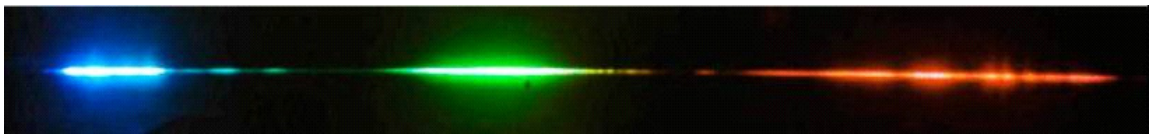


JOHANNES GUTENBERG-UNIVERSITÄT MAINZ
FACHBEREICH 08 (PHYSIK) UND
FACHBEREICH 09 (CHEMIE)

VORLESUNG:

PHYSIK DES LASERS



DR. WILFRIED NÖRTERSCHÄUSER UND PROF. APL DR. THOMAS KÜHL

MAINZ, WINTERSEMESTER 2007/08

Inhalt

1 Grundlagen	4
1.1 Eigenschaften der Laserstrahlung	4
1.1.1 Monochromasie	4
1.1.2 Divergenz	4
1.1.3 Kohärenz	5
1.1.3.1 Kohärenzzeit und Autokorrelationsfunktion	5
1.1.3.2 Räumliche Kohärenz und Kohärenzfläche	7
1.1.3.3 Kohärenzvolumen	8
1.2 Ableitung der Planckformel	8
1.3 Konsequenzen der Einsteinschen Beziehungen für das Laserprinzip	11
1.4 Das Kohärenzvolumen aus quantenmechanischer Sicht	14
1.4.1 Zusammenhang zwischen Energie und Phase einer Lichtwelle	16
2 Zur Dynamik des Lasers	17
2.1 Grundlegende Prinzipien des Lasers	17
2.2 Laserschemata	19
2.2.1 Zwei-Niveau Laser	20
2.2.2 Drei-Niveau-Laser	20
2.2.2.1 Der Rubinlaser	21
2.2.2.2 Der Stickstofflaser	22
2.2.3 Vier-Niveau-Laser	24
2.2.3.1 Nd:Glas Verstärker als Vier-Niveau System	24
2.3 Inversion und Verstärkung	26
2.3.1 Die Laserschwelle	26
2.3.2 Kleinsignalverstärkung und Leerlaufinversion	28
2.4 Phasenbedingung und Frequency Pulling	29
2.5 Ratengleichungen des Laserbetriebes	31
2.5.1 Der Lasertübergang im Leerlauf	31
2.5.2 Ratengleichungen mit Licht im Verstärker	32
2.5.3 Ratengleichung des Drei-Niveau-Lasers	32
2.5.4 Ratengleichungen des Vier Niveau Systems.	33
2.6 Der Laserbetrieb	35
2.6.1 Einschwingphase (Spiking)	35
2.6.2 Der eingeschwungene cw Laser	35
2.6.2.1 Das Lichtfeld im Resonator	36
2.6.2.2 Optimierung der ausgekoppelten Leistung	37
2.6.3 Ausstrahlungsverhalten des Lasers	39
2.6.4 Linienbreite eines Lasermodes	39

2.6.5	Multimode Betrieb	39
2.6.5.1	Verstärkung in inhomogen verbreiterten Medien	40
2.6.5.2	Moden-Wettbewerb (Mode-Competition) bei homogenen Verstärkungsprofilen	42
2.7	Superradianz	43
3	Optische Resonatoren	46
3.1	Der Fabry-Perot-Resonator	46
3.1.1	Funktionsprinzip	46
3.1.2	Etalons und Interferometer	51
3.1.2.1	Etalon	52
3.1.2.2	Scanning Fabry-Perot Interferometer	52
3.1.3	Impedanzanpassung	53
3.2	Transversale Moden und Gauß-Strahlen	54
3.2.1	Die paraxiale Wellengleichung	54
3.2.2	Die Gauß'sche Grundmode	56
3.2.3	Höhere Transversale Moden	59
3.2.4	Allgemeine Resonanzbedingung für optische Resonatoren	61
3.2.5	Die Kaustik in der Strahlenoptik	64
3.3	Spezielle Resonatoren	65
3.3.1	Der symmetrische konfokale Resonator	65
3.3.2	Konzentrischer Resonator	66
3.4	Beugungsverluste	66
4	Kontinuierliche (CW) Lasersysteme	68
4.1	Halbleiterlaser	68
4.1.1	Historisches	68
4.1.2	Grundlagen	69
4.1.2.1	Halbleiter	69
4.1.2.2	Halbleiter für die Optoelektronik	72
4.1.2.3	Leuchtdioden	73
4.1.2.4	Laserdioden	74
4.1.3	Aufbau und Dynamik einer Laserdiode	74
4.1.3.1	Generation und Rekombination von Ladungsträgern	75
4.1.3.2	Injektion von Ladungsträgern	75
4.1.3.3	Interne Quanteneffizienz	76
4.1.3.4	Der Verstärkungskoeffizient	77
4.1.3.5	Heterostruktur und Doppel-Heterostruktur-Laser	78
4.1.4	Praktische Aspekte von Diodenlasern	79
4.1.4.1	Generelles	79
4.1.4.2	Abstrahlcharakteristik	79
4.1.4.3	Wellenlängenbeeinflussung ohne externen Resonator	80
4.1.4.4	Wellenlängenbeeinflussung mit externem Resonator	82
4.1.5	Faserlaser	83
4.2	Gaslaser	85
4.2.1	Helium-Neon Laser	85
4.2.2	Edelgas-Ionen-Laser	86
4.2.3	CO ₂ -Laser	88
4.3	Flüssigkeitslaser - Der Farbstofflaser	92

4.3.1	Organische Farbstoffe	92
4.3.2	Bandenstruktur und Relaxation	94
4.3.3	Farbstoffe als Lasermedien	97
4.3.4	Farbstofflaserkonfigurationen	98
4.4	Festkörperlaser	104
4.4.1	Neodym-Laser	104
4.4.2	Titan:Saphir-Laser	105
5	Frequenzselektion und Stabilisierung	108
5.1	Modell einer Servoschleife	109
5.2	Generierung eines Fehlersignals	110
5.2.1	Flankenstabilisierung	110
5.2.2	Modulationstechniken zur Erzeugung von Fehlersignalen	111
5.2.3	Stabilisierung nach Hänsch - Couillaud	112
5.2.4	Pound-Drever-Hall	114
5.2.5	Frequenz-Abstands-Stabilisierung	118
5.3	Grundlagen der Regeltechnik	121
5.3.1	Der Operationsverstärker	121
5.3.2	Der invertierende Verstärker (Proportionalregler)	122
5.3.3	Der Integrator	123
5.3.4	Der Differentiator	123
5.4	Servokreise für die Laserstabilisierung	123
5.4.1	P-Regler	124
5.4.2	I-Regler	124
5.4.3	PI-Regler	125
5.4.4	D-Regler	125
5.4.5	PD-Regler	126
5.4.6	PID-Regler	126
5.4.7	Stabilitätskriterium des Regelkreis	127
5.5	Linienbreite des eingeschwungenen Lasers nach Schawlow und Townes	128
6	Gepulste Lasersysteme	130
6.1	Gütegeschaltete Laser	130
6.2	Beschreibung kurzer Pulse	131
7	Der Frequenzkamm	134
7.1	Das Frequenzspektrum modengeblockter Pulse	134
7.2	Ableitung des Modenkamms aus den Resonator-Randbedingungen	135
7.3	Bestimmung des Carrier-Envelope-Offset	138
7.3.1	Erzeugung und Stabilisation eines Frequenzkamms	140
7.3.2	Messung einer Laserfrequenz mit einem Frequenzkamm	140
8	Erzeugung ultrakurzer Pulse und ihre Anwendungen - Von Nano- zu Atosekunden	144
9	Grundlagen der nichtlinearen Optik	145
10	Hochintensitäts- und Hochleistungslaser	146

Tabellen

3.1	Kenndaten typischer Fabry-Perot-Resonatoren	51
4.1	Ladungsträgerkonzentration intrinsischer Halbleiter	76
4.2	Interne Quanteneffizienz einiger Halbleiter	77
4.3	Absorptionskanten in Dyes	94
4.4	Aktive, dotierte Ionen und Wirtskristalle für Festkörperlaser	104

Abbildungen

1	Pioniere der Lasertechnik	2
2	Anwendungsbeispiele der Lasertechnik	3
1.1	Illustration zu Monochromasie und Divergenz eines Lichtbündels	4
1.2	Michelson Interferometer zur Bestimmung der Autokorrelationsfunktion eines Lichtbündels.	6
1.3	Zu Kohärenzfläche und Kohärenzvolumen	7
1.4	Wechselwirkung des Strahlungsfeldes mit einem 2-Niveau System	9
1.5	Illustration zur Spektralfunktion und Modenzahl eines Hohlraumresonators . . .	14
2.1	Schematischer Aufbau eines Lasers.	17
2.2	Verstärkungs- und Phasenbedingung	18
2.3	Schema von Zwei-, Drei- und Vier-Niveaulasern.	19
2.4	Termschema eines Rubinkristalls).	21
2.5	Aufbau eines Rubinlasers	21
2.6	Emissionsspektrum des Rubins	22
2.7	Ausschnitt aus dem Termschema des Stickstoffmoleküls	22
2.8	Aufbau eines Stickstofflasers	23
2.9	Pulsverlauf des N ₂ -Lasers	23
2.10	Niveauschema des Nd:Glas Lasers	25
2.11	Schema zur Herleitung der Schwellwertbedingung	26
2.12	Frequency-Pulling	29
2.13	Übergangsraten zwischen den Laserniveaus	31
2.14	Übergangsraten im Drei-Niveau-Schema	32
2.15	Übergangsraten im Vier-Niveau-System	33
2.16	Relaxationsoszillationen und Spiking	35
2.17	Raten beim cw-Laser im stationären Betrieb	36
2.18	Impedanzanpassung und Ausstrahlungsverhalten eines Lasers	38
2.19	Zur Linienbreite einer Lasermode	39
2.20	Mode Competition und Mehrmodenspektrum	40
2.21	Lambdip	41
2.22	Spatial Hole Burning	42
2.23	Superradianz	44
3.1	Reflexion und Transmission an einem optischen Resonator	48
3.2	Airy-Funktion	49
3.3	Leistung und Phase bei der Reflexion am FPI	51
3.4	Prinzip des Fabry-Perot-Resonators	52
3.5	Fabry-Perot Spektralanalysator	53

3.6	Impedanzanpassung eines Resonators	55
3.7	Guoy-Phasenverschiebung	59
3.8	Transversale Moden	60
3.9	Frequenzspektrum transversaler Moden	62
3.10	Stabilitätsdiagramm und spezielle Resonatortypen	63
3.11	Illustration zur Kaustik	64
3.12	Strahlenoptischer Gang im konfokalen Resonator	65
3.13	Beugungsverluste in einem Resonator	66
4.1	Direkte und indirekte Bandlücke	71
4.2	$E - k$ -Dispersionsrelation in einem Halbleiter	72
4.3	Bandlücke wichtiger Halbleitermaterialien	73
4.4	Funktionsprinzip einer Leuchtdiode	73
4.5	Energiediagramm eines reinen und eines dotierten Halbleiters	74
4.6	Vergleich von Homo-, Hetero- und Doppel-Heterostrukturen	78
4.7	Bauformen von Laserdioden	79
4.8	Doppel-Heterostrukturlaserdiode mit Strahlkegel	80
4.9	Temperatur und Stromeinfluß auf die Wellenlänge eines Diodenlasers	81
4.10	Modensprung eines Diodenlasers	81
4.11	Littrow und Littmann-Metcalf Aufbau	83
4.12	Illustration zur Gittergleichung	84
4.13	Faserlaser	85
4.14	Niveauschema des Helium-Neon-Lasers	86
4.15	Prinzipaufbau eines Helium-Neon-Lasers	87
4.16	Niveauschema und Prinzipaufbau des Argon-Ionenlasers	88
4.17	Frequenzsektion beim Argon-Ionenlaser	89
4.18	Etalon zur Frequenzsektion	90
4.19	Niveauschema des CO ₂ Lasers	91
4.20	Radialwellenanteile der niedrigsten Molekülwellenfunktionen	92
4.21	Orbitale und Bindungen in Ethan, Ethen und Ethin	93
4.22	Elektronen in konjugierten Doppelbindungen	94
4.23	Niveauschema eines Laserfarbstoffs	95
4.24	Normiertes Absorptions- und Fluoreszenzspektren von Rhodamin 6G	97
4.25	Dye Farbstoffe	98
4.26	Gefalteter Farbstofflaserresonator	99
4.27	Leistungsspektrum eines Farbstofflasers mit frequenzselektiven Elementen	100
4.28	Schematischer Aufbau eines Farbstoff-Ringlasers	102
4.29	Schematischer Aufbau eines Lyot-Filters	103
4.30	Frequenzsektion im Ringlaser	103
4.31	Niveauschema eines Nd:YAG	105
4.32	Aufbau eines Titan:Saphir cw-Ringlasers	106
5.1	Prinzip der Servoschleife	108
5.2	Prinzip der Flankenstabilisierung	110
5.3	Erzeugung eines Regelsignals mit Rechteckmodulation	111
5.4	Harmonische Modulation	112
5.5	Aufbau der Hänsch-Couillaud Stabilisierung	113
5.6	Fehlersignal der Hänsch-Couillaud Stabilisierung	114
5.7	Aufbau der Pound-Drever-Hall Stabilisierung	116

5.8	Fehlersignal der Pound-Drever-Hall Stabilisierung	117
5.9	Produkt der Besselfunktionen J_0 und J_1	118
5.10	Frequenz-Abstands-Stabilisierung	120
5.11	Wirkungsweise einer Regelung	121
5.12	Schaltbild eines Operationsverstärkers	121
5.13	Reglerschaltungen	122
5.14	Bode Diagramm des P-Reglers	124
5.15	Bode Diagramm des I-Reglers	124
5.16	Bode Diagramm des PI-Reglers	125
5.17	Bode Diagramm des PD-Reglers	126
5.18	Reglertypen	126
5.19	Amplituden- und Phasenreserve eines Reglers	127
6.1	Laser mit Güteschaltung (Q-Switch)	131
6.2	Zeitlicher Verlauf eines gütegeschalteten Lasers	132
6.3	Superposition von 3 Moden	132
6.4	Dispersion in Quarzglas	133
6.5	Prismenanordnung zur Kompensation der GVD	133
7.1	Modengelockter Puls im Resonator	136
7.2	Modengelockter Puls im Resonator	136
7.3	Messung der Carrier-Envelope-Offsets	138
7.4	Struktur einer photonischen Faser und spektrale Verbreiterung	139
7.5	Aufbau eines Frequenzkamms	142
7.6	Frequenzmessung mit Frequenzkamm	143

Einleitung

Das Wort LASER, welches sich heute als eigenes Wort in unserer Sprache etabliert hat, ist eigentlich ein Akronym für "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" und leitet sich von seinem Vorgänger, dem MASER (hier steht das "M" für "Microwave") ab. Ein Laser verstärkt also Licht mittels des Prozesses der stimulierten Emission.

Stimulierte Emission von Strahlung aus einer invertierten Population wurde erstmals 1955 im Mikrowellenbereich von G.P. Gordon, J.K. Zeiger und C.H. Townes mit einem Ammoniak-Maser demonstriert. Nur wenig später, 1958, analysierten Arthur L. Schawlow und Charles H. Townes die Möglichkeit der MASER-Tätigkeit im optischen Bereich. Der erste Laser, ein gepulster Rubin-Laser, wurde bereits 1960 von Theodor H. Maiman und der erste Dauerstrich (cw=continuous wave) Laser 1961 von A. Javan, W.R. Bennett und D.R. Herriot konstruiert. Bei letzterem handelte es sich um einen Helium-Neon Laser, bei dem das Gasgemisch durch eine Gasentladung angeregt wurde. Der erste Halbleiterlaser entstand 1962 durch Injektion von Elektronen in Galliumarsenid (GaAs), das zur Elektrolumineszenz angeregt wurde. Abbildung 1 zeigt einige der Pioniere auf dem Gebiet der Laserentwicklung.

Bereits 1964 erhielten Townes und seine russischen Kollegen A.M. Prokhorov und N.G. Basov den Physik-Nobelpreis für "grundlegende Arbeiten auf dem Gebiet der Quantenelektronik, die zur Konstruktion von Oszillatoren und Verstärkern auf der Basis des Maser-Laser-Prinzips führten". Prokhorov und Basov hatten unabhängig von Schawlow und Townes ebenfalls Laser für die Produktion infraroter Strahlung vorgeschlagen.

Um Lasertätigkeit zu erreichen braucht man zwei essentielle Ingredienzen:

1. Ein Verstärkungsmedium in dem eine Populationsinversion zwischen zwei elektronischen Niveaus aufgebaut werden kann, d.h. ein höherliegendes Niveau ist stärker besetzt als ein tiefer liegendes Niveau. Dies bedeutet, dass sich das Verstärkungsmedium nicht im thermischen Gleichgewicht befinden kann, da eine solche Inversion massiv von der, im thermischen Gleichgewicht vorliegenden, Boltzmann-Verteilung abweicht. Laser unterscheiden sich u.a. in der Form des Verstärkungsmediums (Gase, Flüssigkeiten, Festkörper oder Halbleiter) und darin wie die Energie in das Verstärkungsmedium eingebracht wird (z.B. Gasentladungen, Stromfluss, Blitzlampen oder intensive Pumplaser)
2. Einen Resonator zur Akkumulation der Photonen, um die stimulierte Emission zu verstärken und einen lawinenartigen Prozess auszulösen. Der Resonator dient darüber hinaus dazu, die Laserstrahlung spektral einzugrenzen und die räumliche Richtung vorzugeben. Nur im Extrem des superradianten Lasers kommt man völlig ohne Resonator aus. Ansonsten reichen die Formen von einfachen Resonatoren mit zwei Spiegeln zu mehr oder weniger kompliziert gefalteten linearen oder Ringresonatoren.

In der atomphysikalischen Forschung wurden die Laser zunächst zur hochauflösenden Spektroskopie von Atomen und Molekülen eingesetzt. Mit ihnen werden Naturkonstanten und atom-

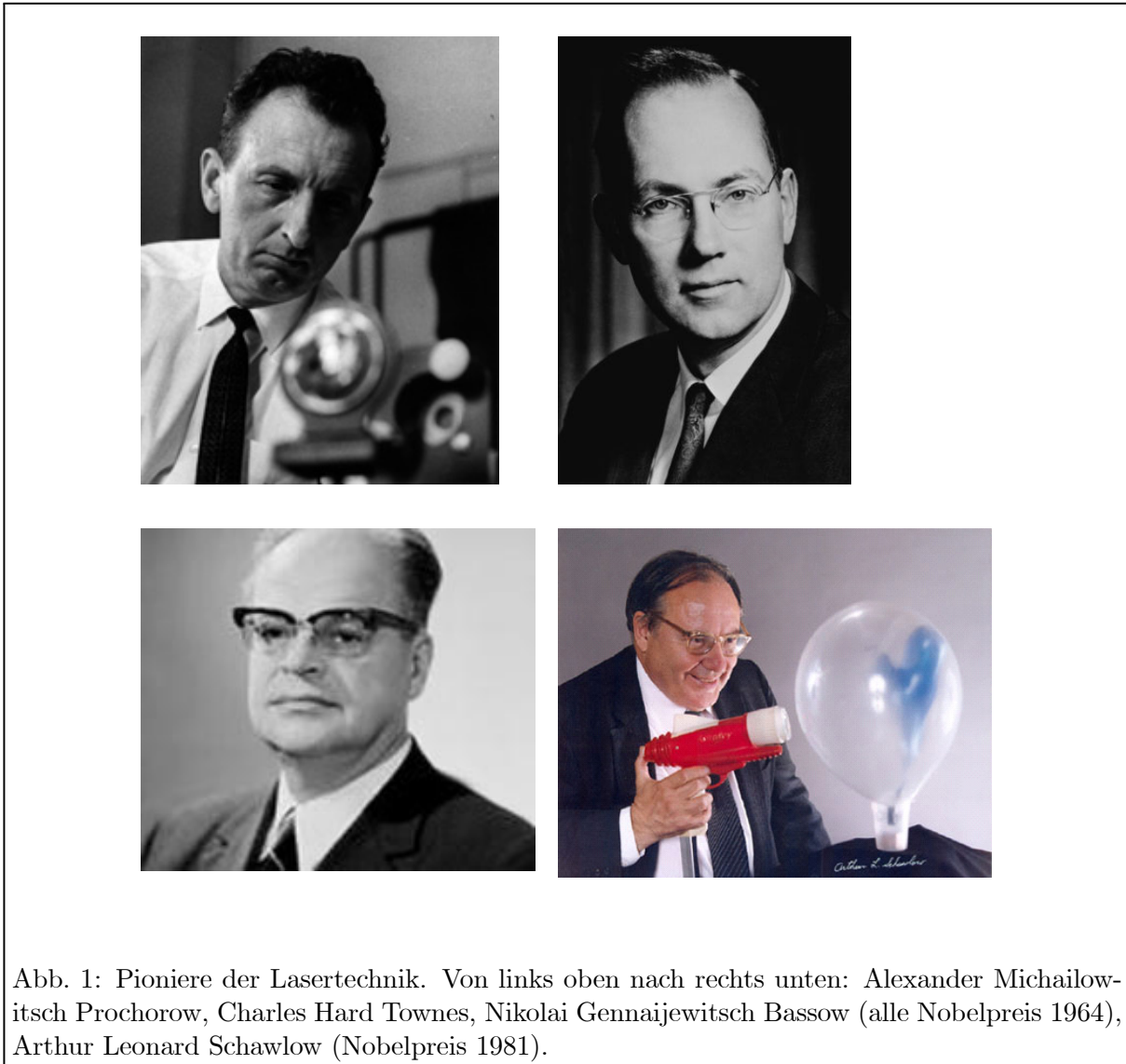
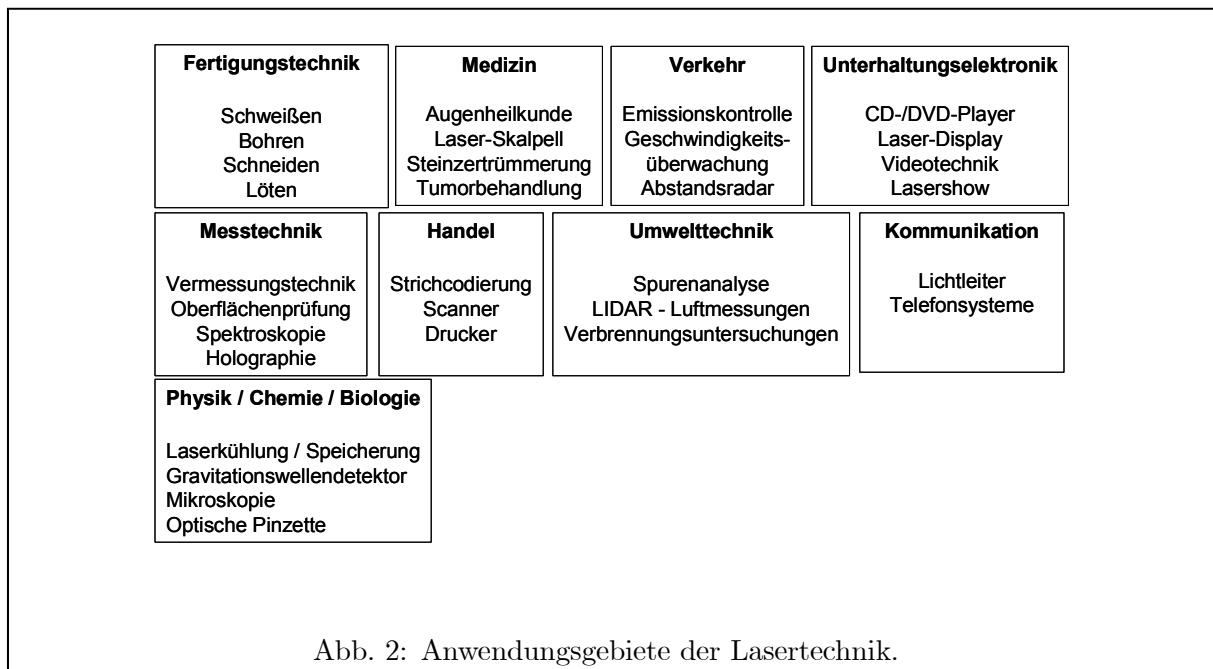


Abb. 1: Pioniere der Lasertechnik. Von links oben nach rechts unten: Alexander Michailowitsch Prochorow, Charles Hard Townes, Nikolai Gennajewitsch Bassow (alle Nobelpreis 1964), Arthur Leonard Schawlow (Nobelpreis 1981).

are Eigenschaften mit höchster Präzision vermessen. Seit der Entwicklung des Laserkühlens hat er sich als wichtiges Werkzeug zur Kontrolle und Manipulationen interner und externer Freiheitsgrade von Atomen und Molekülen etabliert. Insbesondere das Laserkühlen und die gezielte Veränderung von Quantenzuständen finden immer breitere Verwendung. Mögliche zukünftige Anwendungen, die sich zur Zeit in der Entwicklung befinden, sind beispielsweise abhörsichere Kryptographiesysteme und Quantencomputer.

Heute finden sich Laser aber auch in großer Zahl in unserem Alltag. In CD und DVD-Spielern werden sie genutzt, um die gespeicherten Informationen aus den Silberscheiben auszulesen, an den Kassen von Supermärkten erledigen sie ihre Arbeit beim Einscannen der Artikel und in unseren Kommunikationsnetzwerken werden Informationen mit Laserstrahlen in Glasfasern über große Strecken übermittelt. In Fabriken werden Hochleistungslaser zum Schweißen und Schneiden eingesetzt und Ärzte bedienen sich des Laserskalpels. Einige weitere Anwendungsgebiete sind in Abbildung 2 zusammengestellt.

Wir wollen uns in dieser Vorlesung mit den physikalischen Prinzipien die der Lasertätigkeit zugrundeliegen befassen und das Bauprinzip verschiedener Laser im Detail besprechen Die her-



vorstehenden Merkmale der Laserlichtquellen können durch folgende Stichworte zusammengefaßt werden:

- Die Strahlung kommt durch stimulierte Emission aus elektronisch angeregten Niveaus von Atomen, Molekülen oder Festkörpern zustande.
- Sie ist in dem Maße monochromatisch, in dem die beteiligten Niveaus scharf sind.
- Die stimuliert emittierte Strahlung zeichnet sich durch große Kohärenz aus.
- Sie ist optimal kollimiert, d.h. das Produkt aus Öffnungswinkel und Durchmesser des Lichtbündels ist von der Größenordnung λ .
- Es werden extrem hohe Leistungsdichten erreicht, wodurch unter anderem die Erzeugung einer Vielzahl nichtlinearer optischer Effekte möglich wird.
- Bei Verwendung von Lasermedien mit breiten Emissionsbändern kann die Laserstrahlung monochromatisch über die Bandbreite abgestimmt werden.

Alle diese Charakteristika haben ihre gemeinsame physikalische Ursache im Mechanismus der Wechselwirkung des Strahlungsfeldes mit der Materie, dem wir uns in den ersten Kapiteln ausführlich widmen.

Dieses Skript beruht zum Teil auf dem Skript der gleichnamigen Vorlesung von Prof. E.W. Otten. Weitere wichtige Quellen für Text- und Bildmaterialien waren die Bücher "Optik, Licht und Laser" von D. Meschede, "Frequency Standards" von F. Riehle und "Fundamentales of Photonics" von Saleh und Teich.

Sicherlich ist auch dieses Skript nicht frei von Fehlern. Für entsprechende Hinweise und Korrekturvorschläge sind wir sehr dankbar.

Mainz im Oktober 2007
 Wilfried Nörtershäuser
 Thomas Kühl

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Eigenschaften der Laserstrahlung

Laserlicht unterscheidet sich von dem "natürlichen" Licht unserer Alltagserfahrung (Sonnenlicht, Glühbirne) in vielerlei Hinsicht. Es ist monochromatisch, d.h. $\Delta\nu \ll \nu_0$, intensiv, gerichtet $\Delta\vartheta \ll 2\pi$ und kohärent. Wir wollen diese Begriffe im Folgenden etwas präzisieren.

1.1.1 Monochromasie

Laserlicht ist in der Regel spektral sehr rein. Für die Präzisionsspektroskopie betreibt man heute Laser, die eine Linienbreite $\Delta\nu$ von weniger als 1 Hz (!) besitzen. Bei einer Wellenlänge von $\lambda = 400$ nm, entsprechend etwa $\nu_0 \approx 750$ THz bedeutet dies eine Auflösung von $\nu_0/\Delta\nu \approx 7,5 \times 10^{14}$. Selbst bei gepulsten Lasern mit typischen Bandbreiten im GHz Bereich liegt die Auflösung noch im Bereich von einigen 10^5 . Wie wir später sehen werden, besitzen heute aber auch sogenannte Superkontinuum Lichtquellen, d.h. Laserstrahlen mit einem extrem breiten Spektralbereich $\Delta\omega \approx \omega_0$ die ganz und gar nicht mehr als monochromatisch angesehen werden können, wichtige Anwendungen.

1.1.2 Divergenz

Laserstrahlen lassen sich aussergewöhnlich gut bündeln und entsprechen als kollimierte Strahlen sehr gut dem Ideal eines sich geradlinig ausbreitenden Lichtstrahles, einer ebenen Welle. Doch

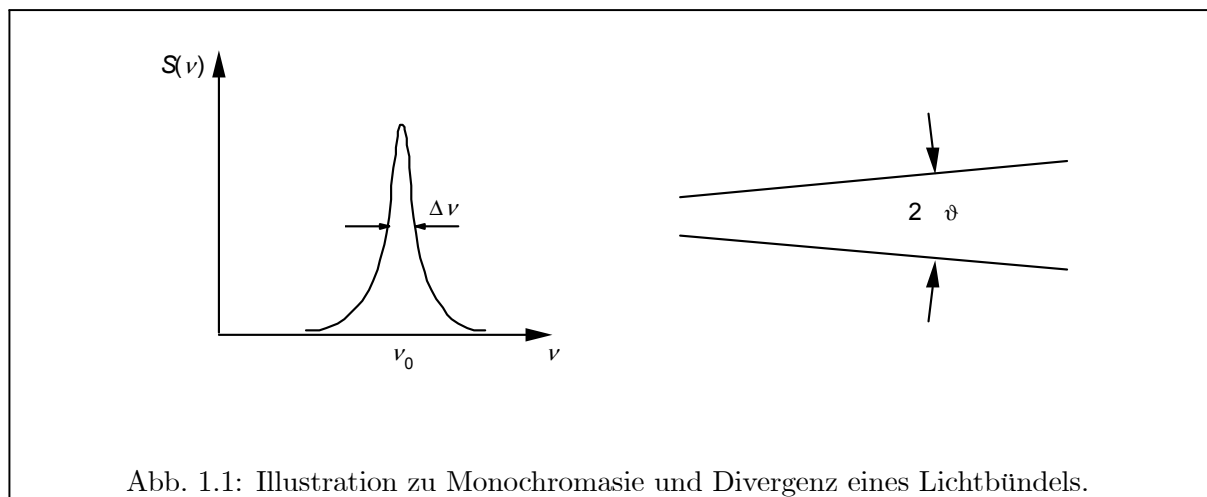


Abb. 1.1: Illustration zu Monochromasie und Divergenz eines Lichtbündels.

auch Laserstrahlen unterliegen der Beugung wie es durch Huygen's Prinzip beschrieben wird: In einem isotropen Medium ist jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer Kugelwelle. Bei der Behandlung Gaußscher Strahlen werden wir sehen, dass sich der Durchmesser eines "optimalen" Laserstrahls, entlang der Ausbreitungsrichtung durch eine Hyperbel beschreiben lässt. Weit entfernt vom Fokus, dem Punkt des kleinsten Durchmessers, ist der Öffnungswinkel des Laserstrahls durch

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (1.1)$$

gegeben. Dabei ist w_0 der Radius des Strahls im Fokus. Für einen roten Laserstrahl bei $\lambda = 633 \text{ nm}$ (He-Ne-Laser) und einem Fokusbereich von 4 mm, beträgt der Öffnungswinkel lediglich 0,1 mrad, d.h. nach einer Strecke von 10 m hat sich der Strahl lediglich um 2 mm auf einen Durchmesser von 6 mm aufgeweitet.

