

ces problèmes qui font les mathématiques

(la trisection de l'angle)

Jean AYMES



Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 70

QU'EST-CE QUE L'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe des enseignants concernés par les mathématiques de la Maternelle à l'Université.

Ces maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux (de la Maternelle à l'Université), mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique et conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Élémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec les Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un Bulletin Grande Vitesse (BGV) (6 numéros par an) qui est un supplément au bulletin vert, contenant des informations... qui ne peuvent attendre. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3^e, Baccalauréat, D.E.U.G.

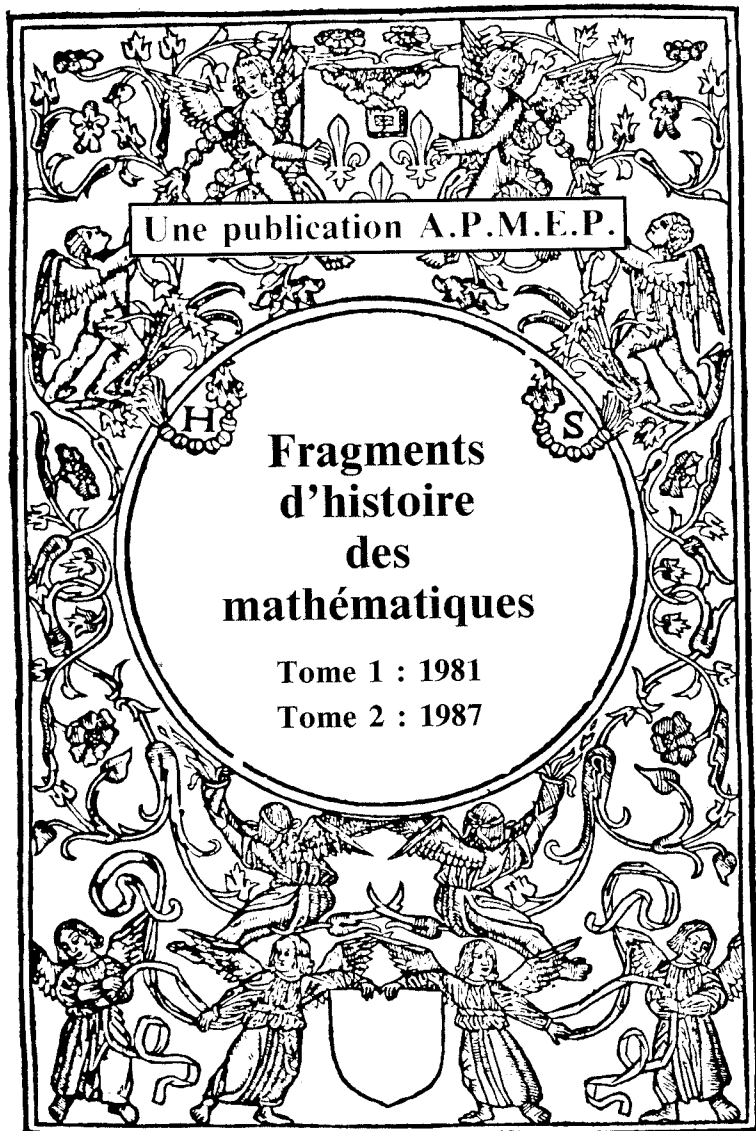
De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

A.P.M.E.P.
26 rue Duméril, 75013 PARIS
(1) 43.31.34.05

SOMMAIRE

1 De l'invention de courbes pour résoudre le problème	7
Quatre méthodes de n-section	8
Des méthodes basées sur l'inclinaison	17
Des solutions par d'autres courbes.....	28
Note sur l'histoire du problème au Moyen-Age	42
2 Constructions à la règle et au compas	43
Points constructibles à la règle et au compas.....	44
La trisection est impossible à la règle et au compas.....	48
Le théorème des trisectrices de Morley	53
3 Des appareils pour trisecter	57
A la règle graduée	58
Trois appareils à partir de la configuration d'Archimède ..	60
Deux appareils à partir de l'hyperbole d'excentricité 2	63
Six appareils basés sur la duplication de l'angle	65
Trois surprises	73
4 La trisectrice en l'approximant	79
Index	95 et 96
Bibliographie	97



¶ In sup mathematicū opus quadripartitū ¶ De Numeris Perfectis ¶ De
Mathematicis Rosis ¶ De Geometricis Corporibus
¶ De Geometricis Supplementis

ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle)

Jean AYMES

à Marie-Thérèse, Bénédicte et Vincent

Préface

La curiosité des élèves peut être un excellent catalyseur de celle des professeurs.

Le travail qui suit s'est constitué en cherchant à répondre au souhait d'un élève (lycée Jules MICHELET à MONTAUBAN) d'en savoir plus sur la trisection dont "il avait entendu dire que c'était un problème qu'on avait beaucoup cherché".

Ce sujet peut paraître aujourd'hui usé, pourtant, à travers la collection des documents réunis, le cheminement des tentatives, c'est toute une construction des mathématiques qui transparait. Ces merveilleux outils que sont les structures algébriques fondamentales dont la formation universitaire nous donne le contenu, c'est à travers de tels problèmes "via" la résolution des équations algébriques qu'ils se sont constitués.

Il faut écouter les questions d'élèves !

Si les problèmes sont un des principaux moteurs de l'évolution scientifique, avec celui de la trisection, on a un exemple éloquent.

Un angle étant donné, il s'agit d'en construire un autre dont la mesure est le tiers. Le problème est attesté dès le cinquième siècle avant Jésus-Christ, avec d'autres (duplication du cube, quadrature du cercle, etc...), dans le contexte d'une géométrie dominée par la droite et le cercle : d'où justement le problème à cause de l'exigence d'une construction dans un cadre imposé. On comprend immédiatement en quoi consiste le problème mais il résiste, c'est excitant.

"Un problème est une aventure humaine" fait remarquer Georges GLAESER.

Ce caractère est tout à fait confirmé ici : ce problème fait partie de ceux qui ne vont pas cesser d'être repris et approfondis durant plus de deux millénaires ; on le retrouve au détour des avancées de la géométrie, de l'algèbre, de l'analyse quand se constituent les concepts de courbes, d'équations algébriques, d'approximations, etc...

En essayant de retracer les efforts faits pour y répondre, on voit naître ces concepts... et la solution n'est pas nécessairement au rendez-vous... d'autres problèmes surgissent : exemple, s'il le fallait de la dialectique problèmes-concepts. C'est ce mouvement continu des mathématiques qu'on cherche à approcher ici.

“L'essentiel de l'activité scientifique consiste à poser des questions, mettre en œuvre des outils pour les résoudre et évaluer les résultats obtenus au regard des problèmes posés. Les théories mathématiques ne sont donc pas des fins en soi, mais sont au service d'une efficacité accrue dans la résolution de problèmes, que ces problèmes soient issus des mathématiques ou de tout autre domaine.” [Jean-Louis OVAERT, *Bulletin A.P.M.E.P.* n° 317].

Au-delà de l'exigence initiale “règle et compas”, c'est une réflexion sur le tracé des courbes qui surgit : invention de traceurs, caractérisation des courbes traçables par appareil articulé,.. nouveaux problèmes encore... jusqu'à celui de tracé d'une droite...

De son origine géométrique, le problème se déplace lentement vers un contexte algébrique alors même que celui-ci se constitue : la démonstration de l'impossibilité de construction par la règle et le compas intervenue au XIX^e siècle n'enlève pas, à notre avis, sa sève au sujet, les processus d'approximation, dont certains sont de découverte récente, posent par exemple de nouvelles questions....

Dans ce parcours, la lettre exacte des écrits historiques n'est pas nécessairement respectée. Nous avons préféré adopter parfois des présentations plus contemporaines. Ainsi a-t-on espéré contribuer :

- à rappeler, si besoin est, comment certains concepts mathématiques trouvent leur origine dans les problèmes,
- à la mise en place d'une documentation propre à favoriser l'élaboration d'activités plus significatives pour l'enseignement d'aujourd'hui.

Je tiens à remercier chaleureusement ceux qui m'ont aidé dans la rédaction de ce travail :

- Michel GUILLEMOT, dynamique animateur du groupe Histoire des Mathématiques à l'IREM de Toulouse ; il m'a procuré de très fructueux conseils bibliographiques. Ce travail lui doit beaucoup.
- Henry BAREIL dont on connaît l'enthousiasme persévérant ; il n'a cessé de m'encourager.
- Les lecteurs du premier manuscrit : Paul-Louis HENNEQUIN, Charles PEROL, Daniel REISZ ; leurs bienveillantes critiques m'ont été utiles.
- Christian HOUZEL, ses observations m'ont permis de préciser certains passages.
- Claude FRASNAY, Professeur à l'université Paul-Sabatier de Toulouse ; son apport original permet d'entrouvrir la porte sur l'actualité du sujet... des problèmes toujours recommandés.
- Joël DOUDOUX, ancien élève, dont le talent s'exprime ici à travers les dessins humoristiques.

Jean AYMES

7 rue Rhin et Danube
82000 MONTAUBAN

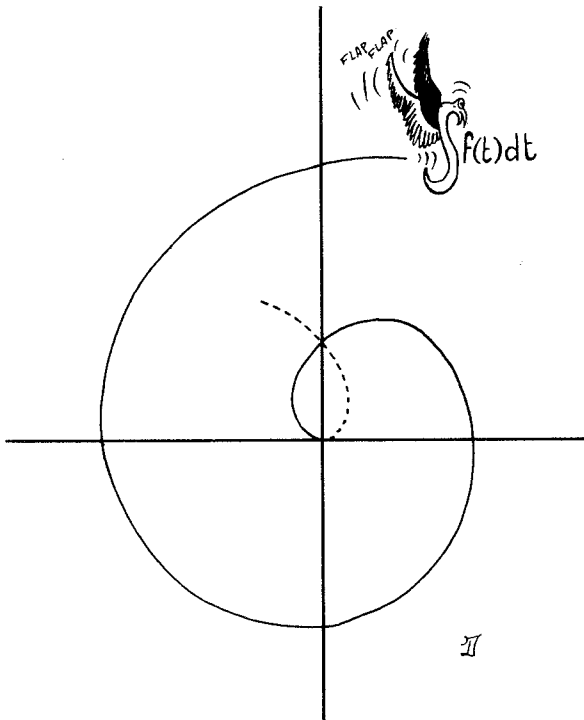
chapitre 1

de l'invention de courbes pour résoudre le problème

“Ce qui a payé l'effort des Grecs, c'est la découverte de courbes comme la conchoïde, les cissoïdes, de relations entre problèmes en apparence très différents, etc...”

Henri LEBESGUE

Leçons sur les constructions géométriques



La résistance qu'offre le problème a pour contrepartie la création de nombreuses méthodes ; au fil des siècles, c'est une floraison d'inventions de courbes :

- les premières réponses sont basées sur une correspondance entre la circonférence et le cercle, mais elles ne satisfont pas,
- puis des courbes plus conformes à la science du temps sont avancées, le lien avec d'autres problèmes est entrevu,
- d'HIPPIAS d'ELIS jusqu'à DESCARTES et ses successeurs c'est l'approfondissement du concept de courbe qui s'effectue.

Quatre méthodes de n-sections

Parmi les réponses les plus anciennement connues on trouve deux méthodes reposant sur la correspondance entre la subdivision de la circonférence et celle d'un segment : elles sont dues à HIPPIAS d'ELIS pour la plus ancienne et à ARCHIMÈDE. Elles permettent de répondre d'une certaine façon à la trisection, et aussi à toute autre subdivision... ce sont des n-sections.

Nous montrerons ensuite deux méthodes... beaucoup plus récentes.

1 La réponse due à HIPPIAS d'ELIS : la quadratrice

Seconde moitié du V^e siècle avant Jésus-Christ.

1.1 La quadratrice

Avec un cercle (C) de centre O et A, B sur (C) de sorte que $A\widehat{O}B$ soit droit.

Un point N décrit (C) suivant un mouvement circulaire uniforme.

Un point P décrit (OB) suivant un mouvement rectiligne uniforme de sorte que N est respectivement en A et B lorsque P est respectivement en O et B .

La quadratrice est le lieu géométrique de M intersection de (ON) avec la parallèle à (OA) qui passe par P .

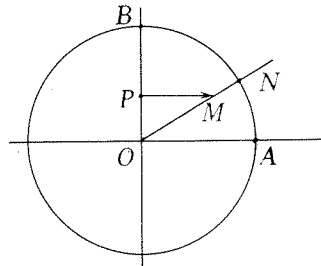


figure 1

Elle doit ce nom à l'usage qu'en fit DINOSTRATE, au début du IV^e siècle, pour répondre au problème de la quadrature du cercle.

Le tracé de la quadratrice est possible par points, grâce à des bissections successives.

La figure 2 représente quelques arcs de la quadratrice, prolongée par continuité par le point M_0 ($\frac{2}{\pi}$; 0) dans le repère (O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}).

De là, l'usage qu'en fit DINOSTRATE pour la quadrature du cercle (construire un carré de même aire qu'un cercle donné)... d'où le nom.

Une équation en est : $x \sin \frac{\pi}{2} y = y \cos \frac{\pi}{2} y$.

La quadratrice est une courbe transcendante admettant les droites d'équation $y = 2n$ (n relatif) comme asymptotes et l'axe des abscisses comme axe de symétrie.

1.2 La trisection... la n-section

La quadratrice supposée tracée, le problème de la trisection de l'angle est résolu en l'utilisant pour transformer une trisection de segment (ou une n-section) en une trisection d'angle (ou n-section d'angle).

Pour trisecter \widehat{OAN} (voir figure 3), l'intersection M de (ON) avec la quadratrice se projette en P sur (OB). On détermine P_1 tel que $3 \cdot OP_1 = OP$; P_1 se projette en M_1 sur la quadratrice et $\widehat{AOM_1}$ est le tiers cherché.

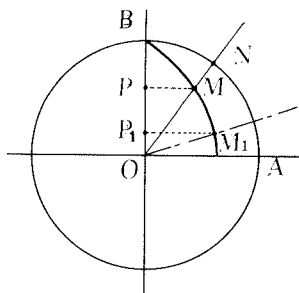


figure 3

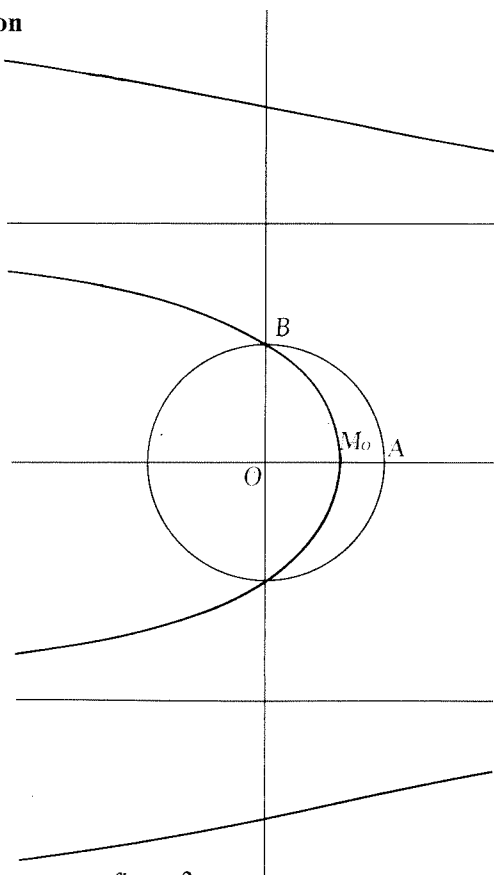


figure 2

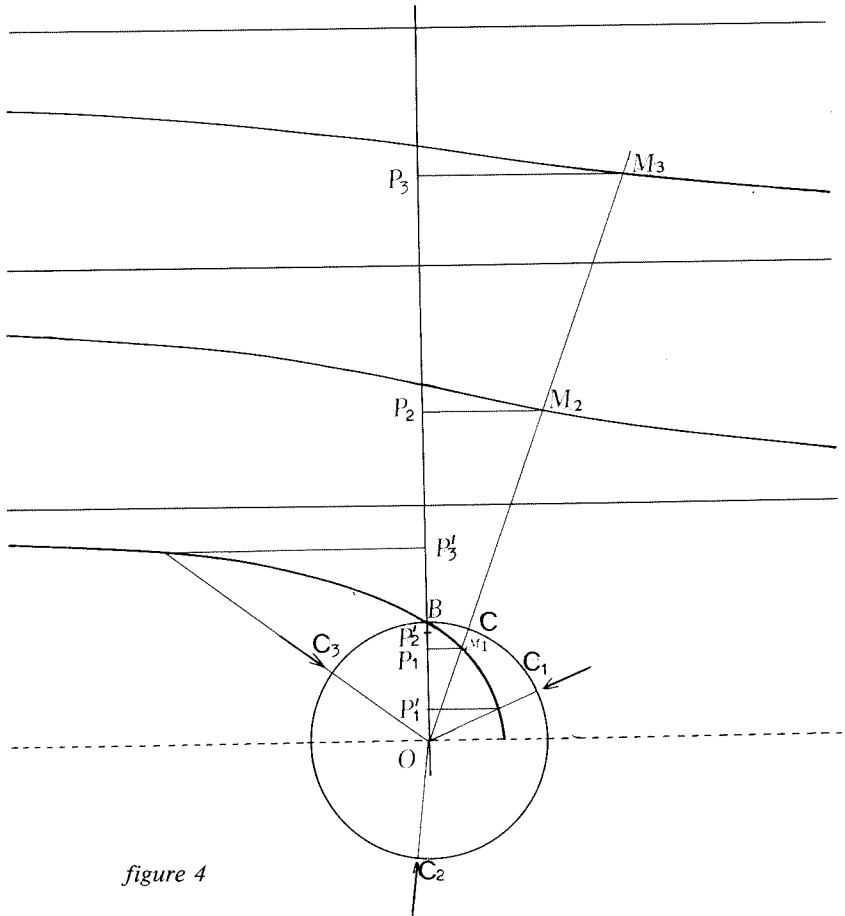


figure 4

NB : dans le repère $(O ; \vec{OA} ; \vec{OB})$ la droite (OC) coupe la quadratrice en une infinité de points dont les ordonnées diffèrent d'un pair ; ces points permettent de rendre compte de trois solutions à la trisection ainsi (OC_1) , (OC_2) , (OC_3) d'angles polaires différent de $2\pi/3$.

1.3 Un peu d'histoire

Il ne subsiste aucun écrit d'HIPPIAS, ce qu'on en sait provient d'écrits bien postérieurs (PROCLUS et PAPPUS principalement).

Malgré son nom, quadratrice, cette courbe semble avoir été inventée pour le problème de la trisection. On ne peut affirmer avec certitude qu'HIPPIAS a dès le début perçu l'usage qu'on pouvait en faire pour le déjà célèbre problème de la quadrature.

Il s'agit (à notre connaissance) de la première courbe, autre que le

cercle, dont l'usage par les Grecs soit attesté. Pour HIPPIAS la courbe se limite à son arc du premier quadrant ; d'un point de vue pratique, il est vraisemblable que des équerres découpées selon la quadratrice étaient utilisées.

Peu à peu la courbe est prolongée hors du cercle générateur, ses asymptotes remarquées.

2 La réponse d'ARCHIMÈDE : la spirale

287-212 avant Jésus-Christ.

2.1 La spirale

Une demi droite Oz tourne uniformément autour du point O et sur Oz un point M est animé d'un mouvement relatif uniforme M étant en O lorsque Oz est en Ox et M en B lorsque Oz est en Oy (figure 5).

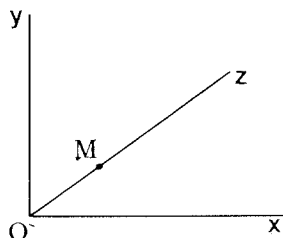


figure 5

La spirale est l'ensemble des points M : la figure 6 en donne l'allure.

Cette courbe est obtenue par points, au gré de bissections successives. Elle est transcendante et aucun mécanisme articulé ne permet de la tracer. Dans le repère (O ; OA ; OB) de la figure 6 on peut la déterminer par une équation en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{2}{\pi} \theta$$

ou par un paramétrage

$$\left(\frac{2}{\pi} t \cos t ; \frac{2}{\pi} t \sin t \right)$$

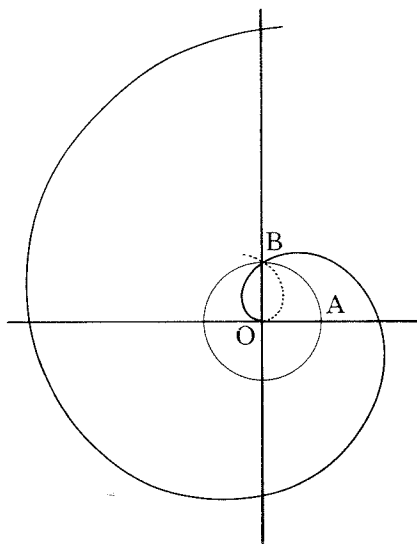


figure 6

2.2 La trisection (la n-section)

Pour un processus assez proche du précédent, pour trisecter \widehat{AOC} : (OC) coupe la spirale en D_2 , on trisecte OD en OE ; le cercle de rayon OE coupe la spirale en F ; \widehat{AOF} est le tiers cherché.

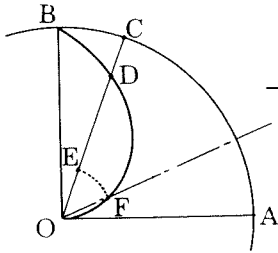


figure 7

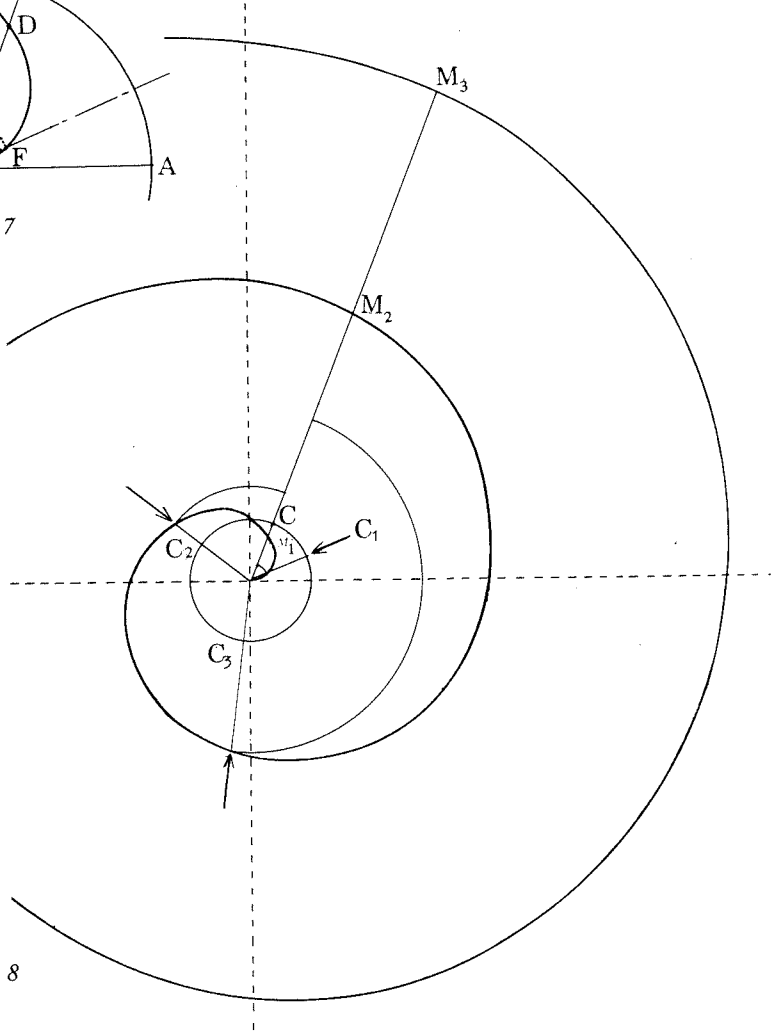
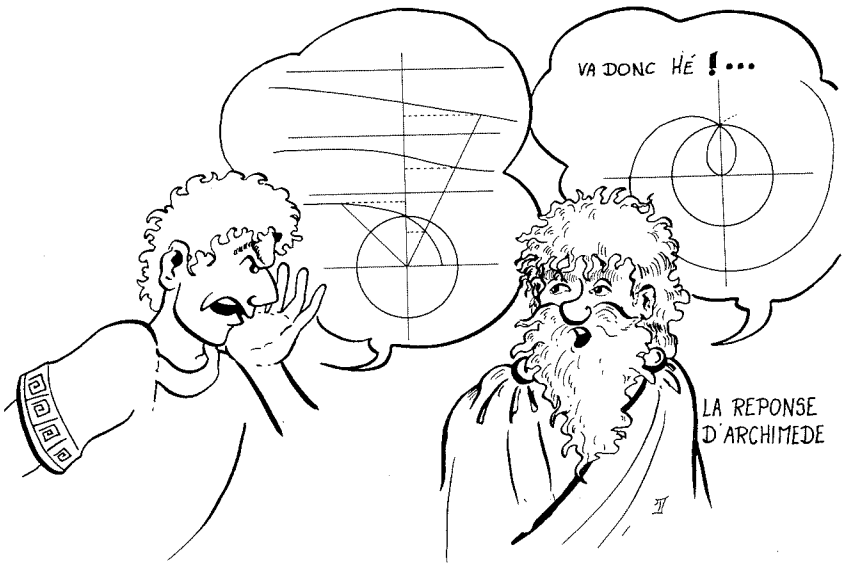


figure 8

La multiplicité des intersections de (OC) avec la spirale permet de rendre compte des trois solutions au problème.

