים או יותר הם תלויים ליניארית.

ב. כל n וקטורים בלתי תלויים ליניארית מהווים בסיס.

דוגמאות:

5. האם הוקטורים הבאים מהווים בסיס למרחב R^3?

א. $(1,-1,5);\ (1,1,1)$

ב. $(1,2,3);\ (1,0,-1);\ (3,-1,0);\ (2,1,-2)$

ג. $(1,1,1);\ (1,2,3);\ (2,-1,1)$

ד. $(1,1,2);\ (1,2,5);\ (5,3,4)$

פתרון:

א. לא. $\dim R^3 = 3$ ולכן בכל בסיס שלו צריכים להיות 3 וקטורים (לפי משפט 1).

ב. לא. $\dim R^3 = 3$ ולכן בכל בסיס שלו צריכים להיות 3 וקטורים (לפי משפט 1).
יש לשים לב שארבעת הוקטורים הם בטוח תלויים ליניארית (לפי משפט 2 א').

ג. $\dim R^3 = 3$, וכאן נתונים שלושה וקטורים. נותר לבדוק האם וקטורים אלו תלויים ליניארית (לפי משפט 2 ב').
נבדוק את התלות הליניארית בעזרת מטריצה באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

הוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית ולכן הם מהווים בסיס.

ד. $\dim R^3 = 3$, וכאן נתונים שלושה וקטורים. נותר לבדוק האם וקטורים אלו תלויים ליניארית (לפי משפט 2 ב').
נבדוק את התלות הליניארית בעזרת מטריצה באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטורים תלויים ליניארית ולכן הם לא מהווים בסיס.

6. יהי W תת מרחב של R^4 הנוצר מהוקטורים $u = (1,-2,5,-3)$; $v = (2,3,1,-4)$;
$w = (3,8,-3,-5)$

א. מצא בסיס ומימד של W.

ב. הרחב את הבסיס של W לבסיס של R^4.

פתרון:

א. כדי לדעת מהו המימד של W יש לבדוק האם הוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית.
נבדוק את התלות הליניארית בעזרת מטריצה באופן הבא:

$$\begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\2&3&1&-4\\3&8&-3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\0&7&-9&2\\0&14&-18&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\0&7&-9&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מכאן ששני הוקטורים $(1,-2,5,-3)$; $(0,7,-9,2)$ הם בלתי תלויים ליניארית ומהווים בסיס לתת מרחב W. כלומר, המימד של W הוא 2 (סימון: dimW=2).

ב. אנו מחפשים 4 וקטורים בלתי תלויים ליניארית ששניים מהם יהיו שני הוקטורים הנ"ל. הוקטורים $(1,-2,5,-3)$; $(0,7,-9,2)$; $(0,0,0,1)$; $(0,0,1,0)$ הם בלתי תלויים ליניארית שכן הם יוצרים מטריצה חצי אלכסונית ללא שורת אפסים, ולכן הם יהוו בסיס ל- R^4.

7. יהי V מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2×2. הוכח כי $\dim V = 3$.

פתרון:

נבחר את 3 המטריצות: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

ונוכיח שהן מהוות בסיס למרחב V.

<u>טענה</u>: כל המטריצות הסימטריות מסדר 2×2 מהוות צירוף ליניארי של שלוש מטריצות אלו.

הוכחה:

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כלומר, קבוצת המטריצות פורשת את V.

כעת צריך להוכיח שמטריצות אלו הן בלתי תלויות ליניארית:

$$x\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=y=z=0$$

כלומר, המטריצות הן בלתי תלויות ליניארית, ולכן הן מהוות בסיס ל-V.

מסקנה: $\dim V = 3$.

■

8. יהי W מרחב הנוצר ע"י קבוצת כל הצירופים הליניאריים של הפולינומים הבאים:

$v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$

$v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$

$v_3 = t^3 + 6t - 5$

$v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

מצא בסיס ומימד של W.

פתרון:

כדי לדעת מהו המימד של W יש לבדוק האם הוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית.

נבדוק את התלות הליניארית בעזרת מטריצה באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן ששני הוקטורים $(1,-2,4,1)$; $(0,1,1,-3)$ הם בלתי תלויים ליניארית, ולכן הפולינומים $t^3 - 2t^2 + 4t + 1$; $t^2 + t - 3$ מהווים בסיס למרחב W. כלומר, המימד של W הוא 2 ($\dim W = 2$).

9. יהי V מרחב וקטורי של זוגות סדורים של מספרים מרוכבים מעל שדה הסקלרים הממשיים. הוכח כי $\dim V=4$.

פתרון:

נבחר את ארבעת הוקטורים $(1,0); (0,1); (i,0); (0,i)$, ונוכיח שהם מהווים בסיס למרחב V.

<u>טענה</u>: כל וקטור מהצורה הכללית $z = (a + bi, c + di)$ מהווה צירוף ליניארי של ארבעת הוקטורים הללו.

הוכחה: $z = a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i)$ כלומר, קבוצת הוקטורים פורשת את V.

כעת צריך להוכיח שוקטורים אלו הם בלתי תלויים ליניארית.

הוכחה:

$$x_1(1,0) + x_2(i,0) + x_3(0,1) + x_4(0,i) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 i = 0 \\ x_3 + x_4 i = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

כלומר, הוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית ולכן הם מהווים בסיס ל-V.

מסקנה: $\dim V = 4$.

■

ז. קואורדינטות

הגדרה:

יהי $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ **בסיס במרחב וקטורי** V **בעל מימד** n**, מעל שדה** K**. יהי** v **וקטור כלשהו במרחב** V**. אזי** v **הוא צירוף ליניארי של אברי הבסיס** B**:**

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$.

הקבוצה $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ נקראת **ההצגה הוקטורית** של v לפי הבסיס B.

אברי הקבוצה נקראים **הקואורדינטות** של v לפי הבסיס B.

סימון: $[v]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

הערות:

א. מכיוון שאיברי הבסיס הינם בת"ל, הצגה כזו היא ייחודית. כלומר, הסקלרים $x_1, x_2, \dots, x_n$ נקבעים באופן מוחלט ע"י הוקטור v וע"י הבסיס B.

ב. הוקטורים שבמרחב הרגיל נכתבים בהצגה הוקטורית לפי הבסיס הטבעי $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$.

לדוגמא: $(5,-3,7) = 5(1,0,0) - 3(0,1,0) + 7(0,0,1)$

דוגמאות:

1. מצא את הקואורדינטות של הוקטור $v = (4,-3,2)$ **לפי הבסיס:**

$B = \{(1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\}$

פתרון:

צריך למצוא סקלרים x,y,z המקיימים:

$v = (4,-3,2) = x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(1,1,1)$

$(4,-3,2) = (x + y + z, y + z, z) \Rightarrow z = 2\ ; y = -5\ ; x = 7$

מכאן שההצגה הוקטורית של v **לפי הבסיס** B היא $[v]_B = (7,-5,2)$

2. יהי V מרחב וקטורי של המטריצות מסדר 2×2 הממשיות. מצא את הקואורדינטות של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ **לפי הבסיס** $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

צריך למצוא סקלרים x,y,z,w המקיימים:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z + w & x - y - z \\ x + y & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x + z + w = 2 \\ x - y - z = 3 \\ x + y = 4 \\ x = -7 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -7 \\ y = 11 \\ z = -21 \\ w = 30 \end{matrix}$$

מכאן שההצגה הוקטורית של A לפי הבסיס B היא $(-7,11,-21,30) = [A]_B$

3. יהי V מרחב וקטורי של פולינומים ממעלה קטנה או שווה 2.

$V = \{ax^2 + bx + c: \quad a, b, c \in R\}$

מצא את הקואורדינטות של הפולינום $v = 4t^2 - 3t + 2$ לפי הבסיס הנוצר ע"י הוקטורים הבאים:

$v_1 = 1 + t + t^2$

$v_2 = 1 + 2t + 3t^2$

$v_3 = 2 - t + t^2$

פתרון:

צריך למצוא סקלרים x,y,z המקיימים:

$v = 2t^2 - 3t + 4 = x(1 + t + t^2) + y(1 + 2t + 3t^2) + z(2 - t + t^2)$

$= (x + 3y + z)t^2 + (x + 2y - z)t + (x + y + 2z)$

$$\begin{matrix} x + 3y + z = 2 & & x = 131/16 \\ x + 2y - z = -3 & \Rightarrow & y = -85/16 \\ x + y + 2z = 4 & & z = 9/16 \end{matrix}$$

מכאן שההצגה הוקטורית של v לפי הבסיס B היא: $[v]_B = (131/16, -85/16, 9/16)$

1. מעבר מבסיס לבסיס

<u>הגדרה:</u>

יהיו $F = (f_1, f_2, f_3);\ E = (e_1, e_2, e_3)$ שני בסיסים של המרחב R^3.

אזי מתקיים:

$$f_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$
$$f_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$
$$f_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

תהי Q המטריצה המשוחלפת של מטריצת המקדמים שלעיל. כלומר:

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

המטריצה Q נקראת **מטריצת מעבר מבסיס E לבסיס F.**

<u>משפט 1:</u>

בהינתן וקטור כלשהו לפי בסיס F, $[v]_f$, אזי ניתן להעבירו לקואורדינטות לפי בסיס E ע"י הקשר הבא $Q[v]_f = [v]_e$.

הוכחה:

נניח $v = rf_1 + sf_2 + tf_3$

אזי $[v]_f = (r, s, t)$

לפי הקשר בין e_i ו-f_i נקבל

$$v = r(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) + s(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) + t(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) =$$
$$(ra_1 + sb_1 + tc_1)e_1 + (ra_2 + sb_2 + tc_2)e_2 + (ra_3 + sb_3 + tc_3)e_3$$

מכאן

$$[v]_e = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 + tc_1 \\ ra_2 + sb_2 + tc_2 \\ ra_3 + sb_3 + tc_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = Q[v]_f$$

■

דוגמא:

4. נתונים 2 בסיסים:

$$B = \{\alpha_1 = (1,0,0)\ ;\alpha_2 = (0,1,0)\ ;\ \alpha_3 = (0,0,1)\}$$
$$B' = \{\alpha_1{}' = (1,0,-1)\ ;\alpha_2{}' = (1,1,1)\ ;\ \alpha_3{}' = (1,0,0)\}$$

א. מצא את מטריצת המעבר מבסיס 'B לבסיס B.