1.1.3 Kohärenz

Mit dem Begriff der Kohärenz ist die "Interferenzfähigkeit" von Wellen gemeint. Der Begriff stammt aus der Wellenlehre und gibt an, über welche Entfernungen oder Zeiträume zwischen zwei Teilwellen eine feste Phasenbeziehung existiert (Interferenzlänge, bzw. -zeit). Überlagert man zwei Teilwellen, so ist Intensität am Empfängerort \vec{r} über die Beziehung

$$I(\vec{r}, t) = c\rho = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E^2(\vec{r}, t)$$

zum Quadrat der elektrischen Feldstärke am Interferenzort proportional. Im Falle kohärenter Wellen muss man zunächst die Amplituden der beiden Wellen addieren und dann das Betragsquadrat bilden um die Intensitätsverteilung der resultierenden Welle zu bestimmen

$$I_{\text{coh}}(\vec{r}, t) = \frac{c\epsilon_0}{2} |E_1(\vec{r}, t) + E_2(\vec{r}, t)|^2 = I_1(\vec{r}, t) + I_2(\vec{r}, t) + c\epsilon_0 \text{Re}\{E_1(\vec{r}, t)E_2^*(\vec{r}, t)\}. \quad (1.2)$$

Im Falle inkohärenter Wellen werden hingegen einfach die Intensitäten der Teilwellen addiert

$$I_{\text{incoh}}(\vec{r}, t) = \frac{c\epsilon_0}{2} (|E_1(\vec{r}, t)|^2 + |E_2(\vec{r}, t)|^2) = I_1(\vec{r}, t) + I_2(\vec{r}, t). \quad (1.3)$$

Der Unterschied ist also durch den Beitrag der Überlagerung, den Interferenzterm $\text{Re}\{E_1(\vec{r}, t)E_2^*(\vec{r}, t)\}$ gegeben. Dieser Beitrag ist jedoch nur dann beobachtbar, wenn wenigstens während der Messzeit eine feste Phasenbeziehung zwischen den beiden Feldern E_1 und E_2 vorliegt, denn jeder reale Detektor nimmt eine Mittelung über ein endliches Raum- und Zeitintervall vor. Die typischen Schwankungen einer thermischen Lichtquelle finden auf der ps und fs Skala statt, während Detektoren gewöhnlicherweise wenigstens über ns integrieren.

Um die Kohärenzlänge eines Lichtstrahls zu messen, benutzt man einen Strahlteiler um den Lichtstrahl in zwei Strahlen aufzuteilen und misst die Interferenzfähigkeit der Welle als Funktion des Wegunterschiedes der beiden Teilstrahlen.

1.1.3.1 Kohärenzzeit und Autokorrelationsfunktion

Als Kohärenzzeit bezeichnet man im allgemeinen die reziproke Linienbreite

$$t_c = 1/\Delta\nu \quad (1.4)$$

denn nach einer Zeit t_c nimmt der relative Phasenunterschied zwischen den verschiedenen spektralen Komponenten des Lichtbündels bereits Werte zwischen $0 \leq \Delta\varphi \leq 2\pi$ $\Delta\nu t_c$ an. Bringen

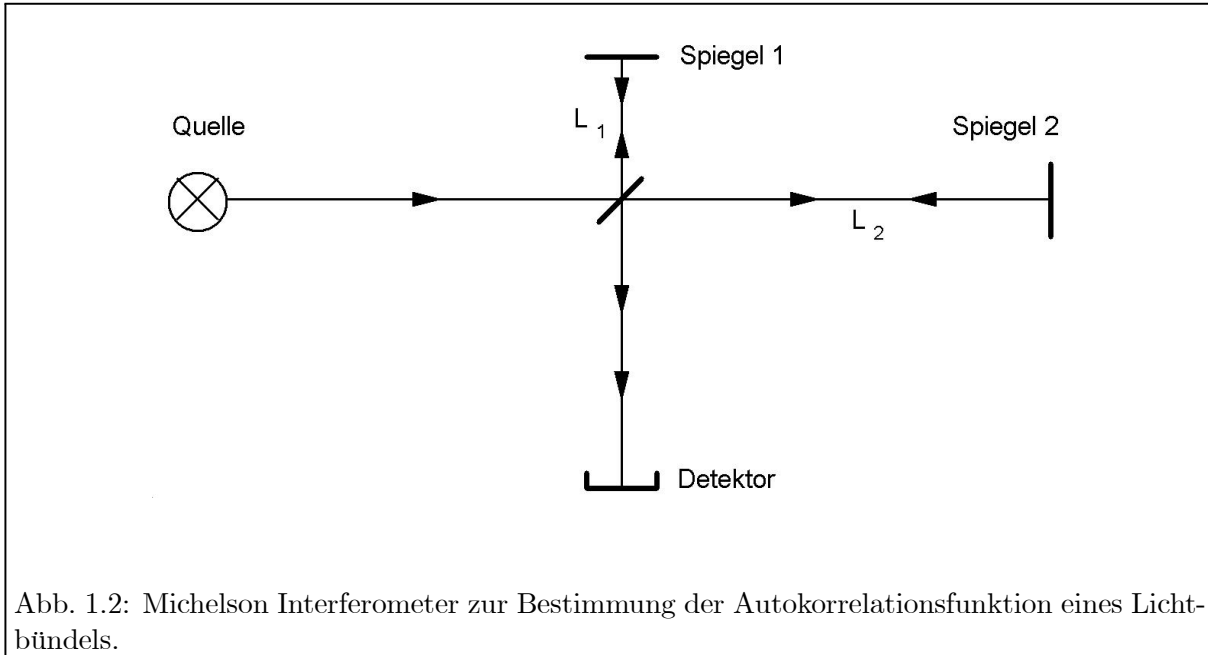


Abb. 1.2: Michelson Interferometer zur Bestimmung der Autokorrelationsfunktion eines Lichtbündels.

wir ein solches Lichtbündel nach einem Laufzeitunterschied von t_c mit sich selbst zur Interferenz, so werden die spektralen Komponenten teils konstruktiv, teils destruktiv interferieren und der Interferenzkontrast in summa stark abgeschwächt sein. Wir wollen diese Beziehung genauer untersuchen und zunächst eine exakte Messvorschrift für die Kohärenzzeit mittels des Michelson-Interferometers geben (siehe Abb. 1.2):

Am Empfänger wird die aus der Interferenz der beiden Teilbündel resultierende Intensität $I(t)$ als Funktion des Laufzeitunterschieds

$$\tau = \frac{2(L_2 - L_1)}{c} \quad (1.5)$$

gemessen und zwar nicht momentan, sondern bei jedem τ als zeitlicher Mittelwert über eine längere Messperiode $2T \gg \tau$. Wir erhalten somit für den Mittelwert im Limes $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{I(\vec{r}, t)}{c \epsilon_0} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [E(\vec{r}, t) + E(\vec{r}, t + \tau)]^2 dt \\ &= \left\langle (E(\vec{r}, t) + E(\vec{r}, t + \tau))^2 \right\rangle_t \\ &= 2 \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle_t + 2 \langle E(\vec{r}, t) E(\vec{r}, t + \tau) \rangle_t \end{aligned} \quad (1.6)$$

Bei (1.6) müssen wir voraussetzen, dass $E^2(t)$ über die Messzeit $2T$ einen stabilen Mittelwert hat, wohingegen kleine Fluktuationen von Amplitude und Frequenz zugelassen sind. Während der erste Term in der letzten Zeile von (1.6) die inkohärente Summe der Teilintensitäten darstellt, beschreibt der zweite Teil

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (E(\vec{r}, t) E(\vec{r}, t + \tau)) dt \quad (1.7)$$

die durch den Laufzeitunterschied entstandene, zeitunabhängige und in $\tau = 2\pi/\omega$ periodische Interferenz der beiden Teilstrahlen, die für $\tau > t_c$ ausklingt (ihre Abhängigkeit vom Beobach-

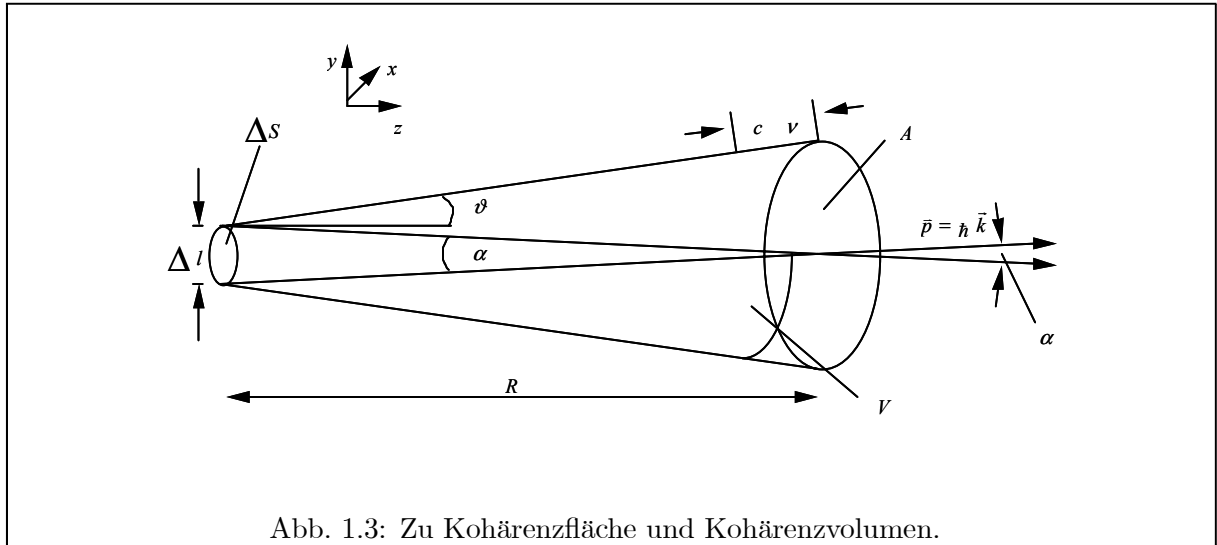


Abb. 1.3: Zu Kohärenzfläche und Kohärenzvolumen.

tungsort interessiert hier nicht und wird unterdrückt). $K(\tau)$ ist die sogenannte Autokorrelationsfunktion, die bei allen Kohärenzfragen und auch in vielen anderen, statistisch gestörten Systemen ein entscheidendes Charakteristikum ist.

Zufolge des Wiener-Khintchine-Theorems besteht zwischen der Autokorrelationsfunktion und dem Leistungsspektrum $dI(\nu)/d\nu$ ein eindeutiger Zusammenhang über die Fouriertransformationen (siehe Übungen)

$$\frac{1}{c\epsilon_0} \frac{dI(\nu)}{d\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-2\pi i\nu\tau} d\tau \quad \text{bzw.} \quad (1.8a)$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{dI(\nu)}{d\nu} e^{2\pi i\nu\tau} d\nu. \quad (1.8b)$$

Die Spektroskopie durch Ausmessung der Autokorrelationsfunktion im Michelson-Interferometer heißt deswegen auch **Fourierspektroskopie** und hat in den letzten Jahrzehnten sehr an Bedeutung gewonnen, nachdem es möglich geworden ist, mit Hilfe von Prozessrechnern auch sehr komplizierte und datenreiche Autokorrelationsfunktionen schnell einer Fouriertransformation zu unterwerfen. Sie hat besonders im infraroten Spektralbereich Vorteile im Signal-Rausch-Verhältnis gegenüber anderen hochauflösenden spektroskopischen Methoden.

Der Zusammenhang (1.8) gilt für jedes beliebige Spektrum, gleichgültig auf welche Art und Weise die spektrale Verteilung zustande gekommen ist, ob durch Strahlungsdämpfung, Stoßdämpfung, Dopplereffekt, Überlagerung verschiedener Spektrallinien, schwarze Strahlung oder sonstige Effekte. Dies gilt aber wie gesagt nur für die spektrale Intensitätsverteilung, nicht unbedingt für die Amplitudenverteilung, die ja auch im Experiment nicht gemessen wird.

1.1.3.2 Räumliche Kohärenz und Kohärenzfläche

Die Lichtquelle habe einen quasi kreisförmigen Querschnitt der Fläche ΔS und einen Durchmesser Δl (siehe Abbildung 1.3).

Dann bezeichnen wir als die Kohärenzfläche ΔA im Abstand R von der Lichtquelle diejenige Fläche, die die Punkte enthält, deren optische Weglänge zu jedem Punkt der Lichtquelle um weniger als λ variiert. Würde man also im Abstand R einen Schirm mit Löchern innerhalb

dieser ersten Fresnelzone aufstellen, so würde das Licht dahinter noch klare Interferenzstrukturen zeigen. Die Kohärenzfläche wird berandet durch den Kegel mit dem Öffnungswinkel

$$\Delta\vartheta \approx \frac{\lambda_0}{\Delta l} \quad (\lambda_0 : \text{zentrale Wellenlänge}). \quad (1.9)$$

Ihre Fläche ist demnach

$$\Delta A \approx (R \Delta\vartheta)^2 \approx \frac{\lambda_0^2 R^2}{\Delta S}. \quad (1.10)$$

1.1.3.3 Kohärenzvolumen

Als Kohärenzvolumen bezeichnet man das Produkt aus Kohärenzlänge und Kohärenzfläche, also

$$\Delta V = ct_c \Delta A \approx \frac{c \lambda_0^2 R^2}{\Delta \nu \Delta S} \approx \left(\frac{R}{\Delta l} \right)^2 \frac{\lambda_0^4}{\Delta \lambda}. \quad (1.11)$$

Dabei versteht man als Kohärenzlänge diejenige Strecke $c \cdot t_c$, die das Licht innerhalb der Kohärenzzeit zurücklegt. In der klassischen Wellenoptik hat das Kohärenzvolumen folgende Bedeutung: wenn man aus einem Lichtwellenfeld, das durch die Parameter ΔS und $\Delta \nu$ der Lichtquelle gegeben ist, ein Lichtbündel herausschneidet, das weniger als das Kohärenzvolumen einnimmt, so kann man dieses, im Kohärenzvolumen eingeschlossene Licht auf keine Art und Weise spektral oder räumlich trennen.

1.2 Ableitung der Planckformel

Zwar hatte schon Planck den ersten Erfolg in der Strahlungstheorie mit der Ableitung seines Strahlungsgesetzes unter der Hypothese der Quantisierung der Strahlungsenergie verbucht; jedoch wird darin wenig über die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie ausgesagt, weil man im thermodynamischen Gleichgewicht der Hohlraumstrahlung von den tatsächlichen Absorptions- und Emissionsraten absehen kann. Einstein war der erste, der diese Prozesse berücksichtigte [Ein17]. Er ging bei seiner Ableitung von folgenden Voraussetzungen aus:

1. Die relativen Besetzungszahlen P_n diskreter Atomzustände folgen im thermodynamischen Gleichgewicht der Boltzmann-Verteilung

$$P_n = g_n e^{-\frac{E_n}{kT}}. \quad (1.12)$$

g_n ist das statistische Gewicht des betrachteten Zustandes, d.h. im allgemeinen die Multiplizität eines entarteten Zustandes.

2. Die abzuleitende Strahlungsformel muss asymptotisch in das mit klassischer Statistik abgeleitete und experimentell im Limes $T \rightarrow \infty$ bestätigte Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz einmünden

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT, \quad (1.13)$$

sowie für $T \rightarrow 0$ in das empirisch bestätigte Wiensche Gesetz

$$\rho = \alpha \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (1.14)$$

ρ ist die Strahlungsenergie pro Volumen- und Frequenzeinheit. Bezüglich des Rayleigh-Jeans-Gesetzes erinnern wir daran, dass $8\pi\nu^2/c^3$ gleich der Anzahl der Eigenschwingungen eines Hohlraums pro Volumen- und Frequenzeinheit ist, wobei jede Eigenschwingung im statistischen Mittel den thermischen Energieinhalt kT hat.

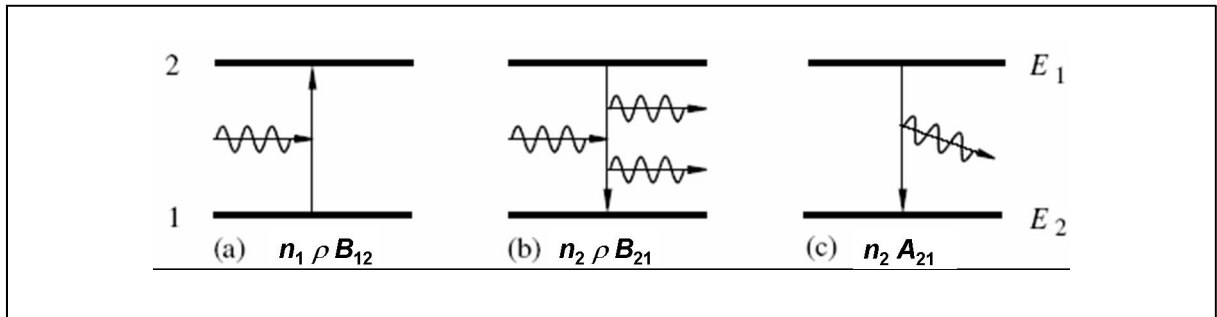


Abb. 1.4: Schema der Wechselwirkung eines Strahlungsfeldes $\rho(\nu)$ mit einem 2-Niveau System. Es treten (a) Absorptions- und (b) induzierte Emissionsprozesse auf, aber auch (c) spontane Emissionsprozesse, die nicht vom Strahlungsfeld abhängen. N_1 und N_2 sind die Besetzungszahlen der Atome in den Zuständen E_1 und E_2 und B_{12} , B_{21} und A_{21} sind die Einstein-Koeffizienten für Absorption, stimulierte und spontane Emission.

Auch Planck war bei der Ableitung seines Strahlungsgesetzes vom Rayleigh-Jeans-Gesetz ausgegangen und hatte dann durch Einführung der Quantenhypothese sein Gesetz finden und die Brücke zum Wienschen Gesetz schlagen können. Einstein kommt aber mit den folgenden heuristischen Annahmen über die Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld und Atom viel schneller zum Ziel.

1. Zwischen den (nach Bohr) diskreten Energiezuständen E_2 und E_1 ($E_2 > E_1$) können zwei Typen von Strahlungsübergängen erfolgen, nämlich: Aus dem energetisch höheren Zustand E_2 sei eine spontane Emission in den niedrigeren möglich, die zeitlich einem statistischen, dem radioaktiven Zerfall analogen Gesetz folgt:

$$dN_2 = -A_{21}N_2 dt. \quad (1.15)$$

Dabei ist N_2 die Zahl der angeregten Atome und A_{21} die spontane Zerfallsrate oder der Einsteinsche A -Koeffizient. Bezogen auf das einzelne Atom können wir stattdessen auch die Wahrscheinlichkeit definieren, im Zeitintervall zwischen t und $t+dt$ spontan zu zerfallen als

$$dW_{2 \rightarrow 1} = A_{21} dt. \quad (1.16)$$

2. Es soll eine induzierte Absorption und Emission aus dem Strahlungsfeld bzw. in das Strahlungsfeld zurück möglich sein, deren Rate jeweils proportional zur vorhandenen Strahlungsdichte ist

$$\begin{aligned} dW_{1 \rightarrow 2} &= B_{12} \rho dt && \text{induzierte Absorption} \\ dW_{2 \rightarrow 1} &= B_{21} \rho dt && \text{induzierte Emission.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Auch hier wird die Rate ausser durch ρ durch einen, für den betreffenden Übergang charakteristischen Koeffizienten, den Einsteinschen B -Koeffizienten, bestimmt. Diese Prozesse sind in Abb. ?? symbolisiert. Die heuristischen Ansätze (1.17) lehnen sich an das Beispiel des Hertzchen Dipols in der klassischen Elektrodynamik an, dessen Schwingung von einem äusseren, resonanten Strahlungsfeld auch angefacht bzw. gedämpft werden kann, je nach relativer Phasenlage zwischen Dipolschwingung und elektromagnetischer Welle.

Wir fragen jetzt nach derjenigen Strahlungsdichte als Funktion von Temperatur und Frequenz, die mit den Prozessen (1.15)-(1.17) den Gleichgewichtszustand der Boltzmann-Verteilung erhält, d.h. in Summa gleich viele Absorptions- wie Emissionsprozesse erzeugt, also:

$$\underbrace{g_1 e^{-E_1/kT}}_{\sim N_1} B_{12} \rho = \underbrace{g_2 e^{-E_2/kT}}_{\sim N_2} (B_{21} \rho + A_{21}). \quad (1.18)$$

Wir betrachten (1.18) für $T \rightarrow \infty$, wobei die beiden Exponentialfunktionen gleich 1 werden und wegen $\rho \rightarrow \infty$ auch die spontane Emission gegenüber der induzierten vernachlässigbar klein wird; dann folgt

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}. \quad (1.19)$$

(1.19) eingesetzt in (1.18) und aufgelöst nach ρ ergibt

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}/B_{21}}{e^{(E_2-E_1)/kT} - 1}. \quad (1.20)$$

Wenn (1.20) für $T \rightarrow 0$ in das Wiensche Gesetz einmünden soll, dann müssen die Argumente der beiden Exponentialfunktionen gleich sein. Hieraus gewinnt Einstein ohne weitere Voraussetzungen die Bohrsche Beziehung zurück

$$E_2 - E_1 = h\nu. \quad (1.21)$$

Mit (1.21), eingesetzt in (1.20), betrachten wir jetzt noch einmal den Grenzwert $T \rightarrow \infty$ und entwickeln dabei die Exponentialfunktion im Nenner bis zum ersten Glied. Vergleich mit dem Rayleigh-Jeans-Gesetz liefert dann für das Verhältnis der Einstein-Koeffizienten sofort die Einsteinsche Beziehung

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}. \quad (1.22)$$

(1.22) wieder eingesetzt in (1.20) ergibt das Plancksche Strahlungsgesetz

$$\rho(\nu) = \underbrace{\frac{8\pi\nu^2}{c^3}}_{M(\nu): \text{Zahl der Moden}} \underbrace{h\nu}_{\text{Photonen-energie}} \underbrace{\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}}_{\text{therm. Besetzungszahl der Mode}} \quad (1.23)$$

im Intervall $[\nu, \nu + d\nu]$

Diese Aufteilung der Planckschen Formel in die drei Faktoren lässt deutlich ihre Struktur erkennen: der erste Faktor ist die Zustandsdichte, der zweite das Energiequant eines jeden Zustands, der dritte die Anzahl der Quanten, mit denen jeder Zustand im statistischen Mittel besetzt ist.

Bevor wir diese Zusammenhänge im folgenden Abschnitt weiter diskutieren, sei noch auf einige Punkte der Einsteinschen Arbeit aufmerksam gemacht, die in der Literatur nicht so häufig zitiert werden. Zunächst zeigt sich Einstein unbefriedigt darüber, dass er (1.23) nicht aus einer vollständigen Quantentheorie der Strahlung, die die Wechselwirkung zwischen Atom und Photon wirklich beschreibt, ableiten kann, sondern auf Koeffizientenvergleiche angewiesen ist. Insofern sieht er das Problem von der Dynamik her als prinzipiell ungelöst an. Vielmehr „erschließt“ er das Gesetz aus heuristischen Annahmen im Rahmen gültiger statistischer Gesetze. Im zweiten Teil der Arbeit führt er die statistischen Überlegungen fort, indem er bei jedem Strahlungsprozess auch den Impulsübertrag des Photons $h\nu$ auf das Atom mit berücksichtigt, der die Geschwindigkeitsverteilung der Atome beeinflusst. Unter der Annahme, dass

die Strahlungswechselwirkung die einzige zwischen den Atomen sei - dass also gaskinetische Stöße keine Rolle spielen (z.B. betrifft das die heißen, dünnen Gase der Sonnencorona) - kann gezeigt werden, dass die Strahlungswechselwirkung dann und nur dann die Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung der Atome erzeugt, wenn für die Strahlungsdichte das Plancksche Gesetz gilt - ein bemerkenswerter Zusammenhang.

1.3 Konsequenzen der Einsteinschen Beziehungen für das Laserprinzip

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei für das Laserregime sehr wichtige Verhältnisse diskutieren, nämlich

- das Verhältnis aus stimulierter Emission zu stimulierter Absorption und
- das Verhältnis aus stimulierter Emission zu spontaner Emission.

Klarerweise kann eine Verstärkung einer Lichtwelle durch stimulierte Emission in einem Medium nur dann funktionieren, wenn diese die stimulierte Absorption überwiegt. Für ein Gas im thermischen Gleichgewicht ist aber laut (1.18) und (1.19) das Verhältnis gleich

$$\frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} = \frac{B_{21} N_2}{B_{12} N_1} = e^{-(E_2-E_1)/kT} = e^{-h\nu/kT} < 1. \quad (1.24)$$

Ein thermisches Gas schwächt also in jedem Falle die einfallende Welle. Um eine Verstärkung zu erlangen, muss eine Inversion der Besetzungszahlen vorliegen, derart, dass das betrachtete Verhältnis

$$\frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} > 1 \quad (1.25)$$

wird. Bezogen auf die (entarteten) jeweiligen Unterezustände der beteiligten Terme bedeutet dies, dass die des oberen jeder für sich stärker besetzt sein müssen, als die des unteren, oder dass im schlichten zwei-Niveau-System $N_2/N_1 > 1$ sein muss.

Die obige Inversionsbedingung (1.25) ist zwar notwendig, aber keineswegs hinreichend für den Lasereinsatz. Vielmehr muss sich die stimulierte Emission nicht nur gegen die Absorption, sondern auch gegen die Konkurrenz der spontanen Emission durchsetzen. Hierzu wird ein gewisser, minimaler Schwellenwert der Inversion verlangt, der im einzelnen später abgeleitet wird. Wir können uns aber an dieser Stelle schon ein Bild darüber machen, wie das Verhältnis aus stimulierter zu spontaner Emission im Falle der Hohlraumstrahlung, also im thermischen Gleichgewicht, aussieht. Wir betrachten die induzierte sowie die spontane Emissionsrate (Γ_i bzw. Γ_s) eines einzelnen Atoms, das sich innerhalb des Hohlraums befindet. Hierfür erhalten wir aus dem Einsteinschen Ansatz und der Planckschen Strahlungsformel (im folgenden gelte immer $B_{21} = B$ und $A_{21} = A$)

$$\frac{B\rho}{A} = \frac{B \left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \right)}{\frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu B_{21}} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \bar{n}_{\text{therm}}. \quad (1.26)$$

\bar{n}_{therm} war aber gerade der dritte Faktor in (1.23), also die statistische mittlere Besetzungszahl des betreffenden Eigenzustands der Frequenz des Hohlraums, die auch Entartungsparameter genannt wird. Die induzierte Emission überwiegt also im Bereich $\bar{n}_{\text{therm}} > 1$, d.h. dann, wenn im Mittel jeder Schwingungsmodus mit mehr als einem Quant besetzt ist. Dazu muss, gesprochen, die thermische Energie kT größer als die Quantenenergie $h\nu$ sein.

EXKURS: Wirkungsquerschnitt

Die Wahrscheinlichkeitsdichte (Einheit: 1/s) für die Absorption eines Photons aus einer Mode einer Cavity mit Volumen V die n Photonen enthält ist gegeben durch

$$P_{ab} = n \cdot \frac{c}{V} \cdot \sigma(\nu) = \Phi \cdot \sigma(\nu) = P_{ind} = W_i$$

mit dem Wirkungsquerschnitt $\sigma(\nu)$ und der Photonenflussdichte Φ in Photonen/sek cm^2 . Analog ist die Wahrscheinlichkeit für die spontane Emission gegeben durch $P_{sp} \frac{c}{V} \sigma(\nu)$ und damit $P_{sp} + P_{ind} = (n + 1) \cdot \frac{c}{V} \cdot \sigma(\nu)$. Der Integrale Wirkungsquerschnitt

$$S = \int_0^\infty \sigma(\nu) d\nu$$

wird als Übergangsstärke oder Oszillatorenstärke bezeichnet. Die spektrale Form, das Linienprofil des Übergangs separiert man üblicherweise ab

$$\sigma(\nu) = S \cdot g(\nu)$$

mit $S = \int_0^\infty \sigma(\nu) d\nu = 1$. Gewöhnlich ist $\sigma(\nu)$ eine scharfe Funktion um eine Zentralfrequenz ν_0 . Die Breite $\Delta\nu$ der Spektralfunktion g muss umgekehrt proportional zum Zentralwert sein, weil sie auf 1 normiert ist.

$$\Delta\nu \propto \frac{1}{g(\nu_0)}$$

Zu berücksichtigen ist ferner, dass das Dipolmoment des Atoms und die Feldrichtung der Mode einen beliebigen Winkel Θ bilden können. Räumliche Mittelung ergibt

$$\langle \sigma(\nu) \rangle_{span} = \bar{\sigma}(\nu) = \sigma_{\max} \langle \cos^2 \Theta \rangle_{\text{Raum}} = \frac{1}{3} \sigma_{\max}$$

Die spontane Emissionswahrscheinlichkeitsdichte stellt sich dann als Integral der Wahrscheinlichkeit der Emission über alle Moden des Volumens V dar.

$$P_{sp} = \int_0^\infty \left[\frac{c}{V} \cdot \bar{\sigma}(\nu) \right] V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{8\pi}{\lambda^2} \bar{S} = \frac{1}{t_{sp}}$$

Wobei wir uns den Umstand zu nutze machen, dass die spektrale Modendichte $M(\nu)$ nur langsam mit ν variiert und $\bar{\sigma}(\nu)$ demgegenüber eine scharfe Frequenz ν_0 herauspräpariert. Deshalb kann man $M(\nu)$ mit $M(\nu_0)$ annähern. Damit folgt

$$\bar{\sigma}(\nu) = \bar{S} \cdot g(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi t_{sp}} g(\nu)$$

Die Lorentzverteilung hat bei ν_0 einen Wert von $\frac{2}{\pi \Delta\nu}$ und mit dem Zusammenhang $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi t_{sp}}$ erhalten wir:

$$\bar{\sigma}_0(\nu) = \bar{\sigma}(\nu_0) = \frac{\lambda^2}{2\pi}$$

Der maximale Wirkungsquerschnitt ist also von der Größenordnung des Quadrats der Wellenlänge. Anschließend sei noch darauf hingewiesen, dass σ als Funktion von ω lautet:

$$\sigma(\omega) = \frac{\lambda^2}{4t_{sp}} S(\omega)$$

und die Relation $\sigma(\omega) = 2\pi\sigma(\nu)$ und $g(\omega) = \frac{1}{2\pi}g(\nu)$ bestehen.