2.3 Un peu d'histoire

La spirale a vraisemblablement été inventée par ARCHIMEDE en lien avec le problème de la rectification du cercle. Il en approfondit l'étude dans le traité "des spirales" : résolution du problème de la détermination d'une tangente en un point donné, détermination de la mesure de l'aire comprise entre la courbe et un rayon vecteur quelconque. Ces travaux constituent sans doute une des origines du calcul différentiel et intégral.



3 Une réponse plus récente : la sinusoïde

Nous laissons au lecteur le soin de commenter à cet égard la figure 9...

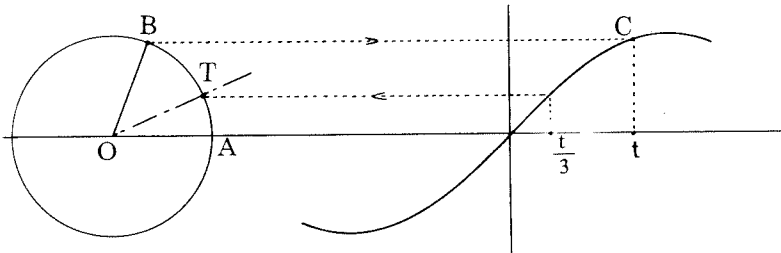


figure 9

Encore une courbe transcendante permettant de résoudre la n-section...

4 Ou encore avec une développante de cercle

Solution donnée par DIDEROT.

Un cercle C étant donné, un point A étant fixé sur C .

Portons sur toute tangente en un point N du cercle un point M tel que la longueur NM soit égale à celle de l'arc AN .

La développante est le lieu de M lorsque le point N varie sur le cercle C .

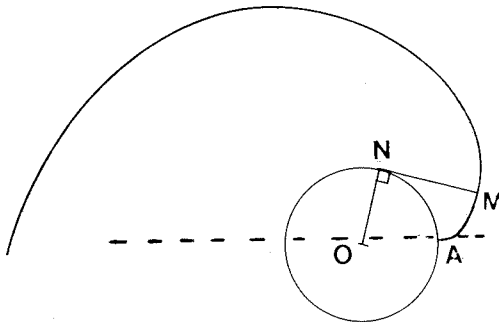


figure 10

Un angle \widehat{AOB} étant donné, soit le point M sur la développante obtenue par la tangente en B . On construit T tel que $BT = \frac{1}{3}BM$ sur la tangente.

Dans une rotation de centre O , T est transformé en un point de la développante et B est transformé en C , (OC) est trisectrice.

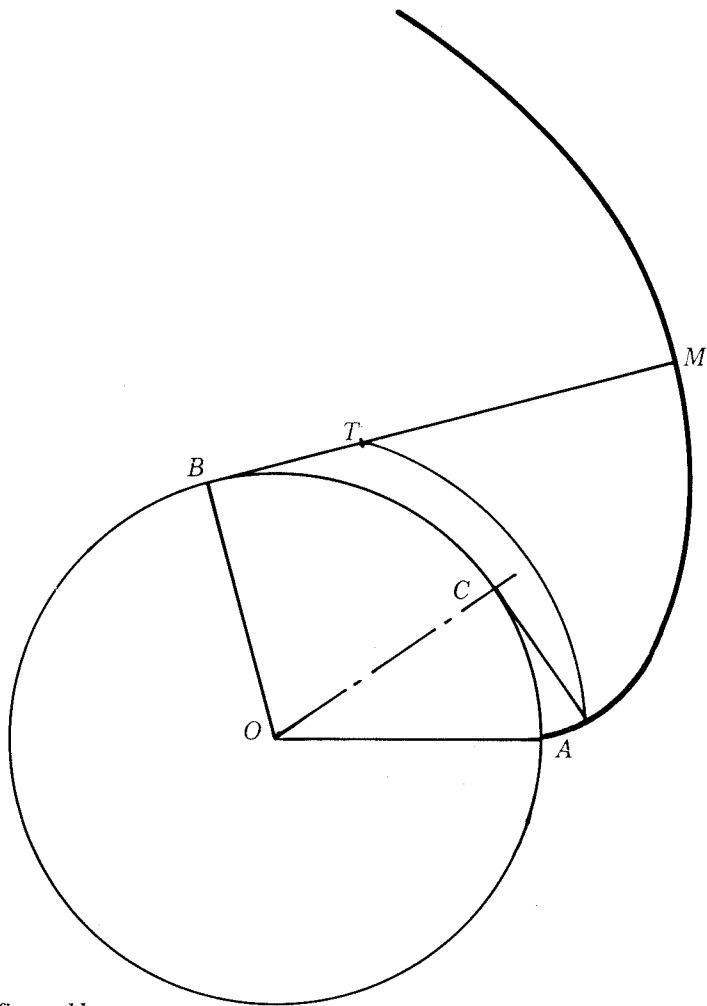


figure 11

5 Le problème... en pose un autre...

On vient de donner quatre courbes permettant d'apporter une réponse au problème de la trisection, cela oblige à poser le problème de la construction de ces courbes : pour la spirale et la quadratrice (ainsi que les deux autres courbes) on ne peut pas obtenir le point le plus général, avec la règle et le compas on ne construit par des bisections successives qu'un sous-ensemble partout dense de points... ce qui réduit le procédé à n'avoir que la valeur d'une approximation.

Cette insuffisance, eu égard aux exigences règle et compas de l'époque, n'a pu que pousser les Grecs à poursuivre la recherche...

GRECS POURSUIVANT LEURS RECHERCHES !



Des méthodes basées sur “l’inclinaison”

1 L’inclinaison

On doit à ARCHIMEDE un résultat qui est le point de départ de plusieurs réponses à la trisection de l’angle [proposition VIII des Œuvres Complètes ; le livre des Lemmes].

D’un point C extérieur à un cercle de centre O, on mène une corde AB de sorte que BC soit égal au rayon.

La droite CO coupe le cercle en D et E. Alors l’arc AD est triple de l’arc BE.

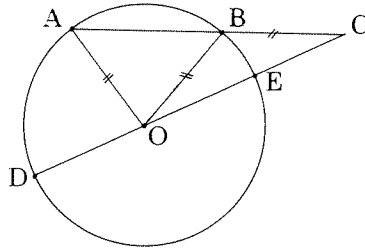


figure 12

Cette proposition VIII est exploitée de diverses manières pour le problème et selon deux points de vue :

1. Etant donné le cercle de diamètre DE et le point A sur ce cercle, il s’agit de déterminer une droite ABC avec B sur le cercle, C sur le diamètre DE telle que $BC = r$ (rayon du cercle).

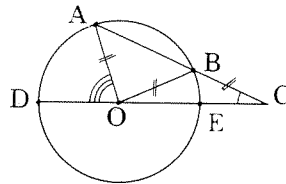


figure 13

2. Etant donné un rectangle OIAJ, il s’agit de déterminer une droite AFC, avec C sur la droite IO, F sur la droite OJ de sorte que $FC = 2 \cdot OA$.

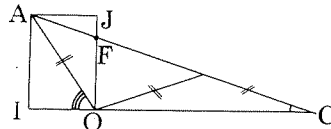


figure 14

Ces deux problèmes de détermination : d’une sécante issue d’un point donné et interceptée sur une longueur donnée (ou dans un rapport donné avec une longueur donnée) par une droite et un cercle [cf 1] ou par deux droites [cf 2] sont exemplaires d’une problématique abordée par les Grecs sous le terme d’“inclinaison” ou “insertion” (*νευσις*).

En ce qui concerne la trisection plusieurs méthodes s’en inspirent, elles sont dues à NICOMEDE, PAPPUS, Etienne PASCAL. Au cours de plus de quinze siècles c’est un modèle d’imagination pour résoudre un problème de construction par la méthode “d’abandon de contraintes”...

2 Par l'inclinaison, la solution de NICOMEDE : la conchoïde droite

250 avant Jésus-Christ environ.

2.1 La conchoïde de droite

Selon le premier point de vue évoqué au 1 on envisage le lieu de B lorsque C décrit la droite (DE).

Plus généralement : étant donné un réel strictement positif d , une droite Δ et un point A ; une droite variable δ passant par A coupe Δ en P.

La conchoïde de la droite Δ , de pôle A et de paramètre r est l'ensemble des points M tels que $PM=d$ sur la droite δ .

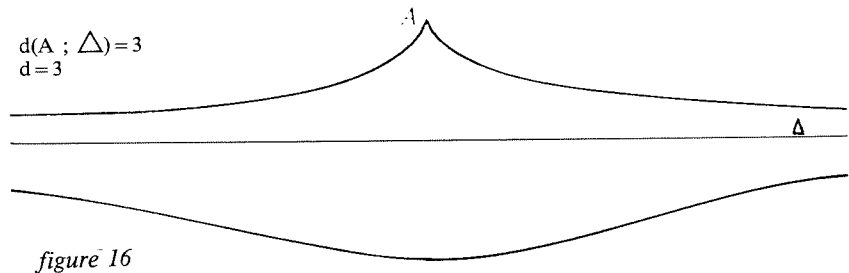
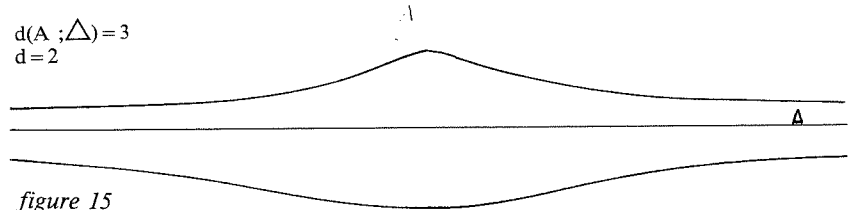
Les figures 15, 16 et 17 donnent les diverses allures possibles : courbe du quatrième ordre et unicursale, elle admet un axe de symétrie (la perpendiculaire en A à Δ).

Dans le repère orthonormé d'origine A admettant l'axe de symétrie connue premier axe, la conchoïde a pour équation cartésienne :

$$y^2(x-a)^2 = x^2(d+a-x)(d-a+x)$$

ou $a = d(A ; \Delta)$ et pour équation en coordonnées polaires : $\rho = \frac{a}{\cos \theta} \pm d$

L'étude des tangentes est due à FERMAT, DESCARTES, ROBERVAL et celle de ses points d'inflexion à HUYGHENS et SLUSE.



$$d(A; \Delta) = 3$$

$$d = 4$$

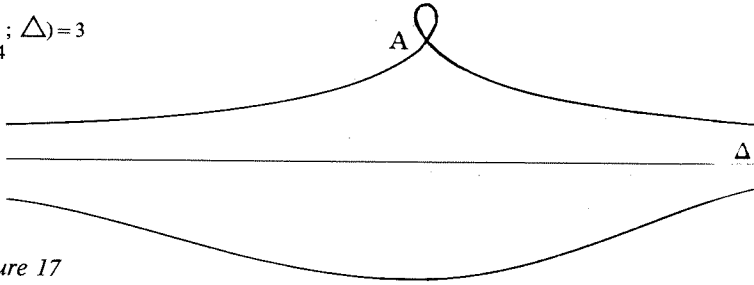


figure 17

2.2 La trisection

Selon le premier point de vue, on dispose du cercle de rayon r et de \widehat{DOA} à trisecter.

La conchoïde de (OD) de pôle A, de paramètre d coupe le cercle en B. (AB) coupe (OD) en C et \widehat{DCA} est le tiers cherché.

Notons que pour chaque angle il faut construire une conchoïde...

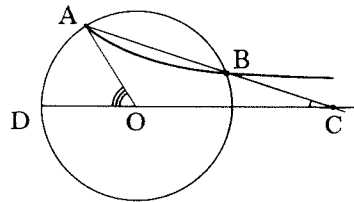


figure 18

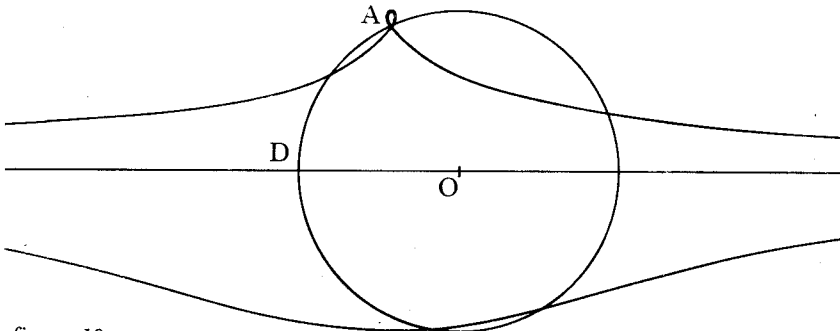


figure 19

La conchoïde trisectrice de \widehat{DOA} .

2.3 Un peu d'histoire

Seuls des écrits très postérieurs (de PAPPUS notamment) permettent d'avoir quelques connaissances sur les conditions de la découverte de la conchoïde.

Elle n'a pas eu d'emblée la conception que nous venons de décrire.

C'est NICOMEDE qui l'introduit d'abord pour résoudre le problème de la duplication du cube : ce problème consiste à construire la racine cubique de $2\sqrt[3]{2}$. La courbe est encore limitée à l'une de ses branches : $\rho = d + \frac{a}{\cos \theta}$. NICOMEDE la désigne sous le nom de conchoïde de première espèce en présentant un instrument pour son tracé (figure 20).

Il démontre que la droite directrice est asymptote.

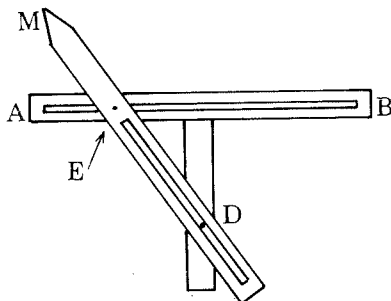


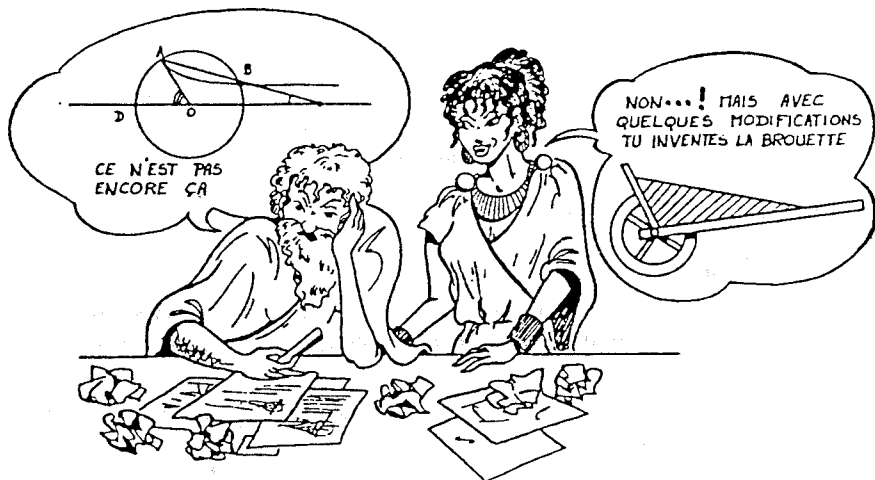
figure 20

La rainure AB suit la directrice, E et D sont des chevilles, M est à l'extrémité de la règle et décrit la conchoïde.

NICOMEDE aurait, par ailleurs, distingué trois autres espèces de conchoïdes dont J.C. TANNERY a cru pouvoir affirmer qu'il s'agirait de

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta} - d \quad [d = a, d > a, d < a]$$

Mais des cas de directrices courbes ne semblent pas avoir été envisagés.



3 Par l'inclinaison, la solution d'Etienne PASCAL : le limaçon de PASCAL

Vers 1640.

3.1 Le limaçon de PASCAL

Selon le premier des points de vue pour l'inclinaison [voir ce chapitre au §1], on envisage le lieu de C tel que $BC=OA$ lorsque B décrit le cercle de diamètre [DE].

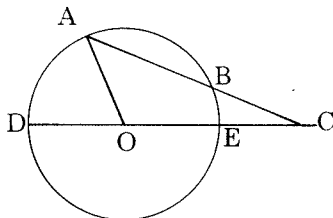


figure 21

Plus généralement, étant donné un réel strictement positif d , un cercle C et un point A fixe de ce cercle ; une droite variable δ passant par A recoupe C en P.

La conchoïde du cercle C , de pôle A, de paramètre d est l'ensemble des points M tels que $PM=d$ sur δ ; on l'a d'abord appelée limaçon de PASCAL.

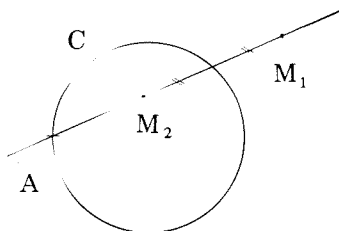


figure 22

Les figures 23, 24, 25, 26 et 27 présentent les diverses allures possibles pour la courbe.

$r=3$
 $d=6$

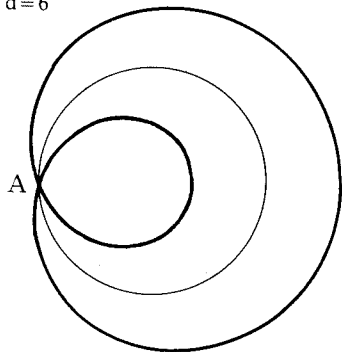


figure 23

la cardioïde

$r=3$
 $d=2$

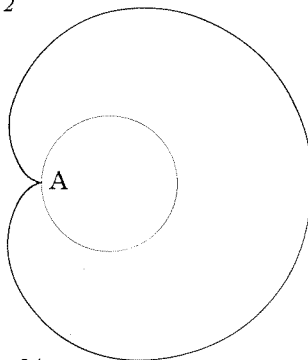


figure 24

$r=3$
 $d=7$

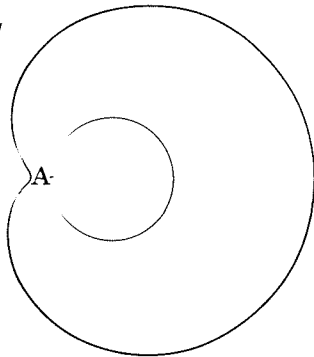


figure 25

$r=1,5$
 $d=7$

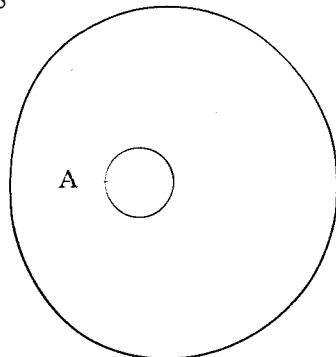


figure 26

$r=1,5$
 $d=8$

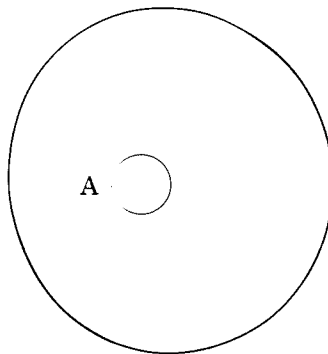


figure 27

La courbe est du quatrième ordre et unicursale, elle admet un axe de symétrie : le diamètre de C issu de A .

Elle a été étudiée par ROBERVAL.

Dans le repère orthonormé d'origine A admettant l'axe de symétrie comme premier axe, elle a pour équation :

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = d^2(x^2 + y^2)$$

avec r rayon de C et pour équation en coordonnées polaires $\rho = 2r\cos\theta + d$.

Cette courbe est une épicycloïde : lieu d'un point d'un cercle qui roule sans glisser sur un autre.

C'est la podaire d'un point par rapport à un cercle. *Podaire* d'un point O par rapport à une courbe Γ : le lieu des projections de O sur les tangentes à Γ .

La figure 28, montre la cardioïde comme podaire de A par rapport au cercle Γ .

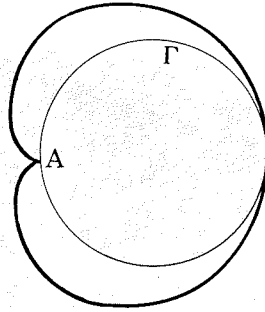


figure 28

Il s'agit aussi de l'inverse d'une conique de foyer le pôle d'inversion, par exemple, figure 29 la cardioïde comme inverse de parabole de foyer F , de directrice D .

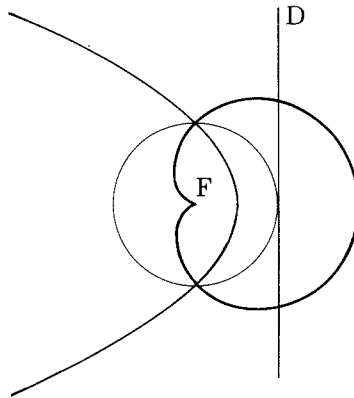


figure 29

3.2 Un mécanisme pour tracer le limaçon

Figure 30 : F et A sont des pivots fixes.

MF et $MT = MT'$ sont des barres de longueur fixe : r et d .

La barre MT étant fixée sur une glissière passant par A .

Lorsque M décrit le cercle de centre F et de rayon $MF=r$, les traceurs T et T' dessinent une conchoïde de cercle de pôle A .

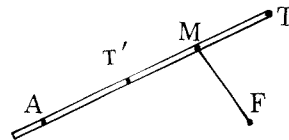


figure 30

Ce mécanisme est dû à PEAUCELIER (1873).



MOI COURBE DU
QUATRIEME ORDRE
UNICURSALE FILLE DE
ROBERVAL RECONNAIS
COMME EQUATION
 $(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = d^2(x^2 + y^2)$

Hau-
Houx

3.3 La trisection

Selon le premier point de vue à propos de l'inclinaison, on dispose du cercle C et de \widehat{DOA} à trisecter.