ב. מצא את ההצגה של וקטור כללי הנתון בבסיס B לפי ההצגה של וקטור בבסיס 'B.

פתרון:

$$\alpha_1 = x_1\alpha_1{}' + y_1\alpha_2{}' + z_1\alpha_3{}'$$
$$\alpha_2 = x_2\alpha_1{}' + y_2\alpha_2{}' + z_2\alpha_3{}'$$
$$\alpha_3 = x_3\alpha_1{}' + y_3\alpha_2{}' + z_3\alpha_3{}'$$

$$(1,0,0) = \alpha_1 = (x_1 + y_1 + z_1, y_1, -x_1 + y_1) \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 1 \end{matrix}$$

$$(0,1,0) = \alpha_2 = \left(x_2 + y_2 + z_2, y_2, -x_2 + y_2\right) \Longrightarrow \begin{matrix} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \\ z_2 = -2 \end{matrix}$$

$$(0,0,1) = \alpha_3 = (x_3 + y_3 + z_3, y_3, -x_3 + y_3) \Longrightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ y_3 = -1 \\ z_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha_1 = 0 \cdot \alpha_1{}' + 0 \cdot \alpha_2{}' + 1 \cdot \alpha_3{}' \\ \alpha_2 = 1 \cdot \alpha_1{}' + 1 \cdot \alpha_2{}' - 2 \cdot \alpha_3{}' \\ \alpha_3 = -1 \cdot \alpha_1{}' + 0 \cdot \alpha_2{}' + 1 \cdot \alpha_3{}' \end{matrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>מסקנה</u>: בהינתן וקטור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ לפי בסיס B ואנו מעוניינים בהצגה לפי בסיס 'B, נוכל

לחשב $[v]_{B'} = T[v]_B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ a-2b+c \end{pmatrix}$$

בדיקה:

$$(a, b, c) = x(1,0,-1) + y(1,1,1) + z(1,0,0) = (x + y + z, y, -x + y)$$

$y = b$

$-x + y = c$

$x = b - c$

$z = a - (b - c) - b = a - 2b + c$

$x + y + z = a$

ח. העתקה

הגדרה:
יהיו U,V מרחבים וקטוריים. **העתקה** (פונקציה) ממרחב וקטורי V למרחב וקטורי U היא התאמה שמתאימה לכל וקטור $u \in U$, **וקטור יחיד** $v \in V$.
הוקטור u נקרא ה**מקור** של v, והוקטור v נקרא ה**תמונה** של u.

סימון: $f: U \to V$, וכן $f(u) = v$

דוגמא:

1. העתקה $f: R^3 \to R^2$ המוגדרת כך: $f(u) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} u$ מתאימה לכל וקטור ב-R^3 וקטור יחיד ב-R^2. מצא את התמונה של $u = (1,2,3)$.

פתרון: $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 30 \end{pmatrix}$

1. העתקה ליניארית

יהיו U,V מרחבים וקטוריים מעל שדה F. העתקה (פונקציה) ממרחב וקטוריV למרחב וקטורי U היא **ליניארית** אם לכל $v, w \in V$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים:

א. שמירה על חיבור וקטורים $f(v + w) = f(v) + f(w)$

ב. שמירה על כפל וקטור בסקלר $f(\alpha v) = \alpha f(v)$

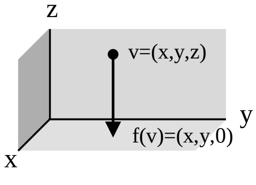
הערות:

א. בהעתקה ליניארית, תמיד מתקיים $f(0) = 0$ (התמונה של וקטור ה-0 היא תמיד 0). תכונה זו נובעת מתכונה ב' של העתקה ליניארית כאשר $\alpha=0$.

ב. ניתן לאחד את שתי התכונות של העתקה ליניארית לתכונה אחת:
$f(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v) + f(\beta w)$

דוגמאות:

2. נתונה העתקת ההיטל על המישור xy (ראה איור) $f: R^3 \to R^3$ המוגדרת כך: $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. האם f היא העתקה ליניארית?



פתרון: נבדוק האם תכונות הליניאריות מתקיימות בהעתקה זו, כלומר האם ההעתקה שומרת על חיבור וקטורים ועל כפל וקטור בסקלר.

יהיו $v = (x_1, y_1, z_1), w = (x_2, y_2, z_2)$ ויהי $\alpha \in R$ סקלר כלשהו. אזי:

$f(\mathrm{v}+w)=f\big((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big)=\mathrm{f}(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

$=(x_1+x_2,y_1+y_2,0)=(x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0)=\mathrm{f(v)}+f(\mathrm{w})$

$f(\alpha v)=f\big(\alpha(x_1,y_1,z_1)\big)=f(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1,0)=\alpha(x_1,y_1,0)=\alpha f(\mathrm{v})$

מסקנה: f היא העתקה ליניארית.

3. יהי V מרחב וקטורי של כל הפולינומים במשתנה t מעל שדה הממשיים R. נתונה העתקת הנגזרת $D: V \to V$ המוגדרת כך: $D(f) = {}^{df}\!/_{dt}$. האם D היא העתקה ליניארית?

פתרון: נבדוק האם תכונות הליניאריות מתקיימות בהעתקה זו, כלומר האם ההעתקה שומרת על חיבור וקטורים ועל כפל וקטור בסקלר.

יהיו $f,g \in V$ פולינומים כלשהם ויהי $\alpha \in R$ סקלר כלשהו.

מתכונות הנגזרת ידוע שמתקיים: $D(f+g)={}^{d(f+g)}\!/_{dt}={}^{d(f)}\!/_{dt}+{}^{d(g)}\!/_{dt}$

$D(\alpha f)={}^{d(\alpha f)}\!/_{dt}=\alpha\,{}^{d(f)}\!/_{dt}$

מסקנה: D היא העתקה ליניארית.

<u>הערה</u>: באותו אופן ניתן להראות שגם העתקת האינטגרל המתאימה לכל פולינום במשתנה t את האינטגרל המסויים שלו בין 0 ל-1 היא העתקה ליניארית.

אולם, העתקת הסינוס והעתקת הלוגריתם אינן העתקות ליניאריות.

4. העתקה $f: R^2 \to R^2$ המוגדרת כך: $F(x,y)=(x+1,y+2)$. האם F היא העתקה ליניארית?

פתרון: לפי ההערה לעיל בדוגמא 3, בהעתקה ליניארית תמיד מתקיים $F(0)=0$. נבדוק האם תכונה זו מתקיימת כאן: נבחר וקטור $v=(0,0)$.

$F(0,0)=(1,2)\neq(0,0)$

מסקנה: F אינה העתקה ליניארית.

2. <u>גרעין ותמונה של העתקה ליניארית</u>

<u>הגדרה</u>:

תהי $F: U \to V$ העתקה ליניארית.

התמונה (image) של F היא קבוצת כל התמונות של F ב-V.

סימון: $Im\ F$

$\mathrm{Im}\ F=\{\mathrm{v}\in V: f(v)=u \text{ כך ש } u\in U \text{ קיים}\}$

<u>הגדרה</u>:

הגרעין (kernel) של F היא קבוצת כל האיברים ב-U שהתמונה שלהם ב-F היא 0.

סימון: $Ker\ F$

$Ker\ F=\{u\in U: f(u)=0\}$

דוגמא:

5. נתונה העתקת ההיטל על המישור xy $f: R^3 \to R^3$ המוגדרת כך: $f(x, y, z) = (x, y, 0)$ (ראה דוגמא 2 לעיל). מצא את התמונה ואת הגרעין של ההעתקה.

פתרון:

התמונה של F היא אוסף כל הוקטורים שבמישור xy. כלומר:

$$\text{Im F} = \{(x, y, 0): x, y \in R\}$$

הגרעין של F הוא אוסף כל הוקטורים שבציר ה- z. כלומר:

$$Ker\ \text{F} = \{(0,0, z): z \in R\}$$

3. <u>אופרטור ליניארי</u>

<u>הגדרה:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. העתקה ליניארית $T: V \to V$ כלומר ממרחב וקטורי V לעצמו, נקראת **אופרטור ליניארי** על V.

יהי V מרחב וקטורי כלשהו. האופרטור $I: V \to V$ המוגדר כך: $I(v) = v$ (אופרטור המתאים לכל וקטור את עצמו) נקרא **אופרטור היחידה** (או אופרטור הזהות) על V.

דוגמא:

6. יהי $V=R^2$ מרחב כל הוקטורים ממימד 2: $V = \left\{v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}$

יהי T אופרטור על V המוגדר כך: $T(v) = Lv$ כאשר $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ניתן לראות שהתמונות של האופרטור הן איברים ב-V שכן:

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ -a + b \end{pmatrix}$$

<u>הגדרה:</u>

קבוצת כל הוקטורים $\{Lv\}$ נקראת **הטווח (range)** של T. סימון: R_T. **ישנם מקרים** שבהם R_T **זהה ל-V ובמקרים אחרים** R_T **הוא תת מרחב של** V.

דוגמא:

7. מצא את הטווח של האופרטור T, המוגדר כמו בדוגמא הקודמת.

פתרון:

$$Lv = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ -a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ -(a - b) \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$R_T = \left\{\begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix}\right\}$$

במקרה זה, הטווח של T הוא תת מרחב של V שכן שייכים אליו רק הוקטורים שמורכבים ממספר כלשהו והנגדי לו. המימד של R_T הוא 1 שכן בבסיס יש וקטור אחד: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ הפורש את כל הוקטורים ב- R_T.