- Bei Zimmertemperatur beträgt kT ungefähr 25 meV, die Energie eines Lichtquants im optischen Bereich aber etwa 2,5 eV. Der Entartungsparameter ist demnach $\bar{n}_{\text{therm}} \approx e^{-100}$, d.h. ein Hohlraum ist bei Zimmertemperatur für das Auge in der Tat absolut schwarz.
- Selbst im sichtbaren Sonnenlicht, emittiert bei Temperaturen um 6000°K, ist \bar{n}_{therm} immer noch kleiner als 1% (Lichtquellen mit $\bar{n}_{\text{therm}} > 1$ haben für das Auge offensichtlich verheerende Blendwirkung; das erklärt die Gefährlichkeit des Lasers).
- Ganz anders liegen die Verhältnisse im Mikrowellengebiet (z.B. beim Maser). Bei einer Frequenz von 5 GHz beträgt die Quantenenergie nur ca. $2 \cdot 10^{-5}$ eV. Für den Entartungsparameter gilt dann $\bar{n}_{\text{therm}} \approx 10^3$. Entsprechend drastisch sind die Unterschiede im Rauschen: im Mikrowellengebiet, wie auch natürlich im ganzen Radiogebiet, dominiert die thermische Strahlung als Rauschquelle; es lohnt sich also, Empfänger zu kühlen. Im optischen Gebiet dagegen ist die spontane Emission die einzige ernst zu nehmende Rauschquelle.

Wir betrachten jetzt noch die totale Emissionswahrscheinlichkeit

$$\Gamma_{\text{tot}}^E = \Gamma_i + \Gamma_s = \rho B + A = A(\bar{n} + 1) \quad (1.27)$$

wobei in der letzten Gleichung B mit Hilfe von (1.26) eliminiert wurde. In der Klammer vertritt jetzt \bar{n} die induzierte und 1 die spontane Emission.

Wir interessieren uns im Folgenden statt für einen abstrakten, beliebig großen Hohlraum für einen ganz konkreten Hohlraumresonator, dessen Volumen V das strahlende Lasermedium einschliessen soll, und es geht jetzt darum, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Lichtquant in eine ganz bestimmte Eigenschwingung (engl.: mode) emittiert wird. Hierzu nehmen wir an, das Medium emittiere mit einer Spektralfunktion $S(\nu)$, deren Maximum auf 1 normiert sei (siehe Abb. 1.5). Wir müssen zunächst die Zahl der Moden Z bestimmen, die unter der Spektralfunktion liegen, d.h. in die hinein Emission erfolgen kann. Wir erhalten sie aus der Faltung der Zustandsdichte $dZ/d\nu$ des realen Resonators mit der Spektralfunktion $S(\nu)$

$$Z = \int \frac{dZ}{d\nu} S(\nu) d\nu. \quad (1.28)$$

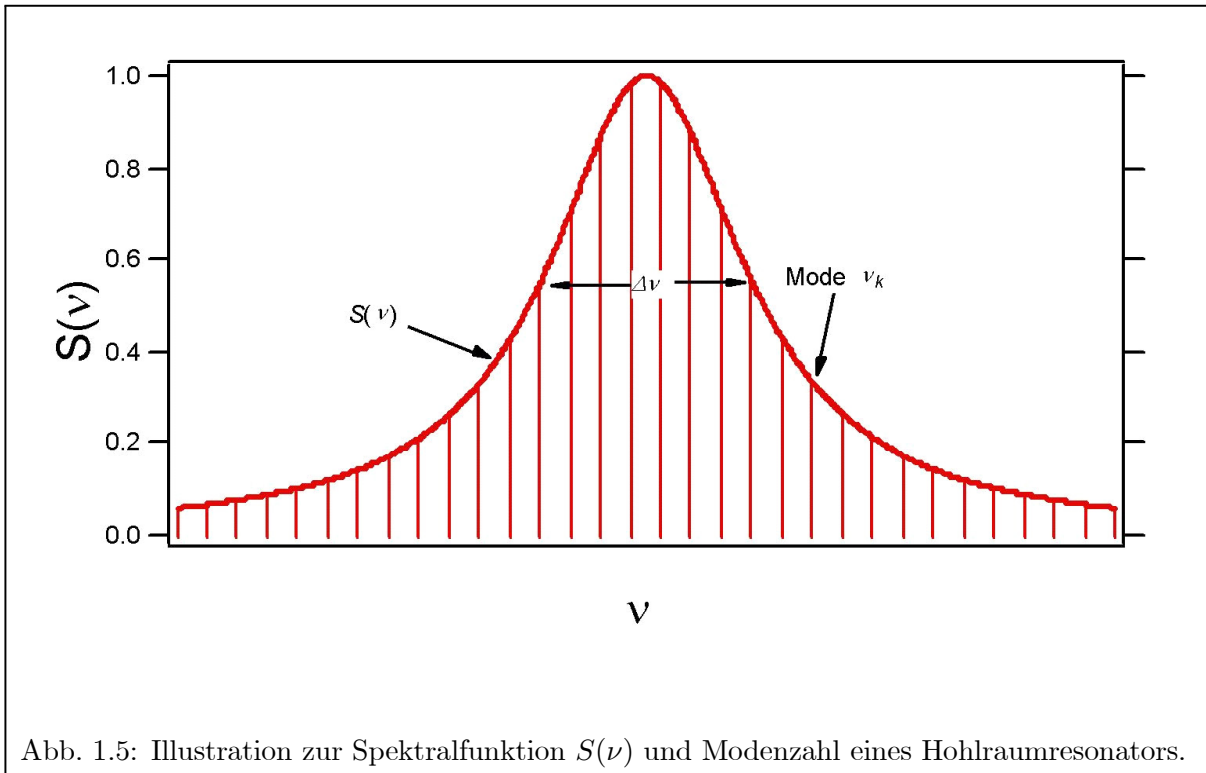
War $M(\nu) = 8\pi\nu^2/c^3$ die Zustandsdichte pro Volumeneinheit, so erhalten wir diejenige des realen Resonators durch Multiplikation mit seinem Volumen V :

$$\frac{dZ}{d\nu} = M(\nu) V = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V. \quad (1.29)$$

Bei $V = 1 \text{ cm}^3$ beträgt sie im optischen Bereich ungefähr 1 pro Hertz. Selbst bei den scharfen optischen Spektrallinien passen also noch immer sehr viele Moden unter die Linienbreite, und es war daher gerechtfertigt, in (1.28) die Summation durch das Integral zu ersetzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Photonen in einen ganz bestimmten Mode k mit der Frequenz ν_k emittiert werden, ist dann gegeben durch

$$\Gamma_k^E(\nu_k) = \frac{A(n_k + 1)S(\nu_k)}{Z}. \quad (1.30)$$

Statt des statistischen Mittels \bar{n} wurde jetzt die jeweilige Besetzungszahl n_k des Modes k eingesetzt. Da Z proportional zu V ist, sieht man, dass $\Gamma_k^E(\nu_k)$ über das Verhältnis n_k/V proportional zur Energiedichte im betreffenden Resonatormode ist, wie erwartet. Ausserdem ist $\Gamma_k^E(\nu_k)$ nach Voraussetzung proportional zur Spektralfunktion. Je größer das Resonatorvolumen ist, auf umso



mehr Moden verteilt sich die Emission, deren Gesamtrate Γ^E , die Summe über alle Γ_k^E , davon allerdings unberührt bleibt.

Als Beispiel einer Spektralfunktion führen wir die Lorentzkurve an, deren Breite $\Delta\nu = A/2\pi$ nur durch die Strahlungsdämpfung A gegeben sei und erhalten (mit $\nu_0 \gg \Delta\nu$)

$$Z = \int \frac{dZ}{d\nu} \frac{d\nu}{1 + \left(\frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu}\right)^2} \approx \frac{2\pi\nu_0^2}{c^3} A \cdot V. \quad (1.31)$$

In (1.30) hebt sich A damit heraus. Die spezielle Situation des Lasers besteht nun darin, dass die stimulierte Emission nur in einen oder wenige Resonanzmoden erfolgt in Konkurrenz zur spontanen Emission in alle übrigen.

1.4 Das Kohärenzvolumen aus quantenmechanischer Sicht

Geht man vom klassischen Feld zum Feld der Lichtquanten über, so kann man das Kohärenzvolumen im Sinne der Quantenstatistik umdeuten, indem man den Phasenraum betrachtet, den die im Kohärenzvolumen eingeschlossenen Lichtquanten einnehmen. Da wir ein schlankes, quasimonochromatisches Bündel betrachten, ist in erster Näherung die Impulsunschärfe in Ausbreitungsrichtung z (siehe Abb. 1.3) nur durch die spektrale Unschärfe gegeben, während die transversalen Komponenten um ihren vollen, durch den Öffnungswinkel begrenzten Wert schwanken. Wir haben also

$$\Delta p_z \approx \frac{h\Delta\nu}{c} \quad (1.32)$$

und

$$\Delta p_x \approx \Delta p_y \approx \frac{h\Delta\nu}{c} \Delta\alpha \approx \frac{h\nu_0}{c} \frac{\Delta l}{R}. \quad (1.33)$$

Somit erhalten wir für das eingenommene Phasenraumvolumen $\Delta\Phi$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= (\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z) (\Delta V) \\ &\approx \left(\frac{h^3 \nu_0^2}{c^3} \left(\frac{\Delta l}{R} \right)^2 \Delta\nu \right) \left(\frac{c}{\Delta\nu} \lambda_0^2 \left(\frac{R}{\Delta l} \right)^2 \right) = h^3 \end{aligned} \quad (1.34)$$

In der Quantenstatistik ist aber h^3 die Größe einer Phasenzelle. Alle Teilchen in der gleichen Phasenzelle sind also im gleichen Quantenzustand und in diesem Sinne ununterscheidbar.

Statt einer strahlenden Fläche betrachten wir jetzt ein strahlendes Volumen V und bestimmen den Gesamtphasenraum, in den diese Lichtquelle emittiert, also unter Einschluss des vollen Raumwinkels $\Omega = 4\pi$. Das Licht sei weiterhin quasimonochromatisch mit der spektralen Breite $\Delta\nu$. Der eingenommene Impulsraum ist daher durch den Inhalt der Kugelschale

$$\Delta V_p = 4\pi p_0^2 \Delta p \approx \frac{4\pi h^3 \nu_0^2}{c^3} \Delta\nu \quad (1.35)$$

gegeben. Multipliziert mit dem Ortsraum V und einem weiteren Faktor 2, der die beiden unabhängigen Polarisationsrichtungen des Lichts als unabhängige Freiheitsgrade berücksichtigt, ergibt sich

$$\Delta\Phi \approx h^3 \frac{8\pi \nu_0^2}{c^3} \Delta\nu V = h^3 Z'. \quad (1.36)$$

Die Zahl Z' der eingenommenen Phasenzellen ist de facto identisch mit der Zahl Z der im Volumen V und Frequenzintervall $\Delta\nu$ zur Verfügung stehenden Eigenschwingungen eines Hohlraumresonators ((1.28) bis (1.31)); man berücksichtige, dass (1.35) nur eine Abschätzung und keine exakte Integration über die Impulsunschärfe war. Für den Laser können wir aus (1.36) folgende Konsequenzen ziehen:

Die Laserwirkung durch stimulierte Emission wird im wesentlichen nur eine Phasenzelle betreffen und sich gegen die Konkurrenz der spontanen Emission in alle Z' durchsetzen müssen. Zahlenmäßig ist dieses Ergebnis das gleiche, wie in Abschnitt 1.3 abgeleitet; jedoch ist die Betrachtungsweise viel allgemeiner. Es kommt in der Tat nicht auf das Resonatorvolumen, sondern nur auf das Volumen des Lasermediums an. Das erstere kann ohne weiteres größer sein als das letztere. Die Zahl Z ist dann zwar größer als Z' ; das Anwachsen der Resonatormoden wird aber vom Lasermedium gar nicht unterschieden; es fallen dann eben mehrere Resonatormoden in die gleiche Phasenzelle des Lasermediums und tragen daher auch mit der Summe ihrer Lichtquanten kohärent zur stimulierten Emission bei. Am Schwellenwert wird sich dadurch nichts ändern. Es ist natürlich auch unerheblich, ob der Resonator geschlossen ist, oder nur von kleinen Spiegeln im interessanten Raumwinkelbereich des Laserstrahls gebildet wird, die die für die stimulierte Emission in Frage kommenden Modes selektieren; denn dass die Gesamtrate der konkurrierenden, spontanen Emission unabhängig vom Resonatorvolumen ist, hatten wir schon in Abschnitt 1.3 gezeigt. Mit (1.36) zeigen wir darüber hinaus, dass die spontane Emission überhaupt unabhängig von der Existenz eines Resonators ist, wie es auch der Einsteinschen Grundannahme über den A -Koeffizienten entspricht (Voraussetzung ist allerdings, dass ein eventueller Resonator groß genug ist, damit genügend Modes innerhalb der natürlichen Linienbreite liegen, andernfalls kann das Fehlen einer passenden Resonatormode in der Tat die spontane Emission unterdrücken und die Lebensdauer eines atomaren Zustandes beeinflussen). Aber auch für die Laserwirkung ist der Resonator im Prinzip nicht notwendig; denn die stimulierte Emission könnte sich bei geeigneten Voraussetzungen auch ohne die Rückkopplung durch die Spiegel in einer Phasenzelle des Lasermediums durchsetzen und dort lawinenartig anwachsen (Superradianz, siehe später).

1.4.1 Zusammenhang zwischen Energie und Phase einer Lichtwelle

Die Quantentheorie des Lichts liefert über die Unschärferelation einen Zusammenhang zwischen Energie und Phase einer Lichtwelle. Sei die mittlere Energie im Kohärenzvolumen gegeben durch eine mittlere Anzahl von Photonen \bar{n}

$$\bar{E} = \bar{n}\hbar\omega \quad (1.37)$$

dann beträgt deren Schwankung

$$\Delta E = \Delta\bar{n} \hbar\omega = \sqrt{\bar{n}}\hbar\omega. \quad (1.38)$$

Aus der Unschärferelation $\Delta E \Delta t \approx \hbar$ folgt dann mit der Kohärenzzeit $t_c = \Delta t$ als Zeitunschärfe

$$\Delta E \Delta t = \Delta\bar{n} \hbar\omega \Delta t = \Delta\bar{n} \hbar \Delta\varphi \approx \hbar \quad (1.39)$$

und daraus

$$\Delta\varphi \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}. \quad (1.40)$$

Von einer definierten Phase kann man also nur bei entartetem Licht sprechen, also in der Regel nur bei Laserlicht. Bei thermischen Lichtquellen, einschließlich aller Typen von Spektrallampen, bei denen der Entartungsparameter sehr viel kleiner als 1 ist, wird man daher auch keine Schwebung beobachten können, selbst dann nicht, wenn das Licht beliebig monochromatisch, die Kohärenzlänge also beliebig lang sein sollte.

Die Herleitung von (1.40) schaut wie ein Taschenspielertrick aus, ist aber keiner. In der Quantenelektrodynamik kann man zeigen, dass Quantenzahl und Phase kanonisch konjugierte Variable des Lichtfelds sind. Zusammenfassend können wir feststellen, dass sich das Lichtquantenfeld bezüglich seiner Fluktuationen bei hohem Entartungsgrad wie ein klassisches Wellenfeld verhält, wie es auch das Korrespondenzprinzip verlangt. Da bei den meisten Fragestellungen der Laserphysik immer hohe Quantenzahlen im Spiel sind, genügt daher in der Regel eine semi-klassische Behandlung, bei der zwar die Zustände der Lasermaterie, nicht aber das Lichtfeld quantisiert werden.

Kapitel 2

Zur Dynamik des Lasers

2.1 Grundlegende Prinzipien des Lasers

Laser ist ein Akronym für "Light **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation". Es leitet sich von seinem Vorgänger, dem Maser ("Microwave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation") ab, der erstmals im Jahre 1954 von C.H. Townes und Mitarbeitern realisiert wurde [Gor54]. Es handelt sich um Oszillatoren, die durch Rückkopplung (Feedback) eines optischen bzw. eines Mikrowellenverstärkers entstehen und sie besitzen eine enge Analogie zu einem elektronischen Verstärker, der durch positive Rückkopplung zu Schwingungen angeregt wird. Die Oszillationsfrequenz wird durch den Frequenzgang von Verstärkung und Rückkopplung bestimmt. Es ist klar, dass ein solcher Verstärker nur anschwingen kann, wenn die Verstärkung größer wird als die Verluste

$$\text{Oszillationsbedingung: Verstärkung} \geq \text{Verluste.} \quad (2.1)$$

Die Grundlage von MASER und LASER ist der Prozess der stimulierten Emission. Wenn es auf irgendeine Weise gelingt, dass sich für einen optischen Übergang $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ mehr Atome im angeregten Zustand $|2\rangle$ befinden als im Grundzustand $|1\rangle$ (Inversion), so werden Photonen der Resonanzfrequenz beim Durchgang durch das Medium in geringerem Maße absorbiert, als sie durch den Prozess der stimulierten Emission vermehrt werden. Um diesen Effekt zu verstärken, kann man in einem optischen Resonator die produzierten Photonen wieder und wieder durch das Verstärkungsmedium laufen lassen. Es kommt in diesem Fall zum typischen exponentiellen Anwachsen der Photonenzahl.

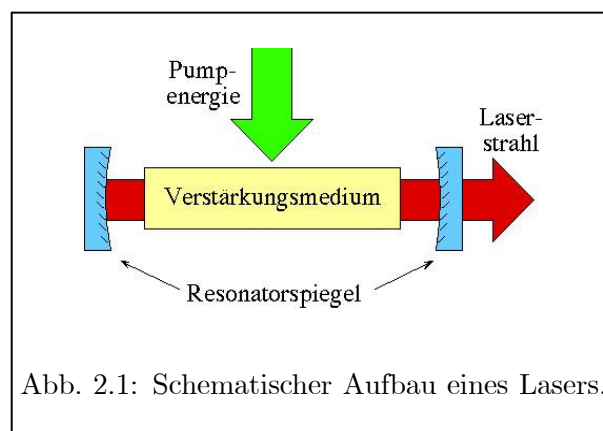


Abb. 2.1: Schematischer Aufbau eines Lasers.

Damit haben wir die wesentlichen Komponenten eines Lasers, wie sie in Abbildung 2.1 dargestellt sind, bereits genannt: Benötigt werden

(a) ein optisches Verstärkungsmedium

Wenn im optischen Medium eine Besetzungsinversion vorliegt, d.h. wenn $N_2 > N_1$, $E_2 > E_1$ ist, wird die Rate der stimulierten Emission $B\rho N_2$ größer als die Absorptionsrate $B\rho N_1$. Unter diesen Umständen wird ein Lichtstrahl der mit der Resonanzfrequenz durch das Medium tritt nicht abgeschwächt sondern verstärkt. Das Verstärkungsmedium kann ein Gas, ein Kristall oder

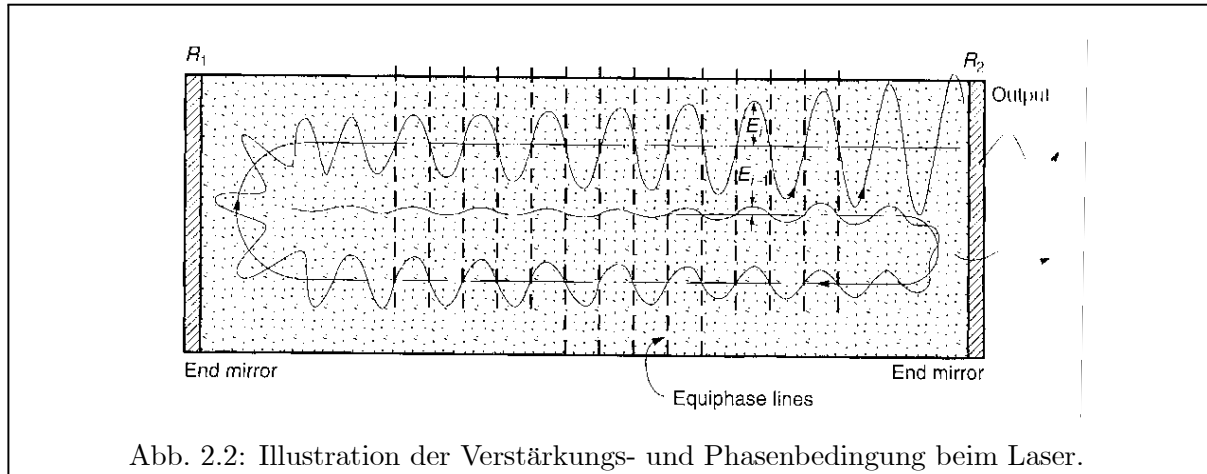


Abb. 2.2: Illustration der Verstärkungs- und Phasenbedingung beim Laser.

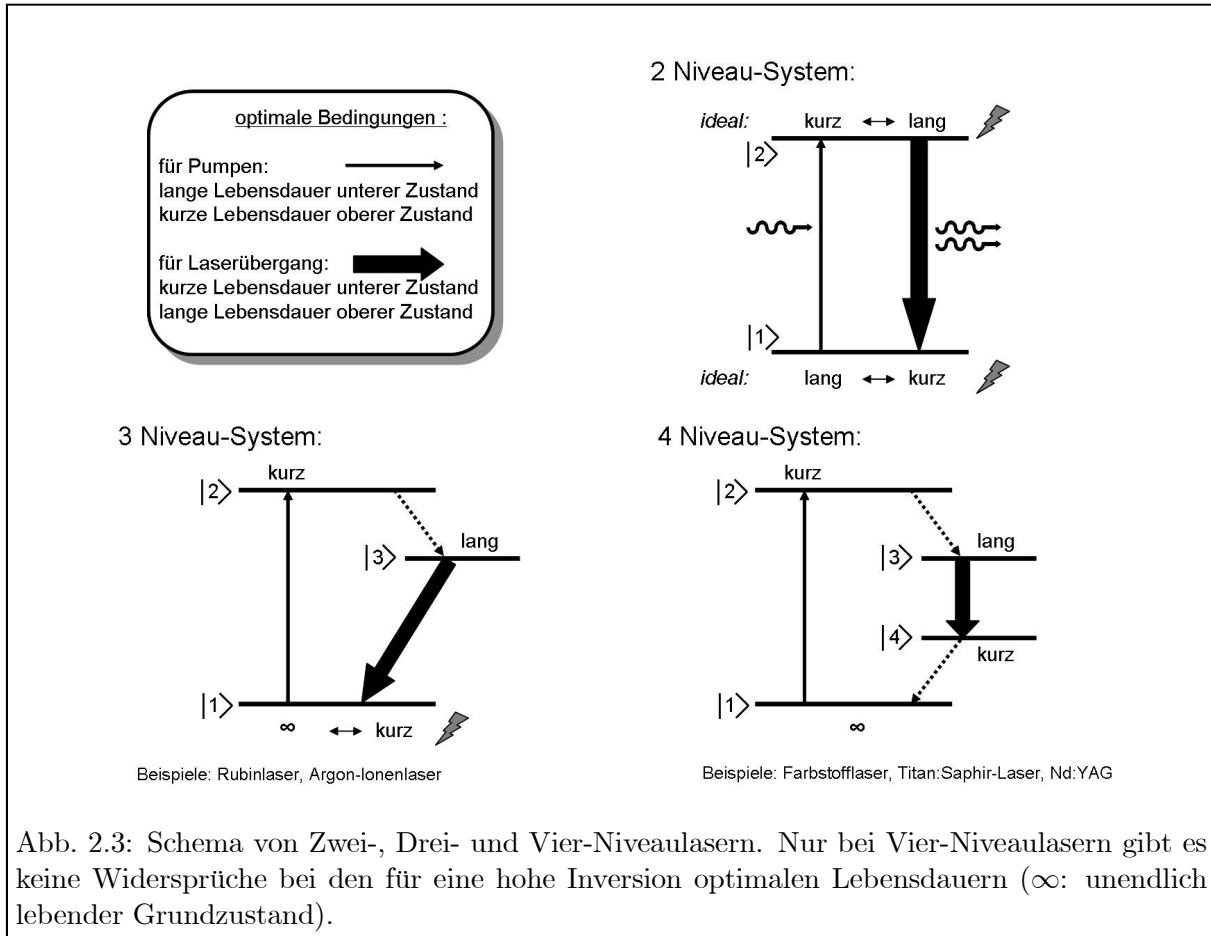
eine Flüssigkeit sein. Wir werden in den nächsten Kapiteln einige häufig verwendete Typen kennenlernen.

(b) ein Prozess der die Inversion erzeugt (Pumpe)

Die Inversion ist eine nicht-thermische Besetzungsverteilung, denn nach der Boltzmannverteilung im thermischen Gleichgewicht ist die Besetzungszahl $N(E) \propto e^{-E/kT}$ der niederenergetischen Zustände immer größer als die der höher energetischen Zustände. Um dieses Nichtgleichgewicht aufrecht zu erhalten muss ständig Energie in das Verstärkungsmedium eingebracht werden. Dazu können beispielsweise Blitzlampen, elektrischer Strom oder die Strahlung leistungsstarker anderer Laser (Pumplaser) verwendet werden.

(c) ein optischer Resonator

In der Regel ist die Verstärkung beim einfachen Durchgang durch das Verstärkungsmedium sehr klein. Aus diesem Grunde verwendet man Resonatoren, die das Licht vielfach durch das Verstärkungsmedium laufen lassen und für eine positive Rückkopplung sorgen. Dadurch wird der Verstärker zum Oszillator. In Analogie zum elektrischen Oszillator in dessen Rückkopplungskreis man ein Filter einbaut um die Oszillationsfrequenz festzulegen, können frequenzselektive Elemente im Resonator zur Festlegung der Laserwellenlänge dienen. Mit dem optischen Resonator kommt eine zweite Bedingung ins Spiel: Das durch die Spiegel zurückgekoppelte Licht muss die richtige Phase besitzen. Beide Bedingungen sind schematisch in Abbildung 2.2 dargestellt. Wir wollen dies später mathematisch genauer fassen. Zunächst betrachten wir aber verschiedene Niveausysteme und ihre Eignung für den Laserbetrieb. Zunächst betrachten wir aber verschiedene Möglichkeiten eine Inversion zu erzeugen.



2.2 Laserschemata

Voraussetzung für die Laseraktion ist eine Inversion der Zustände, zwischen denen der Laserübergang stattfinden soll. Der Laser arbeitet um so effektiver, je höher diese Inversion ist. Um eine hohe Inversion zu erhalten, sollte der Einsteinkoeffizient A des oberen Laserniveaus klein sein, damit die spontane Emission nicht zu Verlusten führt. Das heißt, die Lebensdauer τ des oberen Laserniveaus sollte lang sein. Das untere Laserniveau sollte für eine hohe Inversion möglichst wenig besetzt, d.h. seine Lebensdauer kurz sein.

Andererseits ergeben sich für den Pumpprozess andere Anforderungen. Für die Erzeugung der Inversion kommen viele Methoden in Betracht die wir später noch näher kennen lernen werden. Eine der wichtigsten ist die optische Anregung durch das Pumpen mit einem leistungsstarken Laser oder einer intensiven Blitzlampe. Das Niveau, in das gepumpt wird, soll natürlich möglichst effektiv besetzt werden. Deshalb sollte die Absorption aus dem Grundzustand, also $B\rho$, möglichst groß sein. Dies bedeutet, ein großer Einsteinkoeffizient B günstig ist. Dann ist auch der Koeffizient A groß und damit die Lebensdauer τ des angeregten Zustandes kurz. Das untere Pumpniveau sollte eine möglichst lange Lebensdauer besitzen, damit die darin befindliche Population erhalten bleibt und effizient in das obere Pumpniveau angeregt werden kann. In Abbildung 2.3 ist die Vereinbarkeit dieser Anforderungen für verschiedene mögliche Niveauschemata dargestellt.

2.2.1 Zwei-Niveau Laser

Bei einem Zwei-Niveau-System sind nicht alle Bedingungen gleichzeitig erreichbar. Dies ist in Abbildung 2.3 oben rechts gezeigt. Sowohl im unteren wie im oberen Niveau gibt es Widersprüche zu den obigen Forderungen. Deshalb existieren keine echten Zwei-Niveau-Laser. Die Unmöglichkeit einer Inversion ergibt sich auch aus den Ratengleichungen des Zwei-Niveau-Systems, die sich gemäß den Gleichungen (1.15) und (1.17) ergeben. Für die Änderung der Besetzungszahl des oberen Zustandes gilt nämlich

$$\dot{n}_2 = -n_2 B \rho + n_1 B \rho - n_2 A. \quad (2.2)$$

Die Pumplichtquelle kann die Zahl der Atome im oberen Zustand nur solange erhöhen, bis das Gleichgewicht $\dot{N}_1 = -\dot{N}_2$ erreicht und dementsprechend

$$n_2(B\rho + A) = n_1 B \rho \quad (2.3)$$

ist. Für das Verhältnis der Atomzahl im Grund- und im angeregten Zustand folgt daraus

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{B\rho + A}{B\rho} = 1 + \frac{A}{B\rho} \geq 1 \xrightarrow{B\rho \rightarrow \infty} 1. \quad (2.4)$$

Der Übergang zu sehr hohen Laserleistungen ist gleichbedeutend mit einem sehr großem Produkt $B\rho$. Daraus ist ersichtlich, dass auch bei beliebig hoher Intensität des Pumplasers maximal eine Gleichbesetzung der beiden Niveaus erfolgen kann, aber keine Inversion! Das Medium sättigt und wird für den Pumplaserstrahl transparent, weil auf jede Absorption eine stimulierte Emission kommt. Daher wird der Energieeintrag in das aktive Medium ineffizient.