Le limaçon de PASCAL de pôle A, de paramètre r, de ce cercle coupe la droite OD en C. \widehat{DCA} est le tiers cherché.

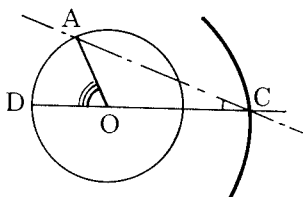


figure 31

Evidemment chaque angle demande le tracé d'un limaçon, encore que tous les limaçons nécessaires se déduisent de l'un deux par rotation de centre O. Et il est facile de faire tourner d'un angle convenable celui qu'on veut trisecter.

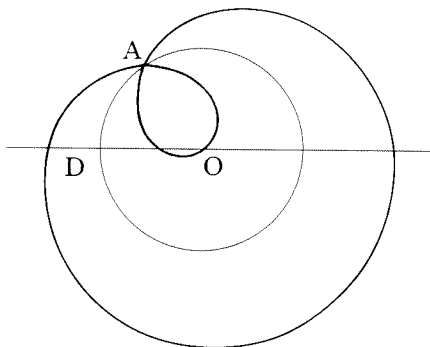
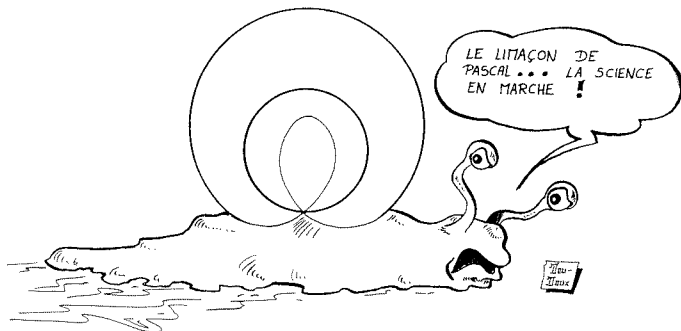


figure 32

Le limaçon de Pascal trisecteur de \widehat{DOA} .



4 Par l'inclinaison, les solutions de PAPPUS : des coniques

4.1 Avec une hyperbole et un cercle

S'agissant de résoudre le deuxième problème d'inclinaison évoqué en 1 : déterminer la droite AFC de sorte que $FC = 2 OA$, PAPPUS considère le point G faisant de JFCG un parallélogramme.

G est d'abord assujéti à faire partie du cercle de centre J et de rayon $2 OA$.

Mais, selon une proposition d'Euclide IOJA et AHKL ont la même aire (figure 34) [“dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux entre eux”].

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}OI \times OJ &= CI \times JF \\ &= CI \times CG, \text{ cela assujéti}\end{aligned}$$

G à faire partie d'une hyperbole d'asymptotes IA et IC passant par le point J.

Ce résultat constitue la proposition 31 dans la “Collection Mathématique” de PAPPUS d'Alexandrie.

4.2 La trisection

L'hyperbole équilatère trisectrice de \widehat{DOA} (figure 35) ; c'est la synthèse : le cercle de centre J de rayon $2.OA$ rencontre l'hyperbole en G, G se projette en C sur OD.

\widehat{ICA} est le tiers cherché.

L'étude des autres points d'intersection n'est pas sans intérêt...

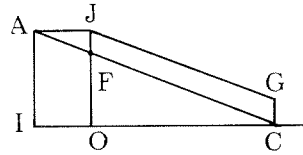


figure 33

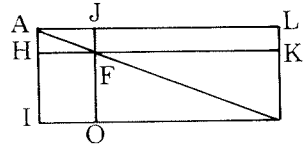


figure 34

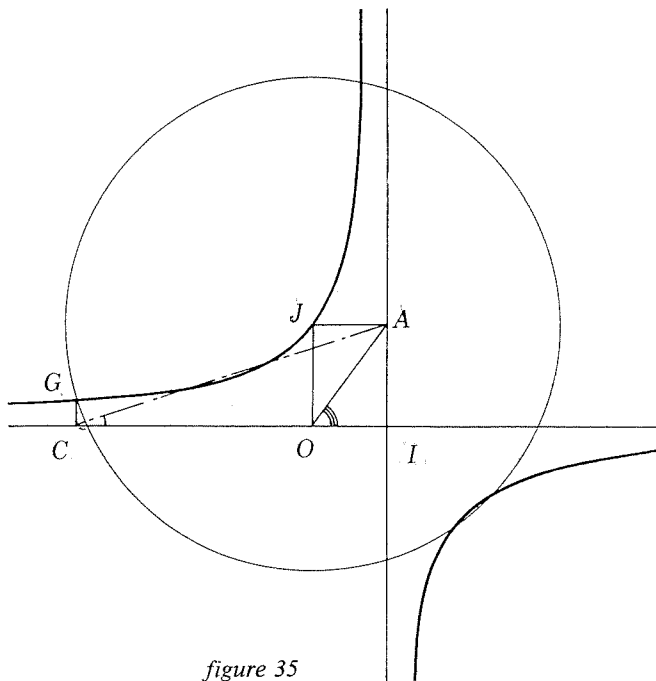


figure 35

5 Tracé et classification des courbes

A partir de la problématique de “l’inclinaison”, par ces trois réponses, se fait jour la recherche de solutions au moyen de courbes plus simples : la conchoïde de droite dont un appareil traceur est signalé par les Grecs, la conchoïde de cercle, 18 siècles plus tard en inversant l’idée (pourquoi une telle durée d’un point de vue à l’autre ? Est-ce simplement question de primauté dans les rôles de la droite et du cercle ?), enfin hyperbole et cercle (courbes très bien connues des Grecs).

La proposition d’un appareil traceur pour la conchoïde ouvre le problème du tracé des courbes : ici deux sont algébriques et traçables par un appareil. Cette problématique reçoit une réponse en 1875 lorsque A. KEMPE établit que “toute partie bornée d’une courbe algébrique plane peut être tracée par un mécanisme articulé”.

En même temps la nature des moyens employés pour résoudre les problèmes fait question. L’étude des courbes utilisées ici ou dans d’autres problèmes conduit les Grecs à une tentative de classification. Ce qu’on en sait provient essentiellement des textes de PROCLUS et de PAPPUS. Mais cette classification ne semble pas très approfondie : PAPPUS ne distinguait guère que les courbes engendrées par des sections de solides (cylindres, cônes, tores...) et les courbes engendrées d’une autre façon.

On a retenu alors la distinction entre courbes “géométriques” et courbes “mécaniques” pour lesquelles le mouvement intervient dans la définition : hélices dont spirales, quadratrices, conchoïdes, cissoïdes.

Dans la première classe : droites et cercles jouent un rôle privilégié : leur définition est liée aux instruments permettant de les tracer, règle et compas (cf les postulats 1, 2, 3 du début du livre I d’Euclide), leur caractère essentiel consistant en ce qu’elles peuvent glisser sur elles-mêmes (mais c’est aussi le cas de l’hélice...) ; puis les sections coniques comme intersections de cônes et de plans.

Les problèmes, eux aussi, sont classés : PAPPUS distingue les problèmes plans (qui peuvent être résolus au moyen de droites et de cercles), les problèmes solides (résolus au moyen de sections de cônes) enfin les problèmes grammiques (c’est-à-dire résolus par d’autres lignes).

La trisection est un problème solide.

Des solutions par d’autres courbes

1 D’après une solution de PAPPUS sans l’inclinaison : l’hyperbole d’excentricité 2

1.1 Une analyse-synthèse

C’est en effet par là que s’est structurée cette démarche de raisonnement.

A supposer la trisection de \widehat{AOC} réalisée, avec B tel que

$$\widehat{AOB} = \frac{2}{3} \widehat{AOC} \text{ et}$$

$$\widehat{BOC} = \frac{1}{3} \widehat{AOC},$$

La distance de B au point A est double de la distance de B à la droite (OC).

B fait donc partie de l’hyperbole de foyer A, de directrice (OC), d’excentricité 2.

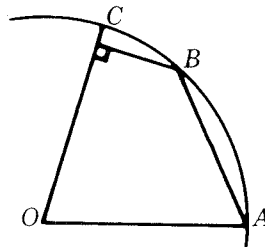


figure 36

La trisection résulte, en synthèse, de l'intersection de cette hyperbole et du cercle de centre O passant par A . La figure 37 montre une construction de \widehat{COB} tiers de \widehat{COA} .

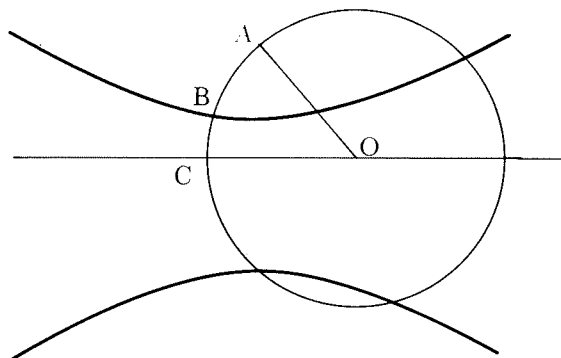


figure 37

1.2 Un joli théorème

Pour l'hyperbole H de foyer A , de directrice D , d'excentricité 2, tout cercle centré sur la directrice D passant par le foyer A coupe l'hyperbole selon un triangle équilatéral.

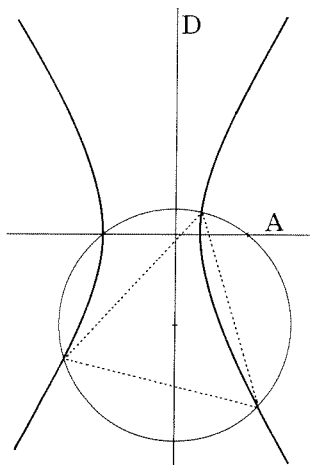


figure 38

L'hyperbole de foyer A , de directrice D , d'excentricité 2 est coupée par un cercle centré sur D , passant par A selon un triangle équilatéral.

1.3 Cette “construction” au moyen d’un calque

Considérant un cercle de centre B et A distant de ce cercle de son rayon, Δ tangente au cercle au milieu de $[AB]$.

On trace l’angle à trisecter sur le calque que l’on déplace de façon que son sommet soit sur Δ , un côté passant par A et l’autre tangent au cercle.

Δ trisecte l’angle.

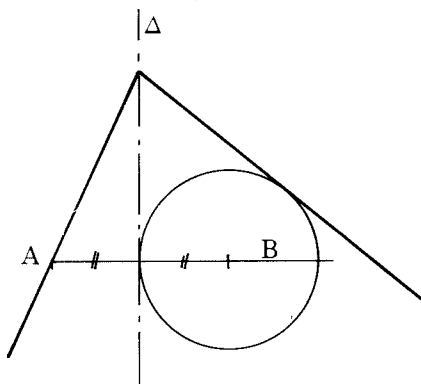


figure 39

1.4 Un peu d’histoire

La première étude des coniques est très probablement due MENECHME (IV^e siècle avant Jésus-Christ) qui les obtenait comme sections d’un cône de révolution par des plans perpendiculaires à une génératrice (MENECHME se servait des coniques pour le problème de la duplication du cube).

Un siècle plus tard APOLLONIUS de PERGE les définit comme sections quelconques des cônes de révolution et en fait une étude (étude des diamètres) à laquelle ne manque semble-t-il que la caractérisation foyer-directrice (le point le plus avancé des coniques d’Apollonius semble être l’étude des normales issues d’un point).

A consulter le texte de PAPPUS (IV^e siècle après Jésus-Christ) dans “la Collection”, on est frappé par sa forme : il ne fait pas référence à l’aspect foyer-directrice... comme ici.

La solution est présentée de deux façons très significatives des connaissances du temps sur les coniques : comme la solution 4 par l'inclinaison, elles sont toutes deux le reflet d'une pratique des coniques essentiellement basée sur la méthode des aires héritée des Pythagoriciens et d'EUCLIDE : les coniques sont caractérisées par des relations métriques exprimées par des phrases non dépourvues d'une certaine lourdeur dont l'apparente analogie avec le langage moderne des coordonnées ne doit pas tromper, l'expression grecque concerne d'abord les objets géométriques, elle n'est pas calcul sur les nombres.

- La première présentation de la solution reflète la conception des coniques introduite par APOLLONIUS comme caractérisation des sections coniques selon l'axe transverse et le paramètre. Résumons dans le langage actuel : M étant tel que $\widehat{MAB} = 2 \cdot \widehat{MBA}$ se projette en H sur AB et le point S sur AB tel que $BS = 2 SA$. PAPPUS établit que : $MH^2 = 3 HS \times HB$ ce qui est une façon de caractériser une hyperbole : "le point M est sur une hyperbole dont le côté transverse de la figure appliquée suivant l'axe est la droite BS et dont le côté droit est le triple de la droite BS ". Nous dirions : hyperbole de sommets B et S dont le rapport des axes est $\sqrt{3}$ [i.e. : $b = a\sqrt{3}$].

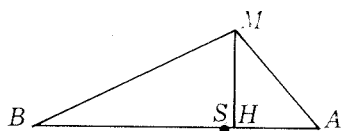


figure 40

- La deuxième présentation montre que PAPPUS a approché la caractérisation foyer-directrice. Résumons encore dans le langage actuel : avec M au tiers de l'arc AB , et H sa projection sur AB , K le milieu de AB , PAPPUS démontre que : $MA = 2 HK$ (encore dans la méthode des aires) d'où il conclut sans nouveau développement que M est sur une hyperbole.

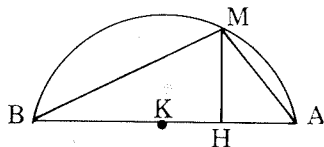


figure 41

On a ici une des rares références à la conception foyer-directrice dans les textes connus des grecs : PAPPUS a rédigé ailleurs dans "la Collection" une preuve de cette caractérisation, on peut aussi se référer aux "Miroirs ardents" de DIOCLES.

νεῦσις



RÉSUMONS DANS LE
LANGAGE ACTUEL ...
☆ PATUS ☆ Foyer
☆ DIRECTRICE ☆

VOILÀ !



2 La réponse de Mac LAURIN : la trisectrice

Mac LAURIN (1698-1746).

2.1 La trisectrice de Mac LAURIN

En partant de la configuration de la proposition VIII des Oeuvres Complètes d'ARCHIMEDE livre des Lemmes, déjà citée, l'idée est de déterminer le lieu de P lorsque C et D sont fixes et θ variable.

Ce lieu est la trisectrice de Mac LAURIN.

La figure 43 la présente : son équation cartésienne en repère ortho-normé d'origine C, de premier axe (CD) est :

$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$ avec $CD = 2a$
en coordonnées polaires :

$$\rho = 4a \cos \theta - \frac{a}{\cos \theta}$$

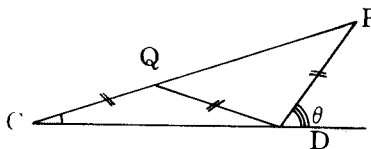


figure 42

La trisectrice de Mac LAURIN.

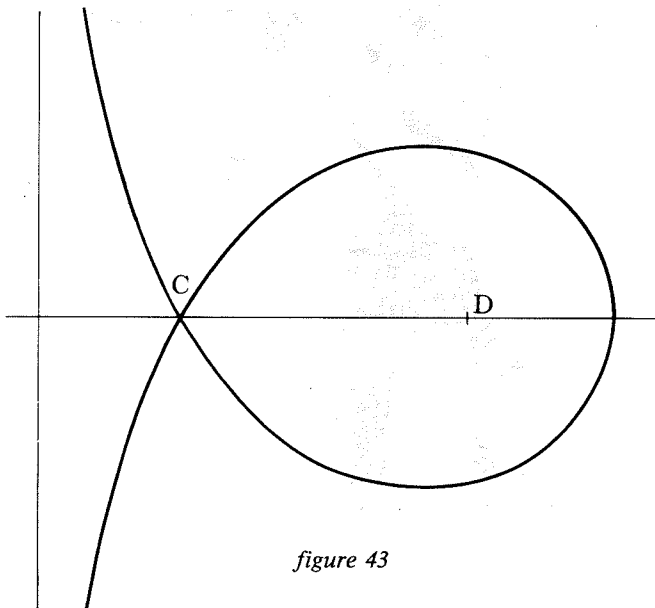


figure 43

2.2 La trisection

La trisectrice étant tracée, pour trisecter l'angle \widehat{xDy} , on détermine l'intersection P de Dy avec la courbe.

\widehat{DCP} est le tiers cherché.

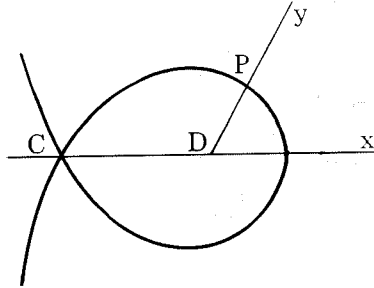


figure 44

La multiplicité des intersections rend compte des trois solutions.



2.3 D'autres définitions de la trisectrice

• Avec le cercle Γ de centre I de rayon $4a$ [$DI = 2a$] et la droite Δ perpendiculaire en J à CD [$CJ = 2a$], une droite variable d pivote autour de C et coupe Γ en M , Δ en N .

La trisectrice est l'ensemble des milieux de $[MN]$, elle admet pour asymptote la médiatrice de $[JC]$.

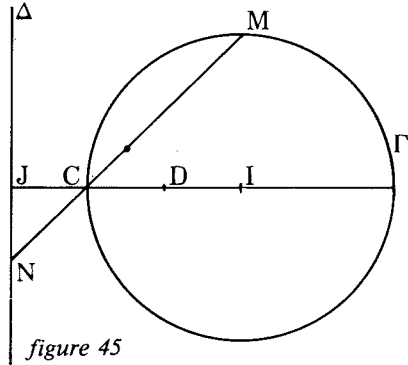


figure 45

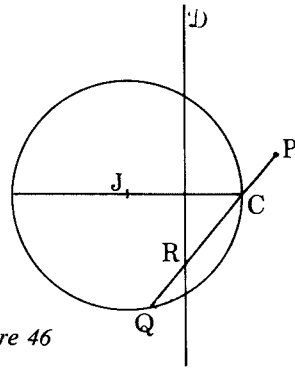


figure 46

La cissoïde de DIOCLES :

Ensemble des points P tels que $\vec{CP} = \vec{QR}$ lorsque Q décrit le cercle.

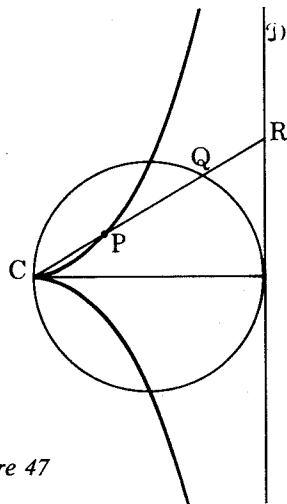


figure 47

La strophoïde :

Ensemble des points P tels que $\vec{CP} = \vec{QR}$ lorsque Q décrit le cercle.

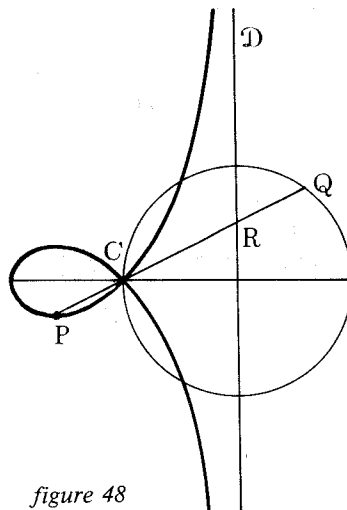


figure 48

La conchoïde :

Ensemble des points P tels que $\vec{CP} = \vec{QR}$ lorsque Q décrit le cercle.

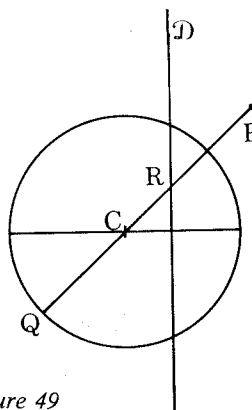


figure 49

La cissoïde a été envisagée par DIOCLES pour une solution du problème de la duplication du cube déjà cité. Son appareil traceur a été découvert par NEWTON : voir brochure Second Cycle A.P.M.E.P. n° 69.

La strophoïde fut sans doute considérée pour la première fois par ROBERVAL (1645) sous le nom de pteroïde, elle a été étudiée par NEWTON.

LA STROPHOÏDE



3 La réponse de CEVA

Jean de CEVA (1648-1734).

La trisectrice de CEVA

Toujours dans la même veine, C étant fixe, Q décrivant le cercle de centre C de rayon r , D variant sur le diamètre fixe, le lieu de P est la trisectrice de CEVA.

Dans le repère d'origine C de premier axe (CD) :

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2(3x^2 - y^2)^2 \quad \text{ou} \quad \rho = r(1 + 2 \cos 2\theta)$$

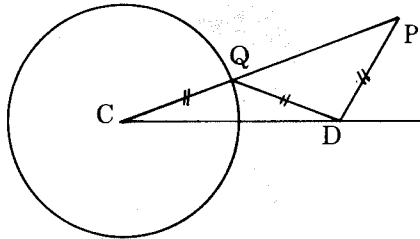


figure 50

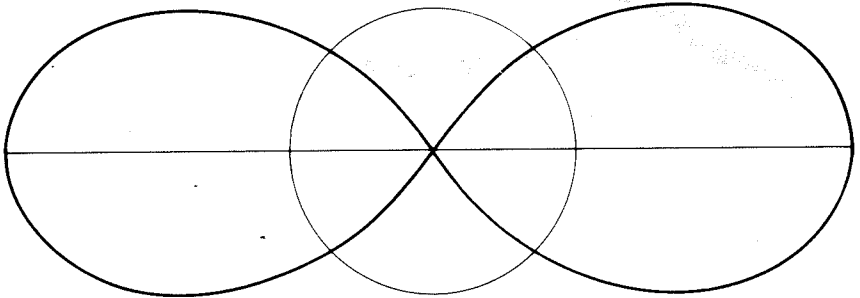


figure 51

La trisectrice de Jean de CEVA.

4 La réponse de DESCARTES : parabole et cercle

(1637, La Géométrie, livre III).

Il s'agit d'un excellent exemple de mise en équation [analyse zététique de VIETE], l'équation est ensuite résolue graphiquement [analyse exégétique de VIETE].

4.1 Mise en équation

Suivons le texte de DESCARTES : soit à trisecter l'angle au centre \widehat{AOB} d'un cercle de rayon 1 (figure 52).

A supposer que \widehat{AOP} , \widehat{POQ} et \widehat{QOB} soient les tiers cherchés, en posant $AB = q$ ("corde sous tendant l'arc") et $BQ = z$ ("corde sous tendant le tiers") DESCARTES établit : $z^3 = 3z - q$ en procédant ainsi : avec S sur (AB) de sorte que (PS) soit parallèle à (OQ) et R intersection de (OP) et de (AB) :

$$\frac{OA}{AP} = \frac{AP}{PR} = \frac{PR}{PS} \text{ d'où } PR = z^2 \text{ et } RS = z^3$$

mais comme

$$AB = 3 \cdot BQ - RS \text{ on arrive à : } z^3 = 3z - q.$$

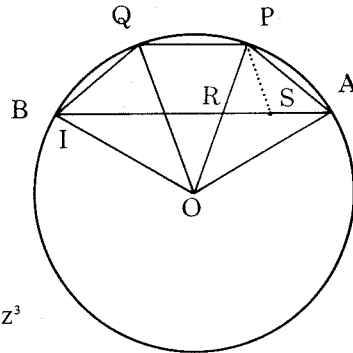


figure 52

4.2 Résolution graphique de l'équation

Descartes propose alors de résoudre cette équation par intersection d'un cercle et d'une parabole, dans le langage actuel la démarche correspond à peu près à ceci : étant donné une parabole d'équation $y = x^2$ et un cercle passant par le sommet de cette parabole dont l'équation est de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$, les abscisses des points d'intersection sont solutions de l'équation $x[x^3 - (2b - 1)x - 2a] = 0$ en choisissant

$$\begin{cases} 2b - 1 = 3 \\ 2a = -q \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} a = -\frac{q}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

on résout l'équation par une méthode graphique.