<u>הגדרה:</u>

אופרטור $T:V\rightarrow V$ יקרא **אופרטור הפיך** אם יש לו אופרטור הופכי (המסומן T^{-1}) המקיים: $T^{-1}T = TT^{-1} = I$. כלומר, אם קיים אופרטור T^{-1} שאם נפעיל אותו על התמונה של האופרטור T, נקבל חזרה את וקטור המקור של האופרטור T.

דוגמא:

8. האם האופרטור T המוגדר כמו בדוגמא הקודמת הוא אופרטור הפיך?

פתרון: לכל הוקטורים מהצורה $\begin{pmatrix} a+\mu \\ b+\mu \end{pmatrix}$ יש אותה תמונה ע"י האופרטור T.

$$Lv = \begin{pmatrix} a-b \\ -(a-b) \end{pmatrix}$$

ולכן אנו אומרים ש-T אינו הפיך, כלומר אין לו אופרטור הפכי שכן צריך להתאים לוקטור $\begin{pmatrix} a-b \\ -(a-b) \end{pmatrix}$ וקטור יחיד $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ אבל ישנם אינסוף וקטורים $\begin{pmatrix} a+\mu \\ b+\mu \end{pmatrix}$ שהיתה להם אותה תמונה $\begin{pmatrix} a-b \\ -(a-b) \end{pmatrix}$ ב-T.

<u>משפט 1</u>:

יהי V מרחב וקטורי ויהי T אופרטור ליניארי על V.

אם $dimR_T \neq dimV$ אז T אינו אופרטור הופכי. ואם $dimR_T = dimV$ אז T אופרטור הופכי.

דוגמאות:

9. האופרטור T המוגדר כמו בדוגמא 8 אינו הפיך שכן המימד של R_T הוא 1, מאחר ובסיס יש וקטור אחד: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ הפורש את כל הוקטורים ב- R_T.

ואילו המימד של V הוא 2. ולכן מתקיים $dimR_T \neq dimV$.

מסקנה:T אינו אופרטור הפיך.

10. יהי V מרחב כל הוקטורים ממימד 2: $V = \left\{ v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$

ויהי T אופרטור על V המוגדר כך: $T(v) = Lv$ כאשר $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

האם T אופרטור הפיך?

פתרון: $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Lv$ הוקטור $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ פורש את כל V ולכן מתקיים $dimR_T = dimV$.

מסקנה: T הוא אופרטור הפיך.

> <u>משפט 2</u>:
> יהי T אופרטור ליניארי. אם בגרעין של T נמצא רק וקטור האפס, כלומר, אם $kerL = \{0\}$ אז T אופרטור הפיך.

דוגמא:

11. האופרטור $T: R^3 \to R^3$ מוגדר כך $T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$
   א. הוכח כי T אופרטור הפיך
   ב. מצא נוסחה עבור T^{-1}

פתרון:

א. כדי להוכיח שאופרטור הוא הפיך אפשר להוכיח את אחת משתי הטענות הבאות:

1. $dimR_L = dimV$
2. $kerL = \{0\}$

נוכיח כאן את שתי הטענות:

1. נוכיח ש- $dimR_L = dimV$:

נפעיל את האופרטור T על אברי הבסיס של המרחב הוקטורי:

$T(1,0,0) = (2,4,2)$

$T(0,1,0) = (0,-1,3)$

$T(0,0,1) = (0,0,-1)$

לפי מבנה וקטורי התמונות (מטריצה חצי אלכסונית בלי שורת אפסים), ניתן לראות שהם בלתי תלויים ליניארית, כלומר מתקיים $dimR_L = dimV$.

מסקנה: T הוא אופרטור הפיך.

2. נוכיח ש- $kerL = \{0\}$:

נבדוק מיהם הוקטורים (x,y,z) שהתמונה שלהם ב-T היא 0:

$T(x,y,z) = (0,0,0)$

$$(2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{array}{c} 2x = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

ניתן לראות שהגרעין מכיל רק את וקטור האפס, כלומר $kerL = \{0\}$.

מסקנה: T הוא אופרטור הפיך.

ב. נמצא נוסחה עבור T^{-1}.

נסמן:

$T(x,y,z) = (r,s,t)$

אזי:

$$\left(x,y,z\right) = T^{-1}(r,s,t)$$

$$T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z) \Rightarrow \begin{array}{c} r = 2x \\ s = 4-y \\ t = 2x+3y-z \end{array}$$

נבטא את x,y,z בעזרת r,s,t:

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{r}{2} \\ y = 2r-s \\ z = 7r-3s-t \end{array} \Rightarrow \left(\frac{r}{2}, 2r-s, 7r-3s-t\right) = T^{-1}(r,s,t)$$

4. פעולות על אופרטורים ליניאריים

יהיו L_1, L_2 אופרטורים ליניאריים המוגדרים על מרחב וקטורי V. בעזרת אופרטורים אלו, ניתן להגדיר אופרטורים נוספים ע"י פעולות של חיבור אופרטורים, כפל אופרטור בסקלר והרכבת אופרטורים:

> הגדרה:
>
> **סכום האופרטורים** $L_1 + L_2$ הוא אופרטור המוגדר כך: $\left(L_1 + L_2\right)u \equiv L_1u + L_2u$ לכל $u \in V$.
>
> **כפל האופרטור בסקלר** cL_1 הוא אופרטור המוגדר כך: $\left(cL_1\right)u \equiv c\left(L_1u\right)$
>
> **הרכבת האופרטורים** $L_1 \circ L_2$ (סימון: L_1L_2) הוא אופרטור המוגדר כך:
>
> $(L_1L_2)u \equiv L_1(L_2\text{u})$

> משפט 3:
>
> יהיו L_1, L_2 אופרטורים ליניאריים אז גם $L_1 + L_2$; cL_1 ; L_1L_2 הם אופרטורים ליניאריים.

הוכחה:

$$(L_1L_2)(\alpha\text{v} + \beta w) = (L_1L_2)\alpha\text{v} + (L_1L_2)\beta w = L_1(L_2\alpha\text{v}) + L_1(L_2\beta w) = L_1\big(\alpha(L_2\text{v})\big) + L_1\big(\beta(L_2w)\big)$$
$$= \alpha\big(L_1(L_2\text{v})\big) + \beta\big(L_1(L_2w)\big) = \alpha(L_1L_2)\text{v} + \beta(L_1L_2)w$$

■

דוגמאות:

12. יהיו S,T אופרטורים ליניאריים על R^2 המוגדרים ע"י הפעולות:

$S(x,y) = (0,x)$

$T(x,y) = (x,0)$

א. הוכח כי $ST \neq 0$, $TS = 0$

ב. הוכח כי $T^2 = T$ ($T^2 = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}$)

פתרון:

א. $(TS)(x,y) = T\big(S(x,y)\big) = T(0,x) = (0,0)$

$\big(ST\big)\big(x,y\big) = S\Big(T\big(x,y\big)\Big) = S\big(x,0\big) = (0,x) \neq (0,0)$

■

מסקנה: $TS \neq ST$ (הרכבת אופרטורים אינה פעולה חילופית (קומוטטיבית))

ב. $T^2\big(x,y\big) = T\Big(T\big(x,y\big)\Big) = T\big(x,0\big) = \big(x,0\big) = T(x,y)$

■

ט. מטריצות ואופרטורים ליניאריים

1. הצגה מטריציאלית של אופרטור ליניארי

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. ויהי T אופרטור ליניארי הפועל על V. נניח ש: $\{e_1, \dots, e_n\}$בסיס של V.

$T(e_1) \dots T(e_n)$ הם וקטורים ב-V ולכן אפשר לכתוב אותם כצירוף ליניארי של אברי הבסיס:

$$T(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}e_j$$

$$T(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}e_j$$

$$\vdots$$

$$T(e_n) = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}e_j$$

הגדרה:

ההצגה המטריציאלית של האופרטור T ביחס לבסיס $\{e_1, \dots, e_n\}$ היא המטריצה המשוחלפת של המקדמים הנ"ל.

סימון: $[T]_e$

כלומר:

$$[T]_e \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

דוגמאות:

1. יהי T אופרטור ליניארי על R2 המוגדר כך: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

מצא את ההצגה המטריציאלית של האופרטור T לפי הבסיס הטבעי $e = \{(1,0), (0,1)\}$.

פתרון:

נכתוב את תמונות איברי הבסיס כצירוף ליניארי של איברי הבסיס:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. יהי V מרחב וקטורי של כל הפולינומים במשתנה t מעל שדה הממשיים R ממעלה ≤ 3. ויהי D אופרטור ליניארי על V המוגדר כך: $D(f) = {}^{df}/_{dt}$.

מצא את ההצגה המטריציאלית של האופרטור T לפי הבסיס $e = \{1, t, t^2, t^3\}$.

פתרון:

נכתוב את תמונות איברי הבסיס כצירוף ליניארי של איברי הבסיס:

$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$

$D(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$

$D(t^2) = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$

$D(t^3) = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$

ולכן:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. יהי T אופרטור ליניארי על R^2 המוגדר כך: $T(x,y) = (4x - 2y, 2x + y)$.

מצא את ההצגה המטריציאלית של האופרטור T לפי הבסיס $f = \{(1,1), (-1,0)\}$.

פתרון:

נכתוב את תמונות איברי הבסיס כצירוף ליניארי של איברי הבסיס:

$T(1,1) = (2,3) = 3(1,1) + (-1,0)$

$T(-1,0) = (-4,-2) = -2(1,1) + 2(-1,0)$

ולכן:

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. יהי T אופרטור ליניארי על R^3 המוגדר כך: $T(x,y,z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.

מצא את ההצגה המטריציאלית של האופרטור T לפי הבסיס הטבעי:

$e = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

פתרון:

נכתוב את תמונות איברי הבסיס כצירוף ליניארי של איברי הבסיס:

$T(1,0,0) = (0,1,3) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 3(0,0,1)$

$T(0,1,0) = (2,-4,0) = 2(1,0,0) - 4(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$T(0,0,1) = (1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$

ולכן:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>משפט 1</u>:

יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V, ויהי T אופרטור ליניארי על V.