Wenn dennoch gelegentlich von einem "Zwei-Niveau-Laser" gesprochen wird, so meint man damit ein System bei dem der Laserübergang zwischen einem angeregten und dem Grundzustand stattfindet. Allerdings ist dann immer noch ein drittes Niveau wenigstens am Pumpmechanismus beteiligt wie es in Abb. 2.3 als 3-Niveausystem gezeigt ist.

2.2.2 Drei-Niveau-Laser

Bei einem Drei-Niveau-System gibt es einen Widerspruch zu obigen Forderungen entweder im Grundzustand oder in dem Zustand, in den gepumpt wird. Dies ist in Abbildung 2.3 links unten für den ersten Fall illustriert. Der "echte" Drei-Niveau-Laser unterscheidet sich dann von diesem "Quasi-Zwei-Niveau-Laser" nur dadurch, dass der Laserübergang zwischen den beiden angeregten Zuständen erfolgt, also von 2 nach 3. Das hat den Vorteil, dass man den Grundzustand nicht invertieren muss. Vielmehr kommt es nur darauf an, dass die Atome aus dem unteren Laserniveau 3 möglichst rasch in den Grundzustand zurückfallen, damit auf diese Weise die Inversion bezüglich Niveau 2 gewährleistet wird. Jetzt ergibt sich aber ein Widerspruch für Niveau 2, denn dies soll einerseits möglichst kurzlebig sein, damit wir effizient pumpen können, als oberes Laserniveau sollte es aber eine relativ lange Lebensdauer besitzen damit wir die Inversionsbesetzung speichern können.

Drei-Niveau-Laser lassen sich daher bei optischer Anregung nur gepulst realisieren (z.B. Rubinlaser) oder als Dauerstrichlaser, wenn die Anregung nichtoptisch erfolgt (Argon-Ionen-Laser). Ein Beispiel eines "Quasi-Zwei-Niveau"-Lasers ist der Rubinlaser ($\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$). Rubin hat als Lasermedium heute praktisch keine Bedeutung mehr, ist aber interessant, da es das erste Material war, in dem Lasertätigkeit gezeigt wurde.

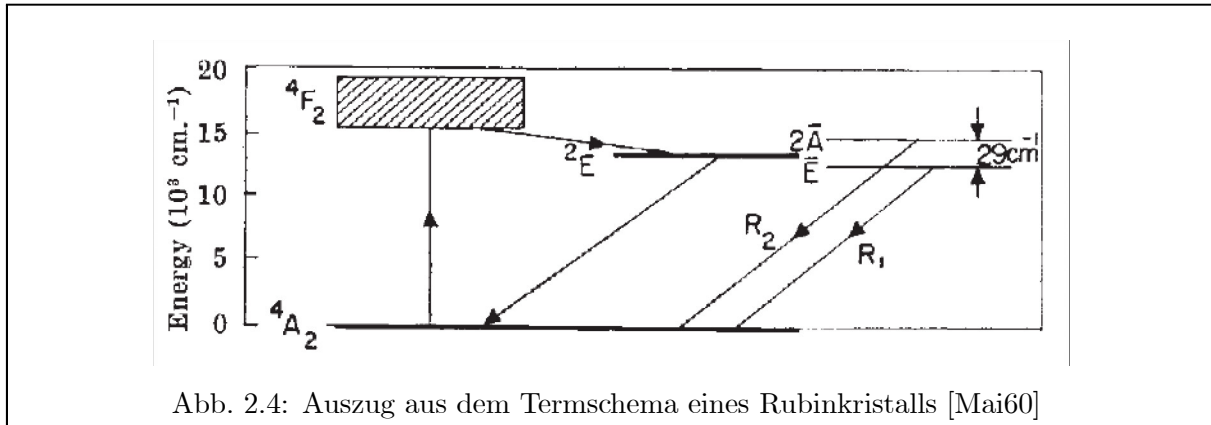


Abb. 2.4: Auszug aus dem Termschema eines Rubinkristalls [Mai60]

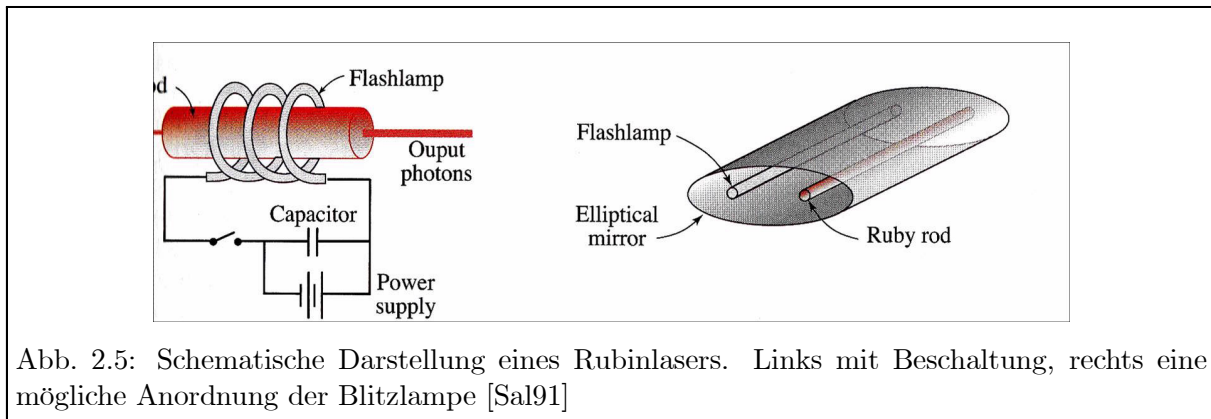


Abb. 2.5: Schematische Darstellung eines Rubinlasers. Links mit Beschaltung, rechts eine mögliche Anordnung der Blitzlampe [Sal91]

2.2.2.1 Der Rubinlaser

Rubin ist ein Al_2O_3 Kristall, bei dem etwa 0,05% der Al-Ionen durch Cr^{3+} -Ionen ersetzt sind. T. Maiman gelang damit im Jahre 1960 erstmals die Demonstration des Lasereffektes. Abbildung 2.4 zeigt einen Ausschnitt aus dem Termschema mit den gruppentheoretischen Symbolen mit denen die Niveaus und Bänder des Kristalls und seiner Wirtsatome bezeichnet werden.

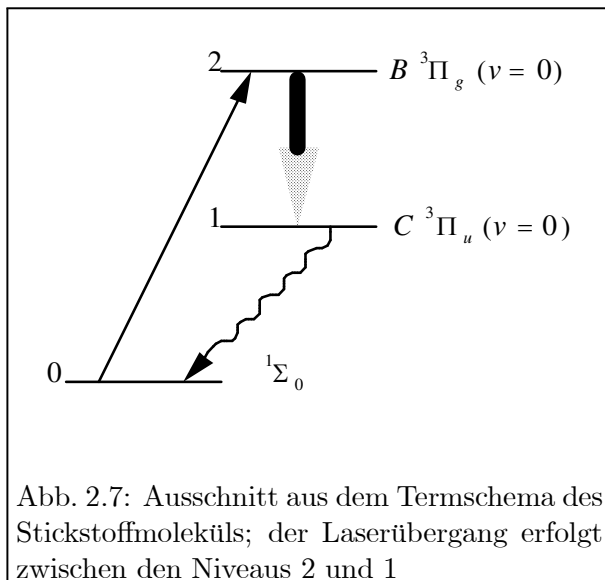
Aus dem $4A_2$ Grundzustand werden die beiden Bänder $4F_2$ und $4F_1$ durch das Licht einer Quecksilberhochdrucklampe angeregt. Innerhalb einer Zeit von etwa 10^{-7} sec finden nicht-radiative Übergänge in die Zustände $2A$ und E statt, die eine lange Lebensdauer von etwa 3 ms haben und wegen des geringen Energieabstandes thermisch relaxieren. Die beiden nachfolgenden radiativen Übergänge in den Grundzustand werden aus historischen Gründen als R_1 - bzw. R_2 -Linien bezeichnet. Um die Besetzungsinversion in den beiden Niveaus $2A$ und E zu erzeugen, ist eine hohe Pumpleistung der Quecksilberhochdrucklampe erforderlich, die deshalb gepulst betrieben wird. Da die beiden Niveaus $4F_2$ und $4F_1$ Bänder sind, wird das Pumplicht in einem relativ breiten Spektralbereich absorbiert, was eine hohe Pumpeffizienz bedeutet. Der schematische Aufbau eines Rubinverstärkers ist in Abbildung 2.5 zu sehen. Das linke Bild zeigt die von Maiman benutzte Geometrie, rechts ist eine effizientere Pumpgeometrie gezeigt, bei der die Blitzlampe und der Rubinstab im Inneren eines reflektierenden elliptischen Zylinders liegen. Der Rubinstab und die Blitzlampe befinden sich jeweils in einem Brennpunkt der Ellipse und das Blitzlampenlicht wird daher effizient in den Rubinstab gekoppelt.

Die beiden Enden des Rubinstabs sind planparallel geschliffen. Abbildung 2.6 [Mai60] zeigt die Intensitäten der beiden Linien R_1 und R_2 bei niedriger und bei hoher Pumpleistung der Quecksilberlampe als Funktion der Wellenlänge. Bei niedriger Pumpleistung ist die Intensität

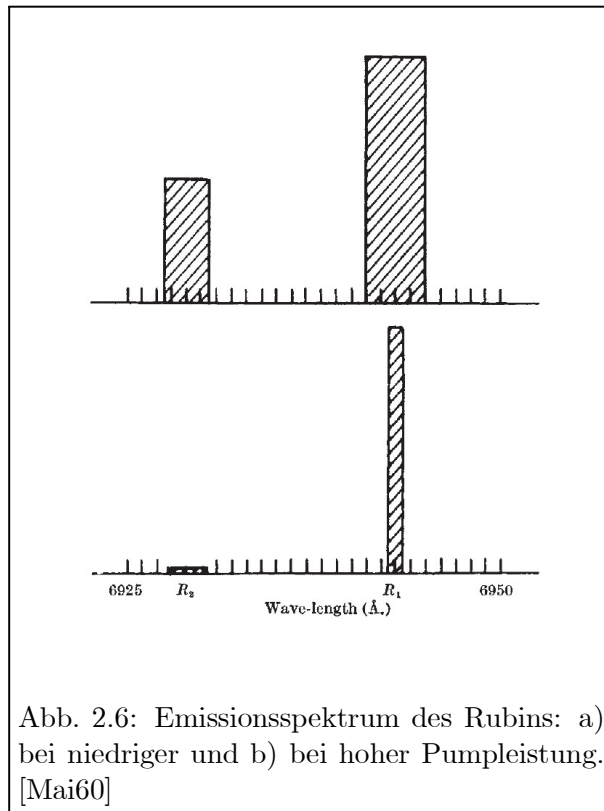
der R_1 -Linie etwa doppelt so groß wie die der R_2 -Linie, und die Linienbreite beträgt ca. 4\AA . Bei hoher Leistung sieht das Spektrum völlig anders aus. Die R_2 -Linie mit unveränderter Breite ist nur noch ganz schwach zu erkennen, und nahezu die gesamte Emission erfolgt stimuliert über die R_1 -Linie mit stark verringerter Breite. Infolge der schnellen thermischen Relaxation der beiden invertierten Zustände schwingt der Laser auf der R_1 - und nicht auf der R_2 -Linie. Maiman drückt in seiner Veröffentlichung über den ersten Laser die später experimentell bestätigte Erwartung aus, dass durch geeignete Modenselektion die Linienbreite um viele Größenordnungen verringert werden kann:

2.2.2.2 Der Stickstofflaser

Als Beispiel für einen "echten" Drei-Niveau-Laser führen wir den bekannten Stickstofflaser an, der früher häufig als Pump laser zur Anregung von gepulsten Farbstofflasern benutzt wurde, heute aber durch die Verfügbarkeit leistungsfähigerer Puls laser selten geworden ist. Das Lasermedium ist *molekularer Stickstoff*, der durch Elektronenstoß aus dem Grundzustand des Moleküls $^1\Sigma_0$ vorzugsweise in einen angeregten Zustand mit der Bezeichnung $C^3\Pi_u(\nu=0)$ angeregt wird (s. Abb. 2.7). Dieser Zustand zerfällt mit einer Lebensdauer von $\tau_2 = 40\text{ ns}$ in ein Zwischenniveau mit der Bezeichnung $B^3\Pi_g(\nu=0)$, das dann seinerseits mit einer Lebensdauer $\tau_1 > \tau_2$ in den Grundzustand zurückfällt.



erfolgen, deren Dauer sehr viel kürzer als $\tau_2 = 40\text{ ns}$ ist. Man muß also die elektrische Leistung durch eine kapazitive Entladung mit minimaler Induktion zuführen. Das ist Abbildung 2.8



Die Elektronenstoßanregung in das obere Niveau ist stärker als in das mittlere, so daß nach einer pulsformigen Anregung eine Inversion zwischen den Niveaus 2 und 1 vorliegt. Allerdings kann diese Inversion nur kurzzeitig nach einer Pulsanregung andauern und nicht im stationären Gleichgewicht bei einer Gleichstromanregung. Im letzteren Fall stehen die Besetzungszahlen im gleichen Verhältnis wie die Lebensdauern der Zustände: $n_2/n_1 = \tau_2/\tau_1$. Dies ist aber in diesem Fall kleiner als eins, und somit liegt keine Inversion vor. Der Laser wird sich also nach einem kurzen Puls durch Abbau der Inversion selbst löschen (*self-termination*). Um stationäre Bedingungen zu vermeiden, muß also die Anregung in einer schockartigen Gasentladung

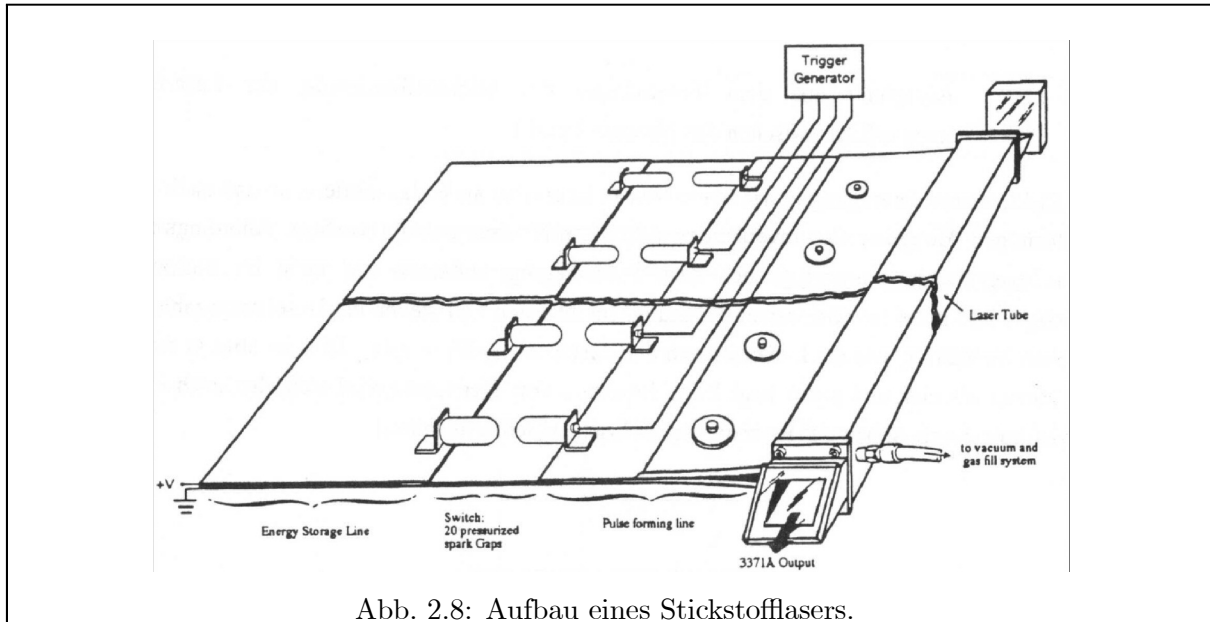


Abb. 2.8: Aufbau eines Stickstofflasers.

gezeigt, die aus der Originalarbeit [Gel68] entnommen ist.

Zwei Kupferbleche mit einer dazwischen liegenden Mylar-Folie bilden einen Kondensator, wobei aber die obere Platte geteilt ist, und die Hälften durch das Zünden einer Reihe paralleler Funkenstrecken leitenden Kontakt bekommen. Je eine Kante der unteren und der rechten oberen Platte sind auseinandergebogen, in das Gasentladungsrohr geführt und bilden dort auf der ganzen Länge des Rohrs die beiden Elektroden. Die untere Platte ist geerdet. Die linke Platte wird jetzt über einen (vergleichsweise langsamen) Schaltkreis, z.B. ein Tyratron, auf ca. 30 kV aufgeladen. Dann werden die Funkenstrecken durch einen Triggerpuls gezündet, die Ladung läuft sehr rasch auf die rechte obere Platte und lädt diesen Kondensator solange auf, bis das Gas im Stickstoffrohr durchbricht und dort ein Plasma zündet. Das Plasma im Stickstoffrohr erhält eine sehr große Leitfähigkeit und kann in wenigen Nanosekunden den rechten Kondensatorteil entladen, da die Induktivität in Folge der sehr kleinen, vom Stromkreis gebildeten Schleife minimal ist. Die nach dem Durchbruch des Lasergases über die Funkenstrecken eventuell noch nachfließende Ladung aus dem linken Kondensatorteil kommt dem Laserpuls nicht mehr zugute, da Widerstand und Induktivität der Funkenstrecken sie zu langsam nachführen. Es kommt also nur die in der Zeit zwischen dem Triggern der Funkenstrecke und dem Durchbruch des Lasergases gespeicherte Energie zum Zuge, die proportional zum Quadrat der Durchbruchspannung ist.

Nun ist aber die Durchbruchspannung bei einem allmählichen Anwachsen der Spannung

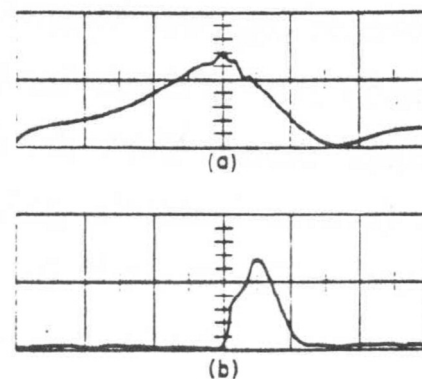


Abb. 2.9: Synchrone Oszillogramme des Spannungsverlaufs am Laserrohr (a) und des Laserpulses (b), Zeitbasis: 10 ns/cm, Vertikal: (a) Laserspannung 9.3kV/cm; (b) Leistung 2MW/cm²

sehr viel kleiner als bei einem plötzlichen, da der Durchbruch selbst Zeit braucht, um sich zu entwickeln. Daher ist es wichtig, daß der rechte Kondensatorteil schnell geladen wird, so daß man den linken Kondensatorteil als Zwischenspeicher einführt, der ebenfalls eine kleine Induktivität hat und über die Funkenstrecken relativ schnell auf den rechten entladen werden kann. Abbildung. 2.9 zeigt synchrone Oszillogramme des Spannungsverlaufs am Laserrohr und des Laserpulses, der unmittelbar nach dem Durchbruch einsetzt und nach ca. 10 ns beendet ist. Entlang der Stickstoffröhre entwickelt sich der Laserpuls, der am vorderen Brewsterfenster austritt, wobei auch die rückwärts laufende Welle durch Reflexion am hinteren Spiegel ausgenutzt wird.

Der gezeigte Laser besitzt eine *Spitzenleistung* von ca. 1 MW bei einer Pulsdauervon etwa 10 ns und einer *Repetitionsrate* (Pulswiederholrate) von 10-100 Hz. Diese Daten sind auch für heutige, kommerzielle Stickstofflaser im großen und ganzen typisch. Der Stickstofflaser stellt insofern eine Besonderheit dar, als dass er keine Rückkopplung der emittierten Photonen in das aktive Medium braucht. Der Verstärkungsfaktor ist so groß, dass der einmalige Durchlauf der spontan emittierten Photonen durch das Medium bereits den Laserpuls auslöst. Man spricht von einem *superradianten* Laser. Die Voraussetzung für die Superradianz und ihre Konsequenzen werden wir später noch ausführlich untersuchen.

2.2.3 Vier-Niveau-Laser

Im Vier-Niveau-Laser schließlich ist keines der beiden Laserniveaus direkt am Pumpmechanismus beteiligt. Vom Grundzustand 1 wird in das obere Niveau 2 gepumpt; dieses zerfällt in das obere Laserniveau 3, von dort erfolgt der Laserübergang nach Niveau 4 und schließlich der Zerfall in den Grundzustand zurück. Gegenüber dem Drei-Niveau-Laser bietet dieses Schema den Vorteil, dass man nicht gezielt in das unter Umständen sehr scharfe obere Laserniveau hinein pumpen muss, sondern dass das Pumpniveau 2 in Wirklichkeit eine ganze Serie von Zuständen oder ein ganzes Anregungsband sein kann, nur vorausgesetzt, dass es in das obere Laserniveau zerfällt. Insofern kann einfacher und effektiver gepumpt werden. Bei einem Vier-Niveau-System lassen sich somit alle Forderungen an die Einsteinkoeffizienten der verschiedenen Niveaus erfüllen und Dauerstrichlaser realisieren. Beispiele sind der Farbstofflaser, der Nd:YAG-Laser oder der Titan-Saphirlaser.

2.2.3.1 Nd:Glas Verstärker als Vier-Niveau System

Als Beispiel eines Vier Niveau Systems sei Nd^{3+} dotiertes Glas genannt. Sie dienen als Verstärker in *Hochleistungslasern* wie beispielsweise PHELIX (**P**eta **W**att **H**och **E**nergie **L**aser für **S**chwerionen **E**xperimente) an der GSI oder der NIF (National Ignition Facility) in Livermore, weil sie in sehr großen Dimensionen hergestellt werden können. Mit ihnen kann man sehr leistungsstarke Pulse erzeugen, allerdings ist der sogenannte *Duty-Cycle* oder "*Tastrate*" - d.h. das Verhältnis zwischen Laserpuls und Dunkelzeit, sehr ungünstig, weil Glas keine gute Wärmeleitfähigkeit besitzt. Die Übergangswellenlänge liegt bei $\lambda_0 = 1.053 \mu\text{m}$ für Phosphatglas wie es an der NIF eingesetzt wird. Abbildung 2.10 zeigt auf der rechten Seite das Niveauschema und auf der linken Seite die spektrale Verteilung der Xenon-Blitzlampen mit denen der Verstärker gepumpt wird. Das untere Laserniveau liegt 0.24 eV ($kT = 1/40$ eV bei Raumtemperatur) oberhalb des Grundzustandes und ist thermisch praktisch nicht besetzt. Vielmehr zerfällt es mit $\tau_1 = 300$ ps in den Grundzustand. Die Anregung erfolgt mit der Blitzlampe aus dem Grundzustand 0 in vier Absorptionsbänder von jeweils etwa 30 nm Breite bei Anregungswellenlängen von 805, 745, 585 und 520 nm. Die große Breite der Bänder erlaubt es effizient die Energie der Blitzlampen auszunutzen. Die angeregten Atome regen sich sehr schnell in den $4F_{3/2}$ Zustand,

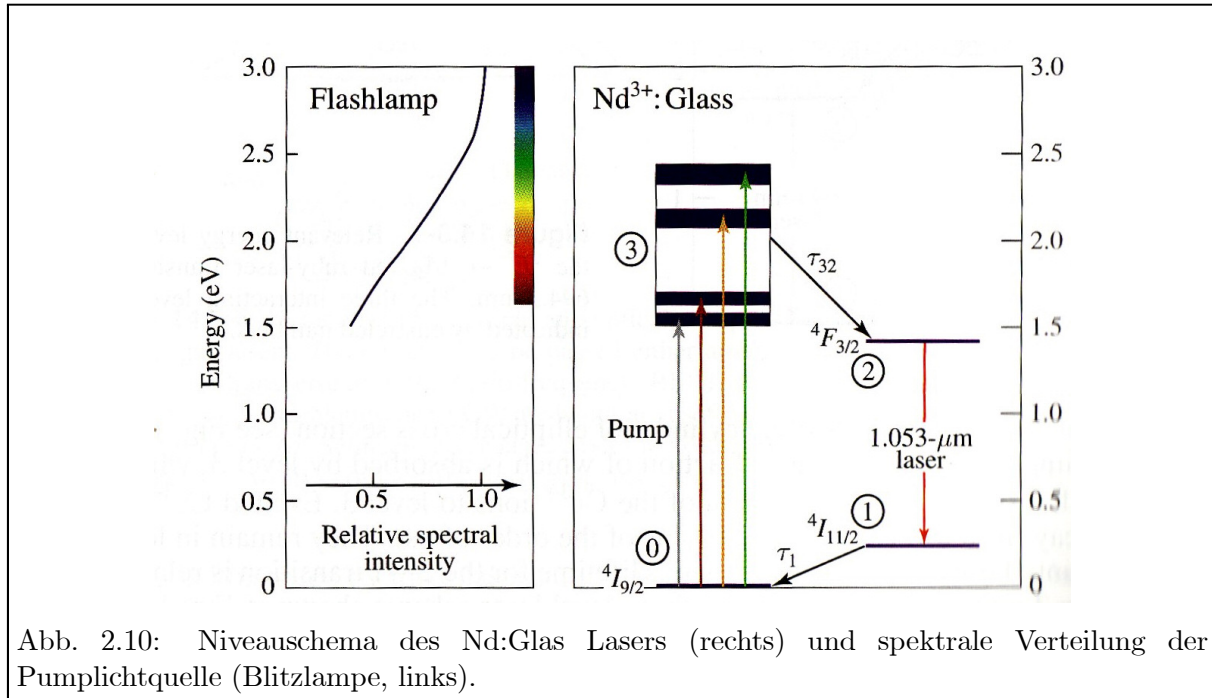
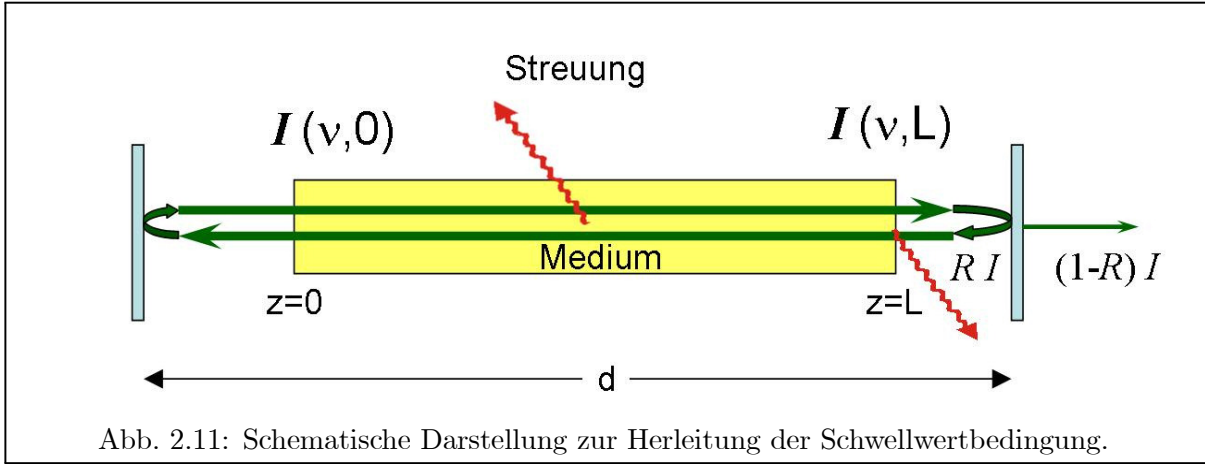


Abb. 2.10: Niveauschema des Nd:Glas Lasers (rechts) und spektrale Verteilung der Pumplichtquelle (Blitzlampe, links).

das obere Laserniveau, ab. Dessen Lebensdauer ist mit $t_{sp}=375 \mu\text{s}$ recht lange, so dass sich die Population in diesem Zustand sammelt und in einem starken Laserpuls abgerufen werden kann. Aufgrund der amorphen Struktur des Glases ist der $2 \rightarrow 1$ Übergang inhomogen verbreitert und besitzt bei Raumtemperatur eine Linienbreite von $\Delta\nu \approx 7 \text{ THz}$.