La figure 53 montre la résolution graphique.

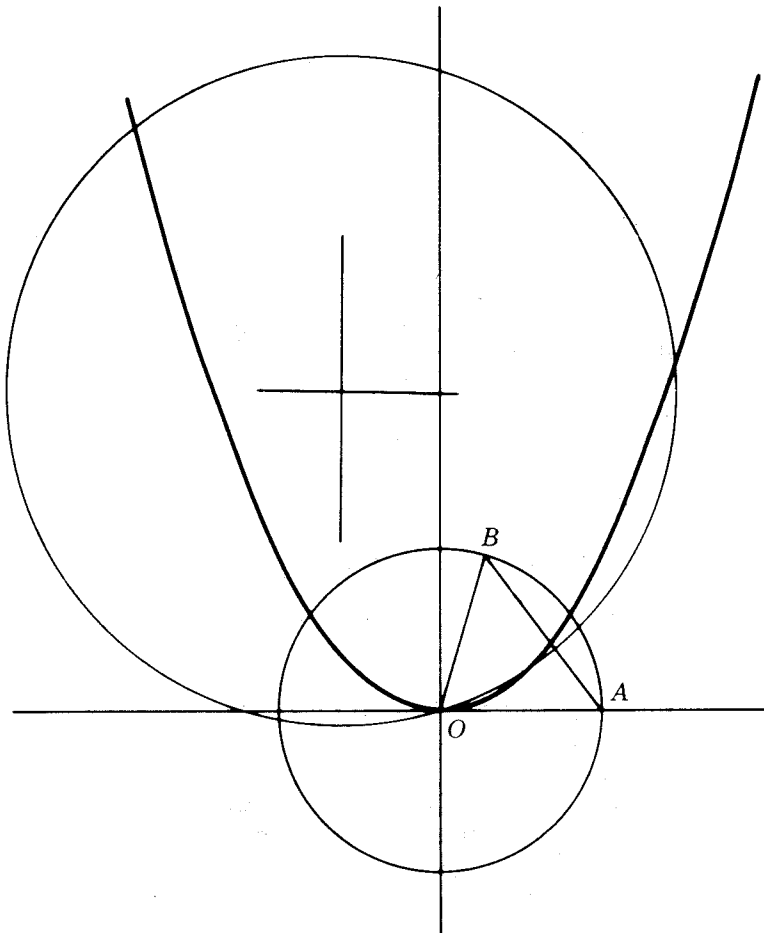


figure 53

La parabole et le cercle pour la trisection de \widehat{AOB} : avec $q = AB$, on trace le cercle de centre $I \left(-\frac{q}{2}; 2 \right)$ passant par O . L'abscisse de l'intersection avec la parabole détermine la corde sous tendant le tiers de l'arc.

4.3 La géométrie analytique

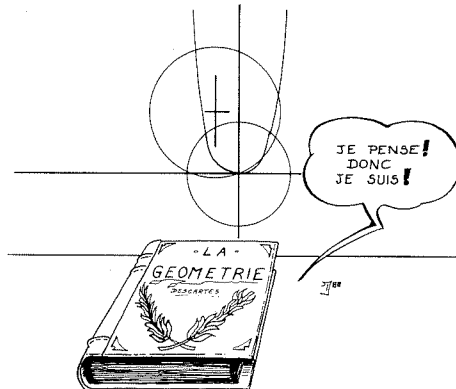
En 1637 paraît “la Géométrie” de René DESCARTES : l’ouvrage prend appui sur la résolution d’un problème posé par PAPPUS. DESCARTES présente sa méthode des coordonnées, pour lui la géométrie analytique est l’art de résoudre les problèmes de géométrie par le calcul. En ce sens les coordonnées dont il est question sont des mesures de grandeurs et la classification des courbes qu’il amorce à partir du degré de leurs équations marque l’avancée de l’algèbre :

- une construction réalisée au moyen de droites et de cercles est formulée en termes d’une équation du premier ou du second degré,
- entre autres Descartes fait apparaître que la trisection est de degré trois : l’emploi de sections coniques l’explique.

Même si la conséquence de l’inconstructibilité à la règle et au compas de la trisectrice n’est pas établie, le degré de l’équation d’une courbe devient chez lui une sorte de mesure de sa simplicité. On voit qu’il est conduit à privilégier les courbes dont l’équation est de la forme $P(x ; y) = 0$ avec P polynôme, il les dit “géométriques”, au détriment des autres, les “mécaniques” [le langage “algébrique”, “transcendant” est du à LEIBNIZ].

Ce langage semble recouper celui de PAPPUS, en réalité il est tout différent : ainsi la conchoïde “mécanique” pour les Grecs est “géométrique” pour DESCARTES. La spirale et la quadratrice sont rejetées parmi les “mécaniques” ; le critère de la classification est le suivant : il faut, pour les courbes, qu’on puisse les “imaginer être décrites d’un mouvement continu, ou par plusieurs qui s’entre-suivent et dont les derniers sont entièrement réglés par ceux qui les précèdent”.

Et DESCARTES donne les mouvements qui permettent d’engendrer les courbes en décrivant les appareils. Cette référence au tracé par appareil fait paradoxe : de semblables appareils sont envisageables aussi pour la quadratrice. Les appareils qu’imagine DESCARTES et dont on peut penser qu’il n’en fit pas usage, correspondent plutôt à la description de constructions géométriques qui deviennent le principe classificateur.

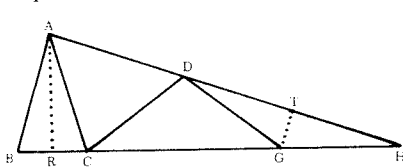


Note sur l'histoire du problème au Moyen-Age par Christian HOUZEL

- Construction géométrico-mécanique proposée par al-Farabi (10^e siècle) dans le “*Livre des expédients spirituels et des mystères de la nature sur la subtilité des figures géométriques*” كتاب الحيل الروحانية والأسرار الطبيعية في دقائق الأشكال الهندسية

- Al-Biruni (973-1048) dans le qanun al-Mas‘udi القانون المصنوعي ramène la détermination du côté d’un enneagone régulier à une équation du 3^e degré $x^3 = 1 + 3x$ (où $x =$ corde de l’arc $\frac{4\pi}{9}$)

- Vers la même époque Abū-l-jūd Muhammed bn al-Layt donne l’équation $x^3 + 1 = 3x$ pour le côté x d’un polygone régulier à 18 côtés.



$$\widehat{AHB} = 20^\circ$$

$$AB = AC = CD = DG = GH = x$$

Par similitude des triangles

$$ABC, AHB : \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{HA}$$

d’où $BC = x^2$

Par similitude des triangles ARH, GTH : $\frac{HR}{HA} = \frac{HT}{HG}$

$$\text{d’où } \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) : 1 = \frac{1-x}{2} : x \text{ soit } x^3 + 1 = 3x.$$

- Al-Syzi (951-1024) : résolution de la trisection de l’angle par l’intersection d’un cercle et d’une hyperbole équilatère.

- Alfonso (14^e siècle) “*La rectification des courbes*” עקוב מישיר utilise la conchoïde pour la trisection de l’angle et la construction de deux moyennes proportionnelles.

- Al-Kaṣī (1424) ramène la trisection de l’angle à l’équation

$$bx = x^3 + a \quad (x = \sin \frac{\theta}{3})$$

Le théorème de Ptolémée pour le quadrilatère AEGH :

$$AG^2 = AE^2 + AE \times AH$$

Or $AG = GD$, un théorème d’Euclide (puissance du point G) donne :

$$AG^2 = BG \times (2R - BG)$$

Comme $AB^2 = BG \times 2R$ (triangles semblables ABG et OAB) et que $AB = 2.AE$, on a

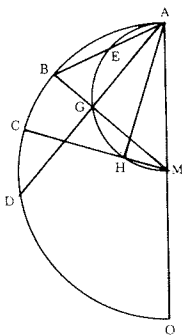
$$BG = \frac{AB^2}{2.R} = 2 \frac{AE^2}{R},$$

$$AG^2 = 4AE^2 - 4 \frac{AE^4}{R^2}$$

Finalement

$$4AE^3 + R^2.AH = 3R^2.AE$$

(où AH est connu et $AE = R.x$).



chapitre 2

constructions à la règle et au compas

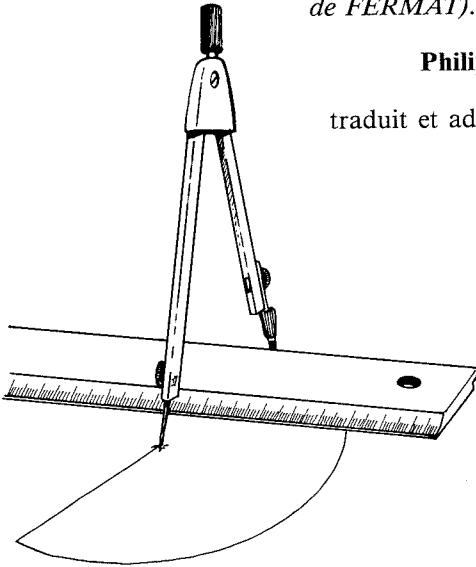
(de la résolution d'équations vers
la constitution de l'algèbre moderne)

“... on a utilisé certains résultats de la théorie des idéaux pour prouver l'impossibilité du dernier théorème de FERMAT... (historiquement les choses se sont passées dans l'autre sens : la théorie des idéaux s'est développée à propos d'une tentative de démonstration du dernier théorème de FERMAT).”

Philip J. DAVIS et Ruben HERSCH

L'univers mathématique

traduit et adapté par Lucien CHAMBADAL



Quels sont les points du plan constructibles à la règle et au compas ?

En reprenant, schématiquement, ce problème, classique aujourd'hui, dans le contexte de la trisection :

- on montre quels liens a ce problème avec celui de la résolution des équations algébriques, à travers quoi l'algèbre moderne s'est développée (groupes, espaces vectoriels, corps...),
- on reprend l'impossibilité de la trisection à la règle et au compas,
- quelques angles trisectables sont signalés,
- on évoque la position du problème dans une géométrie plus pauvre ; le théorème de MORLEY est démontré.

Points constructibles à la règle et au compas

1 Une stabilité opératoire

Une unité étant choisie dans le plan à partir de deux segments de longueurs données a et b .

On sait aisément construire des segments de longueurs respectives $a + b$, ab , $\frac{a}{b}$, \sqrt{a} .

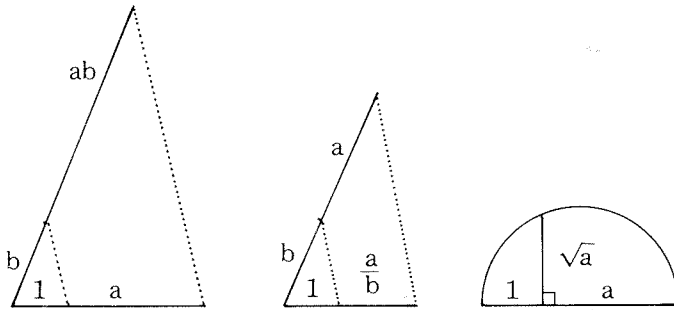


figure 54

2 Une nombreuse famille

A et B étant deux points donnés du plan, on construit à la règle et au compas le point C de sorte que ABC soit rectangle en C et isocèle.

Dans le plan repéré par $(A ; \vec{AB} ; \vec{AC})$ les points à coordonnées rationnelles sont constructibles.



figure 55

3 Pour engendrer d'autres points constructibles

3.1 Intersection de droites et de cercles ; extensions quadratiques

Les cercles et les droites déterminés par des points à coordonnées rationnelles ont des équations à coefficients rationnels (entiers si on le souhaite !).

Leurs intersections (pour deux droites, pour une droite et un cercle ou pour deux cercles) sont constituées de points dont les coordonnées sont solutions d'équations du second degré à coefficients rationnels (entiers si on le souhaite) : ces coordonnées peuvent s'écrire sous la forme $n + p\sqrt{a}$ où n, p sont rationnels et a rationnel (ou entier) non carré.

Par exemple :

- le point F de coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, "via" la construction de l'hexagone régulier.

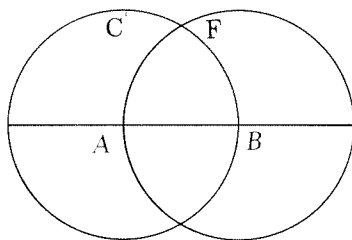


figure 56

- le point D intersection du cercle de centre I $(-\frac{1}{2}; 0)$ de rayon IC et de la droite (AB).

D a pour coordonnées $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0)$, "via" le nombre d'or.

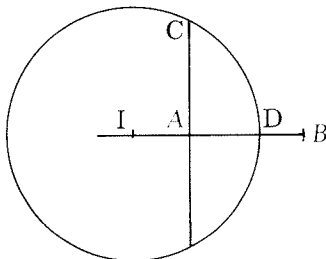


figure 57

Lorsque a est un rationnel non carré, l'ensemble des $n + p\sqrt{a}$ avec n, p rationnels a une structure intéressante :

- c'est un corps commutatif, le plus petit contenant \mathbf{Q} et \sqrt{a} ,
- c'est un espace vectoriel sur \mathbf{Q} de base $(1; \sqrt{a})$.

Noté $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, cet ensemble est une extension quadratique (de degré 2) de \mathbf{Q} .

3.2 Où le processus se répète

Les cercles et les droites déterminés par des points de coordonnées dans une certaine extension quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ ont des intersections dont les coordonnées sont de la forme $m+n\sqrt{b}$ où m et n varient dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, b non carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. C'est une nouvelle extension quadratique... de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ celle-là ! : $\mathbf{Q}(\sqrt{a})(\sqrt{b})$, notée $\mathbf{Q}(\sqrt{a};\sqrt{b})$, c'est-à-dire ensemble des

$$x + y\sqrt{a} + z\sqrt{b} + t\sqrt{ab}$$

où x, y, z, t décrivent \mathbf{Q}, \dots il s'agit en fait de $\mathbf{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

Et ainsi de suite : les points constructibles à la règle et au compas (à partir de la donnée de A et B) ont des coordonnées éléments d'un corps obtenu par extensions successives d'ordre 2 du corps des rationnels.

Ainsi :

- le point $G(\cos \frac{\pi}{12}; \sin \frac{\pi}{12})$ "via" le dodécagone régulier, en rappelant que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

dans l'ordre : (1), (2), (3), (4).

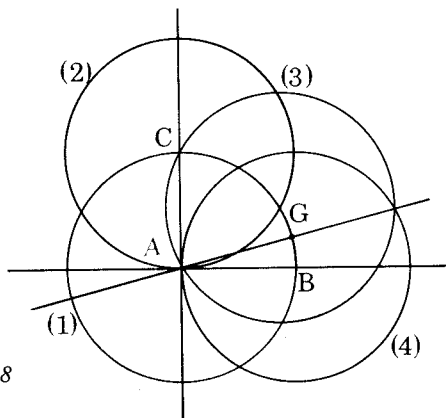


figure 58

- ou encore le point $H(\cos \frac{2\pi}{5}; \sin \frac{2\pi}{5})$ "via" le pentagone régulier.

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

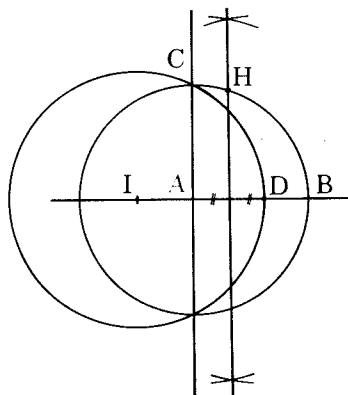


figure 59

4 Sur les extensions de corps

Pour un sous-corps commutatif K de \mathbf{C} dont le neutre est noté 1 et m de \mathbf{C} non choisi dans K , l'extension $K(m)$, le plus petit corps contenant K et m , peut être envisagée comme un espace vectoriel sur K dont la dimension va permettre de découvrir un critère de constructibilité :

- $K(m)$ de dimension 2 : $(1; m)$ est une base, m^2 peut s'écrire : $m^2 = n + p \cdot m$ avec n, p dans K . m est ainsi zéro d'un polynôme $x^2 - px - n$ à coefficients dans K , unitaire [1 est coefficient du monôme de degré le plus élevé] et irréductible sur K [sans racine dans K]. La réciproque étant vraie. Tels sont $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(i)$,

- $K(m)$ de dimension 3 : $(1; m; m^2)$ est une base. Un résultat analogue est obtenu au degré 3. Tel est $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ ensemble des $n + p\sqrt[3]{2} + p\sqrt[3]{4}$ avec n, p, q rationnels,

- Et ainsi de suite pour toute dimension entière

Par exemple $\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ où $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$
 $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^4 = 112 + 64\sqrt{3}$

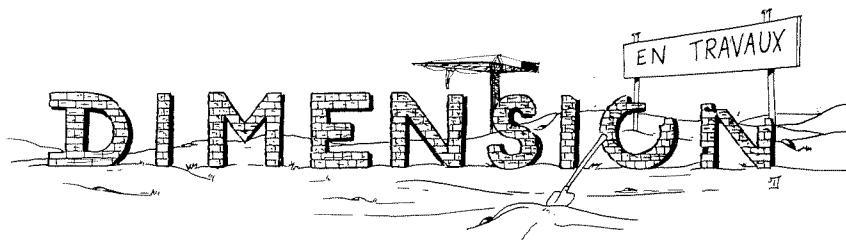
donc $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ est zéro de $x^4 - 16x^2 + 16$, c'est dire que $\cos \frac{\pi}{12}$ est zéro de $x^4 - 16x^2 + 16$ lequel est irréductible sur \mathbf{Q} : $\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ est une extension de \mathbf{Q} de degré 4.

- La dimension n'est pas toujours finie

Ainsi de $\mathbf{Q}(\pi)$, résultat dû à Carl Louis Ferdinand LINDEMANN (1852-1939) : en 1882, il démontrera que π ne peut être racine d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels, c'est-à-dire la transcendance de π (sur \mathbf{Q} !)... et le problème grec de la quadrature du cercle aboutissait !

Mais si au contraire m est algébrique sur le corps K (c'est-à-dire solution d'une équation algébrique à coefficients dans K), il y a égalité entre le degré du polynôme irréductible dont m est zéro et la dimension de l'extension $K(m)$ comme espace vectoriel sur K : le degré de l'extension.

Et on établit en particulier que : L étant une extension de K , F une extension de L ($K \subset L \subset F$), lorsque le degré de F comme extension de K est un entier n , L est une extension de K dont le degré est un entier divisant n .



- LA DIMENSION N'EST PAS TOUJOURS FINIE -

5 La nature des éléments d'extensions quadratiques itérées

La succession des extensions quadratiques produisant à partir de \mathbf{Q} , au bout d'un certain nombre d'étapes, un corps \mathbf{K} ayant une certaine dimension d sur \mathbf{Q} , toute nouvelle extension quadratique de \mathbf{K} est un espace vectoriel de dimension $2d$ sur \mathbf{Q} .

Dès lors les extensions quadratiques successives ne peuvent que produire des espaces vectoriels (corps aussi) de dimension de la forme 2^p (p entier) : pour tout élément t d'une telle extension \mathbf{F} , l'extension $\mathbf{Q}(t)$ vérifie $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(t) \subset \mathbf{F}$, ce qui impose à $\mathbf{Q}(t)$ un degré entier divisant 2^p donc lui-même puissance de 2 (2^q).

Les points constructibles à la règle et au compas à partir de A et B ont ainsi pour coordonnées des zéros de polynômes irréductibles de degré 2^q (q entier) à coefficients rationnels.

La trisection est impossible à la règle et au compas

1 Inconstructibilité de la trisectrice

Pour un angle de mesure donnée θ (en radians) un problème de constructibilité à la règle et au compas se pose : le point M de coordonnées $(\cos \theta ; \sin \theta)$ est-il constructible ? Dans le cas favorable nous dirons que l'angle θ est constructible.

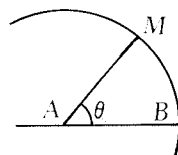


figure 60

Par exemple, en radians, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$.. les privilégiés de la trigonométrie au Collège donnent des points constructibles. De même pour θ de cosinus $\frac{3}{5}$, de sinus $\frac{4}{5}$ ou l'angle de 3° ... à l'origine des premières tables de trigonométrie (avec AL KASHI au XV^e siècle - voir figure 61).

construction d'un angle de 3° à la règle et au compas.

figure 61

$$\begin{cases} \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\ \sin 3^\circ = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16} \end{cases}$$

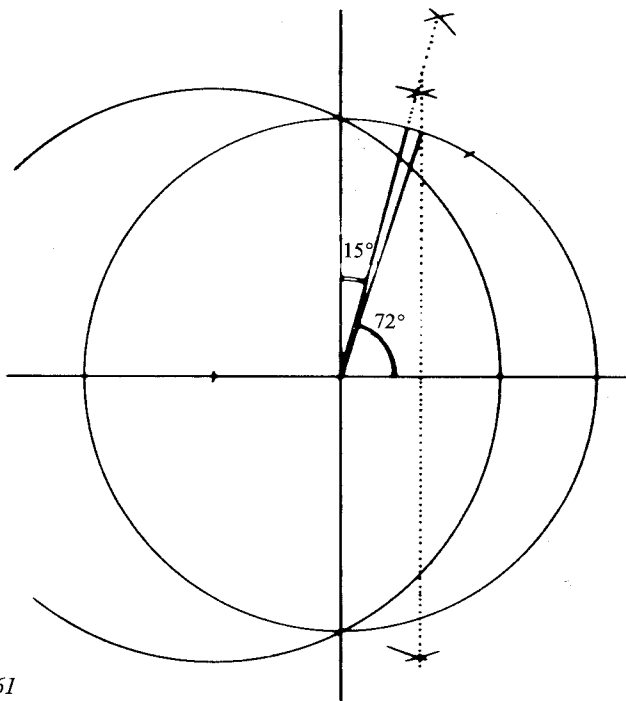


figure 61

Construire la trisectrice d'un angle \widehat{BAM} (figure 60) de mesure θ radians peut consister :

- soit à construire $N \left(\cos \frac{\theta}{3}; \sin \frac{\theta}{3} \right)$ à partir de A et B (dans le sens ci-dessus) dans le cas où θ est lui-même constructible.
- soit à construire N à partir de la donnée A, B, M ce dernier donné nécessairement lorsque θ n'est pas constructible.

Un exemple de la première situation suffira comme preuve : 20° (c'est-à-dire $\frac{\pi}{9}$ radians) n'est pas constructible à la règle et au compas, c'est-à-dire 60° n'est pas trisectable.

La formule de trigonométrie $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ indique que $\cos 20^\circ$ est zéro du polynôme $f = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$. Pour démontrer que f est irréductible sur \mathbf{Q} il suffit de justifier l'absence de zéro rationnel pour f :

- le rationnel $\frac{p}{q}$ étant zéro : $8p^3 = 6p^2q + q^3$ qui implique que $\frac{p}{q}$ soit entier,

- l'entier x étant zéro : $8x^3 = 6x + 1$ qui implique l'égalité d'un pair et d'un impair.

Ainsi le polygone régulier à 18 côtés n'est pas constructible à la règle et au compas lui non plus !

2 Un cheminement vers les structures algébriques

VIETE, puis DESCARTES (la Géométrie) ont montré comment l'équation générale du troisième degré ayant trois racines réelles se ramène à l'équation de la trisection de l'angle.