אזי לכל וקטור $v \in V$ מתקיים: $\left[T(v)\right]_B = \left[T\right]_B\left[v\right]_B$

כלומר, אם נכפיל את הוקטור v במטריצה המייצגת של האופרטור T, נקבל את הוקטור $T(v)$.

הוכחה:

עבור $(k = 1, \dots, n)$ מתקיים:

$$T(v_k) = L_{k1}v_1 + L_{k2}v_2 + \cdots + L_{kn}v_n = \sum_{l=1}^{n} L_{kl}v_l$$

ולכן השורה ה-j במטריצה $[T]_B$ היא:

$$(L_{1j}, L_{2j}, \dots, L_{nj})$$

הוקטור v מקיים:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \sum_{k=1}^{n} x_kv_k$$

ולכן:

$$[v]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$$

מכאן, שההצגה של $T(v)$ היא:

$$T(v) = \mathrm{T}(\textstyle\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_k} v_{\mathrm{k}}) = \sum_{k=1}^{n} x_kT(v_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{l=1}^{n} L_{kl}v_l = \sum_{l=1}^{\mathrm{n}}(\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} L_{kl}x_k)v_l$$

ולכן:

$$\left[T(v)\right]_B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} L_{k1}\mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} L_{\mathrm{kn}}\mathrm{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \cdots & L_{n1} \\ \vdots & & & \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[T\right]_B\left[v\right]_B$$

■

דוגמאות:

5. בדוק את קיום השיווין $[\mathrm{T(v)}]_\mathrm{e} = [\mathrm{T}]_\mathrm{e}[\mathrm{v}]_\mathrm{e}$ בדוגמא 1.

פתרון: אגף שמאל:

$$\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_e = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

אגף ימין:

$$[T]_e\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

כלומר, השיוויון מתקיים.

6. בדוק את קיום השיווין $[\mathrm{D(f)}]_\mathrm{e} = [\mathrm{D}]_\mathrm{e}[\mathrm{f}]_\mathrm{e}$ בדוגמא 2.

פתרון: יהי $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, אזי מתקיים: $D\big(f(t)\big) = b + 2ct + 3dt^2$

אגף שמאל:

$$\left[D\big(f(t)\big)\right]_e = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכפי שהתקבל בדוגמא 2:

$$[D]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וכידוע:

$$[f]_e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

אגף ימין:

$$[D]_e[f]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, השיוויון מתקיים.

7. בדוק את קיום השיוויון $[\mathrm{T(v)}]_{\mathrm{B}} = [\mathrm{T}]_{\mathrm{B}}[\mathrm{v}]_{\mathrm{B}}$ בדוגמא 3.

פתרון: נתון $T(x,y) = (4x - 2y, 2x + y)$, קבלנו: $[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

יהי $v = (a,b)$

נחשב את $[v]_f$:

$$v = (a,b) = x(1,1) + y(-1,0) \Rightarrow \begin{matrix} x = b \\ x - y = a \\ y = b - a \end{matrix}$$

$$[v]_f = (b, b - a)$$

$$T(v) = T(a,b) = (4a - 2b, 2a + b)$$

נחשב את $[T(v)]_f$:

$$(4a - 2b, 2a + b) =$$

$$= x(1,1) + y(-1,0) \Rightarrow \begin{matrix} x = 2a + b \\ x - y = 4a - 2b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = 2a + b - 4a + 2b \\ y = 3b - 2a \end{matrix}$$

אגף שמאל: $[T(v)]_f = \begin{pmatrix} 2a + b \\ 3b - 2a \end{pmatrix}$

אגף ימין: $[T]_f[v]_f = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b \\ 3b - 2a \end{pmatrix}$

כלומר, השיוויון מתקיים.

8. בדוק את קיום השיוויון $[T(v)]_e = [T]_e[v]_e$ בדוגמא 4.

פתרון: נתון: $T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$ **, קבלנו:** $[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

יהי $v = (a,b,c)$ **, אזי מתקיים:** $T(v) = T(a,b,c) = (2b+c, a-4b, 3a)$

אגף שמאל: $[T(v)]_e = \begin{pmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{pmatrix}$

וכפי שהתקבל בדוגמא 4 לעיל: $[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

וכידוע: $[v]_e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

אגף ימין: $[T]_e[v]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b+c \\ a-4b \\ 3a \end{pmatrix}$

כלומר, השיוויון מתקיים.

2. מטריצת מעבר מבסיס לבסיס

<u>**הגדרה:**</u>

נתונים 2 בסיסים של V: $\{f_1 \dots f_n\}\,;\,\{e_1 \dots e_n\}$ **, ונתונים n הוקטורים:**

$$f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n$$
$$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n$$
$$\vdots$$
$$f_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

אזי המטריצה המשוחלפת של המקדמים P נקראת **מטריצת מעבר מבסיס** $\{\boldsymbol{e_1} \dots \boldsymbol{e_n}\}$ **לבסיס** $\{\boldsymbol{f_1} \dots \boldsymbol{f_n}\}$.

סימון:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>**משפט 2:**</u>

נתונים 2 בסיסים $\{e_i\}$ **ו-** $\{f_i\}$ **במרחב וקטורי** V **. ותהי** P **מטריצת מעבר מבסיס** $\{e_i\}$ **לבסיס** $\{f_i\}$**. אזי לכל וקטור** $v \in V$ **מתקיים** $[v]_e = P[v]_f$.

<u>**טענה:**</u>

נניח שמטריצה P היא מטריצת מעבר מבסיס $\{e_1 \dots e_n\}$ **לבסיס** $\{f_1 \dots f_n\}$**. כלומר:**

$[v]_e = P[v]_f$

ונניח שמטריצה Q היא מטריצת מעבר מבסיס $\{f_1 \dots f_n\}$ לבסיס $\{e_1 \dots e_n\}$. כלומר:

$[v]_f = Q[v]_e$

אז מתקיים: $PQ = I$, כלומר: $P = Q^{-1}$.

הוכחה:

$$[v]_e = P[v]_f \Rightarrow [v]_f = Q[v]_e = QP[v]_f \Rightarrow QP = I \Rightarrow P = Q^{-1}$$

■

מסקנה: אם P היא מטריצת מעבר מבסיס $\{f_i\}$ לבסיס $\{e_i\}$ אז P^{-1} היא מטריצת מעבר מבסיס $\{e_i\}$ לבסיס $\{f_i\}$.

דוגמא:

9. נתונים 2 בסיסים של R^2: $e = \{(1,0);(0,1)\}$, $f = \{(1,1);(-1,0)\}$

נחשב מטריצת מעבר מבסיס e לבסיס f:

$(1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$

$(-1,0) = -1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

נחשב מטריצת מעבר מבסיס f לבסיס e:

$(1,0) = 0 \cdot (1,1) - 1 \cdot (-1,0)$

$(0,1) = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (-1,0)$

$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ואמנם:

$PQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

כלומר:

$P = Q^{-1}$

לסיכום:

<u>משפט 3</u>:

נתונים 2 בסיסים $\{e_i\}$ ו- $\{f_i\}$ במרחב וקטורי V . ותהי P מטריצת מעבר מבסיס $\{e_i\}$ לבסיס $\{f_i\}$. אזי לכל וקטור $v \in V$ מתקיים $[v]_e = P[v]_f$ וכן $[v]_f = P^{-1}[v]_e$.

הערה: יש לשים לב כי לכל מטריצת מעבר קיימת מטריצה הופכית.

דוגמא:

10. נתונים 2 בסיסים $f=\{(1,1);(-1,0)\}$ $e=\{(1,0);(0,1)\}$ של R^2.

נכתוב את $v=(a,b)$ בהצגה לפי 2 הבסיסים:

נחשב את $[v]_e$:

$$(a,b)=x(1,0)+y(0,1)\Rightarrow \begin{matrix}x=a\\ y=b\end{matrix}$$

$$[v]_e=(a,b)=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

נחשב את $[v]_f$:

$$(a,b)=x(1,1)+y(-1,0)\Rightarrow \begin{matrix}x=b\\ y=b-a\end{matrix}$$

$$[v]_f=(b,b-a)=\begin{pmatrix}b\\ b-a\end{pmatrix}$$

בדוגמא הקודמת חישבנו את $P=\begin{pmatrix}1&-1\\ 1&0\end{pmatrix}$, ולכן:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\ -1&1\end{pmatrix}$$

ואמנם:

$$P[v]_f=\begin{pmatrix}1&-1\\ 1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ b-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=[v]_e$$

$$P^{-1}[v]_e=\begin{pmatrix}0&1\\ -1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\ b-a\end{pmatrix}=[v]_f$$

3. <u>מעבר של אופרטור מבסיס לבסיס</u>

<u>משפט 4</u>:

תהי P מטריצת מעבר מבסיס $\{e_i\}$ לבסיס $\{f_i\}$ במרחב וקטורי V.

אזי לכל אופרטור ליניארי T ב-V מתקיים:

$$[T]_f=P^{-1}[T]_eP$$

(כלומר, המעבר מהצגה לפי בסיס $\{e_i\}$ להצגה לפי בסיס $\{f_i\}$ של T ניתן ע"י הקשר הנ"ל באמצעות מטריצת המעבר P.)

הוכחה:

לפי הנתון, מתקיים:

$$[v]_e=P[v]_f$$

נסמן:

$$[v']_e = [T]_e[v]_e$$

פעולת $[T]_e$ היא להעביר את הוקטור $[v]_e$ לוקטור $[v']_e$.