2.3 Inversion und Verstärkung

2.3.1 Die Laserschwelle

Um eine Beziehung für die Laserschwelle herzuleiten betrachten wir das in Abbildung 2.11 gezeigte System aus zwei Spiegeln und dem aktiven Medium. Die Spiegel des Resonators haben den Abstand d und das aktive Medium hat die Länge L . Nach dem Lambert-Beerschen Absorptionsgesetz verändert sich die Intensität des Laserstrahles beim Durchgang durch das Medium gemäß

$$I(\nu, z) = I(\nu, 0) e^{-\alpha(\nu)z}. \quad (2.5)$$

Gewöhnlicherweise besitzen die optischen Medien einen Absorptionsindex $\alpha > 0$ und dementsprechend nimmt die Lichtintensität beim Durchgang durch das Medium ab. Um Lasertätigkeit zu erreichen muss $\alpha < 0$ sein, damit die Lichtintensität beim Durchgang durch das Medium zunimmt. Wir führen den Verstärkungskoeffizienten $g(\nu) = -\alpha(\nu)$ ein, der sich mikroskopisch ausdrücken lässt durch

$$g(\nu) = \left[\frac{g_1}{g_2} n_2 - n_1 \right] \sigma(\nu) \quad (2.6)$$

mit dem *Wirkungsquerschnitt* $\sigma(\nu)$ für die Absorption bzw. induzierte Emission eines Photons, dem Verhältnis der statistischen Gewichte g_1/g_2 der Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und den Besetzungsdichten $n_1 = N_1/V$ und $n_2 = N_2/V$. Damit g auch wirklich positiv wird und Verstärkung eintritt, muss

$$n_2 > \frac{g_2}{g_1} n_1 \quad (2.7)$$

werden (1. Laserbedingung, notwendig aber nicht hinreichend). Dies alleine ist jedoch nicht ausreichend, wir müssen noch berücksichtigen, dass im Lasermedium und den Spiegeln auch Verluste auftreten, da das aktive Medium (Länge L) im Allgemeinen den Resonator (Länge d) nicht voll ausfüllt ($L < d$). Alle Verluste, die pro Umlauf (engl.: *Round Trip*) auftreten, z.B. durch unvollständige Reflexion an den Spiegeln (δ_R), Streuung (δ_S) oder Beugung (δ_B), seien in dem *Verlustkoeffizienten* $\delta = \delta_R + \delta_S + \delta_B + \dots$ zusammengefasst:

$$\frac{I(2d)}{I(0)} = e^{-\delta}. \quad (2.8)$$

Damit ergibt sich für die *Nettoverstärkung* $G(\nu)$ (engl. *gain*) pro Umlauf

$$G(\nu) = e^{2g(\nu) \cdot d - \delta}. \quad (2.9)$$

Wir erhalten als Bedingung für die Lasertätigkeit

$$G(\nu) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2d \cdot g(\nu) - \delta = 2 \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) \sigma(\nu) d - \delta > 0 \quad (2.10)$$

aus der man problemlos die *Schwellwertbedingung*

$$\Delta n = n_2 \frac{g_2}{g_1} - n_1 \geq \frac{\delta}{2 \sigma(\nu) \cdot d} = \frac{\alpha_R}{\sigma(\nu)} = \Delta n_{\text{Schwelle}} \quad (2.11)$$

herleiten kann. Dabei haben wir den *Verlustkoeffizienten pro Längeneinheit* des Resonators $\alpha_R = \delta/2d = 1/c\tau_{\text{Photon}}$ eingeführt. Verwendet man noch die Beziehung des Wirkungsquerschnittes zur Wellenlänge und der spontanen Zerfallsrate (siehe Exkurs in Kapitel 1)

$$\sigma(\nu_0) = \frac{\lambda^2}{8\pi} A_{21} S(\nu), \quad (2.12)$$

so erhält man den Zusammenhang

$$\Delta n_{\text{Schwelle}} = \frac{8\pi\alpha_R}{2\lambda^2 d A_{21} S(\nu)} = \frac{8\pi}{\lambda^2 c \tau_{\text{Photon}}} \frac{t_{\text{sp}}}{S(\nu)} \frac{1}{S(\nu)} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3 A_{21} S(\nu) \tau_{\text{Photon}}}. \quad (2.13)$$

aus dem zunächst zu ersehen ist, dass die Laserschwelle mit wachsender Frequenz immer höher liegt und schwerer zu erreichen ist. Dadurch sind LASER auch sehr viel schwieriger zu realisieren als ihre "Mikrowellenkollegen", die MASER (100 THz statt 1 GHz \rightarrow Faktor 10^{10}). Darüber hinaus kann man festhalten, dass die Schwelle umgekehrt proportional zur Wechselwirkungszeit $\tau_{\text{Photon}} = 2d/\delta c$ pro Umlauf und proportional zum Volumen V des aktiven Mediums ist. Daher ist es günstig dem aktiven Medium eine möglichst schmale und langgestreckte Form zu geben. Gleichung 2.11 gibt eine sehr einfache Form für die Schwelleninversionsdichte an.

$$\Delta n_{\text{Schwelle}} = \frac{\alpha_R}{\sigma(\nu)} = \frac{1}{c\tau_{\text{Photon}}\sigma(\nu)} \quad (2.14)$$

Im Falle einer einfachen Cavity der Länge d mit 2 Spiegeln, bei der außer unvollständiger Reflexion an den Spiegeln keine Verluste eintreten, ergibt sich für die Veränderung der Amplitude nach einem Umlauf

$$E(2L) = E_0 r_1 r_2 e^{2gd} \quad (2.15)$$

falls das Verstärkungsmedium die ganze Länge des Resonators ausfüllt. (Erstreckt sie sich nur über eine Strecke L , so muss man d durch L ersetzen.) Die *Schwellenverstärkung* kann man dann direkt aus der Forderung $E(2d)/E_0 = 1$ gewinnen

$$g_{\text{Schwelle}} = -\frac{1}{2d} \ln(r_1 r_2) = 1. \quad (2.16)$$

Bei hoher Reflektivität der Spiegel $r_1 r_2 \approx 1$ kann man die Näherung

$$g_{\text{Schwelle}} = -\frac{1}{2d} \ln(1 - (1 - r_1 r_2)) \approx \frac{1}{2d} (1 - r_1 r_2) \quad (2.17)$$

machen. Verluste die sich mit einer Rate a über den ganzen Resonator verteilen, also nicht mit den Spiegeln assoziiert sind, kann man in diese Schwellenbedingung leicht einfügen. Man erhält

$$g_{\text{Schwelle}} = -\frac{1}{2d} \ln(r_1 r_2) + a \quad (2.18)$$

2.3.2 Kleinsignalverstärkung und Leerlaufinversion

Das aktive Medium kann durch seinen Verstärkungskoeffizienten charakterisiert werden. Die Verstärkung pro Einheitsweglänge $g(\nu)$ bestimmt die Rate mit der die Photonenzahl im Resonator anwächst. Beschrieben wird dies durch folgende DGL

$$\frac{d}{dz}\Phi(z) = g(\nu) \cdot \Phi(z) \quad (2.19)$$

Solange der Fluss an Photonen $\Phi(\nu)$ klein ist, ist der sogenannte Kleinsignal- oder Leerlaufverstärkungskoeffizient $g_0(\nu)$ gegeben durch

$$g_0(\nu) = \sigma(\nu) \cdot \Delta n_0 = \Delta n_0 \frac{\lambda^2}{8\pi t_{\text{sp}}} S(\nu). \quad (2.20)$$

mit der Leerlaufinversionsdichte Δn_0 . Mit wachsendem Photonenfluss kommt es zu einer Sättigung der Verstärkung und der Verstärkungskoeffizient nimmt ab. Letzterer hängt von der Besetzungszahldifferenz ΔN ab, die mit wachsender Photonenflussdichte aufgrund zunehmender stimulierter Emission abnehmen wird. Man definiert die Sättigungsflussdichte an Photonen durch

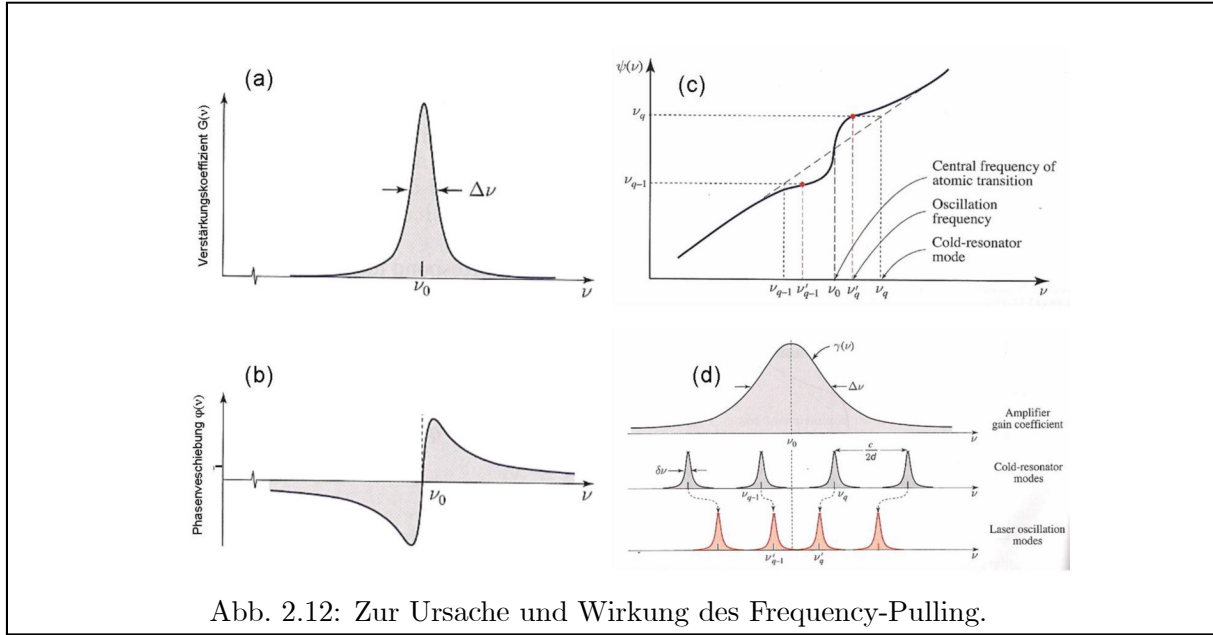
$$\frac{1}{\Phi_S(\nu)} = \tau_S \cdot \sigma(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{\tau_S}{t_{\text{sp}}} S(\nu) \quad (2.21)$$

mit der Sättigungskonstanten τ_S die von der Lebensdauer der atomaren Niveaus abhängt. Wir werden später in der Lage sein τ_S aus den Ratengleichungen des Lasers abzuleiten.

Für ein homogen verbreitertes Medium gilt dann für den gesättigten Verstärkungskoeffizienten

$$g(\nu) = \frac{g_0(\nu)}{1 + \frac{\Phi}{\Phi_S(\nu)}} \quad (2.22)$$

Die Sättigungsflussdichte entspricht also gerade dem Photonenfluss bei dem die Verstärkung auf die Hälfte der Leerlaufverstärkung g_0 abgefallen ist.



2.4 Phasenbedingung und Frequency Pulling

Eine Lichtwelle, die einen Resonator umläuft, muss nach einem Umlauf ihre Phase um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π verändert haben. Diese Bedingung

$$2kL = 2\pi q \quad (2.23)$$

zusammen mit dem Wellenvektor

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda} \quad (2.24)$$

ergibt als Bedingung für die Wellenlänge

$$\lambda_q = \frac{2nL}{q}. \quad (2.25)$$

Dieses λ_q ist die Wellenlänge der q -ten longitudinalen Mode, d.h. der Mode bei der das elektrische Feld gerade $q+1$ Knoten entlang der Propagationsachse des Resonators hat. Als Frequenz ausgedrückt lautet Gleichung 2.25

$$\nu_q = \frac{c}{2nL} q \quad (2.26)$$

und die Differenz zwischen der Frequenzen zweier benachbarter Moden beträgt

$$\Delta\nu = \nu_q - \nu_{q-1} = \frac{c}{2nL}. \quad (2.27)$$

Die so berechneten Moden gelten allerdings nur für einen "leeren" Resonator. Das Verstärkungsmedium besitzt einen Brechungsindex $n \neq 1$ und weist zudem eine Resonanz bei der Wellenlänge auf. In der Umgebung einer atomaren Frequenz ändert sich bekanntlich der Brechungsindex stark und es kommt zu einer zusätzlichen Phasenverschiebung. In Abbildung 2.12 (a,b) ist der Verstärkungskoeffizient und die zugehörige Phasenverschiebung (pro Weglänge) gezeigt. Besitzt der Verstärkungskoeffizient $g(\nu)$ ein Lorentzprofil $g(\nu)$, so ergibt sich aus der Kramer-Kronig Relation eine Phasenverschiebung von

$$\varphi(\nu) = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} g_L(\nu). \quad (2.28)$$

Diese zusätzliche Verschiebung muss bei der Resonanzbedingung (Gleichung 2.23) berücksichtigt werden und führt auf

$$2kL + 2\varphi(\nu)L = 2kL + 2\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}g_L(\nu)L = \nu_q = 2\pi q. \quad (2.29)$$

Damit erhalten wir:

$$\nu + \frac{c}{2\pi} \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} g_L(\nu) = \nu_q \quad (2.30)$$

In Abbildung 2.12 (c,d) ist die linke Seite von Gleichung 2.30 als Funktion von ν dargestellt. Damit können wir das nichtlineare Problem graphisch lösen. Für die q -te Resonatormode ν_q des "kalten" Resonators auf der y -Achse, finden wir auf der x -Achse die Frequenz $\nu = \nu_q$, bei der die Resonanzbedingung 2.30 erfüllt ist und die aufgrund der Phasenverschiebung relativ zu ν_q näher an die atomare Resonanzfrequenz ν_0 gerückt ist. Unterhalb der Resonanzfrequenz gilt das gleiche für die Mode ν_{q-1} . Die Eigenfrequenzen des "heissen" Resonators werden also in Richtung der Zentralfrequenz des resonanten Mediums ν_0 gezogen (*frequency pulling*).

Das Ausmaß der Verschiebung können wir analytisch abschätzen, wenn wir Gleichung 2.30 zu

$$\nu = \nu_q - \frac{c}{2\pi} \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} g(\nu) \quad (2.31)$$

umschreiben und auf der rechten Seite $\nu = \nu'_q \approx \nu_q$ abschätzen und daraus eine direkte Beziehung zwischen ν'_q und ν_q erhalten:

$$\nu'_q = \nu_q - \frac{c}{2\pi} \frac{\nu_q - \nu_0}{\Delta\nu} g(\nu_q). \quad (2.32)$$

Unter Berücksichtigung der spektralen Breite der Resonatormode $\delta\nu$ (siehe Kapitel 3) und Annahme eines Gleichgewichtsbetriebs, d. h. Verstärkung=Verluste, erhalten wir mit $g(\nu_q) = \delta \approx \frac{2\pi}{c}\delta\nu$ den Ausdruck

$$\nu'_q = \nu_q - (\nu_q - \nu_0) \frac{\delta\nu}{\Delta\nu}. \quad (2.33)$$

Damit wird die kalte Resonatormode um den Bruchteil $\frac{\delta\nu}{\Delta\nu}$ ihres Abstandes von der Zentralfrequenz an die Zentralfrequenz herangezogen. Je schärfer die spektrale Breite der Resonatormode ist, umso kleiner ist der Effekt, wohingegen eine schmale Linienbreite der atomaren Resonanz den Effekt verstärkt.

2.5 Ratengleichungen des Laserbetriebes

Wir wollen im Folgenden die Ratengleichungen für verschiedene Niveauschemata studieren und ihre Konsequenzen für den Laserbetrieb ausarbeiten. Dabei betrachten wir erst nur die beiden Laserniveaus die in Abbildung 2.13 gezeigt sind, vom Einfluss der Laserstrahlung im Übergang $2 \rightarrow 1$. Von den Übergangsraten W_i sei zunächst abgesehen.

2.5.1 Der Laserübergang im Leerlauf

Das Niveauschema zeigt die beiden Laserniveaus von denen das obere mit einer Rate R_2 besetzt wird und mit einer Gesamtrate τ_2

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_{20}} \quad (2.34)$$

in das untere Laserniveau τ_{21} oder in weitere Niveaus τ_{20} entleert. Der Pumplaser bewirkt im unteren Niveau eine Entvölkerung mit der Rate R_1 , während das Niveau radiativ mit einer Rate τ_1 zerfällt. Die Ratengleichungen lauten dann:

$$\frac{dn_2}{dt} = R_2 - \frac{n_2}{\tau_2} \quad (2.35)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -R_1 - \frac{n_1}{\tau_1} + \frac{n_2}{\tau_{21}} \quad (2.36)$$

Wir interessieren uns für den Gleichgewichtszustand und setzen daher $\frac{dn_i}{dt} = 0$. Damit können wir die Besetzungsdifferenz(-dichte) als Funktion der Übergangsraten bestimmen

$$\Delta n_0 = R_2 \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_{21}}\right) + R_1 \tau_1 \quad (2.37)$$

Um eine möglichst große Inversion zu erreichen, sollten also folgende Bedingungen erfüllt sein.

1. große Pumpraten R_1 und R_2
2. lange Lebensdauer τ_2 (in Maßen, sonst ist der Übergang zu schwach)
3. möglichst kurzes τ_1 , wenn die Pumprate $R_1 < \frac{\tau_2}{\tau_{21}} R_2$ damit sich Zustand 1 schnell entleert.

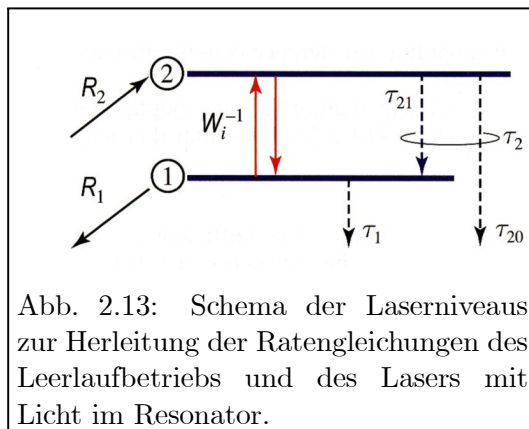


Abb. 2.13: Schema der Laserniveaus zur Herleitung der Ratengleichungen des Leerlaufbetriebs und des Lasers mit Licht im Resonator.

2.5.2 Ratengleichungen mit Licht im Verstärker

Betrachten wir jetzt den Einfluss des Lichts im Verstärker. Dazu führen wir die Übergangsraten für die induzierte Emission und Absorption ein (siehe Abbildung 2.13). Die Ratengleichungen lauten jetzt

$$\frac{dn_2}{dt} = R_2 - \frac{n_2}{\tau_2} - n_2 W_i + n_1 W_i \quad (2.38)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -R_1 - \frac{n_1}{\tau_1} + \frac{n_2}{\tau_{21}} - n_1 W_i + n_2 W_i \quad (2.39)$$

und die stationäre Lösung lautet $\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \tau_s W_i}$, wobei Δn_0 die oben definierte Besetzungszahldifferenz im Leerlauf ist. Die Zeitkonstante τ_s (Sättigungszeitkonstante) ist immer positiv:

$$\tau_s = \tau_2 + \tau_1 \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_{21}}\right) \quad (2.40)$$

Die Besetzungszahldifferenzdichte ist also mit Licht im Verstärker immer kleiner als ohne. Wenn die Übergangsrate $W_i = 1/\tau_s$ ist, sinkt die Inversion auf die Hälfte der Leerlaufinversion.

2.5.3 Ratengleichung des Drei-Niveau-Lasers

Wir wollen nun das Drei-Niveau-System, wie es beim Rubin Laser auftritt analysieren. Abbildung 2.14 zeigt die Übergangsraten und die zugehörigen Gleichungen lauten:

$$\dot{n}_3 = R \cdot n_1 - \frac{n_3}{\tau_{32}} \quad (2.41)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}} + W_i n_1 - W_i n_2 \quad (2.42)$$

$$\dot{n}_1 = -R \cdot n_1 - W_i n_1 + W_i n_2 + \frac{n_2}{\tau_{21}} \quad (2.43)$$

Für die stationäre Lösung entfernt man zunächst $n_3 = R \cdot \tau_{32} \cdot n_1$. Damit erhält man aber aus den beiden verbleibenden Gleichungen nur noch eine, weil sie sich jetzt nur noch im Vorzeichen unterscheiden. Wir können aber aufgrund der sehr kurzen Lebensdauer τ_{32} die Annahme $n_3 \ll n_1, n_2$ und daher die Näherung $n_1 + n_2 = n_a$ machen, wobei n_a die Gesamtdichte der Atome ist. Damit erhalten wir insgesamt für die Inversionsdichte

$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \tau_s \cdot W_i} \quad (2.44)$$

wobei jetzt

$$\Delta n_0 = 2R\tau_{21} - n_a \quad (2.45)$$

ist. Mit $\tau_2 = -t_{sp} \approx \tau_{21}$, folgt:

$$\Delta n_0 = 2Rt_{sp} - n_a \quad (2.46)$$

$$\tau_s = 2t_{sp}. \quad (2.47)$$

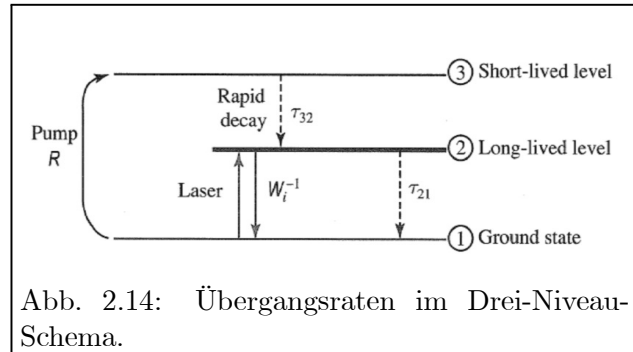


Abb. 2.14: Übergangsraten im Drei-Niveau-Schema.

Um eine Populationsinversion zu erreichen, muss also eine minimale Pumprate

$$R > \frac{n_a}{2t_{sp}} \quad (2.48)$$

erreicht sein. Unter der Annahme $n_3 \approx 0$ erhalten wir:

$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \tau_s W_i} \quad (2.49)$$

$$\Delta n_0 = \frac{n_a(t_{sp} W_p - 1)}{1 + t_{sp} W} \quad (2.50)$$

$$\tau_s = \frac{2t_{sp}}{1 + t_{sp} W_p} \quad (2.51)$$

Die Leerlaufinversion Δn_0 wird also erst bei einer Pumprate $W_p = 1/t_{sp}$ zu Null - vorher ist sie negativ. Um $\Delta n_0 = 1/3 \cdot n_a$ zu erreichen, muss die doppelte Pumprate $2/t_{sp}$ erreicht werden. Die große Population n_1 ist also ein inhärentes Hindernis in einem Drei-Niveau-System.

2.5.4 Ratengleichungen des Vier Niveausystems.

Abbildung 2.15 zeigt die Übergangsraten in einem Vier-Niveau-Schema. Wenn das Niveau 3 sehr schnell in das obere Laserniveau zerfällt können wir $n_3 \approx 0$ setzen und die Atome aus Niveau 0 werden mit der Rate R nach 2 gepumpt. Wir erhalten somit ein Schema, das Abbildung 2.13 entspricht, wenn wir $R_1 = 0$ und $\tau_{21} = 0$ setzen. Unter der Annahme $\tau_{21} \gg t_{sp} \gg \tau_1$, die für die wichtigsten Vier-Niveau-Laser erfüllt ist, erhalten wir für die Inversionsdichte

$$\Delta n = \frac{R \cdot t_{sp}}{1 + t_{sp} W_i}. \quad (2.52)$$

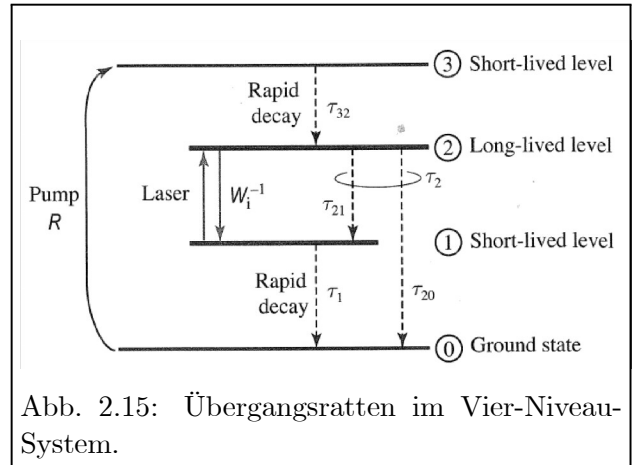


Abb. 2.15: Übergangsraten im Vier-Niveau-System.

Wir haben dabei allerdings die Abhängigkeit der Pumprate von der Populationsdifferenz nicht berücksichtigt. Diese ist gegeben, weil die Gesamtzahl der Atome n_a natürlich konstant ist.

$$n_a = n_g + n_1 + n_2 + n_3, \quad (2.53)$$

mit der Besetzungsdichte n_g des Grundzustands. Wegen $\tau_1, \tau_{32} \ll t_{sp}$ können wir

$$n_1 \approx n_3 \approx 0 \quad (2.54)$$

setzen und damit folgt $n_g + n_2 \approx n_a$ sowie:

$$n_g \approx n_a - n_2. \quad (2.55)$$

Die Pumprate ist damit:

$$R = (n_a - n_2) W_p \approx (n_g - \Delta n) W_p \quad (2.56)$$

Es zeigt sich also eine lineare Abhängigkeit der Pumprate im Pumpübergang von der Besetzungsinversion im Laserübergang. Je größer die Inversion ist, desto mehr Atome befinden sich

im Zustand 2 und können nicht zum Pumpübergang beitragen. Fügen wir diese Rate in Gleichung 2.52 ein, so erhalten wir

$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \tau_s W_i} \quad (2.57)$$

$$n_0 = \frac{n_a t_{sp} W_p}{1 + t_{sp} W_p} \quad (2.58)$$

$$\tau_s = \frac{t_{sp}}{1 + t_{sp} W_p} \quad (2.59)$$

Im Vergleich zum Drei-Niveau-System ist die Leerlaufinversion jetzt bereits für jede noch so kleine Pumprate positiv. Um $\Delta n = 1/3 \cdot n_a$ zu erreichen genügt eine Pumprate von $1/(2t_{sp})$ und damit ein Viertel der erforderlichen Pumprate im Drei-Niveau-System.

2.6 Der Laserbetrieb

2.6.1 Einschwingphase (Spiking)

Nach dem Vorhergehenden baut man durch Pumpprozesse eine Inversion $\Delta n > \Delta n_{\text{Schwelle}}$ auf, die ein kleines Strahlungsfeld gemäß (2.20) bzw. (2.19) verstärkt. Da in diesem Fall stimulierte und spontane Emissionsprozesse zusammen stets häufiger als Absorptionsprozesse auftreten, wird die Inversion durch ein anwachsendes Strahlungsfeld rasch abgebaut. Manchmal erfolgt dies schneller, als der Pumpprozess ‚Inversion nachliefert‘. Die Inversion wird dadurch unter die Schwellwertinversion absinken; die Verstärkungswirkung erlischt, der Laser geht aus. Die Pumpe baut nun wieder $\Delta n > \Delta n_{\text{Schwelle}}$ auf. Der Vorgang beginnt von neuem. Diesen Einschwingvorgang nennt man ‚Spiking‘.

Wird der Laser kontinuierlich mit einer nach dem Einschalten gleichbleibenden Intensität gepumpt (siehe Abb. 2.16 (a)) pendeln sich die Schwingungen letztlich auf einen konstanten Endwert. Dies wird als *Dauerstrich-* oder *CW-(Continuous Wave)* Betrieb bezeichnet. Die Inversion pendelt sich entsprechend auf die Schwellwertinversion, die also zugleich die Gleichgewichtsinversion ist, ein ($\Delta n_{\text{cw}} = \Delta n_{\text{Schwelle}}$).

Bei hochintensiven, gepulsten Pumpvorgängen ist die durch die hohe Pumpleistung erzeugte Besetzungsinversion oft so groß, dass das lawinenartig aufgebaute Lichtfeld die Inversion so weit unter die Schwellwertinversion abbaut, dass die Emission zum Erliegen kommt, bis die Pumpe wieder eine hohe Intensität aufgebaut hat. Wie in Abbildung (2.16 (b)) zu sehen ist, erscheint dann überhaupt nur eine Folge hochintensiver Laserimpulse (Spikes). Bei schwächeren längeren Pulsen haben wir eine Mischung aus beiden Extremfällen, d.h. es wird zunächst ein mehr oder wenig gedämpftes Spiking auftreten, und die Laserintensität wird dann mit dem Verlauf des Pumpimpulses zu und schließlich abnehmen.

2.6.2 Der eingeschwungene cw Laser

Im cw-Betrieb werden sich die Inversion auf die Schwellwertinversion und das Strahlungsfeld auf einen Gleichgewichtswert einschwingen. Ein Resonatorspiegel ist leicht durchlässig (manchmal sind es auch beide), um Strahlung aus dem Resonator auskoppeln zu können. Die ausgekoppelte spektrale Intensität ist gegeben durch

$$I_L(\nu) = c\rho(\nu)T \quad (2.60)$$

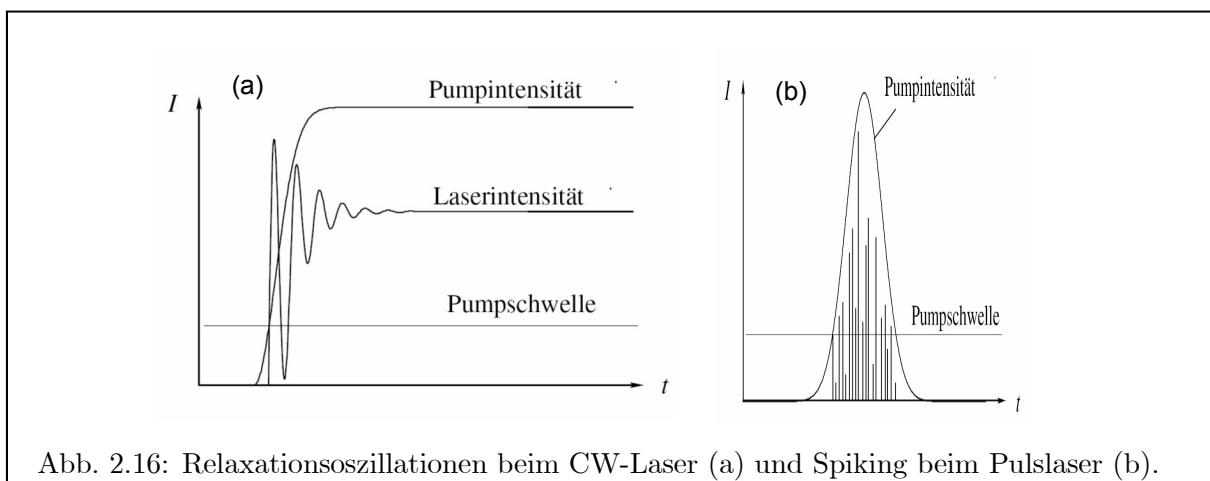


Abb. 2.16: Relaxationsoszillationen beim CW-Laser (a) und Spiking beim Puls laser (b).

wobei $\rho(\nu)$ die spektrale Energiedichte im Laser und T die Transmission des Auskoppelspiegels ist. Im Allgemeinen ist T von der Größenordnung einige %. Wie groß ist das Lichtfeld $\rho(\nu)$, das sich im Laser aufbauen kann und wieviel der umlaufenden Leistung kann man entnehmen und für die Anwendung nutzbar machen?

2.6.2.1 Das Lichtfeld im Resonator

Dazu betrachten wir das Schema in Abbildung 2.17. Um kontinuierlichen Betrieb zu erreichen, müssen wir kontinuierlich pumpen, d.h. die Besetzungsdichte n_2 ständig auffüllen. Dies geschehe mit einer Rate P . Durch die Wechselwirkung mit dem Laserfeld wird die Besetzung zwischen Niveau 1 und 2 umgepumpt. Darüber hinaus werden durch spontane Emissionsprozesse und andere Prozesse (z.B. Stöße) Niveau 1 und Niveau 2 mit den Raten R_1 und R_2 entleert. Die Änderung der spektralen Energiedichte ρ des Laserfeldes ergibt sich aus dem Zuwachs durch die stimulierte Emission und der Abnahme aufgrund der erwünschten (Spiegeltransmission des Laserlichtes) und der unerwünschten Verlustrate γ . Setzen wir $g_1 B_{12} = g_2 B_{21} = B$ und $A_{21} = A$, kommen wir damit zu folgenden Ratengleichungen:

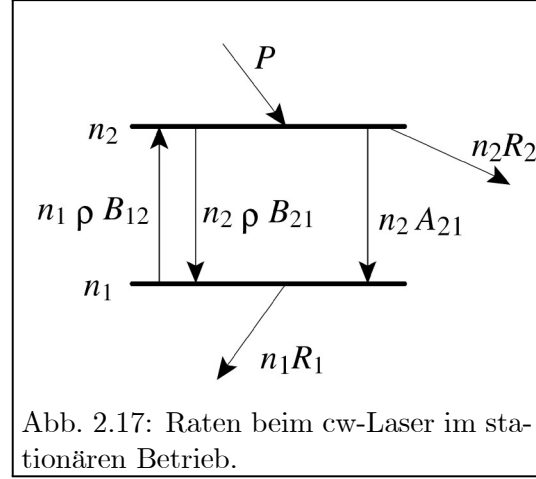


Abb. 2.17: Raten beim cw-Laser im stationären Betrieb.

$$\dot{n}_2 = P - \Delta n B \rho - n_2 A - n_2 R_2 \quad (2.61)$$

$$\dot{n}_1 = \Delta n B \rho + n_2 A - n_1 R_1 \quad (2.62)$$

$$\dot{\rho} = \Delta n B \rho h \nu L / d - \gamma \rho. \quad (2.63)$$

Mit der Länge des Resonators d und der des aktiven Mediums L . Aus der Addition der beiden ersten Gleichungen folgt für den stationären Zustand ($\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = \dot{\rho} = 0$)

$$P = n_1 R_1 + n_2 R_2$$

d.h. der Pumpprozess muss die durch die Verlustprozesse R_1 und R_2 ausscheidenden Atome ersetzen. Aus der letzten Gleichung erhalten wir die stationäre Inversion

$$\Delta n_{\text{cw}} = \frac{\gamma}{B(\nu)} \frac{d}{h \nu L} = \Delta n_{\text{Schwelle}} \quad (2.64)$$

die gerade der Schwellwertinversion bei einer Verlustrate

$$\gamma = \delta \frac{c}{2d} \quad (2.65)$$

entspricht, wobei δ den Gesamtverlust während eines Umlaufes (Länge $2d$) angibt. Das heisst im cw Betrieb wird die Leerlaufinversion immer auf die Schwellwertinversion $\Delta n_{\text{Schwelle}}$ abgebaut.