En 1837, paraît l'article de M.L. WANTZEL : "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas" (Journal des Mathématiques).

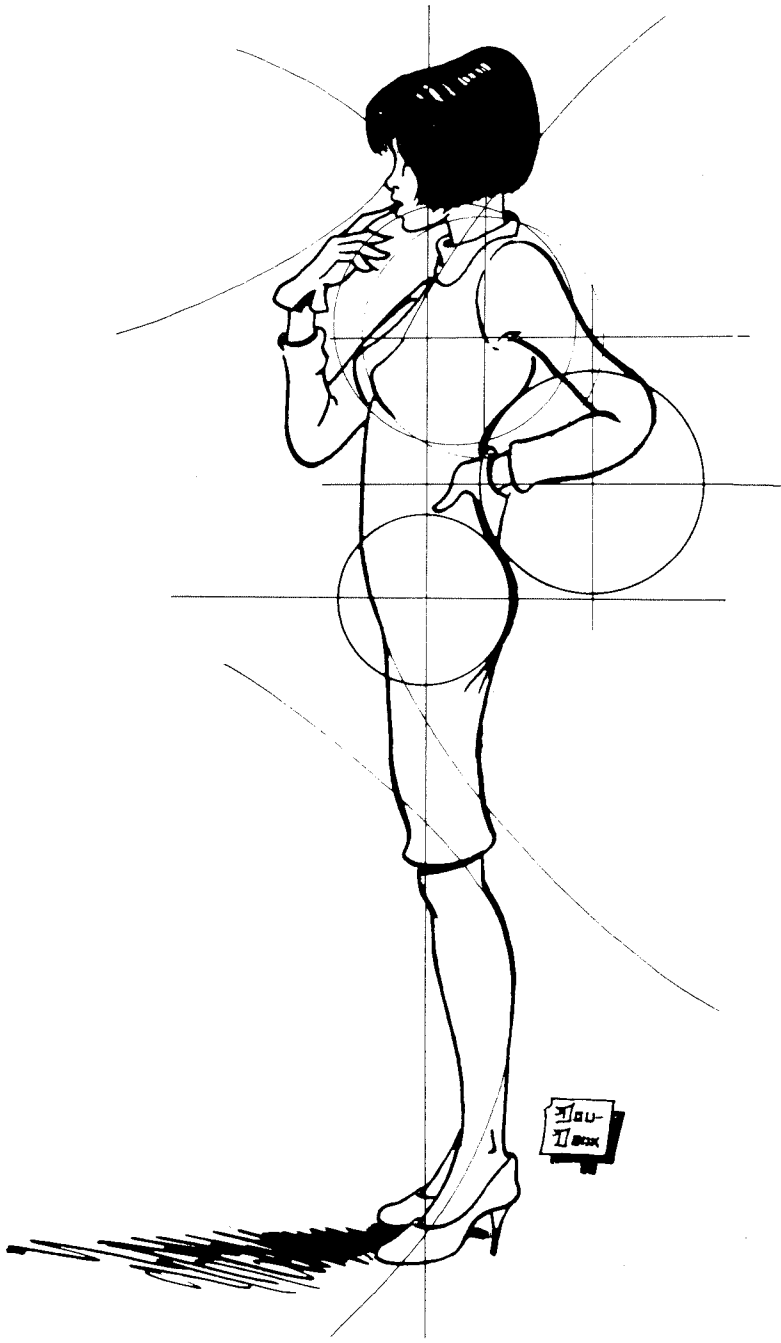
Ce texte ne repose pas sur le langage algébrique des extensions de corps utilisé ci-dessus, citons un extrait de l'introduction : "... ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtés et les lignes trigonométriques des angles qu'au premier et au second degré ; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations de second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour reconnaître si la construction d'un problème de géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer..."

En cette première moitié du XIX^e siècle les problèmes abordés du point de vue de l'algèbre sont pour une grande part liés à la question de la résolution des équations, à travers les travaux de LAGRANGE, VAN DER MONDE, GAUSS qui publie en 1801 la caractérisation des polygones réguliers constructibles à la règle au compas (1) en réalisant la construction du polygone à 17 côtés (étude de l'équation $x^n - 1 = 0$), ABEL qui prouve en 1826 l'impossibilité de résolution par radicaux de l'équation du cinquième degré, enfin GALOIS dont "le Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux" (1830) d'abord ignoré fut ensuite porteur des concepts fondamentaux de l'algèbre.

GALOIS, entre autres, approche ici la notion de corps engendré par un ensemble de nombres algébriques.

Les travaux ultérieurs de DEDEKIND et de KRONECKER permettront de construire la théorie des corps : itinéraire saisissant de la résolution de problèmes à la mise en place de concepts mathématiques puissants.

(1) Les nombres de la forme $2^{(2^m)} + 1$ où m est entier sont appelés nombres de FERMAT. Le polygone régulier à n côtés n'est constructible à la règle et au compas que si n est 2^α avec $\alpha \geq 2$ ou de la forme $2^\alpha \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_r$ avec α entier naturel et les p_i nombres de FERMAT premiers, distincts.



3 Des trisectables cependant

Que l'angle de θ radians soit constructible à la règle et au compas ou non, l'irréductibilité du polynôme $4x^3 - 3x - \cos\theta$ à coefficients dans l'extension $\mathbf{Q}(\cos\theta)$ est le critère de l'impossibilité de construction à la règle et au compas de l'angle de $\frac{\theta}{3}$ radians à partir des points A, B, M ($\cos\theta$; $\sin\theta$). Ce polynôme est réductible lorsque $\cos\frac{\theta}{3}$ est dans $\mathbf{Q}(\cos\theta)$ ou zéro d'un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbf{Q}(\cos\theta)$. Quelques exemples permettent de donner des angles trisectables, ils concernent le cas où $\cos\theta$ est algébrique !

3.1 Des cas très familiers

Les angles de π , $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$ radians respectivement associés aux polynômes :

$$\begin{array}{ll}
 4x^3 - 3x + 1 & \text{de zéros } -1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \\
 4x^3 - 3x & \text{de zéros } 0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2} \\
 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{de zéros } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}
 \end{array}$$

3.2 Les trisectables de n°

L'angle de 72° (c'est-à-dire $\frac{2\pi}{5}$ radians) est trisectable : celui-ci étant constructible à la règle et au compas, l'angle de 3° l'étant aussi, celui de 24° l'est nécessairement.

On pourra s'intéresser au polynôme $4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \dots$ et à ses zéros !

Mais l'angle de 1° ne saurait être constructible à la règle et au compas (20° ne l'étant pas !) : 3° n'est donc pas trisectable...

On pourra dès lors résoudre le petit problème de la recherche des angles de n° entiers constructibles, trisectables...

3.3 Les trisectables de $\frac{2\pi}{n}$ radians

Les angles de $\frac{2\pi}{n}$ radians constructibles à la règle et au compas, sont donnés par le résultat de GAUSS en 1801, l'examen des premières valeurs de n en ce qui concerne la trisection conduit à envisager l'étude selon que n est ou non multiple de 3 :

- lorsque n n'est pas multiple de 3, l'identité de BEZOUT est vérifiable sous la forme $3x + ny = 1$ avec x, y entiers, d'où :

$$x \cdot \frac{2\pi}{n} + y \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

La construction de l'angle de $x \cdot \frac{2\pi}{n} + y \cdot \frac{2\pi}{3}$ radians est possible (celui de $\frac{2\pi}{n}$ radians est donné) ainsi $\frac{2\pi}{n}$ est trisectable.

Par exemple l'angle de $\frac{2\pi}{7}$ radians qui n'est pas constructible d'après le résultat obtenu par GAUSS en 1801 (l'heptagone régulier n'est pas constructible) est cependant trisectable.

- lorsque n est multiple de 3, il est de la forme $n = 3^p \cdot m$ où p et m sont entiers, m non multiple de 3 et p non nul.

L'identité de BEZOUT permet $xm + 3y = 1$ où x, y sont entiers et donc :

$$x \cdot m \cdot \frac{2\pi}{3n} + y \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{n} \text{ puis avec } n = 3^p \cdot m :$$

$$n = 3^p \cdot m : \quad x \cdot \frac{2\pi}{3^{p+1}} + y \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\pi}{n} ,$$

la construction de la trisectrice d'un angle de $\frac{2\pi}{n}$ radians revient ainsi à celle de la trisectrice d'un angle de $\frac{2\pi}{3^{p+1}}$ radians. Mais $\frac{2\pi}{3}$ n'est pas trisectable.

Le critère est donc très simple.

Le théorème des trisectrices de MORLEY

1 Résonances actuelles sur la trisectrice

Claude FRASNAY, Professeur à l'université de Toulouse, à qui je confiais ma curiosité pour le problème de la trisection me signale quelques résonances actuelles du sujet :

- la géométrie dont le modèle instrumental procède de la règle et du compas se présente comme une géométrie basée sur la notion de distance : pour décrire en termes abstraits les instruments fondamentaux, il suffit que la jauge métrique G soit un groupe commutatif totalement ordonné 2- divisible, non réduit à $\{0\}$ (2),
- dans ce cadre moins riche en propriétés que celui de la jauge \mathbf{R} , il se peut que la trisection soit très généralement impossible...
- la trisection du segment fait même problème : en prenant pour G le sous-groupe de \mathbf{R} constitué par les nombres $\log_2 |x|$ lorsque x parcourt le groupe multiplicatif \mathbf{K}^* , où \mathbf{K} désigne le corps des réels constructibles à la règle et au compas, alors l'impossibilité de construction de

(2) La distance est une application $d : E \times E \rightarrow G_+$. Au sens restreint, une jauge métrique réelle est un sous-groupe (ordonné) G de \mathbf{R} tel que $1 \in G$ (par commodité), astreint à la condition de 2- divisibilité : pour tout $x \in G$, on doit avoir $\frac{x}{2} \in G$.

$\sqrt[3]{2} (\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{K}$ selon le problème de la duplication du cube) se traduit par $\frac{1}{3} \notin G \dots$ on ne peut pas trisecter le segment $[0 ; 1]$. Cependant, G peut être la jauge de modèles non euclidiens de la géométrie plane.

2 Une preuve du théorème de MORLEY

par Claude FRASNAY

En 1904, MORLEY démontre l'un des théorèmes les plus extraordinaires de la géométrie élémentaire.

On en connaît de nombreuses démonstrations. Proposons ici, sous forme d'exercice, la démonstration suggérée par Claude FRASNAY... (dont il est permis de penser qu'elle est la plus élémentaire actuellement connue).

Le théorème des trisectrices (MORLEY, 1904) sous forme d'exercice

Etant donné un plan réel euclidien orienté E , soit \mathcal{T} l'ensemble des triplets $(A, B, C) \in E^3$ formés de points A, B, C , distincts, non alignés, et sommets d'un contour triangulaire $ABCA$ de sens positif. Lorsque α, β, γ sont 3 réels > 0 de somme $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$, on appelle *dipode de pointure* (β, γ) tout quintuplet $D = (I, J, K, B, C)$ ($D \in E^5$) tel que : $(I, J, K) \in \mathcal{T}$, $(I, K, B) \in \mathcal{T}$, $(J, I, C) \in \mathcal{T}$, $\widehat{IJC} = \widehat{IKB} = \frac{\pi}{3} + \alpha$, $\widehat{JIC} = \frac{\pi}{3} + \beta$, $\widehat{KIB} = \frac{\pi}{3} + \gamma$, $IJ = JK = KI$, et on appelle *tripode de pointure* (α, β, γ) tout sextuplet $T = (I, J, K, A, B, C)$ ($T \in E^6$) formé par l'enchevêtrement de 3 dipodes : (I, J, K, B, C) de pointure (β, γ) , (J, K, I, C, A) de pointure (γ, α) , (K, I, J, A, B) de pointure (α, β) .

1. Justifier le terme de "pointure" en précisant les angles \widehat{KBI} , \widehat{ICJ} , et \widehat{JAK} aux "pieds" B, C d'un dipode (I, J, K, B, C) et aux "pieds" B, C et A d'un tripode (I, J, K, A, B, C) . Pour que deux dipodes D_1, D_2 aient même pointure, il faut et il suffit qu'il existe une similitude directe de E transformant D_1 en D_2 . Même condition pour que deux tripodes T_1, T_2 aient même pointure.

2. On associe à toute pointure "tripodique" (α, β, γ) le réel $\alpha' = \frac{\pi}{6} + \alpha$ (de sorte que $\alpha' + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$) et on considère $(A', B, C) \in \mathcal{T}$ d'angles $\widehat{BA'C} = 2\alpha'$, $\widehat{A'BC} = 2\beta$, $\widehat{BCA'} = 2\gamma$. Si I désigne le point commun aux trois bissectrices intérieures du triangle $A'BC$, montrer qu'il existe (de manière unique, et symétriquement par rapport à la droite $(A'I)$) un point K du segment $A'B$ et un point J du segment $A'C$ tels que (I, J, K, B, C) soit un dipode de pointure (β, γ) .

3. Par similitude, en déduire que, pour tout dipode (I, J, K, B, C) , les droites BI et CI sont les bissectrices intérieures des angles $(\widehat{BK}, \widehat{BC})$ et $(\widehat{CJ}, \widehat{CB})$. Corollairement, pour tout tripode (I, J, K, A, B, C) , il en résulte que les droites AJ et AK , BK et BI , CI et CJ sont les trisectrices intérieures du triangle ABC .

4. Etant donné $(A, B, C) \in \mathcal{T}$ d'angles $\widehat{BAC} = 3\alpha$, $\widehat{CBA} = 3\beta$, $\widehat{ACB} = 3\gamma$, soit $T_1 = (I_1, J_1, K_1, A_1, B_1, C_1)$ un tripode de peinture (α, β, γ) , et soit S la similitude directe transformant (A_1, B_1, C_1) en (A, B, C) .

Les trisectrices intérieures du triangle ABC déterminent 7 triplets (B, C, I) , (C, A, J) , (A, B, K) , (A, K, J) , (B, I, K) , (C, J, I) , (I, J, K) appartenant à \mathcal{T} .

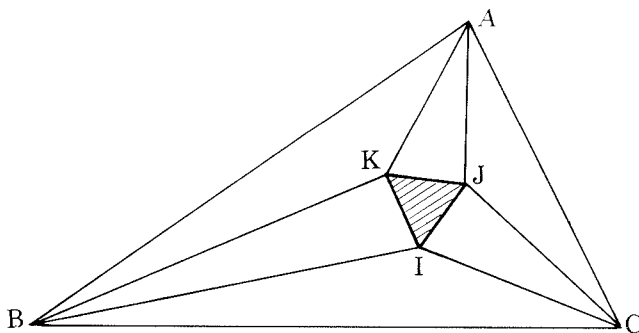
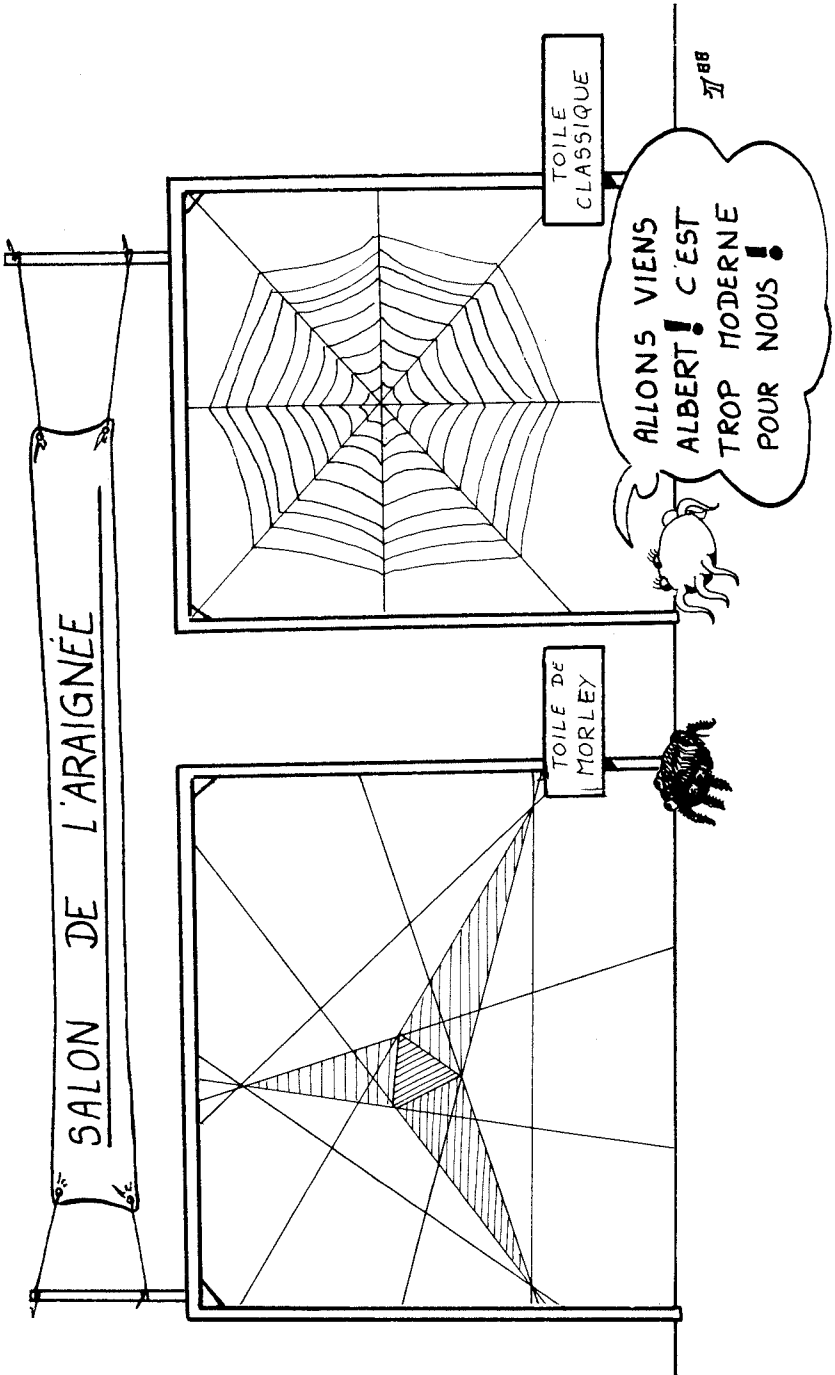


figure 62

En utilisant S , montrer que (I, J, K, A, B, C) est un tripode de peinture (α, β, γ) . Corollairement (théorème de MORLEY) : le triangle IJK est équilatéral.



chapitre 3

des appareils pour trisecter

“... des appareils permettant le tracé mécanique de courbes beaucoup plus variées que les droites et les cercles de rayons quelconques... ce sont les systèmes articulés... Ces appareils sont d’une importance capitale pour la construction des machines où ils réalisent des transmissions de mouvements”.

Henri LEBESGUE

Leçons sur les constructions géométriques



MASSACRE A LA TRISECTEUSE

En proposant sa conchoïde NICOMEDE en a donné un appareil traceur.

Le tracé des courbes a donné un problème dont le rôle est évident dans leur classification.

On décrit ici un grand nombre d'appareils trisecteurs :

- règles graduées, compas particuliers, équerres établissant des liens avec les plus anciennes solutions connues,
- les appareils articulés illustrent la problématique du tracé des courbes... dont la droite,
- la trisection par pliage est aussi possible.

A la règle graduée ; avec un compas d'après la configuration d'ARCHIMEDE

1 Sous la forme d'un exercice

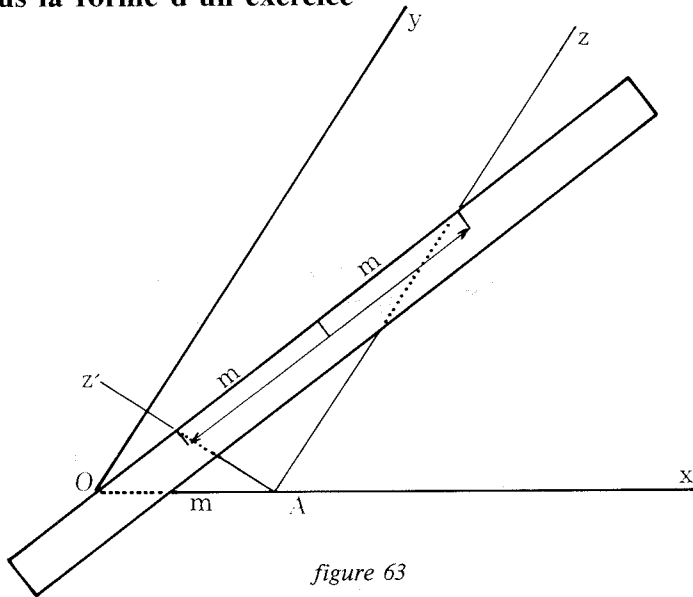


figure 63

Justifier ce processus de tracé de la trisectrice : l'angle \widehat{xOy} est donné, une longueur m est donnée, par A de Ox tel que $OA = m$, on trace la parallèle Az à Oy et la perpendiculaire Az' à Oy .

Sur une règle, on marque deux repères distants de $2m$, on place la règle de sorte qu'ils soient situés sur Az et Az' et alignés avec O , le bord de la règle matérialise une trisectrice de \widehat{xOy} .

2 A la règle graduée... encore

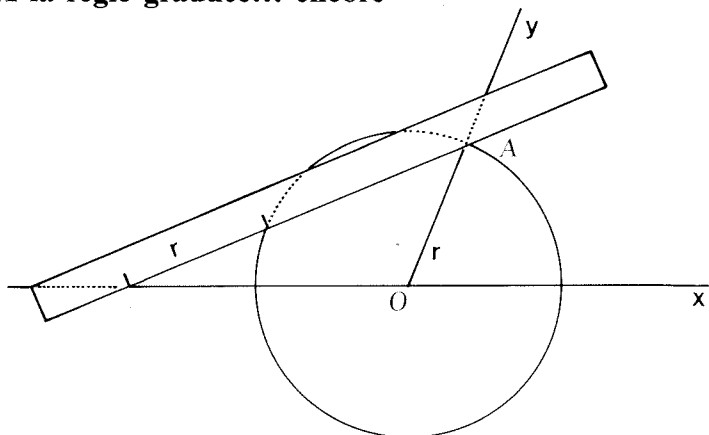


figure 64

La règle pivote autour de A de façon que les marques distantes de r [rayon du cercle] soient respectivement sur le cercle et le diamètre : le bord de la règle donne la direction d'une trissectrice de \widehat{xOy} .

3 Un "compas" (HERMES 1883)

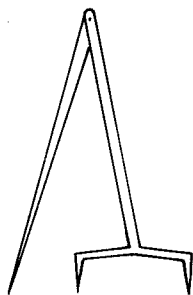


figure 65

Sans commentaires.

Trois appareils articulés d'après la configuration d'ARCHIMEDE

1 Avec trois barres...

Un appareil probablement connu de PASCAL.

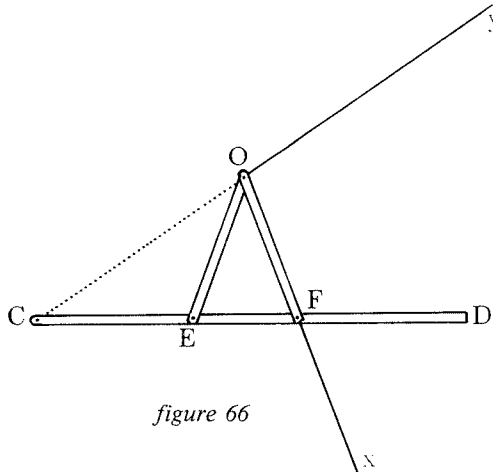


figure 66

Avec trois barres CD, OE, OF : en O et E une articulation telle que $CE = EO = OF$, F peut coulisser sur ED.