אנו מעוניינים למצוא את $[T]_f$, כלומר, את האופרטור שמעביר את הוקטור $[v]_f$ לוקטור $[v']_f$.

$$[v']_f = [T]_f[v]_f$$

לפי הנתון, מתקיים:

$$[v']_e = P[v']_f$$

ולכן:

$$P[v']_f = [v']_e = [T]_e[v]_e = [T]_eP[v]_f$$

כלומר:

$$[v']_f = P^{-1}[T]_eP[v]_f$$

האופרטור T בהצגה לפי בסיס f הוא:

$$[T]_f = P^{-1}[T]_eP$$

■

דוגמא:

11. יהי L אופרטור ליניארי המוגדר ע"י: $L(x,y) = (4x-2y, 2x+y)$
מצא את הצגתו לפי הבסיסים הבאים $f = \{(1,1),(-1,0)\}$ $e = \{(1,0),(0,1)\}$
בשתי דרכים:
א. לפי ההגדרה.
ב. לפי משפט 4.
פתרון:
א. לפי ההגדרה:
נמצא את הצגת L לפי הבסיס $e = \{(1,0),(0,1)\}$

$$L(e_1) = L(1,0) = (4,2) = 4(1,0) + 2(0,1)$$

$$L(e_2) = L(0,1) = (-2,1) = -2(1,0) + (0,1)$$

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

נמצא את הצגת L לפי הבסיס $f = \{(1,1),(-1,0)\}$

$$L(f_1) = L(1,1) = (2,3) = 3(1,1) + (-1,0)$$

$$L(f_2) = L(-1,0) = (-4,-2) = -2(1,1) + 2(-1,0)$$

$$[L]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב. לפי משפט 4:

נחשב את המטריצה P, מטריצת המעבר מבסיס e לבסיס f:

$$(1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$$

$$(-1,0) = -1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1)$$

ולכן המטריצה $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא המעבירה וקטורים מהצגה לפי בסיס e להצגה לפי בסיס f .

נחשב את P^{-1} :

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

לפי ההגדרה:

$$[L]_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן, לפי משפט 4 מתקיים:

$$[L]_f = P^{-1}[L]_e P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. דמיון מטריצות

הגדרה:

אם A ו-B מטריצות ריבועיות וקיימת מטריצה הפיכה P המקיימת $B = P^{-1}AP$,

אזי B נקראת **דומה ל-A** ואומרים ש-B התקבלה מ-A ע"י **טרנספורמציית דמיון**.

דוגמא:

12. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ מטריצה. מצא מטריצה דומה ל-A .

פתרון:

תהי $P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ מטריצה.

מכאן

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 92 & 34 \end{pmatrix}$$

B היא מטריצה דומה ל-A .

מסקנה: ההצגות המטריציאליות של אופרטור לפי בסיסים שונים הן מטריצות דומות, מכיוון שתמיד מתקיים $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$.

אזי $[T]_e$ ו-$[T]_f$ הן מטריצות דומות לכל e ו-f.

משפט 5 (הפוך):

2 מטריצות דומות מייצגות את אותו אופרטור ליניארי ביחס לבסיסים שונים.

דוגמא:

13. יהי T אופרטור ליניארי המוגדר ע"י: $T(x,y,z)=(x+y,z,x-2z)$

מצא את הצגתו לפי הבסיסים הבאים:

$e=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $f=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

והראה שהמטריצות המייצגות אותו הן מטריצות דומות.

פתרון:

נמצא את הצגת T לפי הבסיס $e=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$T(e_1)=T(1,0,0)=(1,0,1)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+1(0,0,1)$

$T(e_2)=T(0,1,0)=(1,0,0)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1)$

$T(e_3)=T(0,0,1)=(0,1,-2)=0(1,0,0)+1(0,1,0)-2(0,0,1)$

$$[T]_e=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

נמצא את הצגת T לפי הבסיס $f=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

$T(f_1)=T(1,1,1)=(2,1,-1)=-1(1,1,1)+2(1,1,0)+1(1,0,0)$

$T(f_2)=T(1,1,0)=(2,0,1)=1(1,1,1)-1(1,1,0)+2(1,0,0)$

$T(f_3)=T(1,0,0)=(1,0,1)=1(1,1,1)-1(1,1,0)+1(1,0,0)$

$$[T]_f=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$$

על מנת להראות ש-$[T]_e$ דומה ל-$[T]_f$, נחשב את המטריצה P, מטריצת המעבר מבסיס e לבסיס f:

$(1,1,1)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1)$

$(1,1,0)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,1)$

$(1,0,0)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1)$

ולכן המטריצה $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ היא המעבירה וקטורים מהצגה לפי בסיס e להצגה לפי בסיס f.

נחשב את המטריצה Q, מטריצת המעבר מבסיס f לבסיס e:

$(1,0,0)=0(1,1,1)+0(1,1,0)+1(1,0,0)$

$(0,1,0)=0(1,0,0)+1(0,1,0)-1(0,01)$

$(0,0,1)=1(1,0,0)-1(0,1,0)+0(0,01)$

ולכן המטריצה $Q=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ היא המעבירה וקטורים מהצגה לפי בסיס f להצגה לפי בסיס e .

וכידוע:

$$Q=P^{-1}$$

ולכן, מתקיים:

$$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$$

כלומר, המטריצות - $[T]_e$ ו- $[T]_f$ הן מטריצות דומות.

■

הגדרה:

אופרטור ליניארי נקרא **ניתן לליכסון** אם ביחס לבסיס כלשהו $\{e_i\}$ הוא מיוצג ע"י מטריצה אלכסונית.

במקרה זה, הבסיס $\{e_i\}$ נקרא **הבסיס המלכסן** של T.

מסקנה: תהי A הצגה מטריציאלית של אופרטור T, אזי T ניתן לליכסון אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה, P, כך ש-$P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית.

כלומר, T ניתן ללכסון אם ורק אם ההצגה המטריציאלית ניתנת ללכסון ע"י טרנספורמציית דמיון.

הגדרה:

סכום איברי האלכסון של מטריצה ריבועית $A=(a_{ij})$ נקרא **עקבה (trace)** של המטריצה.

סימון: $trA = A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$.

משפט 6:

$$trAB = trBA$$

הוכחה:

נניח $A=(a_{ij})\ ;\ B=(b_{ij})$ ונניח $AB=C$ כאשר $C=(c_{ij})$

אזי:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} =$$

$$trAB = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji}$$

מצד שני, נניח $BA = D$ כאשר $D = (d_{jk})$

אזי: $d_{jk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ik} =$

$$trBA = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = trAB$$

■

מכאן נובע משפט חשוב:

<u>משפט 7</u>:

אם A ו-B מטריצות דומות אז $trA = trB$.

הוכחה:

אם A ו-B מטריצות דומות, אזי קיימת P הפיכה כך ש- $A = P^{-1}BP$

ולכן: $trA = tr(P^{-1}BP) = tr(BPP^{-1}) = trB$.

■

י. דטרמיננטות

הגדרה:

התאמה חד חד ערכית של קבוצת מספרים על עצמה $\{1,2,\dots,n\}$ נקראת **תמורה** (פרמוטציה).

דוגמא:

1. פרמוטציה σשל קבוצת המספרים $\{1,2,3,4\}$:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ או $\sigma = 3214$

משפט 1:

ישנן $n!$ אפשרויות לתמורות של קבוצה בעלת n איברים.

הגדרה:

פרמוטציה σ נקראת **זוגית** או **אי זוגית** בהתאם למספר זוגי או אי זוגי של זוגות (i,k) המקיימים $i > k$ ו-i עומד לפני k ב- σ.

דוגמאות:

2. קבע האם הפרמוטציה $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ זוגית או אי זוגית.

פתרון:

בפרמוטציה זו ישנם 3 זוגות (i,k) המקיימים $i > k$ ו-i עומד לפני k: $(3,2)$ $(3,1)$ $(2,1)$ ולכן הפרמוטציה היא אי זוגית.

3. קבע האם הפרמוטציה $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ זוגית או אי זוגית.

פתרון:

בפרמוטציה זו ישנם 6 זוגות (i,k) המקיימים $i > k$ ו-i עומד לפני k: $(3,1)$ $(3,2)$ $(5,1)$ $(5,4)$ $(5,2)$ $(4,2)$ ולכן הפרמוטציה היא זוגית.

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4. קבע האם פרמוטציית הזהות $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ היא זוגית או אי זוגית.

פתרון:

בפרמוטציית הזהות אין אף זוג (i,k) המקיים $i > k$ ו-i עומד לפני k. ולכן פרמוטציה הזהות היא זוגית.

הגדרה:

סימן הפרמוטציה ($sign\sigma$) נקבע לפי הזוגיות או אי הזוגיות שלה:

אם הפרמוטציה זוגית אז $sign\sigma = +1$

אם הפרמוטציה אי זוגית אז $sign\sigma = -1$

הגדרה:

תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. **הדטרמיננטה** של A היא הסכום הבא

מעל כל הפרמוטציות האפשריות של $\sigma = i_1 i_2 \dots i_n$:

$$\sum_{\sigma} (sign\ \sigma) a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot a_{3i_3} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$$

סימון: $\det(A)$ או $|A|$

הערה: יש לשים לב ש- $\det(A)$ הינו מספר.

5. נתון:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ישנן !2 פרמוטציות לקבוצה בת 2 איברים: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

הפרמוטציה $(1,2)$ היא זוגית ולכן סימן המכפלה $a_{11}a_{22}$ הוא +.

הפרמוטציה $(2,1)$ היא אי זוגית ולכן סימן המכפלה $a_{12}a_{21}$ הוא -.

6. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 11$$

7. נתון:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

ישנן !3 פרמוטציות לקבוצה בת 3 איברים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

הפרמוטציות $(1,2,3); (2,3,1); (3,1,2)$ הן זוגיות ולכן סימן המכפלות

$a_{11}a_{22}a_{33}; a_{12}a_{23}a_{31}; a_{13}a_{21}a_{32}$ הוא +.

הפרמוטציות (1,3,2); (2,1,3); (3,2,1) הן אי זוגיות, ולכן סימן המכפלות

$a_{13}a_{22}a_{31}; a_{12}a_{21}a_{33}; a_{11}a_{23}a_{32}$ הוא -.