Einen anderen Ausdruck für die stationäre Inversion erhalten wir, wenn wir (2.61) mit R_1 und (2.62) mit R_2 multiplizieren und voneinander subtrahieren (wir berücksichtigen jetzt wieder die Multiplizitäten der Zustände 1 und 2). Daraus ergibt sich

$$\Delta n_{\text{cw}} = \frac{P(R_1 - A g_2 / g_1)}{B \rho (R_1 + R_2 g_2 / g_1) + A R_1 + R_1 R_2} \quad (2.66)$$

woran man erkennt, dass $g_1 R_1 > g_2 A$ gelten muss, damit sich eine stationäre Inversion einstellen kann. Dies ist leicht einzusehen, weil ansonsten der spontane Zerfall aus Niveau 2 in das Niveau 1 die Besetzung des Niveaus 1 schneller aufbaut, als sie durch die Entleerungsprozesse R_1 abgebaut werden kann.

Aus (2.66) erhalten wir auch einen Ausdruck für die Leerlaufinversion Δn_0 , die sich für sehr schwache Strahlungsfelder, d.h. $B\rho \ll A$, ergibt:

$$\Delta n_0 = \frac{P}{R_1} \frac{R_1 - (g_2/g_1) A}{A + R_2}. \quad (2.67)$$

Weiterhin können wir durch Auflösen von (2.66) nach ρ einen Ausdruck für das stationäre Laserfeld im Resonator erhalten. Wenn wir noch (2.67) benutzen, erhalten wir

$$\rho = \frac{AR_1 + R_1 R_2}{B(R_1 + R_2 g_2/g_1)} \left(\frac{\Delta n_0}{\Delta n_{\text{Schwelle}}} - 1 \right) = \Phi_S \frac{h\nu}{c} \left(\frac{\Delta n_0}{\Delta n_{\text{Schwelle}}} - 1 \right), \quad (2.68)$$

wobei wir im zweiten Schritt von dem Zusammenhang $I = \rho c = \Phi_S h\nu$ Gebrauch machten und Φ_S die Sättigungs-Photonenflussdichte ist. Wir erkennen, dass die stationäre Energiedichte im Resonator wesentlich vom Verhältnis Leerlaufinversion zu Schwellwertinversion abhängt. Aus (2.20) können wir einen Ausdruck für die Leerlaufinversion Δn_0 gewinnen der dem aus (2.13) analog ist. Damit erhalten wir aus (2.68)

$$\Phi_{\text{cw}} = \Phi_S \left(\frac{g_0}{\alpha_r} - 1 \right) \quad (2.69)$$

Die Photonflussdichte im Resonator eines kontinuierlich arbeitenden Lasers wird also durch die Sättigungsflussdichte Φ_S und das Verhältnis von Leerlaufverstärkung und Resonatorverlusten bestimmt.

Die ausgekoppelte Laserleistung hängt aber nach (2.60) auch vom Transmissionsvermögen T des Auskoppelspiegels ab. Da aber $T \gg \delta - T$ den wesentlichen Beitrag zum Verlust eines Rundlaufs beiträgt, wird eine zu große Transmission die Schwellwertinversion erhöhen und mithin (2.68) verkleinern. Hier muss zwischen zwei konkurrierenden Bedingungen ein Optimum gefunden werden. Bevor wir uns damit befassen, sei noch darauf hingewiesen, dass (2.69) auch allgemeiner geschrieben werden kann als

$$\Phi(g) = \Phi_S \left(\frac{g_0}{g} - 1 \right), \quad (2.70)$$

womit wir problemlos den Zusammenhang zwischen gesättigter Verstärkung g und Leerlaufverstärkung g_0 gewinnen können:

$$g = \frac{g_0}{1 + \Phi/\Phi_S} \quad (2.71)$$

2.6.2.2 Optimierung der ausgekoppelten Leistung

Entsprechend den oben angestellten Überlegungen muss es einen Wert T_{opt} für die Transmission des Auskoppelspiegels geben, denn ein Spiegel mit Transmission $T = 0$ setzt zwar die Schwellwertinversion herab, lässt aber keine Auskopplung des Lichtes mehr zu. Andererseits ermöglicht die Entfernung des Spiegels ($T = 1$) zwar eine "optimale" Auskopplung des Lichtes, wird aber in der Regel dafür sorgen, dass die Schwellwertinversion nicht mehr erreicht wird und die Lasertätigkeit völlig unterbleibt (Ausnahme: Superradianz). Irgendwo zwischen diesen

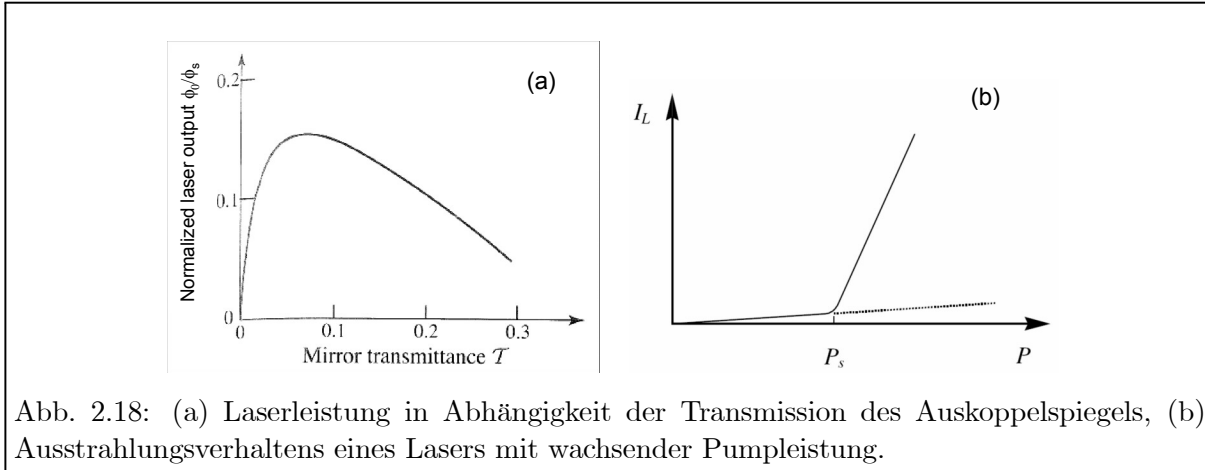


Abb. 2.18: (a) Laserleistung in Abhängigkeit der Transmission des Auskoppelspiegels, (b) Ausstrahlungsverhalten eines Lasers mit wachsender Pumpleistung.

Extremen muss die optimale Transmission liegen. Um sie herzuleiten benutzen wir die Relation (2.18) für den Verlustkoeffizienten α am Auskoppelspiegel

$$\alpha_{\text{Spiegel1}} = \frac{1}{2d} \ln \left(\frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{2d} \ln(1 - T). \quad (2.72)$$

Die Gesamtverluste pro Umlauf belaufen sich somit auf

$$\alpha_r = -\frac{1}{2d} \ln(1 - T) + \alpha_{\text{Spiegel2}} + \alpha_{\text{Sonst}} \quad (2.73)$$

und für den ausgekoppelten Photonenfluss Φ_0 gilt

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_{\text{cw}}}{2} T, \quad (2.74)$$

wobei der Faktor 1/2 dadurch zustande kommt, dass immer nur die Hälfte der im Resonator befindlichen Photonen sich in Richtung des Auskoppelspiegels bewegen. Für die Intensität und die Leistung gilt

$$P = I_0 \mathbf{A} = h\nu \Phi_{\text{cw}} \frac{T}{2} \mathbf{A} \quad (2.75)$$

mit der Querschnittsfläche \mathbf{A} des Laserstrahls. Damit erhalten wir

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \Phi_s T \left\{ \frac{g_0}{\kappa - \ln(1 - T)} \right\} \quad (2.76)$$

mit $\kappa = 2d (\alpha_{\text{Spiegel2}} + \alpha_{\text{Sonst}})$. Die Abhängigkeit der ausgekoppelten Laserleistung von T ist in Abbildung 2.18 (a) dargestellt. Man erkennt, dass die Kurve zu der Seite zu hoher Transmission flacher abfällt als bei zu geringer Transmission. Man wird daher die Reflektivität des Spiegels eher etwas zu niedrig als etwas zu hoch ansetzen wollen. Wenn wir die Näherung $\ln(1 - T) \approx -T$ für $T \ll 1$ anwenden, kann man den optimalen Wert T_{opt} analytisch durch Ableiten von (2.76) und Nullsetzen der Ableitung gewinnen. Man erhält

$$T_{\text{opt}} \approx \sqrt{g_0 \kappa} - \kappa. \quad (2.77)$$

2.6.3 Ausstrahlungsverhalten des Lasers

Der Gleichung (2.68) entnehmen wir, dass ein Laserfeld nur entsteht, wenn die erreichbare Leerlaufinversion die Schwellwertinversion übersteigt. Das ist ab einer Pumpratedichte P_S der Fall. Wir erwarten also, dass der Laser erst bei $P > P_S$ anspringt. Bei geringerer Pumpleistung gibt es aber immer noch spontane Prozesse, die als Rauschen angesehen werden müssen. Für ein verschwindendes Laserfeld $\rho = 0$ im stationären Gleichgewicht erhalten wir aus (2.61)

$$P = n_2(A + R_2) \quad (2.78)$$

und damit für die Rauschrate

$$\dot{\Phi} = n_2 A = \frac{PA}{A + R_2}. \quad (2.79)$$

Das Rauschen steigt also linear mit der Pumpleistung P an. Ein ganz geringer Bruchteil davon wird in einen Lasermode emittiert. Ab $P = P_S$ setzt die Lasertätigkeit mit einem sprunghaftem Anstieg der Lichtleistung ein. Wir erhalten damit den in Abbildung 2.18 (b) dargestellten Verlauf für die Intensität eines Lasers. An der Stelle $P = P_S$ findet ein Phasenübergang von ungeordnetem Verhalten (Rauschen) zu geordnetem Verhalten statt. Dies ist typisch für Systeme fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht bzw. bei Energiezufuhr von außen.

2.6.4 Linienbreite eines Lasermodes

Wir wollen uns kurz klarmachen, dass die Linienbreite eines Lasers deutlich schmäler sein kann, als die natürliche Linienbreite des Laserübergangs. Dazu gehen wir von Abbildung 2.19 aus, in der auf der linken Skala das Verstärkungsprofil und auf der rechten Skala der Verstärkungsfaktor bei einfachem Durchlauf dargestellt ist. Man kann Verstärkung $G(\nu) > 1$ (rechte Skala) gemäß (2.13) nur erwarten, wenn $\sigma(\nu)\Delta n 2d > \delta$ ist, d.h. wenn die Verluste δ durch die Verstärkung $\sigma(\nu)\Delta n 2d$ (linke Skala) überkompensiert werden. Deshalb werden nicht alle Frequenzen innerhalb der homogenen Linienbreite verstärkt, sondern nur die, für die die Verstärkung die Verluste δ überwiegt. Das hat zur Konsequenz, dass bei einer gegebenen Inversion nur die Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz verstärkt werden, nicht aber die Ausläufer, die (2.13) nicht mehr erfüllen. Dadurch wird die Breite der verstärkten Linie u.U. erheblich geringer als das Frequenzprofil des Übergangs selbst.

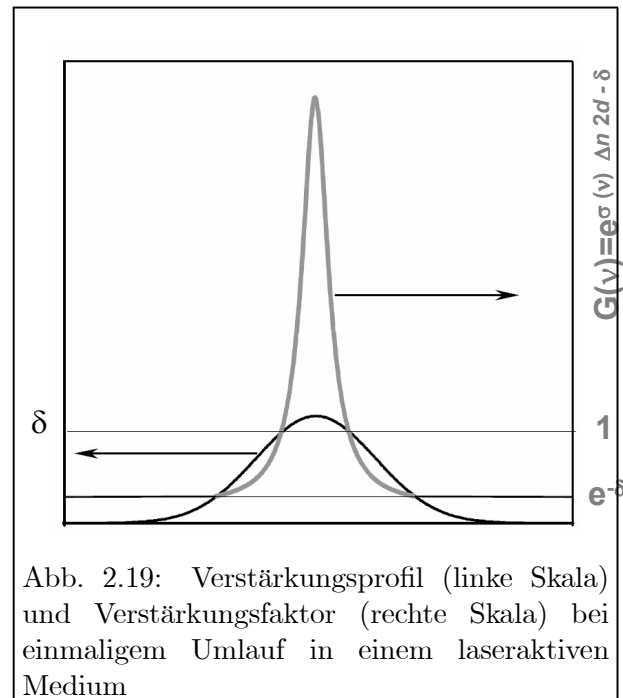
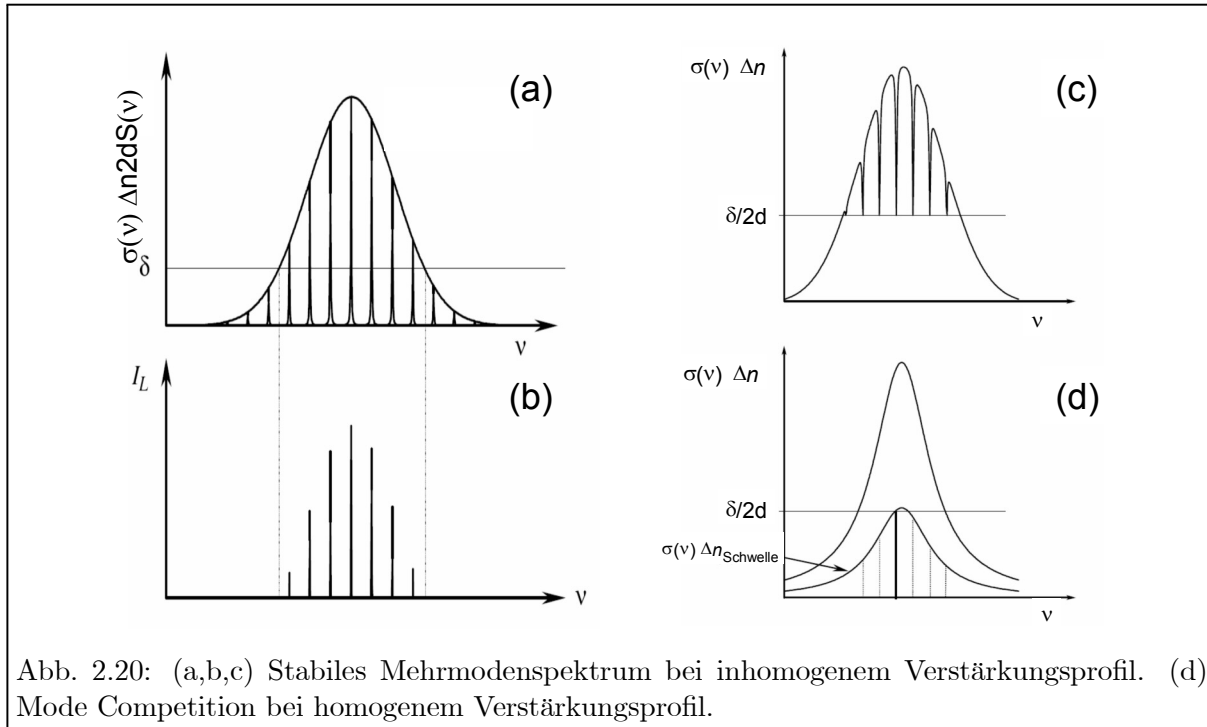


Abb. 2.19: Verstärkungsprofil (linke Skala) und Verstärkungsfaktor (rechte Skala) bei einmaligem Umlauf in einem laseraktiven Medium

2.6.5 Multimode Betrieb

Wir wollen uns nun noch verdeutlichen welchen Einfluß homogene und inhomogene Verbreiterungen des Lasermediums auf die Zahl der anschwingenden Moden des Lasers besitzen. Bei typischen Spiegelabständen eines Resonators von 0,5 bis 1 m folgen die axialen Moden im Abstand von 300 bis 150 MHz aufeinander (siehe Kap ??). In der Regel liegen mehrere axiale Moden



innerhalb der Linienbreite der Spektralfunktion des Laserübergangs und könnten simultan anschwingen. Wir müssen jetzt unterscheiden, ob die sogenannte homogene oder die inhomogene Linienbreite überwiegt und behandeln zunächst den letzteren Fall.

2.6.5.1 Verstärkung in inhomogen verbreiterten Medien

Von inhomogener Linienbreite spricht man dann, wenn nicht eine einzige, für alle Atome gleiche Übergangsfrequenz vorliegt, sondern aufgrund der verschiedensten Effekte, die wir Inhomogenitäten des Mediums nennen, das Ensemble ein ganzes Spektrum von individuell verschiedenen Frequenzen bildet. Eine entsprechende Verteilungsfunktion (Gaußprofil) ist in Abbildung 2.20 (a) zusammen mit den Moden des Resonators (Modenabstand des Resonators $\Delta\nu_{\text{Resonator}} = c/2d$) dargestellt. Da wir jetzt voraussetzen, daß diese inhomogene Linienbreite wesentlich größer als die homogene Strahlungsbreite ist, kann immer nur ein spektraler Bruchteil der Atome zur Laseremission beitragen, nämlich derjenige, der sich innerhalb der homogenen Linienbreite um jeden Lasermode befindet. Dies wird als „spectral hole burning“ bezeichnet und ist in Abbildung 2.20 dargestellt.

Die Verstärkungssättigung setzt natürlich nur für die resonante Klasse von Atomen ein. Die anderen bleiben von der wachsenden Zahl an Photonen im Resonator unbeeindruckt. Haben wir dann ein inhomogenes *Doppler*-Profil dessen Breite $\Delta\nu_{\text{Doppler}}$ deutlich breiter als $\Delta\nu_{\text{Resonator}}$ ist, prägt der Resonator dem verstärkten Licht bei mehrmaligen Durchläufen durch Interferenz eine Modenstruktur auf wie sie in Abbildung 2.20 (b) gezeigt ist. Äquidistante longitudinale Moden des Resonators im Abstand $\Delta\nu_{\text{Resonator}} = c/2d$ werden nur dann verstärkt, wenn das Verstärkungsprofil die Verluste δ übertrifft. Dabei ist das Profil der verstärkten Moden ebenfalls schmäler als das Profil einer einzelnen Resonatormode, zumal die Verstärkung nichtlinear ist und die Linienmitten stärker angehoben werden.

Die verschiedenen Moden erhalten ihre Verstärkung von Atomen verschiedener Resonanzfrequenz und machen sich daher die Inversion nicht gegenseitig streitig. Um dies zu illustrieren, ist

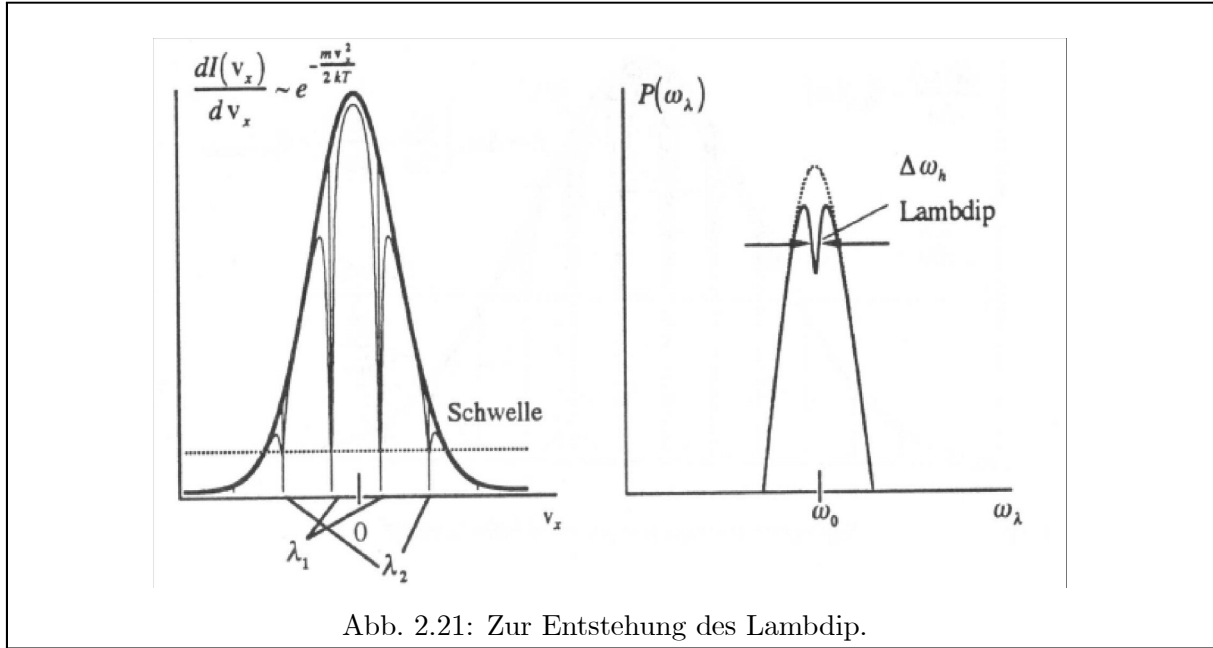


Abb. 2.21: Zur Entstehung des Lambdip.

in Abbildung 2.20(a) die Größe $\sigma_{12}\Delta n$ gegen die Frequenz aufgetragen, wobei das Verstärkungsprofil von $\sigma(\nu)$ überwiegend inhomogen und der Modenabstand deutlich größer als die homogene Linienbreite ist. An den Resonatoreigenfrequenzen ist Δn auf die stationäre Inversion (Schwellwertinversion) $\Delta n_{\text{Schwelle}}$ abgebaut (*Spectral-Hole-Burning*), zwischen den Resonatormoden bleibt die Leerlaufinversion erhalten; die entsprechenden Atome können ja nicht mit dem Laserfeld in Wechselwirkung treten.

Jeder Mode brennt im stationären Zustand ein Loch in die spektrale Verteilung der Inversion, das bis zum Schwellenwert herunter reicht und die homogene Linienbreite aufweist. Genauer gesagt, ist für den Schwellenwert das Produkt maßgeblich. Es können also ohne weiteres mehrere Modes koexistieren, und die Intensität eines jeden ist durch den Abstand der Spektralkurve vom Schwellenwert charakterisiert.

Ein wichtiger Spezialfall der inhomogenen Linienbreite ist die Dopplerbreite von Gaslasern. Sei ω_0 die Frequenz des Laserübergangs im Ruhesystem des Atoms, so ist Resonanz mit der Frequenz ω_λ eines Lasermoden für Atome mit derjenigen Geschwindigkeit gegeben, für die gilt:

$$\omega_\lambda = \omega_0 + \vec{k}_\lambda \vec{v}. \quad (2.80)$$

Sei dieser Mode eine stehende Welle in x -Richtung, so hat ν_λ bezüglich v_x je eine Lösung für die hinlaufende ($k_{\lambda,x} = +k_\lambda$) und rücklaufende ($k_{\lambda,x} = -k_\lambda$) Welle

$$v_x = \frac{\omega_\lambda - \omega_0}{\pm k_\lambda} = \pm c \frac{\omega_\lambda - \omega_0}{\omega_\lambda}. \quad (2.81)$$

Trägt man also wie in Abbildung 2.21 die Inversion als Funktion von v_x auf, so frisst jeder Mode λ symmetrisch zu $v_x = 0$ auf beiden Flanken je ein Loch in die Geschwindigkeitsverteilung der Inversion und zwar bis zur Schwelle herunter. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Modes λ und λ' beträgt in diesem Maßstab

$$\Delta v_x = \frac{\pi c^2}{d\omega_0}$$

Trägt man nun die Laserleistung $P(\omega_\lambda)$ als Funktion der Resonatorfrequenz auf, so setzt sie bei Erreichen der Schwelle mit einer endlichen Steigung ein und reproduziert zunächst einmal

den Teil der gaußförmigen Dopplerkurve, der oberhalb der Schwelle liegt. Im Zentrum dagegen sinkt die Leistung in einem Bereich von der Größenordnung der homogenen Linienbreite ab, da innerhalb dessen die hin- und rücklaufende Welle aus dem gleichen Reservoir von Atomen schöpfen müssen, gegeben durch

$$|v_x| \leq \frac{\Delta\omega_h}{k_\lambda}.$$

Dieser Intensitätseinbruch heißt nach seinem Entdecker „Lambdip“. Er zeigt mit der Schärfe der homogenen Linienbreite die zentrale Übergangsfrequenz an und kann daher auch zur Stabilisierung eines Gaslasers, zum Beispiel eines He-Ne-Lasers, auf die Resonanzmitte benutzt werden. Da die homogene Linienbreite des Lasermediums selbst aber durch die Gasentladung, einen relativ hohen Dampfdruck und die große Oszillatorenstärke des Übergangs verbreitert ist, nutzt man diesen Effekt für Präzisionsmessungen besser in einem zweiten, passiven Absorbergas aus und folgt damit dem bekannten Konzept der Sättigungsspektroskopie.

2.6.5.2 Moden-Wettbewerb (Mode-Competition) bei homogenen Verstärkungsprofilen

Die bisherigen Überlegungen zur Modenstruktur gingen davon aus, dass die Moden unabhängig voneinander existieren können. Das ist jedoch nur der Fall, wenn der Frequenzabstand $\Delta\nu_{\text{Resonator}}$ der Resonatormoden deutlich größer ist als die homogene Linienbreite des Laserübergangs. Ganz andere Verhältnisse liegen vor, wenn das Verstärkungsprofil überwiegend homogen ist, z.B. durch Stoßverbreiterung in Flüssigkeiten. Hier wird durch das Entstehen bereits eines Lasermodes die Inversion aller Atome abgebaut; die Moden treten also in einen gegenseitigen Wettbewerb. Wir erwarten, dass Moden in der Mitte des Profils von $\sigma(\nu)\Delta n$ am schnellsten anwachsen, und im Idealfall wird nur der Mode überleben, der dem Maximum der Kurve $\sigma(\nu)\Delta n$ am nächsten kommt. Wie in 2.20 (c, d) gezeigt, wird die gesamte Kurve so abgebaut, dass das Maximum etwa den stationären Wert $\delta/2d$ erreicht, und die weiter entfernt liegenden Moden können dann nicht mehr verstärkt werden. In der Praxis existieren dennoch mehrere Moden in der Umgebung des Maximums der Verstärkungskurve durch Inhomogenitäten und Fluktuationen des aktiven Mediums und vor allem durch das räumliche „Lochbrennen“ (*Spatial-Hole-Burning*). Letzteres tritt in *Stehwellenresonatoren* auf, d.h. in Resonatoren in denen sich schmalbandige Lichtwellen gegenläufig ausbreiten und dadurch ein mit der Periode $\lambda/2$ oszillierendes Intensitätsmuster entsteht. Nur in den Schwingungsbäuchen der stehenden Welle wird die Inversion auf den Schwellwert abgebaut, während an den Schwingungsknoten die Feldstärke Null ist und die Inversion bestehen bleibt.

Dies ist in Abbildung 2.22 dargestellt. Die durchgezogene Linie (1) in (a) stellt das Intensitätsprofil der oszillierenden Mode dar. An den Knoten A und B wird die Inversion nicht abgerufen. Entsprechend ist $N(z)$ im unteren Bild nur in den Bäuchen der Welle auf die Schwellwertinversion abgesenkt. In den Knoten wächst die Inversion mit wachsender Pumpleistung

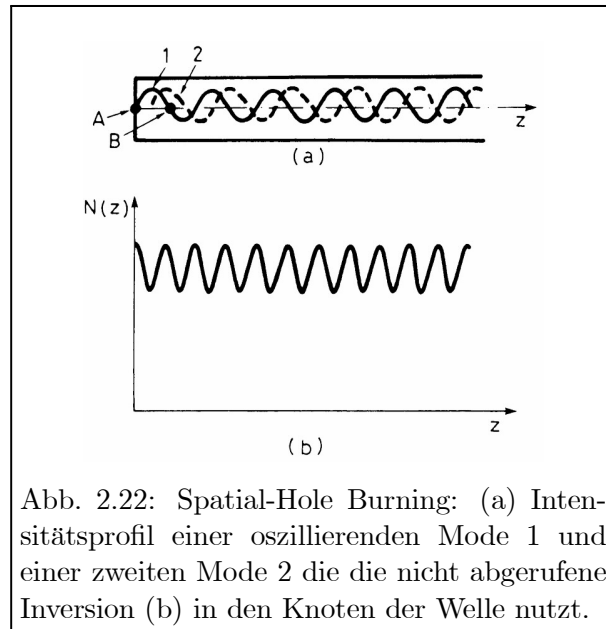


Abb. 2.22: Spatial-Hole Burning: (a) Intensitätsprofil einer oszillierenden Mode 1 und einer zweiten Mode 2 die die nicht abgerufene Inversion (b) in den Knoten der Welle nutzt.

immer weiter an. Passen Moden anderer Frequenzen mit ihren Schwingungsbäuchen in diese Knoten (gestrichelte Linie 2), so finden sie genügend Inversion vor, um zusätzlich zu oszillieren. Stehwellenresonatoren tendieren daher auch bei homogenem Verstärkungsprofil immer zum Multimodebetrieb und das erschwert den *Einfrequenz* (*single-mode*) Betrieb. Der Effekt des *spatial hole burnings* ist daran gebunden, daß die Atome ortsfest sind, genauer gesagt, daß sie während der Lebensdauer des oberen Laserniveaus nicht aus dem Knotenbereich herausdiffundieren. Für feste und flüssige Lasermedien ist dies der Fall, bei gasförmigen nicht unbedingt, jedenfalls nicht bei sehr geringen Drucken.