Lorsque C prolonge Oy et OF est sur Ox : \widehat{OCF} est le tiers de \widehat{xOy} .

On pense que PASCAL a pu utiliser cet appareil pour tracer le limaçon : lorsque OF est fixé, E décrit le cercle de centre O et de rayon OF, C varie sur le limaçon de pôle F, de paramètre OF.

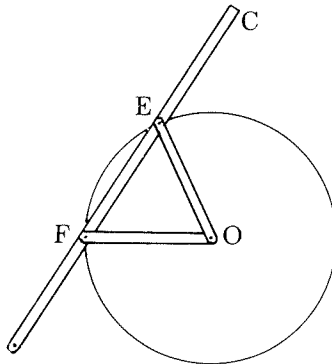


figure 67

On pourra chercher ce qu'il en est du lieu d'un point fixé sur OF lorsque CD est fixe.

On retrouvera un appareil à tracer la trisectrice de CEVA en fixant C, O décrivant une droite fixe : elle est décrite par le point F. CEVA a décrit sa courbe par ce procédé.

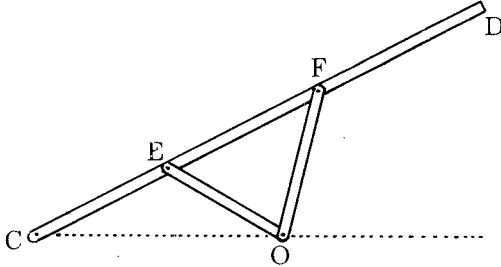


figure 68

2 Le pantographe de CEVA

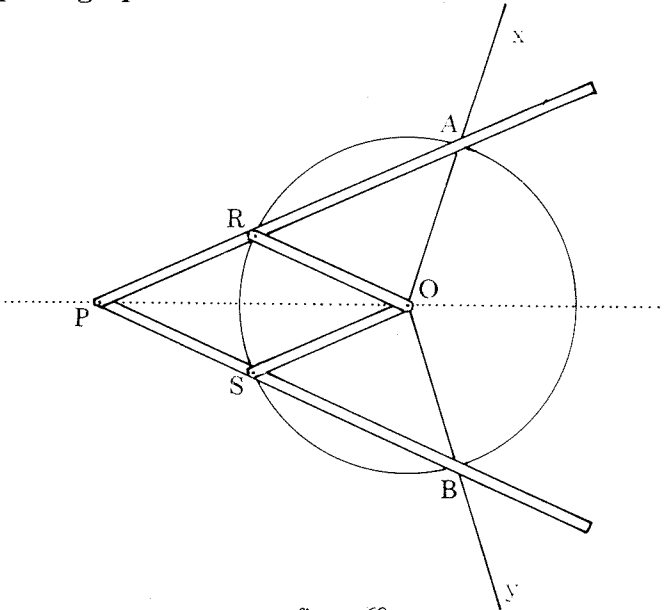


figure 69

Quatre barres articulées selon un losange.

Pour trisecter \widehat{xOy} on trace le cercle de centre O et de rayon le côté du losange, puis la bissectrice. P étant sur celle-ci, on règle l'appareil pour que R et S étant sur le cercle, les prolongements des barres PR et PS concourent avec le cercle et les côtés de l'angle en A, B respectivement. \widehat{RPS} est le tiers de \widehat{xOy} .

Pour retrouver la fonction de pantographe : R est fixé, soit un point T sur PS et un point T' sur OS de façon que R, T, T' soient alignés. Alors T' est homothétique de T avec R comme centre.

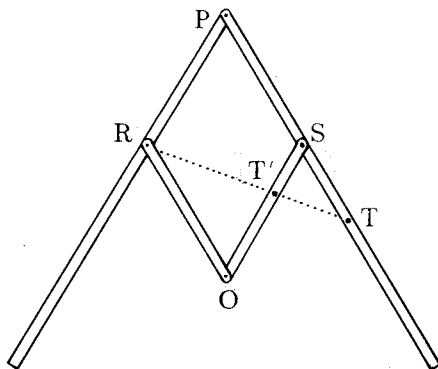


figure 70

3 Un appareil dû à AMADORI (1883)

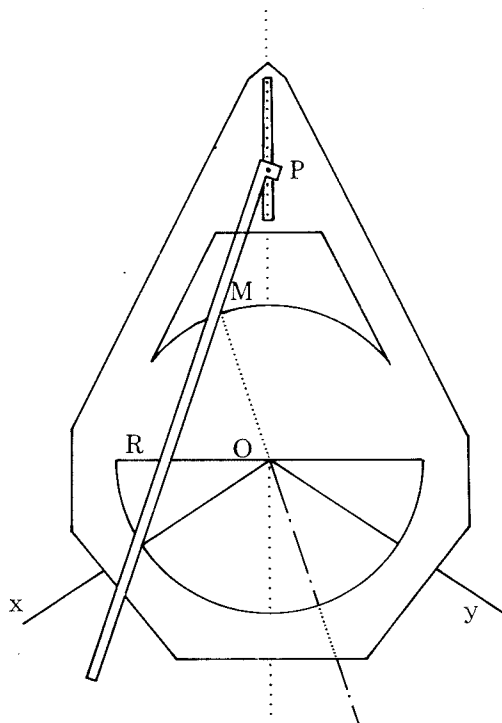


figure 71

Un plaque évidée selon les contours d'un disque de centre O, une règle est reliée à la plaque par une articulation P pouvant coulisser dans une rainure.

Sur la règle un repère R assujéti à coulisser le long du diamètre du disque et tel que PR soit égal à ce diamètre.

On déplace la réglette de sorte qu'il y ait concours avec le cercle et le côté Ox de l'angle. M étant l'autre intersection de la règle avec le cercle : MO trisecte l'angle \widehat{xOy} .

Deux appareils à partir de l'hyperbole d'excentricité 2

Rappelons la configuration utilisée par PAPPUS pour trisecter par l'hyperbole d'excentricité 2 : OB trisectant \widehat{xOy} on a $BI = 2 \cdot BH$.

Cette configuration donne lieu à deux appareils trisecteurs dont l'ingéniosité rivalise avec... l'esthétique.

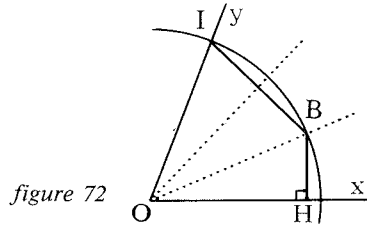


figure 72

1 Une simple équerre... due à CARPENTER

Mais une équerre bien choisie, dont la forme est déterminée par la figure...

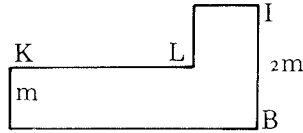


figure 73

En voici l'utilisation : tracer la parallèle Δ à Ox à la distance m ; disposer l'équerre de façon que I soit sur Oy, B sur Δ et O sur KL.

Bien entendu OB trisecte \widehat{xOy} .

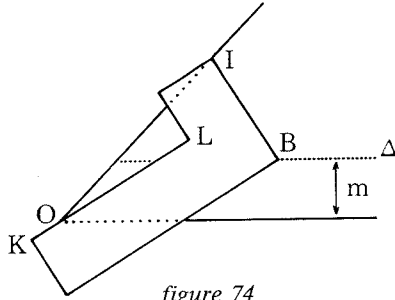


figure 74

2 Un... tomahawk (cité par YATES)

Il s'agit d'un perfectionnement de l'équerre précédente : on est dispensé du tracé de parallèle, voici la forme de l'appareil, à découper dans une plaque de carton.

$$AB' = B'B = BA'$$

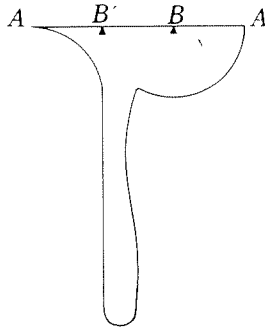


figure 75

On l'utilise ainsi pour trisecter \widehat{xOy} .

C'est BERGERY qui a décrit cet instrument en 1835 dans "Géométrie appliquée à l'industrie".

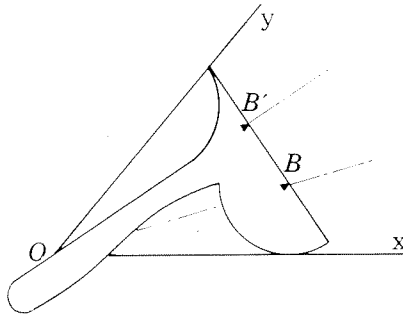


figure 76



Six appareils basés sur la duplication de l'angle

Trois configurations sont à l'origine de la conception des mécanismes que nous allons décrire :

1 Le losange

En mécanisme articulé : OB est bissectrice de \widehat{AOC} .

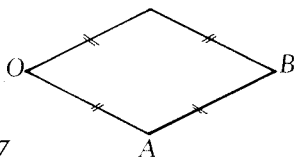


figure 77

2 Le contre-parallélogramme

En mécanisme articulé, avec côtés opposés de même longueur : $\widehat{COC'} = \widehat{CO'C'}$.

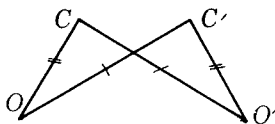


figure 78

3 Le double cerf-volant

En mécanisme articulé OC est bissectrice de \widehat{AOB} .

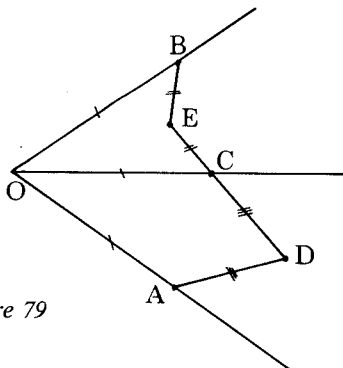


figure 79

1 Le compas de LAISANT (1875)

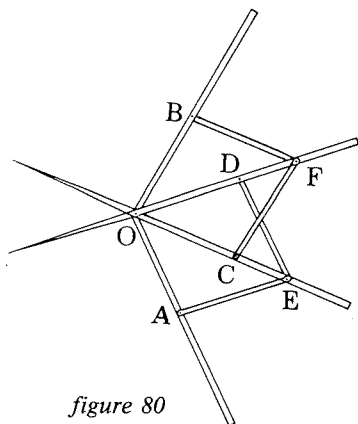


figure 80

La bissectrice est facile à construire avec un appareil basé sur le losange articulé (1).

Ici on associe deux mécanismes de ce type : $OAED$ et $OCFB$ sont des losanges isométriques.

Le mécanisme est articulé en O, A, B, C, D et E, F coulisent respectivement sur OC et OD .

Les droites OC et OD trisectent \widehat{AOB} .

2 Un autre appareil de LAISANT

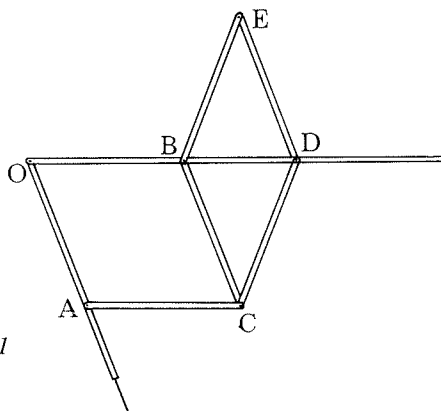


figure 81

Des losanges, encore, mais assemblés en une configuration différente : $OACB$ et $BCDE$ sont losanges, le mécanisme est articulé en O, A, B, C, D . E peut coulisser sur OC .

OC et OB trisectent \widehat{AOD} .

3 Le trisecteur de KEMPE (1875)

Avec le contre parallélogramme $OCO'C'$ tel que $OC = O'C'$ et $OC' = O'C$, les angles $\widehat{COC'}$ et $\widehat{C'O'C}$ sont égaux.

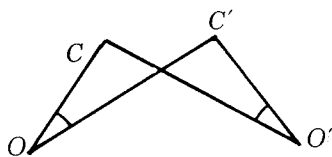


figure 82

L'appareil de KEMPE repose sur la possibilité d'associer plusieurs quadrilatères de ce type pour tripler l'angle $\widehat{COC'}$. Soit à en chercher la manière :

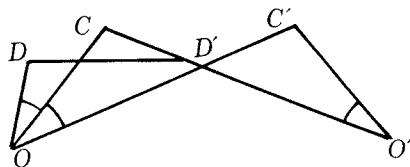


figure 83

Soit D' sur $O'C$, considérons un contre-parallélogramme $ODD'C$.

A supposer l'égalité des angles $\widehat{COC'}$ et \widehat{DOC} , les quadrilatères $OCO'C'$ et $ODD'C$ sont semblables, ce qui donne $\frac{OD}{OC} = \frac{OC}{OC'}$, OC et OC' étant donnés, on en tire : $OD = \frac{OC^2}{OC'}$ (notons que OC est moyenne géométrique de OD et OC').

En plaçant D' sur $[O'C]$ tel que $CD' = \frac{OC^2}{OC'}$, on détermine bien un quadrilatère $ODD'C$ convenable.

Et il est possible de recommencer avec E' sur $[DD']$ tel que $DE' = \frac{OD^2}{OC}$ pour déterminer $OEE'D$ de même forme. En ce cas, les côtés des quadrilatères successifs OC' , OC , OD , OE sont en progression géométrique et l'angle $\widehat{C'OE}$ est le triple de $\widehat{C'OC}$.

Pour exemple, les côtés de 16, 8, 4 et 2 procurent une configuration convenable.

- OC, _____
- OC _____
- OD _____
- OE _____

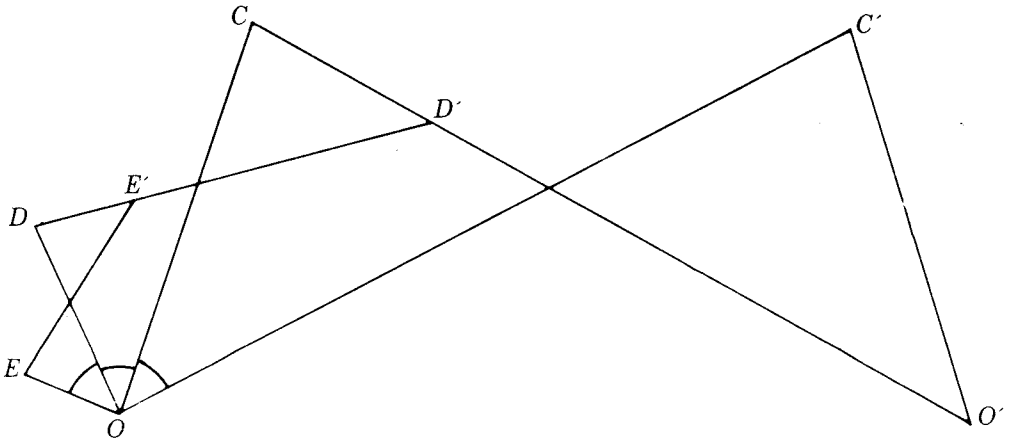


figure 84

Notons aussi que C' , C , D , E font partie d'une même spirale de pôle O .

LAISANT a proposé d'articuler chacun des quadrilatères pour obtenir un mécanisme trisecteur : le trisecteur de KEMPE

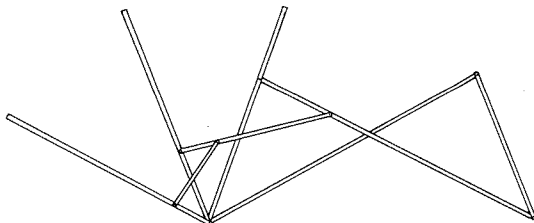


figure 85

4 Avec un losange et deux contre-parallélogrammes

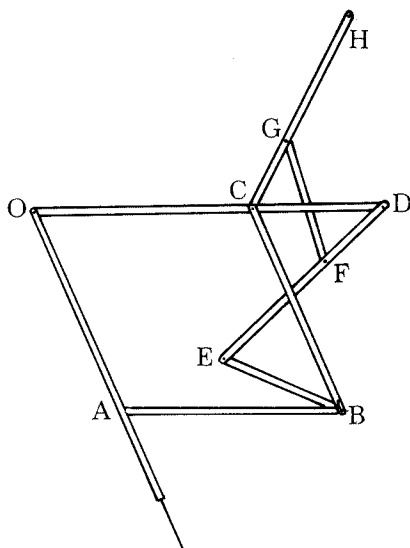


figure 86

OABC est un losange articulé.

BCDE et CDFG sont des contre-parallélogrammes en progression géométrique.

CH = CB

OB et OD trisectent \widehat{AOH} .

5 L'appareil de SYLVESTER (1875)

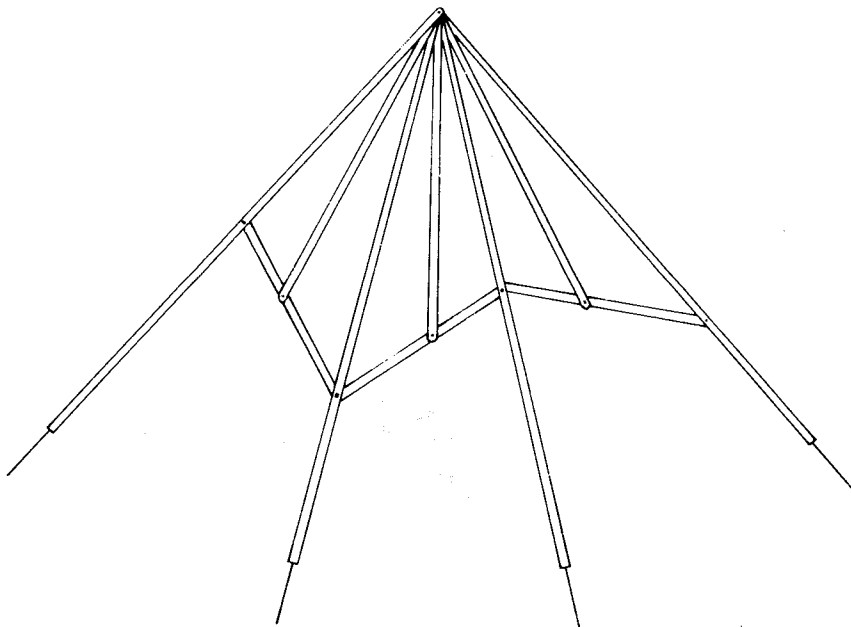


figure 87

Plusieurs “cerfs-volants” associés... et 10 barres !



6 Un trisecteur traceur de... droite

Lors de la mise au point de la machine à vapeur l'un des inventeurs James WATT (1736-1819) a posé le problème : comment diriger la tige d'un piston pour qu'il effectue un mouvement aussi rectiligne que possible ? Ce problème du tracé mécanique d'une droite a reçu depuis de nombreuses réponses dont une est liée à la trisection.

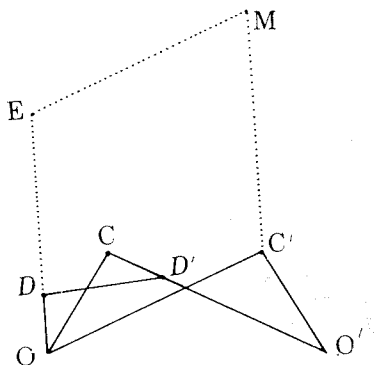


figure 88

Reprenons le système articulé de deux contre-parallélogrammes pour lequel OC est bissectrice de $\widehat{DOC'}$ [en progression géométrique].

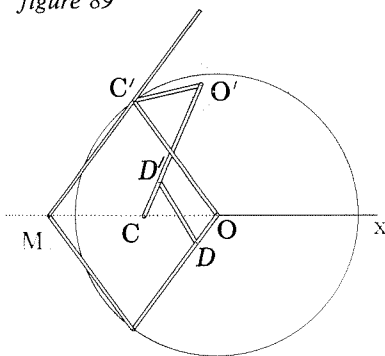
On le complète par un losange articulé $OC'ME$ de façon que E soit dans le prolongement de OD .

On ne sera pas étonné de constater l'alignement des points O, C, M .

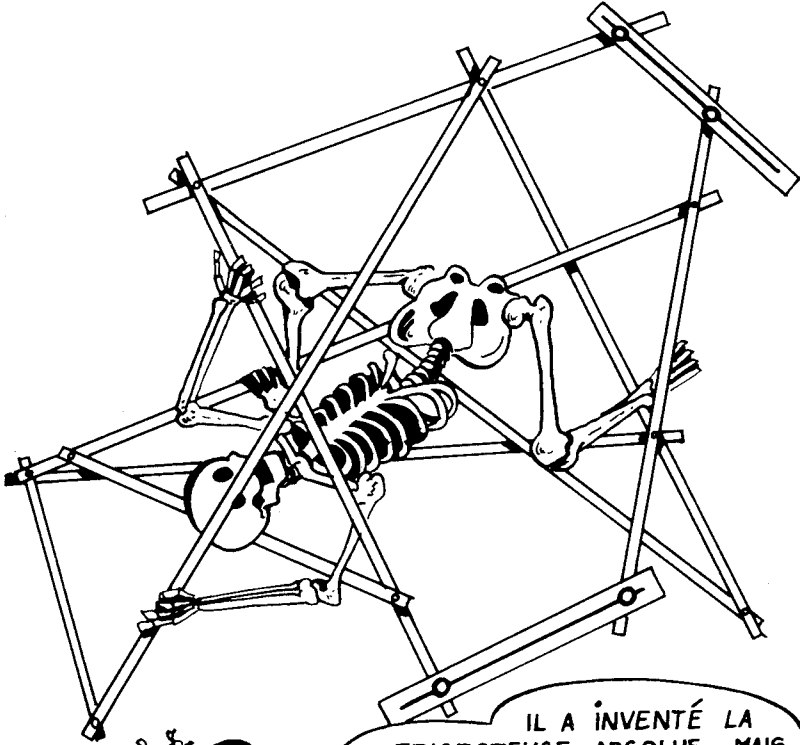
KEMPE a proposé d'utiliser ce système articulé en fixant O et C : M varie sur la droite OC , il porte un traceur. On obtient un traceur mécanique de la droite.

Mais examinons l'appareil du point de vue de la trisection (figure 89) : dans le mouvement du système, le point C' décrit le cercle de centre \bar{O} , la trisection est obtenue par concours de la barre MC' , de Oy (côté de l'angle xOy à trisecter) et du cercle puisqu'on résout ainsi le problème par l'inclinaison entre cercle et droite en retrouvant la configuration d'ARCHIMEDE.

figure 89



O et C sont fixes, la tige OC est inutile.



IL A INVENTÉ LA
TRISECTEUSE ABSOLUE MAIS
IL S'Y EST COINCÉ LORS DU 1ER
ESSAI ET ON N'A JAMAIS PU
L'EN SORTIR !



T

Trois surprises

1 Où deux équerres suffisent

A l'origine une configuration envisagée par PLATON à propos de la duplication du cube [voir brochure A.P.M.E.P. Second Cycle, n° 69].

Avec $OT=1$ et $OC=x$, TCM étant rectangle en C et CMN étant rectangle en M , on a : $OM=x^2$ et $ON=x^3$

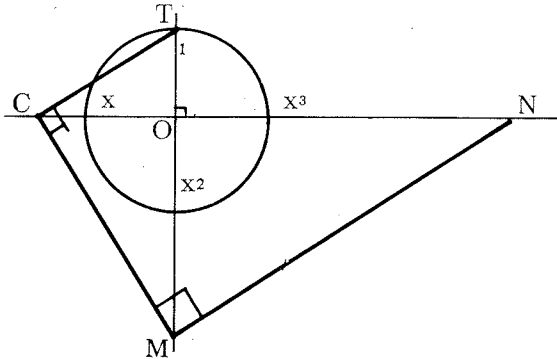


figure 90

S'il s'agit de trisecteur un angle de mesure a on a vu (par exemple dans la méthode de DESCARTES) que $2 \cos \frac{a}{3}$ est racine de l'équation $x^3 - 3x - 2 \cos a = 0$.