אם נפתח את הביטוי שהתקבל עבור הדטרמיננטה כאן, נקבל:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

הערה: יש לשים לב שהדטרמיננטה המכפילה את a_{11} היא הדטרמיננטה המתקבלת מהדטרמיננטה המקורית, לאחר מחיקת השורה והעמודה הראשונה. הדטרמיננטה המכפילה את a_{12} היא הדטרמיננטה המתקבלת מהדטרמיננטה המקורית, לאחר מחיקת השורה הראשונה והעמודה השניה. והדטרמיננטה המכפילה את a_{13} היא הדטרמיננטה המתקבלת מהדטרמיננטה המקורית, לאחר מחיקת השורה הראשונה והעמודה השלישית. הסימנים מתחלפים לסירוגין.

באותו האופן ניתן לחשב את הדטרמיננטה בעזרת כל שורה או כל עמודה ולהחליף את הסימנים לסירוגין, כאשר הסימן חיובי עבור מחובר שסכום השורה והעמודה הנמחקות יוצא מספר זוגי והסימן שלילי כאשר סכום השורה והעמודה הנמחקות יוצא מספר אי זוגי.

דוגמא:

8.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-20+2) - 3(0-2) - 4(0+4) = -46$$

1. תכונות של דטרמיננטות

משפט 2:

הדטרמיננטה של מטריצה A שווה לדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת שלה.

כלומר: $|A| = |A^t|$.

הערה: ממשפט זה נובע, שלכל תכונה של הדטרמיננטה של מטריצה שמתייחסת לשורה במטריצה, תהיה תכונה מקבילה המתייחסת לעמודה במטריצה.

<u>משפט 3</u>:

נתונה מטריצה ריבועית A.

אם ל- A שורה (או עמודה) של אפסים, אזי $|A| = 0$

אם ל- A שתי שורות (או עמודות) זהות, אזי $|A| = 0$

אם A מטריצה משולשת (כלומר, יש לה אפסים מצד אחד של האלכסון), אזי $|A|$ שווה למכפלת אברי האלכסון.

<u>משפט 4</u>: אם B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י:

כפל שורה (או עמודה) של A בסקלר k, אזי $|B| = k|A|$.

החלפת שתי שורות (או עמודות) של A, אזי $|B| = -|A|$.

חיבור שורה (או עמודה) מוכפלת בקבוע עם שורה (או עמודה) אחרת של A, אזי $|B| = |A|$.

<u>משפט 5</u>:

דטרמיננטה של מכפלת מטריצות שווה למכפלת הדטרמיננטות של המטריצות. כלומר: $|AB| = |A||B|$.

דוגמאות:

9. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

נוסיף לשורה הראשונה את השורה השניה מוכפלת ב- (2-)

נוסיף לשורה השלישית את השורה השניה מוכפלת ב- 3

נוסיף לשורה הרביעית את השורה השניה

לפי משפט 5, פעולות אלו שומרות על ערך הדטרמיננטה. ולכן:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

נחליף את המיקום של העמודה הראשונה עם העמודה השלישית.

לפי משפט 5, פעולות אלו משנות את סימן הדטרמיננטה. ולכן:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה:

$$= -0\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\2 & 1 & 3\\1 & 3 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}-2 & 1 & 5\\2 & 1 & 3\\1 & 3 & 2\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}-2 & 1 & 5\\3 & 2 & -2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}-2 & 1 & 5\\3 & 2 & -2\\2 & 1 & 3\end{vmatrix} =$$

נחשב את הדטרמיננטה $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 5\\2 & 1 & 3\\1 & 3 & 2\end{vmatrix}$ לפי השורה הראשונה:

$$= -2\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= -2(2-9) - (4-3) + 5(6-1) = 14 - 1 + 25 = 38$$

2. מינור וקופקטור

<u>הגדרה</u>:

תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. ותהי M_{ij} מטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה i והעמודה j של המטריצה A.

אזי, **המינור** של האיבר a_{ij} של A הוא הדטרמיננטה של המטריצה M_{ij}. כלומר, $|M_{ij}|$.

והקופקטור, המסומן A_{ij}, של האיבר a_{ij} של A הוא המינור עם סימן + או - בהתאם לכלל הבא:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

<u>הערה</u>: יש לשים לב שהסימנים של המינורים יוצרים תבנית של לוח שחמט כאשר האלכסון הראשי מורכב מסימני +:

$$\begin{pmatrix}+ & - & + & - & \cdots\\- & + & - & + & \cdots\\+ & - & + & - & \cdots\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

דוגמא:

10. חשב את הקופקטור של האיבר a_{32} של המטריצה: $A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\7 & 6 & 9\\3 & 5 & 1\end{pmatrix}$

פתרון:

נכתוב את המטריצה M_{32} ע"י מחיקת השורה השלישית והעמודה השניה מהמטריצה A:

$$M_{32} = \begin{pmatrix}1 & 2\\7 & 9\end{pmatrix}$$

כעת נחשב את הקופקטור A_{32}:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|1\cdot 9 - 2\cdot 7| = 5$$

הגדרה:

תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית. אזי, המטריצה המשוחלפת של הקופקטורים של A נקראת **מטריצת Adjoint של מטריצה A**.

סימון: $adj\ A$

דוגמא:

11. נתונה המטריצה $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **חשב את** $adj\ B$.

פתרון:

נחשב את המינורים ואת הקופקטורים של מטריצה B:

$M_{11} = -1 \qquad A_{11} = -1$

$M_{12} = 0 \qquad A_{11} = 0$

$M_{21} = 2 \qquad A_{11} = -2$

$M_{22} = 1 \qquad A_{11} = 1$

נכתוב את המטריצה המשוחלפת של הקופקטורים שמצאנו:

$$adj\ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 6:

לכל מטריצה ריבועית A, מתקיים:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$$

הערה:

יש לשים לב שמשפט זה מתאר שיטה למציאת המטריצה ההופכית של מטריצה נתונה.

ממשפט זה נובע שיש ל-A מטריצה הופכית אם ורק אם מתקיים: $|A| \neq 0$.

דוגמאות:

12. מצא את המטריצה ההופכית למטריצהB הנתונה בדוגמא 11.

פתרון:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(adj\ B) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ואמנם:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. מצא את המטריצה ההופכית למטריצה A הנתונה:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

פתרון:

נחשב את המינורים ואת הקופקטורים של מטריצה A:

$M_{11}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ $\qquad A_{11}=+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-18$

$M_{12}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ $\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2$

$M_{13}=$ $\qquad A_{13}=+\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4$

$\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$M_{21}=$ $\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-11$

$\begin{pmatrix}3 & -4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

$M_{22}=$ $\qquad A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=14$

$\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

$M_{23}=$ $\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5$

$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$M_{31}=$ $\qquad A_{31}=+\begin{vmatrix}3 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-10$

$\begin{pmatrix}3 & -4\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

$M_{32}=$ $\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$

$\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$M_{33}=$ $\qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-8$

$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$$adj\,A=\begin{pmatrix}-18 & -11 & -10\\ 2 & 14 & -4\\ 4 & 5 & -8\end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה של מטריצה A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=2(-20+2)-3(-2)-4(+4)=-36+6-16=-46$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\,A=-\frac{1}{46}\begin{pmatrix}-18 & -11 & -10\\ 2 & 14 & -4\\ 4 & 5 & -8\end{pmatrix}$$

ואמנם:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **<u>מערכת משוואות (n משוואות ב- n נעלמים)</u>**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

או בקיצור: $AX = B$, **כאשר:** $A = (a_{ij}), X = (x_i), B = (b_i)$.

<u>משפט 7 (כלל קרמר)</u>:

הפתרון $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ כאשר $\Delta = |A|$, ו- Δ_i היא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת טור i בוקטור הקבועים שבאגף ימין.

<u>הערה</u>: משפט זה מאפשר מציאת פתרון למערכת של n משוואות לינאריות ב-n נעלמים כאשר $|A| \neq 0$. במקרה זה מתקבל פתרון יחיד למערכת. אם $|A| = 0$ אין פתרון יחיד.

דוגמא:

14. נתונה מערכת של 2 משוואות לינאריות ב-2 נעלמים:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

מצא את הפתרון של המערכת.

פתרון:

לפי כלל קרמר:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>משפט 8</u>:

למערכת המשוואות ההומוגנית AX=0, יש פתרון <u>שונה מאפס</u> אם ורק אם $|A| = 0$.

יא. ערכים עצמיים וקטורים עצמיים

הגדרה:

נתון אופרטור לינארי L במרחב וקטורי V. אם קיים וקטור $\alpha \in V$ שונה מאפס המקיים:

$$L\alpha = \lambda\alpha$$

כאשר λ הוא סקלר, אזי הוקטור α נקרא **וקטור עצמי** (eigenvector) של L, ו- λ נקרא **ערך עצמי** (eigenvalue) של L.

דוגמאות:

14. נתון האופרטור הלינארי $L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ ונתון וקטור $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ המקיים:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר: $L\alpha = \lambda\alpha$ כאשר λ הוא סקלר.

אזי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של האופרטור $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, ו- 5 הוא ערך עצמי.

האופרטור L מותח כל וקטור בכיוון (1,0,0) בפקטור 5.

15. נתון אופרטור הנגזרת $D(f) = \frac{df}{dx}$ ונתון וקטור $f = e^{3x}$ המקיים:

$$\frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$$

כלומר: $Df = \lambda f$ כאשר λ הוא סקלר.

אזי e^{3x} הוא וקטור עצמי של האופרטור $\frac{df}{dx}$, ו-3 הוא ערך עצמי.

הגדרה:

יהי L אופרטור ליניארי ויהי λ ערך עצמי שלו. אזי המשוואה $|L - \lambda I| = 0$ נקראת **המשוואה האופיינית (או הפולינום האופייני)** של L.

הערה:

בהינתן אופרטור ליניארי, כדי למצוא את ערכיו העצמיים, נפתור את המשוואה האופיינית שלו, כלומר: $|L - \lambda I| = 0$.