Bei einem *Einmoden-Ringlaser* läuft die Lichtwelle in einem Ring von Spiegeln in einem bestimmten Sinne um. Daher bildet sich keine stehende Welle aus und aufgrund der Vermeidung des *spatial-hole-burning* laufen sie mit sehr viel höherer Effizienz als lineare Anordnungen und es läßt sich relativ leicht ein „single mode“ Betrieb erreichen.

Wir wollen die hier diskutierten Fälle noch durch Zahlenbeispiele illustrieren: Ein Helium-Neon-Laser mit der Wellenlänge $\lambda = 633$ nm und der Resonatorlänge $d = 0,2$ m hat mit $\Delta\nu_{\text{Doppler}} = 1500$ MHz einen Modenabstand von $\Delta\nu_{\text{Resonator}} = c/2d = 750$ MHz. Die homogene Linienbreite ist bei schwachen Leistungen (1 mW) wenig verbreitert und beträgt weniger als 100 MHz. Wir haben $\Delta\nu_{\text{Resonator}} > \Delta\nu_{\text{Lorentz}}$, und die Moden werden nicht stark wechselwirken. Wir erhalten ein relativ stabiles Multimoden-Spektrum entsprechend Abb. . Bei einer relativ großen Resonatorlänge $d = 1$ m ist jedoch $\Delta\nu_{\text{Resonator}} = c/2d = 150$ MHz, und bei größeren Leistungen ist die homogene Linienbreite durch Stöße und Sättigungseffekte auf etwa $\Delta\nu_{\text{Lorentz}} = 100$ MHz verbreitert. Außerdem treten ja hin- und herlaufende Wellen verschiedener Moden durchaus in Konkurrenz um denselben Vorrat an aktiven Atomen. Unter Umständen kommt es dadurch auch in einem He-Ne-Laser zu *Modenwettbewerb* (*Mode-Competition*) mit Intensitätsfluktuationen.

Im Falle eines entsprechenden Argon-Ionen-Lasers ist die Stoßverbreiterung mit $\Delta\nu_{\text{Lorentz}}$ i. A. erheblich größer, mithin die homogene Linienbreite größer als der Modenabstand $\Delta\nu_{\text{Resonator}} = c/2d = 150$ MHz für Resonatoren von $L = 1$ m, und die Moden dieses Lasers fluktuieren tatsächlich willkürlich mit einem irregulären Zeitverhalten.

2.7 Superradianz

Am Ende dieses Kapitels wollen wir den Stickstofflaser aus Abschnitt 2.2.2.2 noch einmal unter dem Gesichtspunkt der Inversion betrachten. Dieser Laser verzichtet auf die Speicherung der Lichtquanten in einem Resonator und erreicht dennoch Lasertätigkeit. Hier genügt als Wechselwirkungszeit τ_{Photon} schon die einfache Durchflugszeit durch das Medium $t_{\text{photon}} = \frac{d}{c}$ (Abb. 2.23), um ein weiteres Photon stimuliert in die gleiche Phasenzelle zu emittieren und Gleichung 2.14 wird zu

$$\Delta n_{\text{Schwelle}} = \frac{1}{d \cdot \sigma(\nu)} \quad (2.82)$$

oder

$$\Delta n \cdot \sigma(\nu_0) \cdot d > 1. \quad (2.83)$$

Damit bekommt die Schwellenbedingung die sehr einprägsame Form, daß das Produkt aus Inversionsdichte, Wirkungsquerschnitt und durchstrahlter Länge größer als 1 sein muß.

Nehmen wir an, das Medium sei durch eine einmalige, kurzzeitige Anregung über die superradiante Schwelle gehoben worden, so wird sich die Inversion in einem *superradianten Laserblitz* abbauen, dessen zeitliche Länge durch die oben genannte Flugzeit $t_{\text{photon}} = \frac{d}{c}$ gegeben ist. Dadurch ist auch seine spektrale Breite, $\Delta\omega = \frac{1}{\tau_{\text{photon}}}$ bestimmt. Er muß ausgelöst werden durch spontan emittierte Quanten, denen im Prinzip der gesamte Raumwinkel $\Omega = 4\pi$ zur Verfügung steht; jedoch ist die Chance, entlang der langen Achse verstärkt zu werden, am größten, so daß

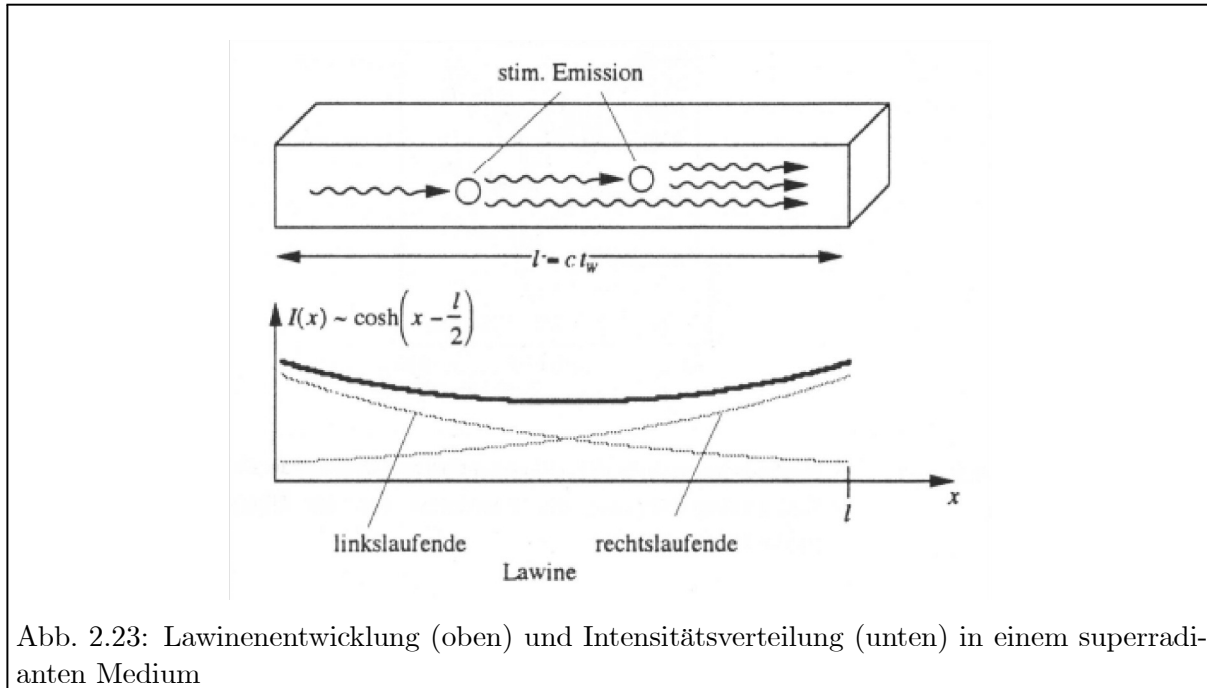


Abb. 2.23: Lawinenentwicklung (oben) und Intensitätsverteilung (unten) in einem superradianten Medium

der Laserblitz an den beiden Stirnseiten austreten wird. Die Chance ist in beiden Richtungen gleich groß. Die lawinenartige Verstärkung führt zu einem exponentiellen Intensitätsanstieg in beide Richtungen, so daß das Gesamtintensitätsprofil über die Länge geschrieben werden kann als (siehe Abb. 2.23)

$$I = I_0 \cosh \left(x - \frac{l}{2} \right)^g, \quad (2.84)$$

mit der Verstärkung pro Längeneinheit g .

Eine reproduzierbare Intensitätsverteilung des superradianten Laserblitzes wird man nur dann erwarten können, wenn die Schwelle um ein Vielfaches überschritten wurde. In der Nähe der Schwelle ist es sehr unsicher, ob überhaupt und an welcher Stelle des Lasermediums ein Lichtquant zunächst spontan in eine zur Weiterverstärkung geeignete Phasenzelle emittiert wird. Die Zahl der in diesen Phasenzellen stimuliert emittierten Quanten wird im ganzen klein sein und stark schwanken. Der austretende Laserstrahl wird nicht sehr ausgeprägt und weder räumlich noch zeitlich kohärent sein, da er viele Phasenzellen besetzt. Wenn die Schwelle aber stark überschritten wird und die Verstärkung schon auf einem kleinen Bruchteil der zur Verfügung stehenden Länge größer als eins ist, wird die Besetzungszahl in der ersten, mit einem spontan emittierten Lichtquant besetzten Phasenzelle sich so schnell vermehren, daß sie sich als einzige durchsetzen und die Inversionsenergie in einem kurzen, kohärenten Laserpuls abrufen kann.

Der Effekt der Superradianz kann manchmal störend wirken, weil er die in einem Lasermedium gespeicherte Energie begrenzt. Hochleistungslaser, wie sie zum Beispiel für die Kernfusion und andere technische Zwecke vorgesehen sind (NIF, PHELIX) kann man daher nicht in einem Stück aufbauen, sondern muß sie auf viele, hintereinander aufgereihte Teilstücke aufteilen, die jeweils als Verstärker dienen. In jedem von ihnen muß die Energie unterhalb der Superradianzschwelle bleiben, damit sie gespeichert bleibt, bis der eigentliche, vom Zündlaser stammende Laserpuls durchläuft und die Energie abrufen. Aus dem gleichen Grunde empfiehlt es sich, bei Hochleistungslasern ein Medium zu wählen, bei dem das Verhältnis aus Strahlungsbreite zur restlichen Linienbreite besonders klein ist.

Farbstofflaser haben eine sehr hohe Strahlungsbreite und neigen daher leicht zur Superradi-

anz. Sie reagieren dann natürlich nicht auf die Abstimmeelemente im Resonator. Relativ leicht erzielt man Superradianz wegen der λ -Abhängigkeit in Gleichung 2.13 auch im Infraroten, also z.B. zwischen zwei dicht benachbarten, angeregten Niveaus von Atomen, nachdem man zuvor das höhere der beiden mit einem Laserpuls selektiv angeregt hat.

Kapitel 3

Optische Resonatoren

Das Verständnis optischer Resonatoren (*optical cavities*) ist von grundlegender Bedeutung, um die Funktionsweise von Lasern zu verstehen. Ganz besonders wichtig sind *Fabry-Perot Interferometer (FPI)*, die für den Bau von Laserresonatoren Verwendung finden aber auch als optische Spektrumanalysatoren eingesetzt werden. Auch für die Frequenzverdopplung und andere nicht-lineare Effekte (z.B. Zweiphotonenspektroskopie) sind Resonatoren ein wichtiges Instrument. Wir wollen zunächst die Grundlagen des Fabry-Perot Interferometers behandeln und dann auf die Modenstruktur des Laserstrahls im Resonator eingehen. Abschließend soll das Stabilitätskriterium optischer Resonatoren hergeleitet und spezielle Resonatorkonfigurationen besprochen werden.

3.1 Der Fabry-Perot-Resonator

Wir wollen im Folgenden den einfachen Fall eines Resonators aus zwei planparallelen Spiegeln betrachten (ebenes FPI). Nehmen wir an, wir besitzen zwei Spiegel mit einer Reflektivität von jeweils 99%. Jeder Spiegel für sich wird also den größten Teil des auf ihn fallenden Lichtes zurückwerfen. Wenn wir jetzt die beiden Spiegel exakt parallel zueinander ausrichten, geschieht etwas völlig unerwartetes: Die Spiegel werden für bestimmte Wellenlängen transparent, sie lassen nahezu alles Licht hindurch während ihre kombinierte Reflektivität für andere Wellenlängen noch größer wird. Die Ursache liegt in der Vielfachreflexion des Lichtes zwischen den Spiegeln. Abhängig von der Phase die während eines Umlaufes auftritt, kann die Interferenz zwischen den Teilstrahlen destruktiv oder konstruktiv werden. Diese Vorgänge wollen wir jetzt etwas näher analysieren.

3.1.1 Funktionsprinzip

Wir wollen uns zunächst die Grundlagen des FPI's erarbeiten. Dies ist gleichzeitig unser Ausgangspunkt für die allgemeine Diskussion optischer Resonatoren. E_0 , E_r , und E_t , seien jeweils die komplexen Amplituden der Lichtwelle die auf den ersten Spiegel M_1 trifft (Einkoppelspiegel), der reflektierten Welle und der transmittierten Welle die aus dem zweiten Spiegel M_2 (Auskoppelspiegel) wieder austritt. Wir nehmen an, dass die Reflexion an den Innenflächen der Spiegel, also der dem Resonator zugewandten Seite stattfindet (die Außenflächen der Spiegel seien mit einer Antireflexbeschichtung versehen). Dadurch erleidet die reflektierte Welle eine Phasenshift von π an dieser Oberfläche wenn sie vom dünneren ins dichtere Medium übergeht.

Die Spiegel seien charakterisiert durch ihre Amplituden-Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten r_1 , r_2 und t_1 , t_2 . (Reflektivität $R_1 = r_1^2$ und Transmission $T_1 = t_1^2$). Der Phasen-

EXKURS: Reflexion an Grenzflächen

Die Amplitude des elektrischen Feldes E einer Lichtwelle, die in einem Medium n_1 propagiert und senkrecht auf ein Medium n_2 einfällt, wird mit einem Reflexionskoeffizienten

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

reflektiert. Man erkennt, dass für $n_2 > n_1$ ein negatives Vorzeichen auftritt, die reflektierte Welle bei der Reflexion am optisch dichteren Medium also eine Phasenverschiebung von π erleidet. Entsprechend kann man r_{12} in diesem Fall als $r_{12} = |r_{12}| e^{i\pi}$ schreiben. Der entsprechende Transmissionskoeffizient lautet

$$t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

Es fällt auf, dass $t_{12} + r_{12} \neq 1$ ist. Für die reflektierte bzw. transmittierte Leistung ($\propto E^2$) gilt

$$R_{12} = r_{12}^2 \qquad T_{12} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2$$

und damit $R_{12} + T_{12} = 1$. (Hinweis: Spezialfälle der Fresnelschen Formeln)

faktor der einfallenden Welle $\exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ sei so gewählt, dass er auf der Oberfläche des Einkoppelspiegels gerade 1 ist.

In Abb. 3.1 ist der Vorgang der *Vielfachreflexion* dargestellt. Der Klarheit halber ist der einfallende Strahl gegenüber der Spiegelfläche geneigt, die daraus folgende Phasenverschiebung ist aber in der Berechnung nicht berücksichtigt. Die komplexe Amplitude der transmittierten Welle ist eine *Superposition* der Amplituden aller Partialwellen die unmittelbar, nach einer, nach zwei, drei und so weiter Umläufen den Auskoppelspiegel durchtreten. Jeder komplette Umlauf erhöht den Phasenfaktor um $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) = \exp(-i\omega/c \cdot 2L) = \exp(-i 2\delta)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} E_T &= E_0 t_1 t_2 e^{-i\delta} + E_0 t_1 t_2 r_1 r_2 e^{-i3\delta} + E_0 t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 e^{-i5\delta} + \dots \\ &= E_0 t_1 t_2 e^{-i\delta} \left[1 + r_1 r_2 e^{-i2\delta} + r_1^2 r_2^2 e^{-i4\delta} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Der Term innerhalb der Klammer ist eine geometrische Serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{und} \qquad q = r_1 r_2 e^{-i2\delta} \quad (3.2)$$

und man erhält

$$E_T = E_0 \frac{t_1 t_2 e^{-i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-i2\delta}}. \quad (3.3)$$

Um die relative Intensität des transmittierten Lichtes zu berechnen, erweitert man den Bruch mit $1 - r_1 r_2 e^{+i2\delta}$ und bildet dann

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{E_T E_T^*}{E_0^2} = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\delta)} \quad (3.4)$$

$$= \frac{T_1 T_2}{(1 - r_1 r_2)^2 \left(1 - \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \delta \right)}. \quad (3.5)$$

$$= \frac{T_1 T_2}{(1 - r_1 r_2)^2 (1 - F \sin^2 \delta)} \quad (3.6)$$

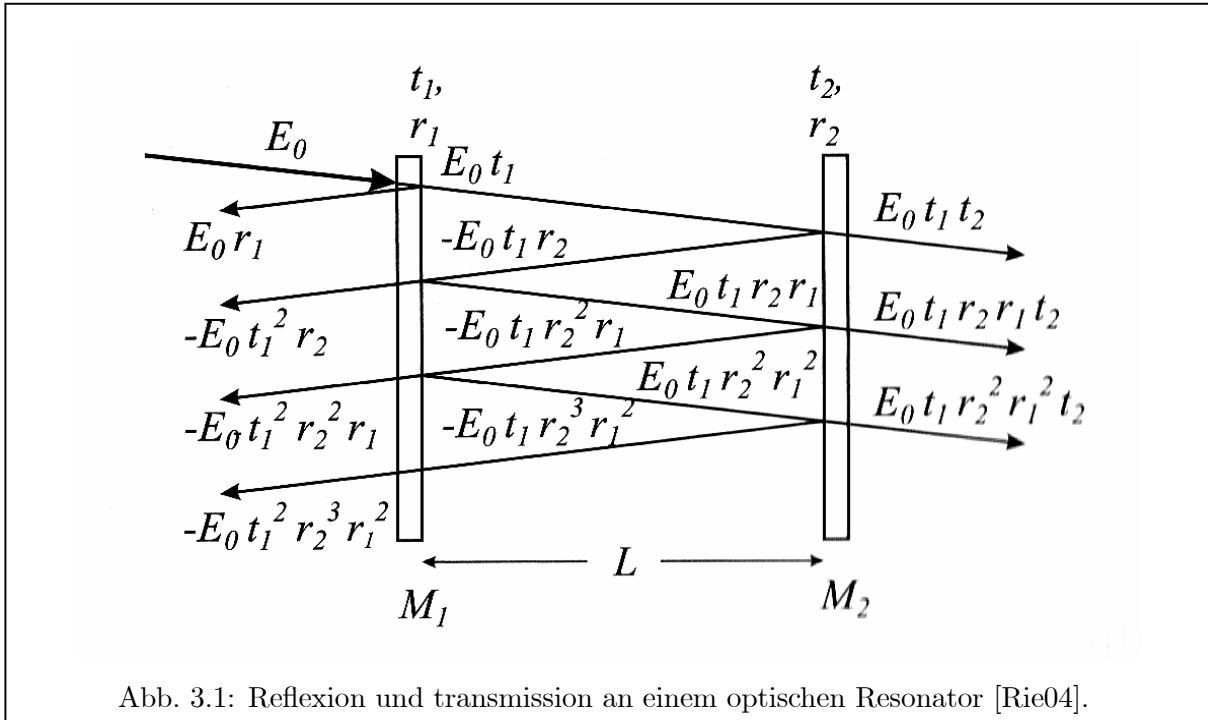


Abb. 3.1: Reflexion und transmission an einem optischen Resonator [Rie04].

mit der Definition des *Finess-Koeffizienten*

$$F = \frac{4r_1r_2}{(1 - r_1r_2)^2} \quad (3.7)$$

die von der gleich noch zu definierenden *Finesse* F^* zu unterscheiden ist¹.

Die *Airy-Funktion* (3.4) - (3.6) hängt von der Phasenshift

$$\Delta\phi = \omega 2L/c = 2\delta \quad (3.8)$$

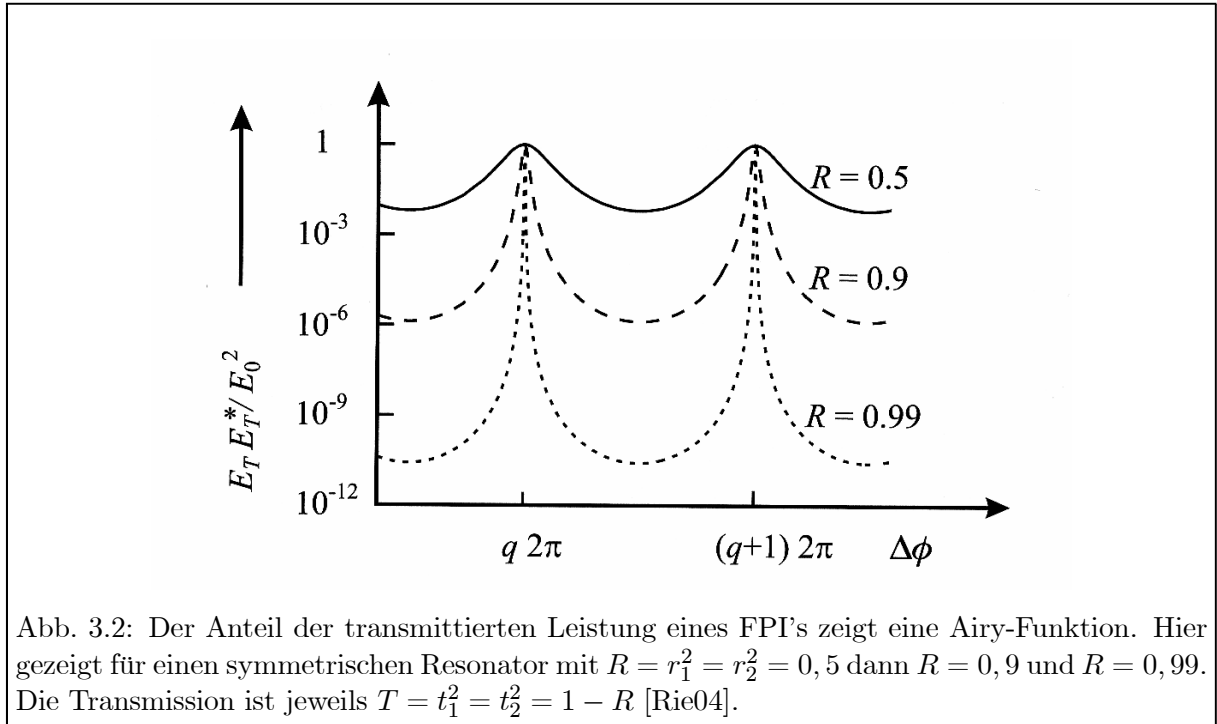
zwischen aufeinanderfolgenden Partialwellen ab. Wenn die Phasenshift ein Vielfaches von 2π beträgt, interferieren alle Partialwellen konstruktiv, während es in allen anderen Fällen zu einer mehr oder weniger destruktiven Interferenz kommt. Die Frequenzdifferenz die zu einer Phasenshift von 2π führt, wird als *freier Spektralbereich* (engl. *free spectral range*) *FSR* des FPI's bezeichnet

$$\text{FSR} = \frac{c}{2L} = \frac{15 \text{ GHz}}{L/\text{cm}}. \quad (3.9)$$

In Abb. 3.2 ist die *Airy-Funktion* für verschiedene Spiegelreflektivitäten dargestellt. Man beachte die logarithmische y-Achse. Die Schärfe der Transmissionslinien nimmt mit wachsender Reflektivität der Spiegel zu. Den Zusammenhang zwischen der Linienbreite des FPI und der Reflektivität der Spiegel kann man aus einer Entwicklung der Kosinusfunktion im Nenner von (3.4) für kleine Phasenverschiebungen $\Delta\phi = 2\delta \ll 2\pi$ gewinnen

$$I_T = E_0^2 \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 (1 - \frac{4\delta^2}{2} + \dots)} \approx E_0^2 \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \delta^2}. \quad (3.10)$$

¹Bei der Umformung wurde die trigonometrische Relation $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ angewendet.



In dieser Näherung wird die Kurve zu einer *Lorentzfunktion* mit voller *Halbwertsbreite* (engl. *full width half maximum FWHM*) $2\pi\delta\nu = 2\omega_{1/2}$ wobei $\omega_{1/2}$ die Frequenz ist, bei der die Intensität auf 50% des Maximalwertes abgefallen ist.

$$\delta\nu = \frac{2\omega_{1/2}}{2\pi} = \frac{(1 - r_1 r_2) c}{\pi \sqrt{r_1 r_2} 2L}. \quad (3.11)$$

Die Linienbreite steht in direktem Zusammenhang mit der *Güte* Q des Resonators

$$Q = \frac{\nu}{\delta\nu},$$

üblicherweise normiert man sie auf den FSR des FPI's und bezeichnet diese Größe als *Finesse* F^* des Resonators

$$F^* \equiv \frac{\text{FSR}}{\delta\nu} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}. \quad (3.12)$$

Der Zusammenhang zwischen Finesse und Finesse-Koeffizient lautet dementsprechend

$$F^* = \frac{\pi}{4} \sqrt{F} =$$

Beispiel: Ein FPI mit einer Länge von 30 cm und einer Reflektivität der Spiegel von $R = r_1 r_2 = 99\%$ hat eine Finesse $F^* = 314$, einen FSR= 500 MHz und eine Linienbreite $\delta\nu \approx 1,6$ MHz.

Im Photonenbild bleibt ein Photon in einem Resonator mit hoher Finesse im Mittel für eine Zeit τ gespeichert. Der Zusammenhang zwischen der Abklingzeit τ einer exponentiell abklingenden elektromagnetischen Welle und der Linienbreite des Spektrums ist bekanntlich $\delta\omega = 2\pi\delta\nu = 1/\tau$ und somit folgt

$$F^* \equiv \frac{c/2L}{\delta\nu} = \frac{c}{2L} 2\pi\tau = \frac{\pi c}{L} \tau \quad (3.13)$$

und

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{2L}{c} F^* \quad (3.14)$$

ergibt. Bis auf einen Faktor 2π gibt die Finesse also gerade die Anzahl der Umläufe des Photons im Resonator an. Dieser Faktor ist willkürlich und kommt nur durch die Definition von F^* mit der Halbwertsbreite $\delta\nu$ statt der natürlicheren Größe $\delta\omega$ zustande. Die Messung der Speicherzeit τ ist eine Möglichkeit die Spiegel von "Super-Resonatoren" mit sehr hoher Güte zu charakterisieren. Mit der Näherung $1 - r_1 r_2 \ll 1$ erhält man aus (3.12) und (3.14) den Zusammenhang

$$r_1 r_2 = 1 - \frac{L}{c\tau}. \quad (3.15)$$

Betrachten wir zum Schluss noch die am Einkoppelspiegel reflektierte Welle. Analog zu (3.3) erhält man

$$E_R = E_0 r_1 - E_0 \frac{t_1^2 r_2 e^{-i2\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-i2\delta}} = E_0 \frac{r_1 - r_2 e^{-i2\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-i2\delta}}. \quad (3.16)$$

Die Reflexion der Amplitude besitzt 2 Terme. Der erste stammt von der direkten Reflexion der einfallenden Welle, der zweite von der Transmission des im Resonator umlaufenden gespeicherten Lichtes. Die entgegengesetzten Vorzeichen beruhen darauf, dass der Teil, der aus der direkten Reflexion der einfallenden Welle stammt, einmal weniger am dichteren Medium reflektiert wird. In der Resonanz besitzt der reflektierte Anteil ein Minimum weil die beiden Anteile eine Phasenshift von π besitzen und deshalb destruktiv interferieren.

Das Minimum wird Null für einen verlustfreien symmetrischen Resonator mit $r_1 = r_2 = r$ und $t_1 = t_2 = t$ wobei $r^2 + t^2 = R + T = 1$ gelte. Damit erhalten wir den komplexen Amplituden-Reflexionskoeffizienten des verlustfreien symmetrischen Resonators

$$r_{FP}(\omega) = \frac{E_R}{E_0} = r \frac{1 - e^{-i2\delta}}{1 - r^2 e^{-i2\delta}}. \quad (3.17)$$

Durch Separation des Real- und Imaginärteils können wir den Leistungs-Reflexionskoeffizienten und die Phasenverschiebung der reflektierten Welle erhalten (jetzt wieder für den allgemeinen Fall aus (3.16))

$$R_{FP} = r_{FP} r_{FP}^* = (\operatorname{Re} r_{FP})^2 + (\operatorname{Im} r_{FP})^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\delta)}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\delta)} \quad (3.18)$$

$$\tan \phi_R = \frac{\operatorname{Im} r_{FP}}{\operatorname{Re} r_{FP}} = \frac{r_2 t_1^2 \sin(2\delta)}{r_1 [1 + r_2^2 (r_1^2 + t_2^2) - r_2 (2r_1^2 + t_2^2) \cos(2\delta)]}. \quad (3.19)$$

Beide Funktionen sind in Abb. 3.3 dargestellt. Im symmetrischen Fall vereinfacht sich die Reflektivität zu

$$R_{FP} = \frac{2R^2 (1 - \cos(2\delta))}{1 + R^4 - 2R \cos(2\delta)}. \quad (3.20)$$

und man sieht, dass sie im Resonanzfall $\delta = 0$ sogar verschwindet, d.h. die gesamte auf den Einkoppelspiegel fallende Leistung wird in den Resonator eingekoppelt. Dies ist häufig erwünscht, z.B. bei Resonatoren die für die Frequenzverdopplung genutzt werden. In Tab. 3.1 sind beispielhaft die Kenndaten für verschiedene Fabry-Perot-Interferometer angegeben.