Soit K sur $[ON]$ tel que $NK = x^3 - 3x$ (figure 91). Si la trisection est réalisée : $OK = 2 \cos a$.

Les triangles OTC , OCM et OMN se correspondent par une même similitude de rapport x : OTC est transformé en OCM et OCM en OMN ; il en résulte que K se projette sur (MN) suivant S tel que $KS = 3$.

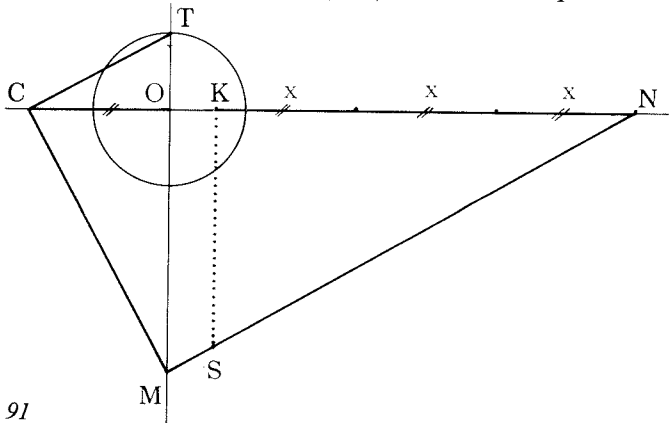


figure 91

Dès lors, soit \widehat{xOy} à trisecter, on trace le cercle de centre O , de rayon 1, le diamètre perpendiculaire en O à Ox .

Sur ce diamètre : le point T à l'intersection avec le cercle et P tel que $OP=3$ (O entre P et T).

La demi droite Oy coupe le cercle en B , se projetant en H sur Ox . Parallèlement à Ox par P , on place S tel que $PS=2.OH$.

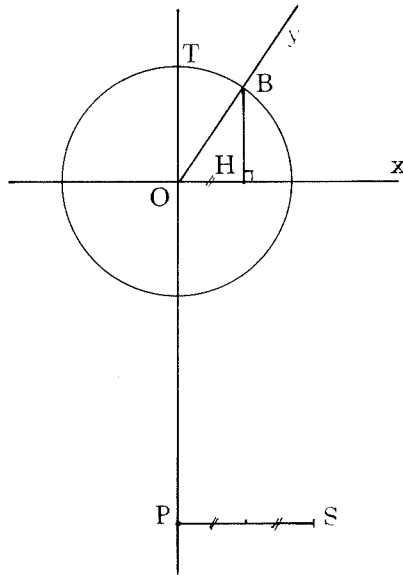


figure 92

Les conditions obtenues pour C sont-elles suffisantes ?

On dispose alors deux équerres ayant un côté de l'angle droit commun :

- l'une a son sommet droit sur le diamètre portant Ox et le côté de l'angle droit passe par T ,
- l'autre a son sommet droit sur le diamètre TP et son côté de l'angle droit passe par le point S .

Ceci détermine C sur le diamètre portant Ox .

BC dirige alors une trisectrice de \widehat{xOy} .

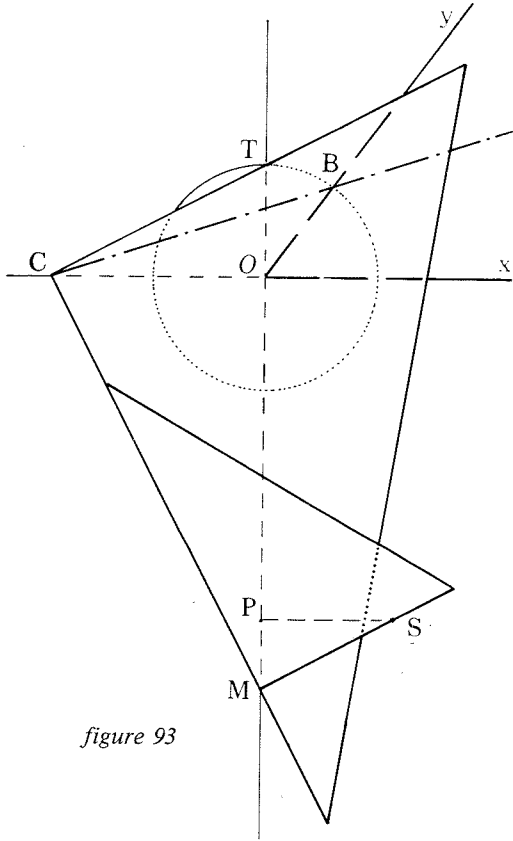


figure 93

2 Un cône trisecteur par AUBRY (1896)

Il s'agit d'un cône droit de génératrice triple du rayon du cercle de base (centre O), son angle au sommet de sinus $\frac{16}{27}$... environ 36, 34°.

L'angle à trisecter étant \widehat{AOB} dans le plan du cercle de base, une feuille de papier enveloppe le cône selon la nappe de sommet O déterminé par l'arc AB.

On examinera ce qu'il en est de l'angle au centre du développement plan de cette nappe ?

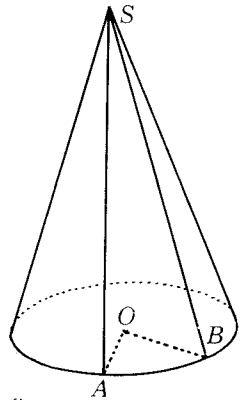


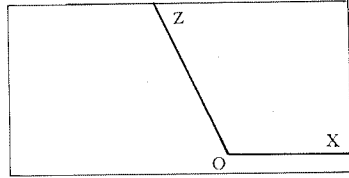
figure 94

3 Trisecter en pliant la feuille

Empruntons à Jacques JUSTIN de Sceaux, animateur du Mouvement Français des Plieurs de Papiers, la proposition suivante, telle qu'il la présente dans le n° 28 de l'excellent Bulletin des régionales A.P.M.E.P. de Poitiers, Orléans, Tours... le PLOT !

Pour trisecter un angle obtus \widehat{xOz} :

figure 95



1. Pliez suivant Ox et Oz pour obtenir les plis $x'x$ et $z'z$.

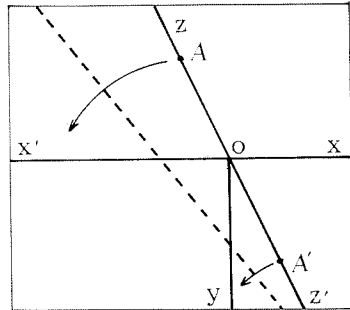
Puis pliez suivant Oy perpendiculaire à xx' .

Choisissez un point A arbitrairement sur Oz et son symétrique A' par rapport à O sur Oz' .

Amenez alors A sur Ox' et, en même temps A' sur Oy.

Pliez et dépliez.

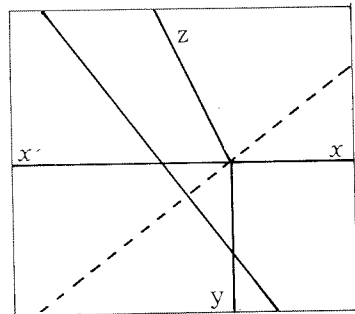
figure 96



2. Pliez à nouveau pour obtenir la perpendiculaire au pli précédent passant par O.

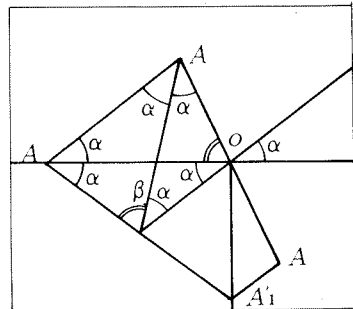
Vous obtenez une droite qui trisecte l'angle \widehat{xOz} .

figure 97



4. Il vous reste à trouver la démonstration. Jacques JUSTIN vous met sur la voie en proposant le "coup de pouce" ci-contre pour prouver que $\beta + 3\alpha = 180^\circ$.

figure 98





“Le savoir mathématique et la transposition didactique :

Le savoir constitué se présente sous des formes diverses, par exemple sous forme de questions et de réponses. La présentation axiomatique est une présentation classique des mathématiques.

En plus des vertus scientifiques qu'on lui connaît, elle paraît merveilleusement adaptée à l'enseignement. Elle permet à chaque instant de définir les objets que l'on étudie à l'aide des notions précédemment introduites et, ainsi, d'organiser l'acquisition de nouveaux savoirs à l'aide des acquisitions antérieures. Elle promet donc à l'étudiant et à son professeur un moyen d'ordonner leur activité et d'accumuler dans un minimum de temps un maximum de “savoirs” assez proches du “savoir savant”. Evidemment, elle doit être complétée par des exemples et des problèmes dont la solution exige leur mise en œuvre.

Mais cette présentation efface complètement l'histoire de ces savoirs, c'est-à-dire la succession des difficultés des questions qui ont provoqué de nouveaux problèmes, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits, et les innombrables querelles à leur sujet. Elle masque le “vrai” fonctionnement de la science, impossible à communiquer et à décrire fidèlement de l'extérieur, pour mettre à sa place une genèse fictive. Pour en rendre plus facile l'enseignement, elle isole certaines notions et propriétés du tissu d'activités où elles ont pris leur origine, leur sens, leur motivation et leur emploi. Elle les transpose dans le contexte scolaire. Les épistémologues appellent transposition didactique cette opération. Elle a son utilité, ses inconvénients et son rôle, même pour la construction de la science. Elle est à la fois inévitable, nécessaire et en un sens, regrettable. Elle doit être mise sous surveillance”.

Guy BROUSSEAU

*La théorisation des phénomènes d'enseignement
des mathématiques*

Thèse, Bordeaux I, 1986

chapitre 4

la trisectrice... en l'approximant

“Lorsque les racines d’une équation ne sont pas rationnelles, soit qu’on puisse les exprimer par des quantités radicales, soit qu’on n’ait même pas cette ressource, comme il arrive à l’égard des équations qui passent le quatrième degré, on est réduit à chercher des valeurs approchées des racines...”

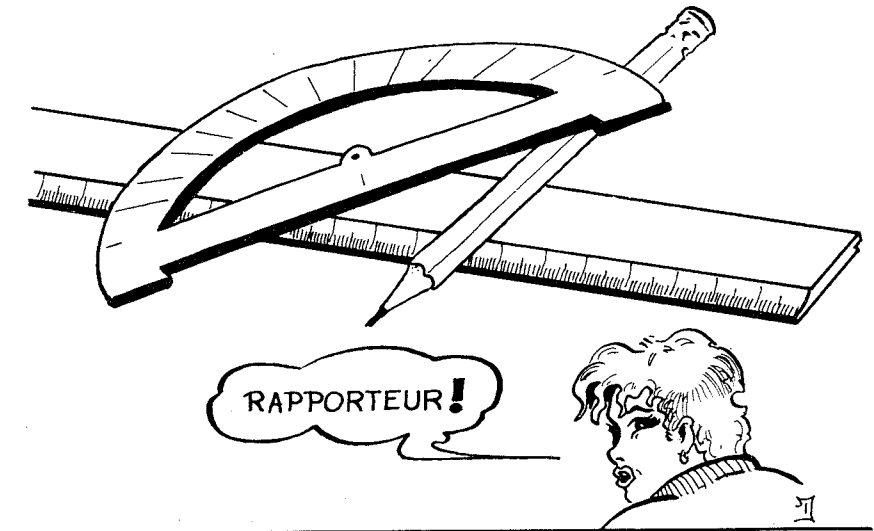
Léonard EULER
Elémens d’Algèbre



C'est un rappel de huit processus d'approximation de la trisectrice :

- du calcul approché de $\sin 1^\circ$ par AL KASHI au XIV^e siècle qui ouvre la perspective des méthodes d'approximations successives jusqu'à quelques méthodes proposées en 1934 par d'OCAGNE...
- des considérations géométriques simples sont ici le fondement d'activités en analyse, d'autres possibilités peuvent être imaginées...
- des constructions à la règle et au compas permettent d'obtenir, simplement, d'excellentes approximations de la trisectrice...

L'ARME ABSOLUE CONTRE LA TRISECTION



1 Le calcul de $\sin 1^\circ$ par Al Kashi (XV^e siècle)

Il s'agit du premier exemple de mise en œuvre d'une méthode d'approximations successives.

AL KASHI maîtrise indiscutablement les procédés d'approximation : cet exemple de la trisection de 3° en est le témoignage.

A partir de $\sin 3^\circ$ calculable par radicaux et avec la formule $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$, AL KASHI approxime $\sin 1^\circ$ en résolvant l'équation $3x - 4x^3 = \sin 3^\circ$ sous la forme :

$$x = \frac{\sin 3^\circ + 4x^3}{3}$$

Il prend les approximations successives :

$$x_1 = \frac{\sin 3^\circ}{3} ; x_2 = \frac{\sin 3^\circ + 4x_1^3}{3} ; x_3 = \frac{\sin 3^\circ + 4x_2^3}{3}$$

etc...

La convergence est très rapide...

2 L'approximation de CUSE et SNELLIUS

Nicolas de CUSE (1401-1464) ; Wildebrod SNELLIUS (1581-1626). Par l'attrait nouveau des fractions décimales, les XV^e et XVI^e siècles voient s'accélérer la course au calcul des décimales de π . Après une floraison de travaux portant sur les polygones réguliers ayant un grand nombre de côtés, les recherches s'orientent vers l'économie des moyens.

Nicolas de CUSE propose d'approximer θ par $\frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta}$. Cette idée reprise par Wildebrod SNELLIUS devait lui permettre d'égalier en précision sur π le calcul d'Archimède (polygone à 96 côtés) avec seulement un hexagone en s'appuyant sur

$$\frac{2 \sin \theta + \tan \theta}{3} < \theta < \frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta}$$

Voyons ce qu'il en est et comment cela peut s'appliquer à la trisection :

AT = $\tan \theta$
AS = $\sin \theta$

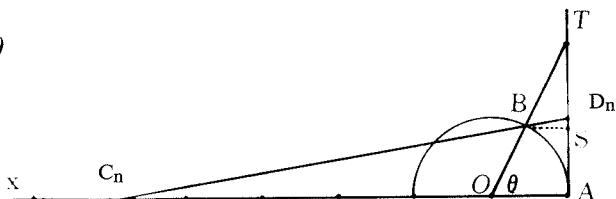


figure 99

Lorsque C_n sur Ox est tel que $OC_n = n.OA$ avec n entier, AD_n varie de $\tan \theta$ ($n=0$) à $\sin \theta$ (n tendant vers $+\infty$).

On se propose de déterminer l'entier n pour que AD_n soit la meilleure approximation possible de θ rad. (n'oublions pas que $\sin \theta < \theta < \tan \theta$) :

$$AD_n = \frac{(n+1) \sin \theta}{n + \cos \theta} ; AD_{n-\theta} = \frac{(n+1) \sin \theta - n\theta - \theta \cos \theta}{n + \cos \theta}$$

Ecrivons les développements limités du sinus et du cosinus en 0.

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \theta^5 \epsilon_1(\theta)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \theta^5 \epsilon_2(\theta)$$

d'où :

$$(n+1) \sin \theta - n\theta - \theta \cos \theta = \frac{2-n}{6} \theta^3 + \frac{n-4}{120} \theta^5 + \theta^5 \epsilon_3(\theta)$$

donc, pour θ assez petit, l'ordre de grandeur, qui est déjà petit lui aussi, est bien plus faible encore pour $n=2$.

D'autre part, avec $AT = \tan \theta$ et $AS = \sin \theta$, cherchons a et b pour que

$$\frac{a \sin \theta + b \tan \theta}{a + b}$$

approxime au mieux θ :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \theta^5 \epsilon_1(\theta)$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \theta^5 \epsilon_4(\theta)$$

$$\frac{a \sin \theta + b \tan \theta}{a + b} = \theta + \frac{2b-a}{6(a+b)} \theta^3 + \frac{a+16b}{120(a+b)} \theta^5 + \theta^5 \epsilon_6(\theta)$$

Le choix $a=2b$ (par exemple $a=2$; $b=1$) procure ainsi la meilleure façon d'approximer θ .

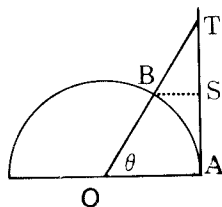
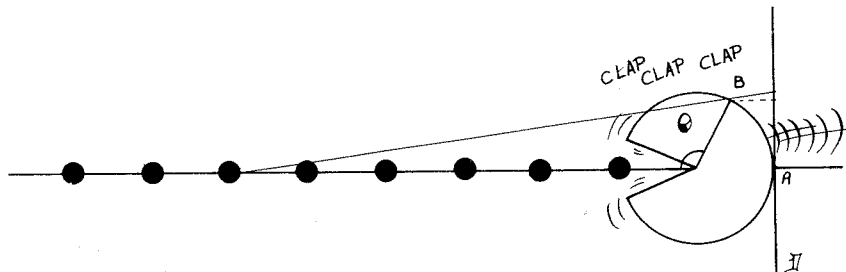


figure 100



Résumons la situation d'un point de vue géométrique.

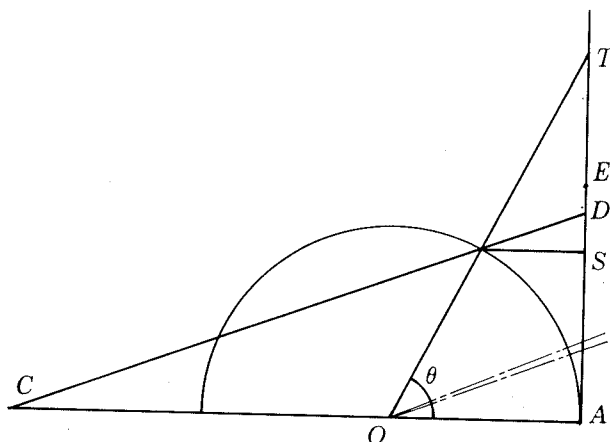


figure 101

Avec C tel que $OC = 2 AS$, la droite (BC) coupe (AT) en D et E est tel que $AE = \frac{2AS + AT}{3}$

$$AD < \theta < AE.$$

D'où un procédé d'encadrement de l'arc tiers $\frac{\theta}{3}$.

3 En itérant des bisections

$\frac{1}{3}$ peut être considéré comme limite de :

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}$$

ou de : $\Sigma_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \dots \text{etc...}$

Pour la trisection, on en tire un processus d'approximation fait de bisections successives.

On peut encore envisager :

$$s_n = \frac{5}{16} + \frac{5}{16^2} + \dots + \frac{5}{16^n}$$

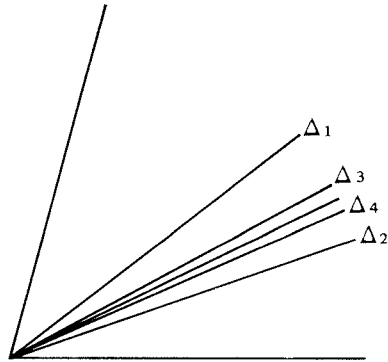


figure 102

4 L'approximation de DÜRER

Albert DÜRER (1471-1528)

Soit AB la corde du cercle de centre O de rayon 1 sous-tendant l'arc à trisecter. On trisecte AB par M_1 et M_2 que l'on projette en C_1 et C_2 sur l'arc perpendiculairement à AB.

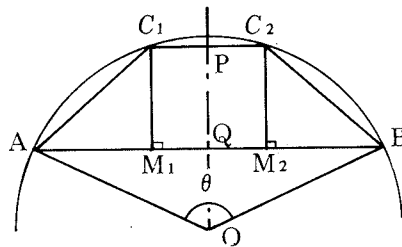


figure 103

Albert DÜRER propose d'adopter la moyenne arithmétique des cordes AC_1 , C_1C_2 , C_2B comme approximation de la corde sous-tendant l'arc tiers.

Etudions la précision de cette approximation :

$$C_1C_2 = M_1M_2 = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{avec} \quad \theta = \widehat{AOB}.$$

En considérant la bissectrice de \widehat{AOB} et ses intersections P et Q avec C_1C_2 et AB respectivement, on a :

$$AC_1 = C_2B = \sqrt{\frac{4}{9} \sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{9} - 2 \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{9} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{6 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 6 \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{8 + \cos^2 \frac{\theta}{2} + 12}}$$

et la valeur d'approximation de la corde :

$$t = \frac{2}{9} \left[\sqrt{6 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 6 \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{8 + \cos^2 \frac{\theta}{2} + 12}} + \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

qu'il s'agit de comparer à $2 \sin \frac{\theta}{6}$ (corde sous-tendant le tiers). Il s'agit d'une approximation d'excellente qualité comme en témoigne le tableau de valeurs ci-dessous :

θ	30°	60°	90°
$\frac{\theta}{3} - 2 \text{ Arc sin } \frac{t}{2}$	2.10^{-6}	3.10^{-4}	$4,5.10^{-3}$

Indiquons pour terminer comment construire la corde d'approximation : il s'agit de représenter un segment de longueur $\frac{1}{3}(2.AC_1 + C_1C_2)$.

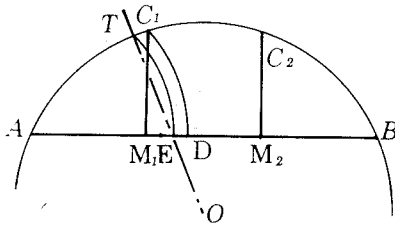
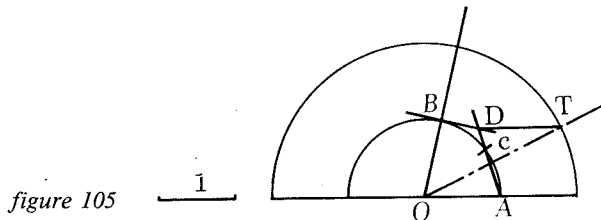


figure 104

On construira D sur $[M_1M_2]$ tel que $AD = AC_1$ et placera E sur $[M_1D]$ tel que $M_1E = \frac{2}{3}M_1D$. AE détermine la longueur de la corde cherchée.

La trisectrice est approximée par (OT) tel que $AT = AE$.

5 L'approximation de KARAJORDANOFF (1928)



S'agissant de trisecter \widehat{AOB} , on trace les cercles de centre O et de rayons respectifs 1 et 2.

La bissectrice de \widehat{AOB} coupe le cercle unitaire en C. La tangente en B au cercle unitaire et la droite (AC) se coupent en D.

Par D la parallèle à (OA) coupe le cercle de rayon 2 en T. On choisit (OT) pour approximer la trissectrice.