הסבר:

יהי L אופרטור ליניארי שהוא מטריצה מסדר 2x2. אזי המשוואה $L\alpha = \lambda\alpha$ המתקבלת היא:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

נעביר אגף ונקבל:

$$\left[\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

או באופן כללי:

$$(L - \lambda I)\alpha = 0$$

זו משוואה הומוגנית, והתנאי לפתרון השונה מאפס (לפי משפט 8) הוא:

$$|L - \lambda I| = 0$$

דוגמא:

16. נתון אופרטור ליניארי A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מצא את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים שלו.

פתרון:

כדי למצוא את הערכים העצמיים, נכתוב את המשוואה האופיינית של A, ונפתור אותה:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

מכאן שהערכים העצמיים הם:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$$

כדי למצוא את הוקטורים העצמיים צריך לפתור:

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

כלומר:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-a_2 + a_3 = 0$$

$$a_2 = a_3$$

ולכן:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

ואמנם:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

כל וקטור מהצורה $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של האופרטור $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **עם ערך עצמי 1.**

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$2a_1 = 0$

$a_1 + a_3 = 0$

$a_1 = 0$

$a_2 = -a_3$

ולכן:

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

ואמנם:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

כל וקטור מהצורה $\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של האופרטור $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **עם ערך עצמי 1-.**

משפט 9:

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. A דומה למטריצה אלכסונית B (כלומר, A ניתנת ללכסון) אם ורק אם יש ל-n A וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית.
במקרה זה, המטריצה המלכסנת P היא מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים הבלתי תלויים של מטריצה A, ואיברי האלכסון של $B = P^{-1}AP$ הם הערכים העצמיים של A.

דוגמא:

17. נתון: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

הראה שהמטריצה האלכסונית B אשר איברי האלכסון שלה הם הערכים העצמיים של A מקיימת $B = P^{-1}AP$ כאשר P היא המטריצה אשר עמודותיה הן הוקטורים העצמיים של A.

פתרון:

כדי למצוא את הערכים העצמיים, נכתוב את המשוואה האופיינית של A, ונפתור אותה:

$|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

מכאן שהערכים העצמיים הם:

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

כדי למצוא את הוקטורים העצמיים צריך לפתור:

$L\alpha = \lambda\alpha$

כלומר:

$(A - \lambda I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי $\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$x - y = 0$

$x = y$

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

כל וקטור מהצורה $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של האופרטור $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ עם ערך עצמי 5.

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x + 4y = 0$

$x = -2y$

כל וקטור מהצורה $\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של האופרטור $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ עם ערך עצמי 1-.

תהי P מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים הנ"ל, כלומר:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נחשב את המינורים ואת הקופקטורים של מטריצה P:

$$M_{11} = -1\ A_{11} = -1$$

$$M_{12} = 1\ A_{12} = -1$$

$$M_{21} = 2\ A_{21} = -2$$

$$M_{22} = 1\ A_{22} = 1$$

$$P^{-1} = \frac{adj\ P}{|P|} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>משפט 10</u>:
לשתי מטריצות דומות יש אותם ערכים עצמיים. כלומר, במעבר מטריצה מבסיס אחד לבסיס אחר - הערכים העצמיים נשמרים.

הוכחה:

נניח ש: L ו- L' הן מטריצות דומות. כלומר, קיים P כך ש: $L' = P^{-1}LP$.

כדי למצוא את הערכים העצמיים של L', נכתוב את המשוואה האופיינית של של L' :

$$det(L' - \lambda I) = 0$$

אבל:

$$det(L' - \lambda I) = det(PLP^{-1} - \lambda I) = det(PLP^{-1} - P\lambda IP^{-1}) = det[P(L - \lambda I)P^{-1}]$$
$$= det\, P\, det\, P^{-1}\, det(L - \lambda I) = det\, I\, det(L - \lambda I) = det(L - \lambda I) = 0$$

מכאן שמשוואת הערכים העצמיים של של L' שווה למשוואת הערכים העצמיים של של L.

■

<u>משמעות הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים</u>

תהי A מטריצה ריבועית כלשהי, כלומרA היא העתקה ליניארית, המתאימה לכל וקטור, וקטור אחר במרחב הוקטורי. נניח ש- α הוא וקטור עצמי, כלומר α מקיים $A\alpha = \lambda\alpha$. מכאן שהפעולה של A על α היא רק מתיחה (או כיווץ) פי λ ולא שינוי כיוון. כלומר, הערך העצמי מבטא את גודל המתיחה או הכיווץ של הוקטור העצמי. מטרתנו היא להביא את מערכת הצירים בכיוון אותם וקטורים עצמיים, כלומר הוקטורים שאינם משתנים בכיוונם, דבר המקל על העבודה.

דוגמאות:

18. נתון אופרטור ליניארי B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

מצא את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים שלו,

א. מעל שדה הממשיים.

ב. מעל שדה המרוכבים.

פתרון:

כדי למצוא את הערכים העצמיים, נכתוב את המשוואה האופיינית של B, ונפתור אותה:

$$|B - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1-\lambda)(1+\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

מכאן שהערכים העצמיים הם:

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

א. מעל שדה הממשיים: אין ערכים עצמיים.

ב. מעל שדה המרוכבים:

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

כדי למצוא את הוקטורים העצמיים צריך לפתור:

$$B\alpha = \lambda\alpha$$

כלומר:

$$(B - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי $\lambda = i$:

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-i)x - y = 0 \\ 2x - (1+i)y = 0 \end{cases}$$

$$(1-i)x - y = 0$$

ולכן:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

נמצא וקטור עצמי עבור הערך העצמי $\lambda = -i$:

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1+\mathrm{i})x - y = 0$$

ולכן:

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

תהי P מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים הנ"ל, כלומר:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

נחשב את המינורים ואת הקופקטורים של מטריצה P:

$$M_{11} = 1 - i \; A_{11} = 1 - i$$

$$M_{12} = 1 + i \; A_{12} = -1 - i$$

$$M_{21} = 1 \; A_{21} = -1$$

$$M_{22} = 1 \; A_{22} = 1$$

$$|P| = (1-i) - (1+i) = -2i$$

$$adj\,P = \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} adj\,P = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1-i-2 & -1+i+1 \\ -1-i+2 & 1+i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -1-i & i \\ 1-i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

<u>משפט 11</u>:

תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר n. אזי ל- AB ול- BA יש אותם ערכים עצמיים.

הוכחה:

נניח $\lambda \neq 0$ הם הערכים העצמיים של AB. אזי מתקיים:

$$ABv = \lambda v$$

נציב $w = Bv$ ונקבל:

$$Aw = ABv = \lambda v$$

לכן מתקיים:

$$BAw = BABv = B\lambda v = \lambda Bv = \lambda w$$

לכן, w הוא וקטור עצמי של BA, ו-λ הוא אכן ערך עצמי גם של BA.

■

הערה: יש לשים לב שהוקטורים העצמיים של AB ושל BA אינם שווים.

<u>שימושים של ליכסון מטריצה</u>

המשוואה הבאה:

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = K$$

מתארת חתך קוני מרכזי של אליפסה עם מרכז בראשית, או של היפרבולה עם מרכז בראשית, כאשר A,B,H,K קבועים. ניתן לכתוב משוואה זו בעזרת מטריצה באופן הבא:

$$(xy)\begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K$$

שכן:

$$(Ax + Hy, Hx + By)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax^2 + \underbrace{Hyx + Hxy}_{2Hxy} + By^2 = K$$

או אם נסמן:

$$M = \begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix}$$

נקבל:

(א) $$(x \quad y)M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K$$

אנו רוצים לבחור את הצירים הראשיים של החתך הקוני כמערכת הצירים, על-מנת לכתוב את משוואת החתך בדרך פשוטה יותר.

אם $x'y'$ היא מערכת צירים מסובבת מ- xy בזווית θ אזי מתקיים:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

או

(ב) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

מכיוון ששחלוף התוצאה של מכפלת מטריצות שווה למכפלת המשוחלפים בסדר הפוך, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

או:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \tilde{C}$$

אבל במקרה זה מתקיים:

$$\tilde{C} = C^{-1}$$

(כלומר, C הינה מטריצה אורתוגונלית)

(ג) $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^{-1}$$

נציב את משוואות (ב) ו- (ג) במשוואה (א) ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^{-1} M C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K$$

לסיכום: אם C היא מטריצה המלכסנת את M, אזי המשוואה שקיבלנו היא משוואת החתך הקוני יחסית לצירים הראשיים של החתך הקוני.

דוגמא:

19. נתון חתך קוני שמשוואתו:

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 30$$

מצא את המטריצה המלכסנת אותו, את משוואת החתך ביחס לצירים הראשיים של החתך ואת זווית הסיבוב של החתך.

פתרון:

נכתוב משוואה זו בעזרת מטריצה:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 30 M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את המטריצה המלכסנת את מטריצה M (המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של M, ע"פ המבואר בפרק הקודם)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

נחשב את המינורים ואת הקופקטורים של מטריצה C:

$$M_{11} = -1 \; A_{11} = -1$$

$$M_{12} = 2 \; A_{12} = -2$$

$$M_{21} = 2 \; A_{21} = -2$$

$$M_{22} = 1 \; A_{22} = 1$$

$$C^{-1} = \frac{adj\, C}{|C|} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$C^{-1} M C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

כלומר, ביחס למערכת הצירים הראשיים,

$$x + 2y = 0$$

$$2x - y = 0$$

משוואת החתך היא:

$$(\bar{x} \quad \bar{y})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 = 30$$

זו משוואת אליפסה קנונית במערכת החדשה.

נמצא את זווית הסיבוב:

$$\tan\theta = \frac{2}{1} = 2$$

$$\theta = \arctan 2$$

<u>הערה</u>: לשם הפשטות עבדנו במרחב דו-ממדי, אולם ניתן לעבוד גם ב- 3 ממדים או יותר.

יב. מרחב מכפלה פנימית

1. בסיס אורתונורמלי

<u>הגדרה</u>:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה K. אם לכל 2 וקטורים, u, v ב-V נתאים סקלר $\langle u, v\rangle$ מ-K המקיים את שלושת התנאים הבאים:

1. $\langle au_1 + bu_2, v\rangle = a\langle u_1, v\rangle + b\langle u_2, v\rangle$
2. $\langle u, v\rangle = \langle\overline{v, u}\rangle$
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$, וגם $\langle u, u\rangle = 0$ אם ורק אם $u = 0$

אזי התאמה זו נקראת מכפלה פנימית, ומרחב וקטורי זה נקרא מרחב מכפלה פנימית.

דוגמאות:

1. המכפלה הסקלרית של 2 וקטורים ב-R^n (וקטורים שכל רכיביהם הם מספרים ממשיים) היא מכפלה פנימית.

הוקטורים:

$\alpha = (a_1 \cdots a_n)$

$\beta = (a_1 \cdots a_n)$

הגדרת המכפלה הפנימית:

$\langle\alpha, \beta\rangle = \alpha \cdot \beta = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$

א. המכפלה הסקלרית של 2 וקטורים ב-C^n (וקטורים שרכיביהם הם מספרים מרוכבים) היא מכפלה פנימית.

הוקטורים:

$\alpha = (a_1 \cdots a_n)$

$\beta = (a_1 \cdots a_n)$

הגדרת המכפלה הפנימית:

$\langle\alpha, \beta\rangle = \overline{a_1}b_1 + \cdots + \overline{a_n}b_n$

הערה: יש לשים לב שבמקרה זה $\langle\alpha|\beta\rangle \neq \langle\beta|\alpha\rangle$ אלא $\langle\beta|\alpha\rangle = \overline{\langle\alpha|\beta\rangle}$.

ב. האינטגרל המסויים של מכפלת פונקציות (באינטרוול שבו הפונקציות רציפות).

הוקטורים:

פונקציות $f(t), g(t)$הרציפות באינטרוול $a \leq t \leq b$.,

הגדרת המכפלה הפנימית:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

נזכיר כאן את ההגדרה של אורך וקטור:

<u>הגדרה</u>:

אורך של וקטור ב-$\mathbf{R}^n$ הוא שורש סכום ריבועי רכיביו.

כלומר: $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2}$

<u>הגדרה</u>:

אם $\|\alpha\| = 1$, כלומר: $\alpha \cdot \alpha = \langle a|\alpha\rangle = 1$, אזי α נקרא **וקטור יחידה**, או **וקטור מנורמל**.

סימון: $\hat{\alpha}$

<u>הערה</u>: ניתן לנרמל כל וקטור ע"י חלוקת הוקטור באורכו:

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$$

דוגמא:

2. נרמל את הוקטור $\alpha = (2,1,-1)$.

פתרון: $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)$$

<u>הגדרה</u>:

הוקטורים α,β נקראים **אורתוגונליים** אם מכפלתם הפנימית שווה 0. כלומר, אם $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle = 0$.

דוגמא:

3. מצא וקטור יחידה אורתוגונלי לוקטורים $\alpha_1 = (1,1,2)$ ו- $\alpha_2 = (0,1,3)$ ב- R^3.

פתרון: נניח $\beta = (x,y,z)$. אזי:

$$\langle\alpha_1,\beta\rangle = x + y + 2z = 0$$

$$\langle\alpha_2,\beta\rangle = y + 3z = 0$$

קבלנו שתי משוואות בשני נעלמים. לפיכך יש אינסוף פתרונות, כלומר, אינסוף וקטורים אורתוגונליים לוקטורים הנתונים בשאלה. נבחר אחד מהם ע"י בחירת z באופן שרירותי:

$z = 1$

$y = -3$

$x = 1$

כלומר: $\beta = (1,-3,1)$.

ננרמל את הוקטור β שהתקבל:

$$\|\beta\| = \sqrt{\beta \cdot \beta} = \sqrt{11}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{||\beta||}\beta = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,-3,1)$$

<u>הגדרה</u>:

קבוצת וקטורים $\{\alpha_i\}$ השייכת למרחב וקטורי V נקראת **אורתוגונלית,** אם כל שני וקטורים שונים בקבוצה הם אורתוגונליים, כלומר: $\alpha_i \cdot \alpha_j = \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = 0, i \neq j$.

<u>הגדרה</u>:

קבוצת וקטורים $\{\alpha_i\}$ השייכת למרחב וקטורי V נקראת **אורתונורמלית** אם היא אורתוגונלית, ואם כל הוקטורים בקבוצה הם וקטורי יחידה. כלומר:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

<u>הערה</u>: ניתן תמיד לקבל קבוצה אורתונורמלית מתוך קבוצה אורתוגונלית ע"י נרמול כל הוקטורים בקבוצה.

דוגמאות:

4. הבסיס הרגיל במרחב R^3 הוא אורתונורמלי:

$$e_1 = (1,0,0)\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1)$$
$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$$

עבור $i \neq j$ מתקיים $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

כלומר, $\{e_1, e_2, e_3\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של R^3.

5. **נתון V מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות באינטרוול $-\pi \leq t \leq \pi$, עם מכפלה סקלרית המוגדרת:**

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

אזי הקבוצה הבאה היא בסיס אורתונורמלי במרחב V:

$$\{1, \cos t, \cos 2t, \dots \quad \sin t, \sin 2t, \dots\}$$

<u>משפט 1</u>:

א. קבוצה אורתונורמלית $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

ב. לכל וקטור $\beta \in V$ הוקטור:

$$\gamma = \beta - \langle \alpha_1, \beta \rangle \alpha_1 - \langle \alpha_2, \beta \rangle \alpha_2 - \cdots - \langle \alpha_n, \beta \rangle \alpha_n$$

הוא אורתוגונלי לכל α_i.

הוכחה:

א. נוכיח שקבוצה אורתונורמלית $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

נניח:

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0$$

צריך להוכיח ש: $\alpha_i = 0$ לכל i.

נכפיל סקלרית ב- α_1 את שני האגפים, ונקבל:

$a_1 = 0$ (כי כל שאר הביטויים מתאפסים, ומתקיים $\langle\alpha_1, \alpha_1\rangle = 1$)

נכפיל סקלרית ב- α_2 את שני האגפים, ונקבל:

$a_2 = 0$ (כי כל שאר הביטויים מתאפסים, ומתקיים $\langle\alpha_2, \alpha_2\rangle = 1$)

וכך הלאה נכפיל בכל a_i ונקבל שכל המקדמים הינם שווים אפס. כלומר: $\alpha_i = 0$ לכל i.

■

ב. יהי:

$$\gamma = \beta - \langle\alpha_1|\beta\rangle\alpha_1 - \langle\alpha_2|\beta\rangle\alpha_2 - \cdots - \langle\alpha_n|\beta\rangle\alpha_n$$

נוכיח ש- γ אורתוגונלי לכל α_i.

נכפיל סקלרית ב- α_1 את שני האגפים, ונקבל:

$0 = \langle\alpha_1, \gamma\rangle = \langle\alpha_1, \beta\rangle - \langle\alpha_1, \beta\rangle = 0$ (כי כל שאר הביטויים מתאפסים, ומתקיים $\langle\alpha_1, \alpha_1\rangle = 1$)

נכפיל סקלרית ב- α_2 את שני האגפים, ונקבל:

$\langle\alpha_2, \gamma\rangle = \langle\alpha_2, \beta\rangle - \langle\alpha_2, \beta\rangle = 0$ (כי כל שאר הביטויים מתאפסים, ומתקיים $\langle\alpha_2, \alpha_2\rangle = 1$)

וכך הלאה נכפיל בכל a_i ונקבל שלכל α_i מתקיים $\langle\alpha_i, \gamma\rangle = 0$.

■

2. תהליך גרם-שמידט

לבסיסים אורתונורמליים יש חשיבות רבה בהקשר של מכפלה פנימית. משפט "גרם-שמידט" קובע שלכל מרחב מכפלה פנימית קיים בסיס אורתונורמלי ומראה כיצד לבנות בסיס כזה מתוך בסיס נתון.

<u>משפט 2</u>:

נתון $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי. קיים בסיס אורתונורמלי $\{\beta_1 \cdots \beta_n\}$ שניתן לבנותו באופן הבא:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$$

אזי $\{\beta_1\}$ אורתונורמלי.

$$\beta_2' = \alpha_2 - \langle \beta_1 | \alpha_2 \rangle \beta_1$$

β_2' אורתוגונלי ל- β_1 לפי משפט 1. אבל צריך וקטור יחידה, ולכן ניקח:

$$\beta_2 = \frac{\beta_2'}{\|\beta_2'\|}$$

אזי $\{\beta_1\ \beta_2\}$ הם אורתונורמליים.

$$\beta_3' = \alpha_3 - \langle \beta_1 | \alpha_3 \rangle \beta_1 - \langle \beta_2 | \alpha_3 \rangle \beta_1$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_3'}{\|\beta_3'\|}$$

אזי $\{\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\}$ הם אורתונורמליים.

ובאופן כזה נמשיך עד ל- β_n ונקבל n וקטורים אורתונורמליים ובלתי תלויים לפי משפט 1, ולכן הם מהווים בסיס אורתונורמלי.

דוגמא:

6. נתון בסיס של R^3:

$$\alpha_1 = (1,1,1)\ \alpha_2 = (0,1,1)\ \alpha_3 = (0,0,1)$$

מצא לפי משפט "גרם שמידט" בסיס אורתונורמלי.

פתרון:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\beta_2' = \alpha_2 - \langle \alpha_2 | \beta_1 \rangle \beta_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{1}{3}(-2,1,1)$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_2'}{\|\beta_2'\|} = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{3}(-2,1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$$

$$\beta_3' = \alpha_3 - \langle \alpha_3 | \beta_1 \rangle \beta_1 - \langle \alpha_3 | \beta_2 \rangle \beta_2 = (0,0,1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0,-1,1)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

מסקנה: הבסיס $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של R^3.