Etudions l'erreur en déterminant les coordonnées de T dans le repère orthonormé $(O; \vec{OA}; \vec{j})$:

tangente en B : $x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = 1$ avec $\theta = \widehat{AOB}$

droite AC : $x \cdot \sin \frac{\theta}{2} + y(1 - \cos \frac{\theta}{2}) = \sin \frac{\theta}{2}$

d'où pour l'ordonnée de D :

$$y = \frac{\sin \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta)}{\sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta - \cos \theta}$$

c'est-à-dire :

$$y = \frac{\sin \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta)}{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta}$$

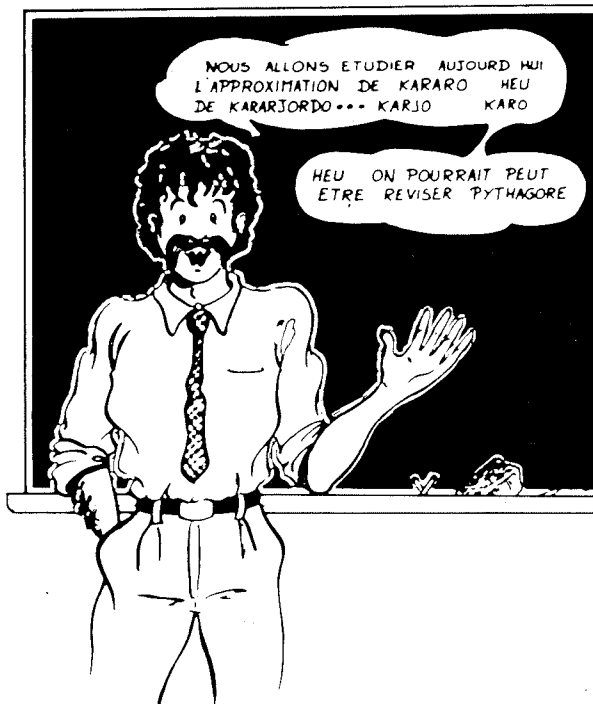
ce qui donne une approximation du tiers valant :

$$\text{Arc sin} \left(\frac{\sin^3 \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta} \right)$$

Un tableau indiquant quelques ordres de grandeur de l'erreur dans l'approximation de $\frac{\theta}{3}$ par

$$\alpha = \text{Arc sin} \left(\frac{\sin^3 \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta} \right)$$

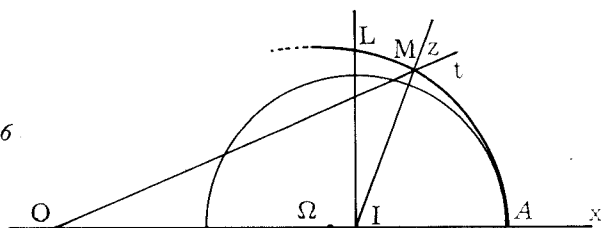
θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\theta}{3} - \alpha$	3.10 ⁻⁴	2.10 ⁻³	6.10 ⁻³	2.10 ⁻²	3.10 ⁻²	4.10 ⁻²	4.10 ⁻²	4.10 ⁻²	0



6 Par approximation circulaire de la trisectrice de Mac LAURIN

Rappelons qu'elle est le lieu de l'intersection M de deux demi-droites Iz et Ot faisant avec Ox les angles polaires respectifs 3α et α .

figure 106



Comme il suffit de résoudre le problème lorsque \widehat{xIz} est aigu ou ne s'intéresse qu'à l'arc AL de la trisectrice compris dans le premier quadrant d'origine I.

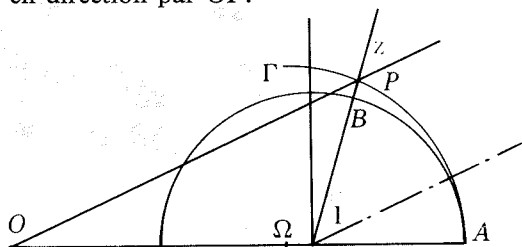
On envisage d'approximer cet arc par un arc de cercle passant par les points A et L et centré sur (OI). En posant $OI=2$, dans le repère $(O;Ox;Oy)$, L a pour coordonnées $(2; \frac{2\sqrt{3}}{3})$, ce cercle Γ a pour équation :

$$3x^2 + 3y^2 - 11x + 6 = 0$$

il est donc centré au point Ω du segment [OI] tel que $I\Omega = \frac{1}{6}$.

Du point de vue graphique, ce cercle constitue une bonne approximation de l'arc de trisectrice. Pour approximer la trisectrice, on pourra donc déterminer l'intersection P de Iz avec le cercle Γ trouvé : la trisectrice est approximée en direction par OP.

figure 107



Pour mieux se rendre compte du degré de précision obtenu, calculons l'angle \widehat{IOP} [approximant le tiers de $\widehat{AIB} = \theta$].

La droite (IB) a pour équation $y = \tan \theta \cdot (x - 2)$, ce qui donne en substituant dans l'équation du cercle Γ :

$$3(1 + \tan^2\theta)x^2 - (12 \tan^2\theta + 11)x + 12 \tan^2\theta + 6 = 0$$

Le point P a ainsi pour abscisse :

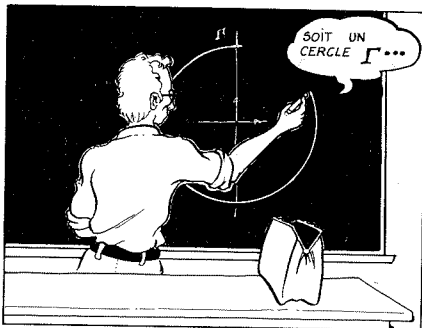
$$x = \frac{12 \tan^2\theta + 11 + \sqrt{48 \tan^2\theta + 49}}{6(1 + \tan^2\theta)}$$

soit en posant $u = 6(1 + \tan^2\theta)$ comme le fait d'OCAGNE

$$x = \frac{2u - 1 + \sqrt{8u + 1}}{u}$$

d'où on tire y dès lors \widehat{IOP} a pour tangente $\frac{y}{x}$;

θ en degrés	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	89°	90°
majorant d'erreur	$2 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	0,14	0,17	0,14	$2 \cdot 10^{-2}$	



7 Encore une approximation circulaire...

Cette méthode est due à KOPF (1919), puis PERRON (1929).
Reprenons au point de départ la figure précédente.

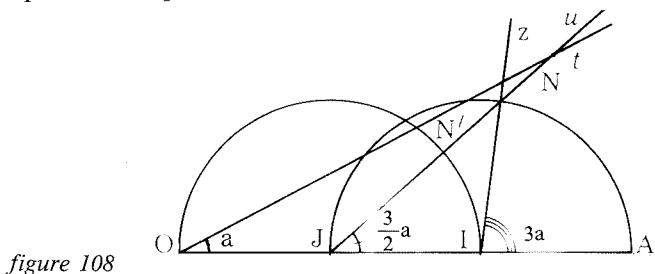


figure 108

Avec J milieu de [OI], envisageons Ot d'angle polaire α et Ju d'angle polaire $\frac{3}{2}\alpha$, (noter que Ju coupe Iz sur le cercle de centre I de rayon IA).

Intéressons-nous au lieu du point N intersection de Ot et Ju : pour cela, considérons le point N' où Ot coupe le cercle de centre J de rayon JI.

Un calcul d'angles nous prouve que le triangle JN'N est isocèle et que $NN' = 1$ (on retrouve encore une fois la configuration d'ARCHIMÈDE !).

Il s'ensuit que N varie sur le limaçon de PASCAL de pôle O de paramètre 1.

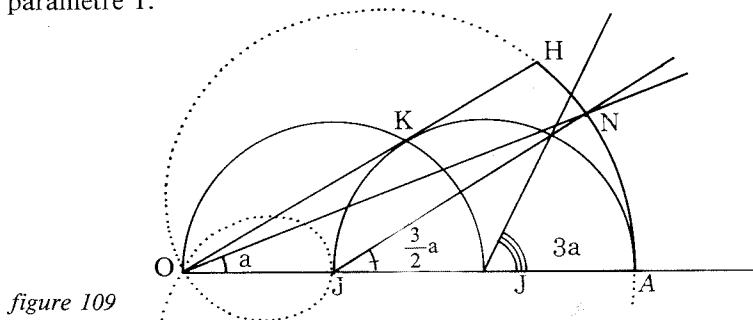


figure 109

Lorsque \widehat{xOz} est aigu seulement, N ne décrit que l'arc AH de ce limaçon où H est obtenu lorsque Ot est tangente au cercle de centre I au point K.

Reprenons dès lors la même démarche que précédemment pour approximer cet arc par un arc de cercle passant par A et H, centré sur [OI]. Ce cercle γ a pour équation $3(x^2 + y^2) - (9 - \sqrt{3})x - 3\sqrt{3} = 0$ avec un centre ω de coordonnées $(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}; 0)$, c'est-à-dire tel que :

$$J\omega = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (\text{figure 110}).$$

A noter que :

$$\omega k = \frac{1}{3} kK.$$

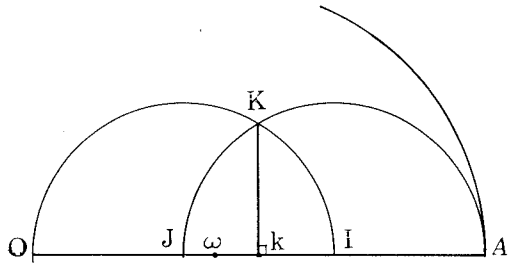


figure 110

Pour trisecter \widehat{xIy} , on détermine le point d'intersection B de Iy avec le cercle de centre I de rayon IA. (JB) coupe le cercle γ en Q. (OQ) approxime la trisectrice en direction.

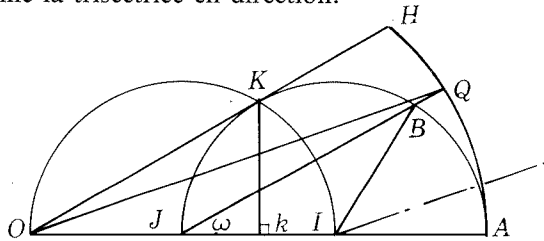


figure 111

En reprenant l'équation de γ et l'équation de la droite (JB), un calcul semblable au précédent permet d'obtenir les coordonnées de Q :

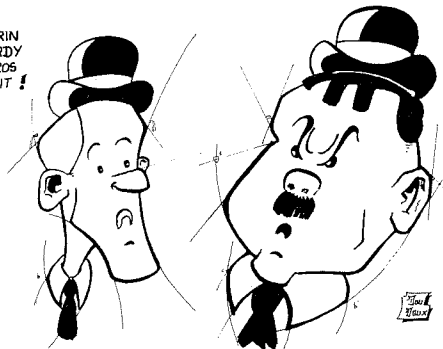
$$x = \frac{u + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{4(3 + \sqrt{3})u + 6(2 - \sqrt{3})}}{u} \quad \text{ayant posé } u = 6(1 + \tan^2\theta)$$

$$y = \tan \frac{\theta}{2} (x - 1)$$

Le tiers est donc approximé par \widehat{IOQ} de tangente $\frac{y}{x}$.

θ en degré	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
majorant d'erreur	3.10^{-5}	3.10^{-4}	8.10^{-4}	2.10^{-3}	3.10^{-3}	4.10^{-3}	5.10^{-3}	4.10^{-3}	0

C'EST MAC LAURIN
C'EST MAC HARDY
C'EST LUI LE GROS
ET MOI LE PETIT !



8 Une approximation due à D'OCAGNE (1934)

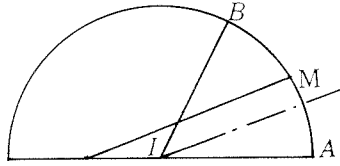


figure 112

M étant le milieu de l'arc AB, on trace par M la parallèle à la trisectrice, elle a pour équation, dans le repère (I, \vec{IA}, \vec{j})

$$(y - \sin \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{3} = (x - \cos \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{3}$$

Cette parallèle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

$$x = - \frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{3})}{\sin \frac{\theta}{3}} = - \frac{\sin \frac{\theta}{6}}{2 \sin \frac{\theta}{6} \cos \frac{\theta}{6}} = - \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{6}}$$

Toujours en s'en tenant à θ aigu, $\frac{\theta}{6}$ n'excède pas $\frac{\pi}{12}$ radians (15°), son cosinus est peu différent de l'unité et cette abscisse x est peu supérieure en valeur absolue en $\frac{1}{2}$: la distance qui sépare ce point du milieu du rayon du cercle est :

$$d = \frac{1 - \cos \frac{\theta}{6}}{2 \cos \frac{\theta}{6}}$$

qui est fonction croissante de θ et atteint donc son maximum pour $\frac{\theta}{6} = 15^\circ$: cette valeur maximum est de l'ordre de 0,018.

On peut donc proposer de diriger la trisectrice selon (kM).

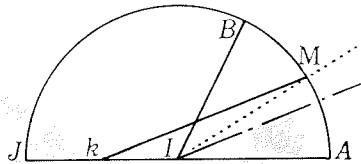


figure 113

L'angle AkM, approximant le tiers, a pour tangente

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}$$

dont on peut étudier dans quelle mesure elle approxime

$\tan \frac{\theta}{3}$. Cette étude d'erreur mérite intérêt :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \cos \frac{\theta}{2}} - \frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\cos \frac{\theta}{3}} &= \frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{3}) - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{3}}{(\frac{1}{2} + \cos \frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{3})} = \frac{\sin \frac{\theta}{6} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{3}}{(\frac{1}{2} + \cos \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{3}} \\ &= \frac{\sin \frac{\theta}{6} (1 - \cos \frac{\theta}{6})}{(\frac{1}{2} + \cos \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{3}} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{6} \sin^2 \frac{\theta}{12}}{(\frac{1}{2} + \cos \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{3}} \end{aligned}$$

en ayant recours au besoin à la trisection du complément, on peut s'en tenir à θ inférieur à 15° , le dénominateur est ainsi supérieur à 1,37, ce qui donne un écart entre tangentes :

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \cos \frac{\theta}{2}} - \tan \frac{\theta}{3} \leq 1,5 \sin \frac{\theta}{6} \sin^2 \frac{\theta}{12} \leq 10^{-3}$$

c'est-à-dire moins de $4''$ d'arc, un résultat tout à fait comparable à celui obtenu par la méthode de KOPF - PERRON (§ 7 ci-dessus).

On peut donc proposer une approximation très simple et pleinement satisfaisante de la direction de la trisectrice : la droite joignant le milieu de l'arc AB au milieu du rayon JI.

Concluons avec D'OCAGNE :

"Il ne semble pas possible de pousser plus loin la simplicité de la construction".

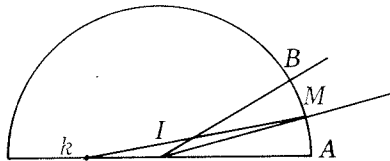


figure 114

Sur la figure, \widehat{AIB} mesure 30° ; \widehat{AkM} mesure environ $10^\circ 46''$, ce qui rejette l'intersection de la trisectrice et de la droite (kM) en un point d'abscisse -384 environ !

9 Un exercice

Mon excellent collègue Jean CRANSAC (Lycée Bourdelle de Montauban) signale l'approximation suivante pour trisecter l'angle \widehat{xOy} :

- construire la bissectrice de l'angle
- de O comme centre, tracer un cercle quelconque, coupant les côtés de l'angle en B et C et la bissectrice en A (figure 115)
- de A comme centre, avec AB comme rayon, tracer un cercle coupant la bissectrice en D
- joindre G , milieu de $[AD]$, à B et C
- par O mener les parallèles (ON) à (GB) et (OM) à (GC) .

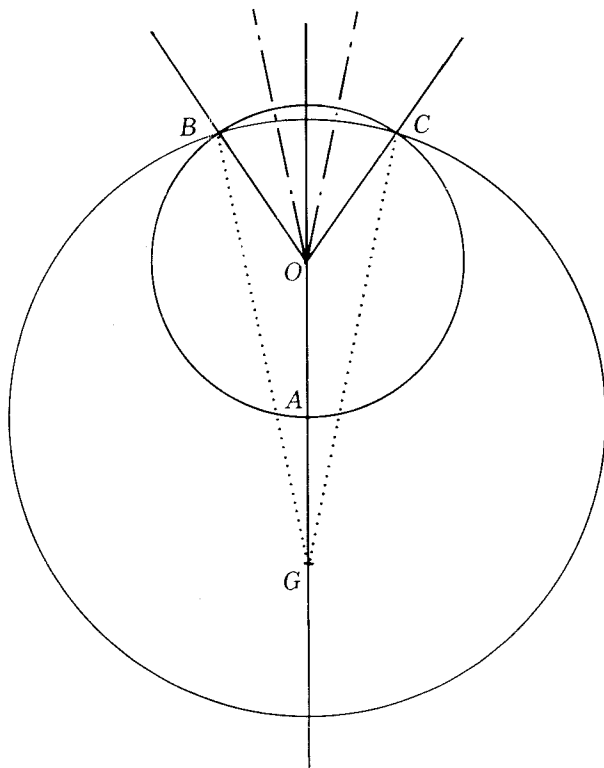


figure 115

Index des auteurs

ABEL	2
AL KASHI	2 ; 4
AMADORI	3
APOLLONIUS	1
ARCHIMEDE	1
AUBRY	3
BERGERY	3
BEZOUT	2
CARPENTER	3
CEVA	1 ; 3
CUSE	4
DEDEKIND	2
DESCARTES	1
DIDEROT	1
DINOSTRATE	1
DIOCLES	1
D'OCAGNE	4
DÜRER	4
EUCLIDE	1
FERMAT	1 ; 2
GALOIS	2
GAUSS	2
HERMES	3
HIPPIAS d'ELIS	1
HUYGENS	1
JUSTIN	3
KARAJORDANOFF	4
KEMPE	1 ; 3
KRONECKER	2
LAGRANGE	2
LAISANT	3
LEIBNIZ	1
LINDEMANN	2
MAC LAURIN	1 ; 4
MENECHME	1
NEWTON	1
NICOMEDE	1
PASCAL Etienne	1 ; 3
PAPPUS	1
PEAUCELIER	1
PROCLUS	1
ROBERVAL	1
SLUSE	1
SNELLIUS	4
SYLVESTER	4
TANNERY	1
VAN DER MONDE	2
VIETE	1
WANTZEL	2

Index des notions

Algébrique (courbe)	1
Algébrique (nombre)	2
Analyse exégétique	1
Analyse zététique	1
Appareil d'Amadori	3
Appareil de Sylvester	3
Cardioïde	1
Cissoïde (cissoïdales)	1
Compas de Laisant	3
Conchoïde	1
Cône trisecteur	3
Corps commutatif	2
Courbe "géométrique"	1
Courbe "mécanique"	1
Développante	1
Dodécagone régulier	2
Epicycloïde	1
Equerre	3
Extensions de corps	2
Extensions quadratiques	2
Heptagone régulier	2
Hyperbole	1
Inclinaison	1
Inverse	1
Limaçon	1
Pantographe de Ceva	3
Parabole	1
Pentagone régulier	2
Pliage	3
Polygones réguliers	2
Problèmes "grammiques"	1
Problèmes "plans"	1
Problèmes "solides"	1
Quadratrice	1
Quadrature	1
Règle graduée	3
Sinusoïde	1
Spirale	1
Strophoïde (ptéroïde)	1
Tomahawk	3
Traceur de droite	3
Transcendant (nombre)	2
Transcendante (courbe)	1
Trisecteur de Kempe	3
Trisectrice de Ceva	1
Trisectrice de Mac Laurin	1
Unicursale (courbe)	1

Bibliographie

A.P.M.E.P.

Brochure n° 48, *Présence d'Evariste Galois*, 1982

A.P.M.E.P.

Brochure *Second Cycle* n° 69, 1988

A.P.M.E.P. et IREM de Strasbourg

L'ouvert n° 42, mars 1986

A.P.M.E.P. et PETIT ARCHIMEDE

Numéro spécial π

ARCHIMEDE

Les Oeuvres Complètes, Tome II, traduction VER EECKE

Editions Blanchard, 1960

ARCHIMEDE

Le livre des Lemmes,

Traduction Mugler, Editions les Belles Lettres, 1971

N. BOURBAKI

Éléments d'Histoire des Mathématiques

Editions Hermann

J.C. CARREGA

Théorie des corps - la règle et le compas

Editions Hermann, 1981

M. CHASLES

Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie

Editions Gauthiers-Villars, 1889

J.P. COLETTE

Histoire des Mathématiques (deux volumes)

Editions du Renouveau Pédagogique (Québec), 1973

H.S.M. COXETER et S.L. GREITZER

Redécouvrons la géométrie

Editions Dunod

A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER

Routes et dédales

Editions du Seuil, 1982

P. DEDRON et J. ITARD

Mathématiques et mathématiciens

Editions Magnard, 1959

R. DESCARTES

La géométrie

Editions de l'AREFPPI, 1986

J. DHOMBRES

Nombre, mesure et continu

Editions Cedic-Nathan, 1978

D. DIDEROT
Oeuvres complètes (Oeuvres mathématiques)

V. DUDLEY
A budget of trisections
 Springer-Verlag, 1988

S.T.L. HEATH
History of greek mathematics
 Dover, 1921

IREM Groupe Epistémologie et Histoire
Mathématiques au fil des âges
 Editions Gauthier-Villars, 1987

IREM de Toulouse
Equations du troisième degré (1980)
Equations du quatrième degré (1982)

J. ITARD
Essais d'histoire des mathématiques
 Librairie Albert Blanchard, 1984

F. KLEIN
Famous problems of elementary geometry
 New York, Editions Dover, 1956

H. LEBESGUE
Les coniques, 1955
Leçons sur les constructions géométriques, Gauthier-Villars
 Editions J. Gabay

M. d'OCAGNE
Etude rationnelle du problème de la trisection de l'angle
 L'enseignement mathématique, 1934, pages 49-63

PAPPUS d'ALEXANDRIE
La collection mathématique, traduction VER EECKE
 Editions A. Blanchard, 1933
 Revue du Palais de la Découverte
 Numéro spécial 8
Courbes mathématiques, juillet 1976

Revue PLOT
 N° 28, supplément au n° 2 (traceurs de courbes)
 et supplément au n° 31 (pliages)
 Régionale A.P.M.E.P. d'Orléans-Tours

P. TANNERY
Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'Antiquité
 Bulletin des sciences mathématiques, 2^e série, 1883, tome VII,
 pages 278 à 291

M.N. et R. VUILLOT
De points en courbes
 CRDP de Dijon, 1987

L. WANTZEL

Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas

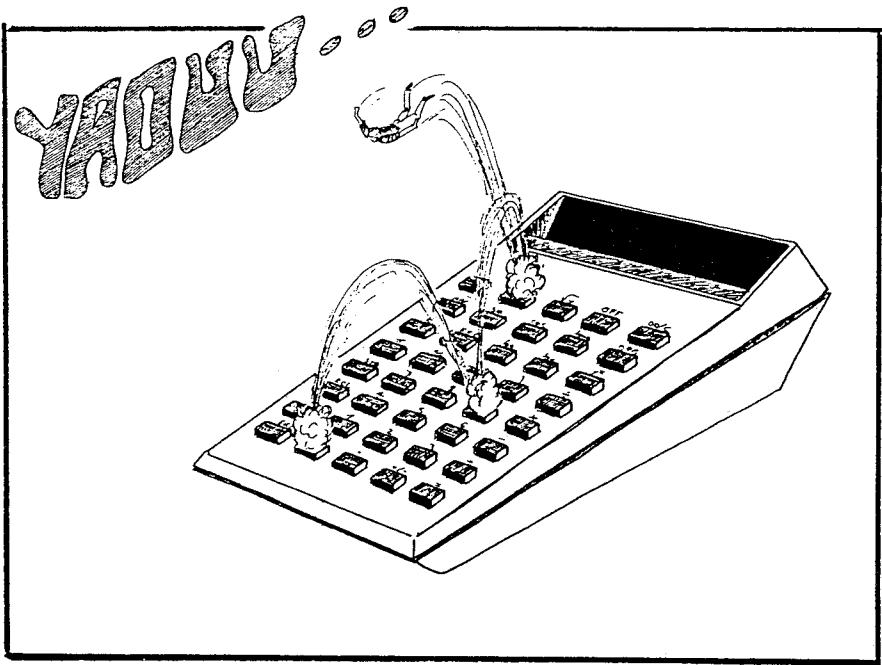
Journal de mathématiques, 1843

R.C. YATES

The trisection problem

NCTM

2-902680-46-5



2-902680-46-5

**IGR Imprimerie Lyon - Photocomposition : Marie-Paule COMPO - Montage : Atelier M. MICHAUD
Façonnage ALAIN**