Abschließend ist in Abb. 3.4 das Funktionsprinzip des Fabry-Perot Interferometers in der Resonanz noch einmal anschaulich dargestellt. In Abb. 3.4(a) sind die Teilstrahlen gezeigt und die Phasenverschiebungen die mit den Transmissionen durch das Etalonmedium verbunden sind. Wichtig ist, dass die in Richtung des einfallenden Strahls durch den ersten Spiegel transmittierten Teilstrahlen r_1, r_2, \dots , gegenüber dem direkt reflektierten Anteil r_0 alle eine Phasenverschiebung

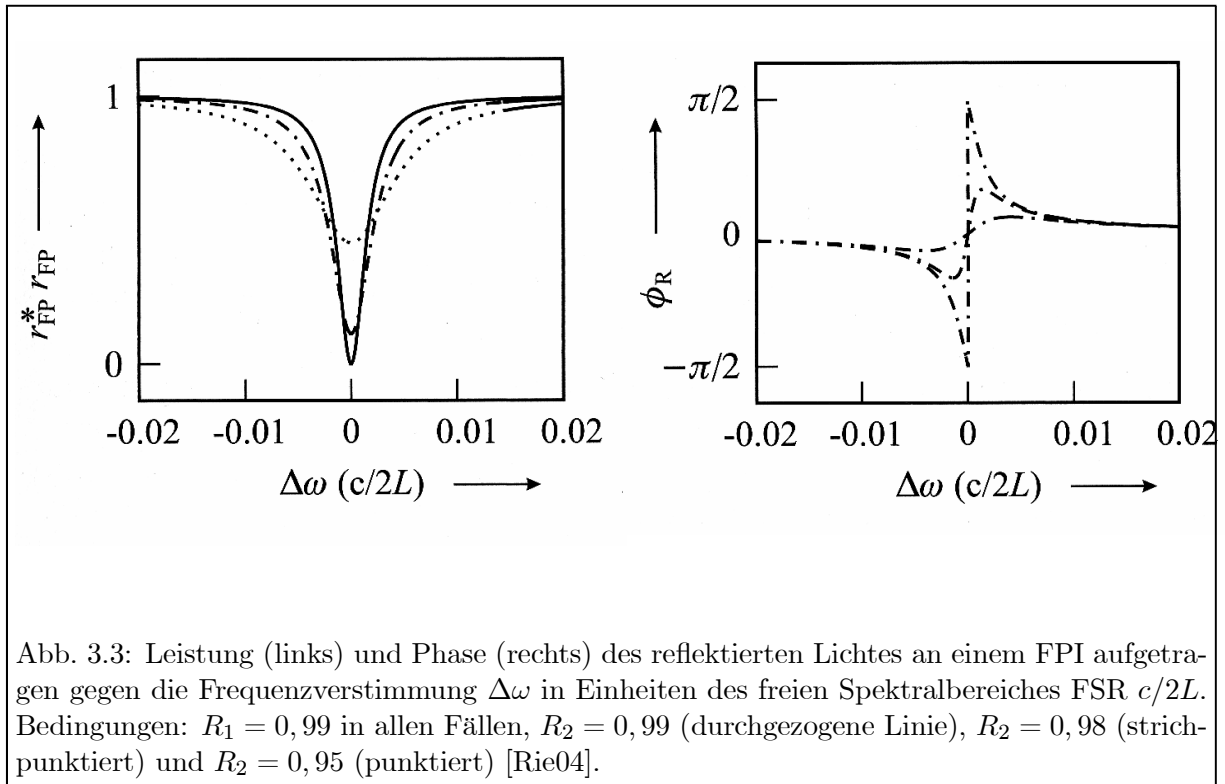


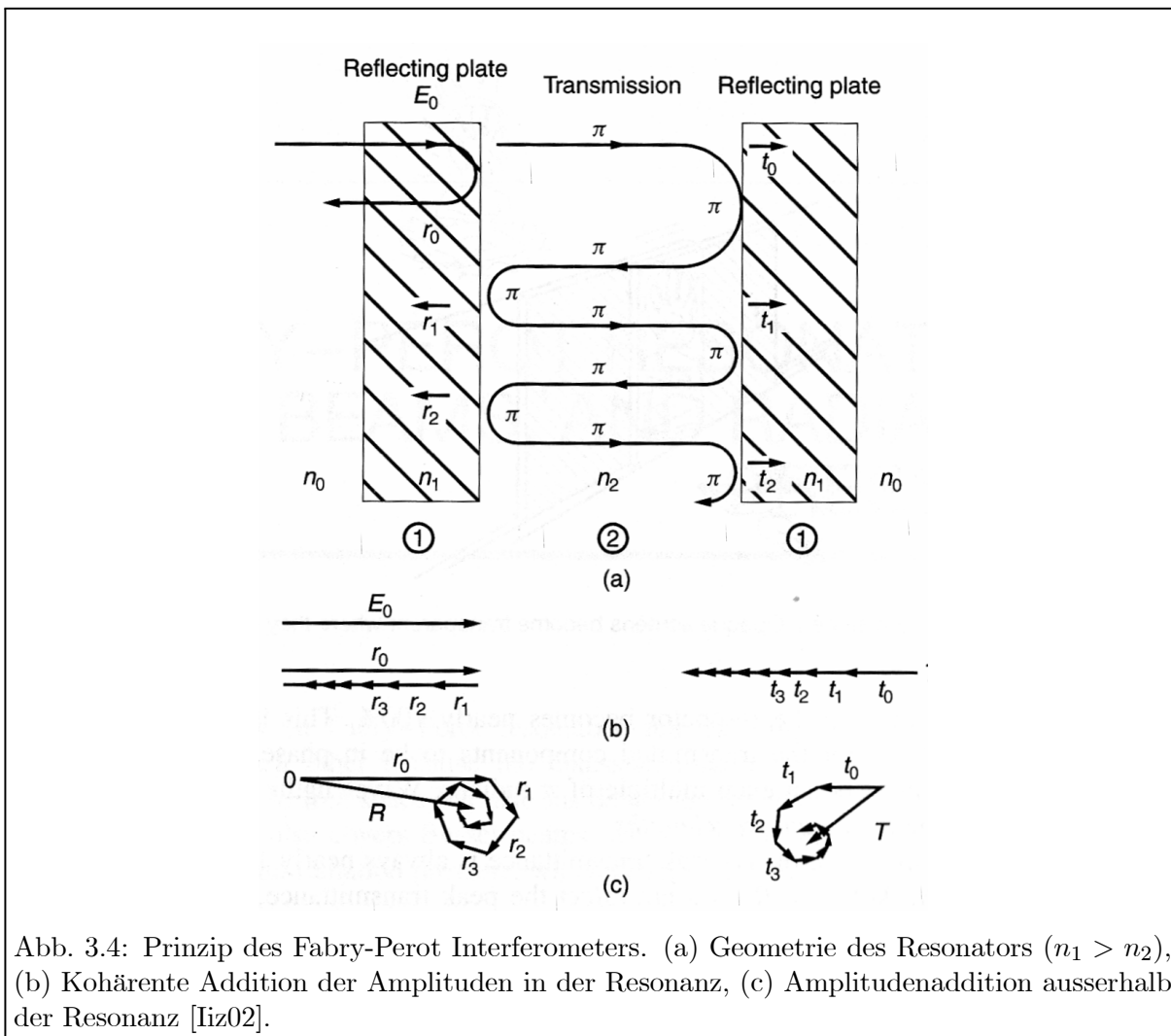
Tabelle 3.1: Kenndaten typischer Fabry-Perot-Resonatoren

ℓ [mm]	$1 - R = T$	FSR [GHz]	FWHM [MHz]	F	Q	τ
300	1%	0,5	1,7	300	3×10^8	0,1 ms
10	0,1 %	15	5	3000	10^8	0,03 ms
1	20 ppm	150	1	150.000	5×10^8	0,15 ms
100	20 ppm	1,5	0,01	150.000	5×10^{10}	15 ms

von π aufweisen und deshalb destruktiv mit dem direkt reflektierten Anteil interferieren. Gleichzeitig besitzen alle durch den Spiegel 2 hindurchtretenden Strahlen die gleiche Phase und interferieren konstruktiv. Dieser Umstand ist gut in Abb. 3.4(b) zu erkennen bei der die Amplituden und Phaseninformation des elektrischen Feldes als Vektor (Phasor) gezeigt ist. Die Richtungen von r_0 und r_1, r_2, \dots sind entgegengesetzt und heben sich daher gegenseitig auf. Ausserhalb der Resonanz (c) ändert sich die Phase der ankommenden Welle ständig und die Vektoren schrauben sich daher auf. Der reflektierte Anteil des Lichtes bleibt groß, der transmittierte Anteil klein.

3.1.2 Etalons und Interferometer

Wenn der Abstand zwischen den beiden Spiegelflächen eines Fabry-Perot-Resonators fest vorgegeben ist, spricht man von einem *Fabry-Perot-Etalon* oder einfach einem "*Etalon*" (*frz. Eichmaß*). Wenn der Abstand zwischen den Spiegelflächen hingegen veränderlich ist, beispielsweise durch eine *piezoelektrischen Kristall* (PZT = engl. *piezo-electrical transducer*), spricht man von einem (*scanning*) *Fabry-Perot Interferometer* (FPI) wie es erstmals von C. Fabry und A. Perot im Jahre 1899 eingesetzt wurde.



3.1.2.1 Etalon

Bei einer planparallelen, teilverspiegelten Glasplatte handelt es sich um ein Etalon wie es oft zur Frequenzkontrolle in Lasern eingesetzt wird. Dabei ist wichtig, dass die Flächen eine große Ebenheit aufweisen. Der optische Weg im Etalon - und damit die Resonanzfrequenz - hängt von dem Brechungsindex des Materials ab, der in der Regel stark mit der Temperatur variiert ($dn/dT \approx 10^{-3}/K$). Um die Temperaturabhängigkeit zu reduzieren, werden oft auch "Luftspalte" als Etalons verwendet indem man zwei Glasplatten mit einem Abstandshalter der einen möglichst kleinen Wärmeausdehnungskoeffizienten besitzt (z.B. Quarz), fixiert. Interferometer hingegen werden häufig zur Charakterisierung von Laserstrahlung eingesetzt.

3.1.2.2 Scanning Fabry-Perot Interferometer

Ein Interferometer besteht aus vier wesentlichen Bauteilen: dem Resonator, einem Funktionsgenerator zur Erzeugung einer Rampenspannung, einem Photodetektor und einem Oszilloskop zur Darstellung des Spektrums. Abbildung 3.5 zeigt das Photo eines typischen FPI-Resonators mit dem dazugehörigen Blockdiagramm. Der Resonator besteht aus einer festen und einer beweglichen Seite. Die feste Seite ist mit einer Justageeinheit ausgestattet, auf der einer der beiden Spiegel befestigt ist. Damit kann die Parallelität der beiden Spiegel justiert werden. Mit der be-

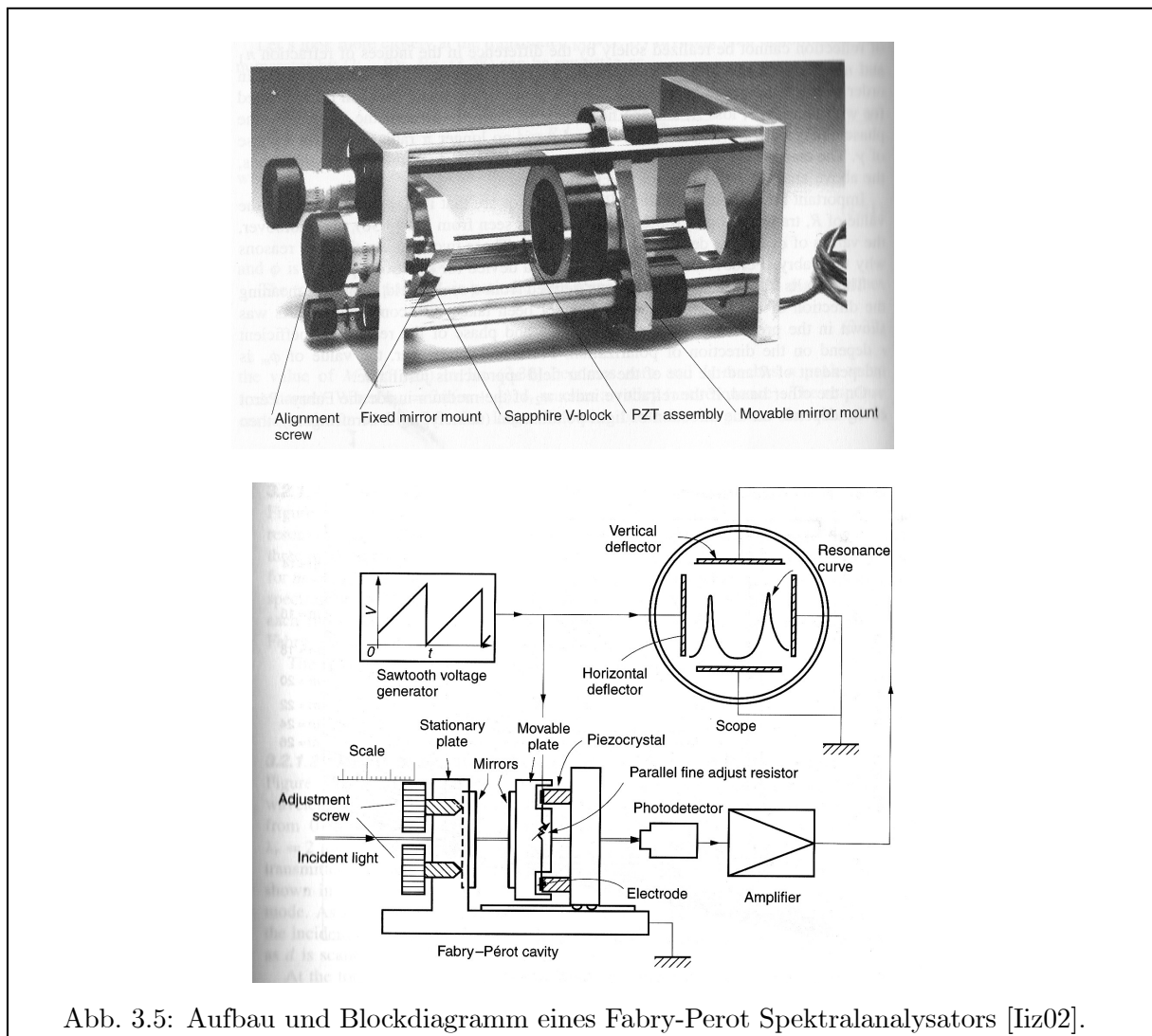


Abb. 3.5: Aufbau und Blockdiagramm eines Fabry-Perot Spektralanalysators [Iiz02].

weglichen Seite kann zunächst grob die Länge des Interferometers eingestellt werden. Typische Werte liegen zwischen $50 \mu\text{m}$ und 15 cm . Auf der beweglichen Platte ist die Piezo-Vorrichtung angebracht, auf der der zweite Spiegelhalter befestigt ist. Durch das Anlegen einer Spannung an den Piezo kann die Länge des Resonators um typischerweise $2\text{-}3 \mu\text{m}$ verändert werden. Im Betrieb wird an den Piezo eine Sägezahnspannung angelegt, die gleichzeitig auch die horizontalen Ablenkplatten des Oszilloskops versorgt. Das Signal des Photodetektors, bei dem es sich um eine Photodiode oder einen Photomultiplier handeln kann, wird verstärkt und an die vertikalen Ablenkplatten eines Oszillographen angelegt. Am Oszilloskop sieht man damit die Intensität des transmittierten Lichts als Funktion der angelegten Piezospannung und damit der Länge des Resonators. FP-Interferometer werden durch zwei Größen charakterisiert: die Finesse und der freie Spektralbereich. Die Separation der Spiegel ergibt den freien Spektralbereich und die Reflektivität bestimmt die Finesse und damit die Schärfe der Resonanz.

3.1.3 Impedanzanpassung

Der Zähler in (3.18) lautet im Resonanzfall ($\delta = 0$)

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2. \quad (3.21)$$

Die Nullstellen dieses Polynoms geben die optimale Kopplung des Lichtes in den Resonator an, da dann die Reflexion vollständig verschwindet. Bei dem einfachen FPI mit 2 Spiegeln und ohne intrinsische Verluste führt dies direkt auf $r_1 = r_2$ wie wir bereits zuvor in (3.18) festgestellt hatten. Um dies auf einen allgemeinen Resonator mit N Spiegeln zu verallgemeinern, fassen wir in r_2 einfach die Reflektivitäten aller Spiegel ausser dem Einkoppelspiegel zusammen und fügen auch intrinsische Verlust aufgrund von Absorption innerhalb eines Mediums oder Streuung an Oberflächen mittels eines Faktors $\sqrt{1 - V}$ hinzu

$$r'_2 = r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_N \cdot \sqrt{1 - V}. \quad (3.22)$$

Wenn man die Eigenschaften der verschiedenen Spiegel eines Resonators und die sonstigen Verluste kennt, kann man den Einkoppelspiegel so wählen, dass möglichst viel der eingestrahnten Leistung in den Resonator eingekoppelt wird. Das Optimum erreicht man mit der Bedingung $r_1 = r'_2$ die man durch Multiplikation mit r_1 auch als

$$R_1 = r_1^2 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_N \cdot \sqrt{1 - V} \quad (3.23)$$

schreiben kann. Die externen Verluste sind in diesem Fall gerade gleich den internen Verlusten - eine Situation, die bei Resonatoren ganz allgemein bekannt ist und als *Impedanzanpassung* bezeichnet wird. Bei ungünstiger Wahl des Einkoppelspiegels ist man im Bereich der Über- oder Unterkopplung. Der Anteil der transmittierten bzw. reflektierten Leistung ist in Abbildung 3.6 gezeigt.

3.2 Transversale Moden und Gauß-Strahlen

Bislang haben wir uns nur mit der Resonanzbedingung für Resonatoren in longitudinaler Richtung befasst. Diese ergibt sich anschaulich sofort aus der Bedingung, dass sich die Phase der elektromagnetische Welle nach einem Umlauf im Resonator um ein Vielfaches von 2π geändert haben muss. Daher weist ein FPI Maxima der Airy-Funktion bei den Eigenfrequenzen

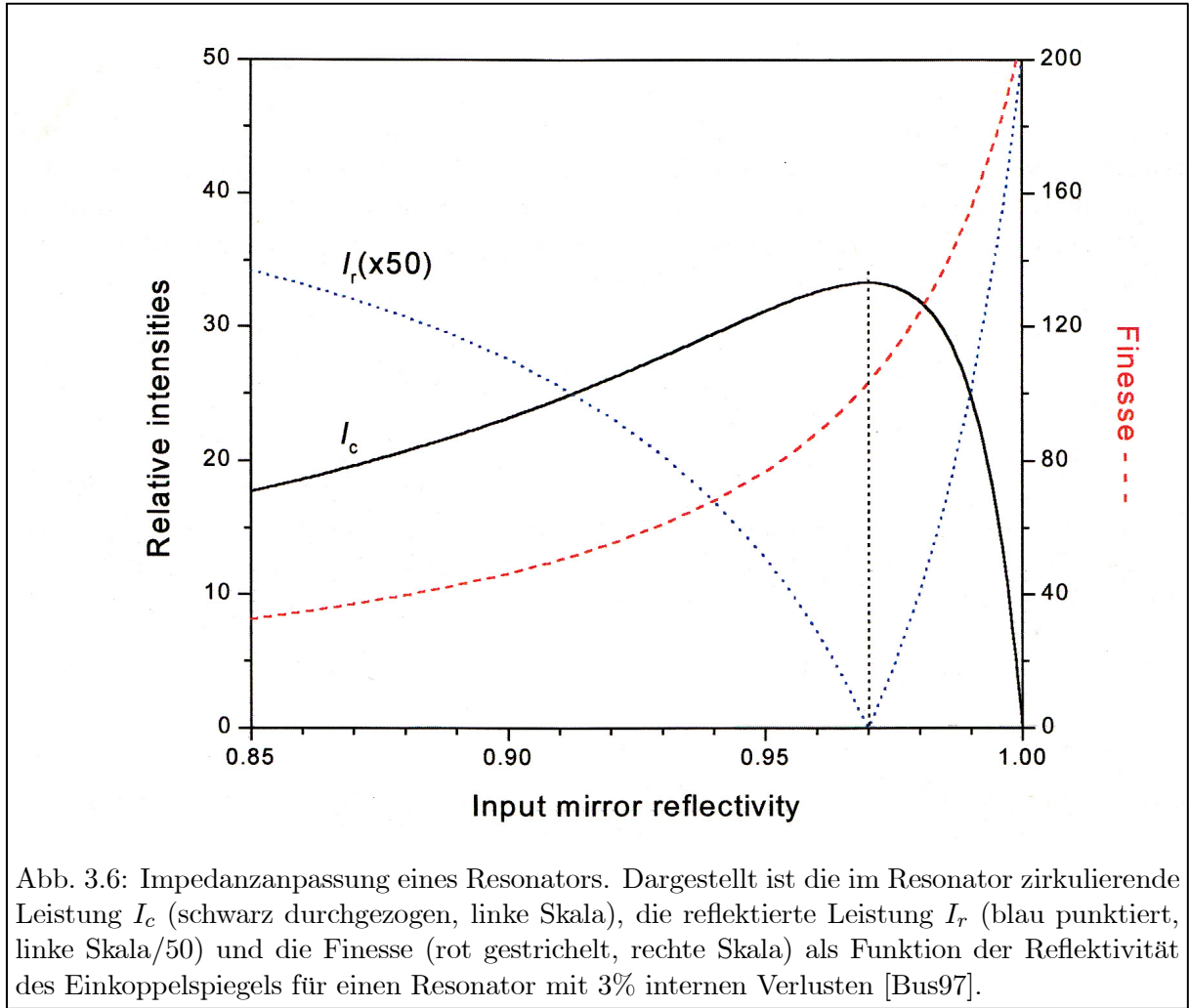
$$\omega_q = q \, 2\pi \frac{c}{2L} \quad q \in \mathbb{N} \quad (3.24)$$

auf. Die Zahl q der Knoten der resonanten elektromagnetischen Welle wird als *longitudinale Modenzahl* des Oszillators bezeichnet. Dabei sind wir implizit von der Vorstellung ebener Wellen ausgegangen. Eine wirklich ebene Welle muss sich allerdings bis ins Unendliche erstrecken, ansonsten treten an ihren Rändern unweigerlich Beugungserscheinungen auf. Dies kann aber in der Realität nicht der Fall sein, weil eine solche Welle einen unendlichen Energieinhalt besitzen müsste und außerdem auch die Spiegel unendlich groß sein müssten um die Welle im Resonator einzuschließen. Wir wollen jetzt etwas realistischer werden und uns mit der transversalen Struktur eines Resonatormodes auseinandersetzen. Wir werden feststellen, dass die gewonnenen Erkenntnisse auch auf freie Laserstrahlen anwendbar sind. Die Folgenden Betrachtungen lehnen sich an [Kog66] an.

3.2.1 Die paraxiale Wellengleichung

Ausgehend von der Wellengleichung einer Elektromagnetischen Welle im Vakuum

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3.25)$$



faktorisieren wir E zunächst in einen zeitlichen und einen räumlichen Anteil

$$E(x, y, z, t) = E(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

und machen für den räumlichen Teil den Ansatz

$$E(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z)e^{-ikz}. \quad (3.27)$$

bei dem \tilde{u} eine komplexe skalare Funktion ist, die das transversale Profil der Welle beschreibt. Für $\tilde{u} = 1$ erhalten wir wieder den bekannten Grenzfall der ebenen Welle. Da ein Laserstrahl dem Ideal einer ebenen Welle sehr nahe kommt, erwarten wir, dass \tilde{u} sich entlang z nur langsam ändert. Setzen wir dies alles in (3.25) ein, so erhalten wir (*Übungsaufgabe*) zunächst

$$(\nabla^2 + k^2) E(x, y, z) = 0 \quad (3.28)$$

und daraus dann die Differentialgleichung für die komplexe skalare Amplitude

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0. \quad (3.29)$$

Aufgrund des vorher gesagten, können wir die zweite Ableitung bezüglich z gegenüber der ersten Ableitung nach z (die selbst schon klein ist) und den zweiten Ableitungen nach y und z

EXKURS: Verbindung zwischen Strahlen und Wellenoptik

Ein Laserstrahl ist ein sehr gut gebündelter Lichtstrahl. Er breitet sich geradlinig, im Nahfeld des Fokus ohne größere Aufweitung, aus. Entlang seiner Ausbreitungsrichtung z verhält sich ein Laserstrahl in diesem Bereich also ähnlich wie eine *ebene Welle* mit konstanter Amplitude

$$E(z, t) = A e^{-i(\omega t - kz)}.$$

Andererseits muss sich der Strahl weitab der Quelle (Fokus) wie eine *Dipol-* oder *Kugelwelle* verhalten, deren Amplitude mit wachsender Entfernung abnimmt

$$E(\vec{r}, t) = A \frac{e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}{|\vec{k} \cdot \vec{r}|}.$$

Beides sind Lösungen der Wellengleichung. Die Formel für den Gauß'schen Grundmode können wir motivieren, wenn wir die Kugelwelle in der Nähe der z -Achse (*paraxial*) betrachten und sie in ihre longitudinalen (z -Koordinate) und ihre transversalen Bestandteile (x, y -Koordinaten) zerlegen. Beschränken wir uns auf Strahlen mit axialer Symmetrie die nur noch von einer transversalen Koordinate $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängen, kann man $\vec{k} \cdot \vec{r}$ in der *Fresnel-Näherung* wegen $\rho \ll z$ schreiben

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}.$$

Damit erhalten wir für den räumlichen Anteil

$$E(\vec{r}) = \frac{A(\vec{r})}{|\vec{k} \cdot \vec{r}|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \approx \frac{A(z, \rho)}{kz} \exp\left(i \frac{k\rho^2}{2z}\right) e^{ikz},$$

eine Formel die bereits sehr viel Ähnlichkeit mit einer ebenen Welle hat, deren räumliche Phase transversal geringfügig mit dem *Fresnel Faktor* $\exp(ik\rho^2/2z)$ moduliert bzw. gekrümmt ist. Wenn man jetzt noch adhoc die lineare komplexe Ersetzung

$$z \rightarrow q(z) = z - iz_0 \quad z_0 \in \mathbb{R}$$

machen, haben wir den Gauß'schen Grundmode bereits gewonnen.

vernachlässigen und erhalten die *paraxiale Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0. \quad (3.30)$$

3.2.2 Die Gauß'sche Grundmode

Als Lösungsansatz für (3.30) wählen wir²

$$\tilde{u}(x, y, z) = A(z) \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2\tilde{q}(z)}\right), \quad (3.31)$$

²Dies ist bei weitem nicht der allgemeinste Ansatz (siehe Abschnitt 3.2.3), führt aber auf die Gauß'sche Grundmode, die wichtigste Form der transversalen Moden, die der überwiegenden Zahl aller Anwendungen zugrunde liegt.

der eingesetzt in (3.30)

$$\left[\left(\frac{k}{\tilde{q}} \right)^2 \left\{ \frac{d\tilde{q}}{dz} - 1 \right\} (x^2 + y^2) - \frac{2ik}{\tilde{q}} \left\{ \frac{\tilde{q}}{A} \frac{dA}{dz} + 1 \right\} \right] A(z) = 0 \quad (3.32)$$

ergibt. Die kann nur für alle Werte von x und y eine Lösung sein, wenn beide geschwungenen Klammern $\{ \}$ identisch verschwinden. Die entsprechenden Differentialgleichungen für $\tilde{q}(z)$ und $A(z)$ sind leicht zu lösen, wobei wir der Einfachheit halber die Integrationskonstante $z_0 = 0$ setzen wollen:

$$\tilde{q}(z) = \tilde{q}_0 + z \quad (3.33)$$

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}(z)}. \quad (3.34)$$

Die erste Gleichung beschreibt die Entwicklung des *komplexen Strahlparameters* \tilde{q} ausgehend vom Wert \tilde{q}_0 in einer Ebene durch z_0 zum Wert q in einer Ebene durch z . Um die Bedeutung des Strahlparameters \tilde{q} zu verstehen, schreiben wir ihn als Summe aus Real- und Imaginärteil

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}. \quad (3.35)$$

Wenn wir dies in (3.31) einsetzen erhalten wir

$$\tilde{u}(x, y, z) = A_0 \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}(z)} \exp \left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right). \quad (3.36)$$

Die Verteilung hat einen reellen Anteil

$$\exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right) = \exp \left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \quad (3.37)$$

der einer zweidimensionalen Gaußverteilung entlang der transversalen Koordinaten x und y entspricht. $w(z)$ wird als Strahlradius am Ort z bezeichnet und gibt an in welcher Distanz ρ von der z -Achse die Amplitude auf einen Bruchteil $1/e$ des Maximalwertes abgefallen ist - die Intensität entsprechend auf $1/e^2$.

Der komplexe Anteil

$$\exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2q_{\text{re}}} \right) = \exp \left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) \quad (3.38)$$

stellt einen zusätzlichen Phasenfaktor einer Kugelwelle dar, wobei $R(z)$ der Krümmungsradius der Wellenfront entspricht, die gerade auf der z -Achse den Punkt z erreicht. Der komplexe Strahlparameter $q(z)$ mit einem Real und einem Imaginärteil enthält alle wesentlichen Informationen der Gauß-Welle. Am Ort $z_0 = 0$, an dem die Wellenfront einer ebenen Welle entspricht - der Krümmungsradius also unendlich wird - erhält man

$$\frac{1}{\tilde{q}(z=0)} = \frac{1}{\tilde{q}_0} = -i \frac{1}{q_{\text{im}}(z=0)} = -i \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \quad (3.39)$$

oder

$$\tilde{q}_0 = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (3.40)$$

w_0 wird als *Strahltaille* (engl. *waist*) der Gaußwelle bezeichnet. Es ist der Radius am Ort des Fokus, also des kleinsten Strahldurchmessers. Kennt man die Fokusgröße eines solchen gaußförmigen Laserstrahls und seine Wellenlänge, so kann man anhand

$$\tilde{q}(z) = \tilde{q}_0 + z = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} + z \equiv i z_R + z \quad (3.41)$$

den Strahlradius an jedem Ort z ausrechnen. Die Größe z_R ist die sogenannte Rayleighlänge des Strahls. Oft gibt man auch das Doppelte der Rayleighlänge an, welches als *konfokaler Parameter* $b = 2z_R$ bezeichnet wird. Innerhalb der *Rayleighzone* $-z_R \leq z \leq z_R$ kann der Laserstrahl in guter Näherung als ebene Welle angesehen werden. Wir befinden uns im *Nahfeld* des Fokus. Je stärker ein Lichtstrahl fokussiert ist, desto kürzer wird die Rayleighzone.

Für die Entwicklung des Strahlradius $w(z)$ erhält man

$$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right), \quad (3.42)$$

er entwickelt sich also wie eine Hyperbel. Während er sich innerhalb der Rayleighzone kaum vergrößert (Faktor $\sqrt{2}$), nimmt er im Fernfeld $z \gg z_R$ linear zu. Aus diesem Zusammenhang kann man die *Divergenz* des Laserstrahls bestimmen

$$\Theta_{\text{div}} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.43)$$

Im Fernfeld entspricht die Welle sehr viel mehr einer Kugelwelle. Der Radius der Wellenfronten beträgt $R(z) \simeq z$ wohingegen in der Rayleighzone bei $z \ll z_R$, $R(z) \simeq \infty$ gilt. Die größte Krümmung, also der kleinste Krümmungsradius tritt am Rand der Rayleighzone bei z_R auf: $R(z_R) = 2 z_R$ auf.

Besonders wichtig für die Strahloptik ist die sogenannte Emittanz ϵ , das Produkt aus Brennfleckradius und Divergenzwinkel des Bündels. Hier gilt für den Gauß'schen Grundmode

$$\epsilon = w_o \cdot \theta \approx \frac{\lambda}{\pi}. \quad (3.44)$$

Eine noch kleinere Emittanz ist nach den Gesetzen der Beugungslehre (oder der Unschärferelation, wenn man so will) nicht möglich. Wir nennen die Kollimierung eines Laserstrahls daher „beugungsbegrenzt“.

Abschließend sei noch angemerkt, dass die Gaußwelle beim Durchgang durch den Fokus etwas mehr Krümmung erfährt als eine ebene Welle. Dies ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Die geringe Abweichung von der linearen Phasenentwicklung kann durch eine Phasenfunktion

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right), \quad (3.45)$$

die sogenannte Gouy-Phase beschrieben werden. Sie liegt im Intervall

$$-\frac{\pi}{2} \leq \zeta(z) \leq +\frac{\pi}{2} \quad (3.46)$$

und die Hälfte der zusätzlichen Phase wird innerhalb der Rayleighzone aufgesammelt. Wir

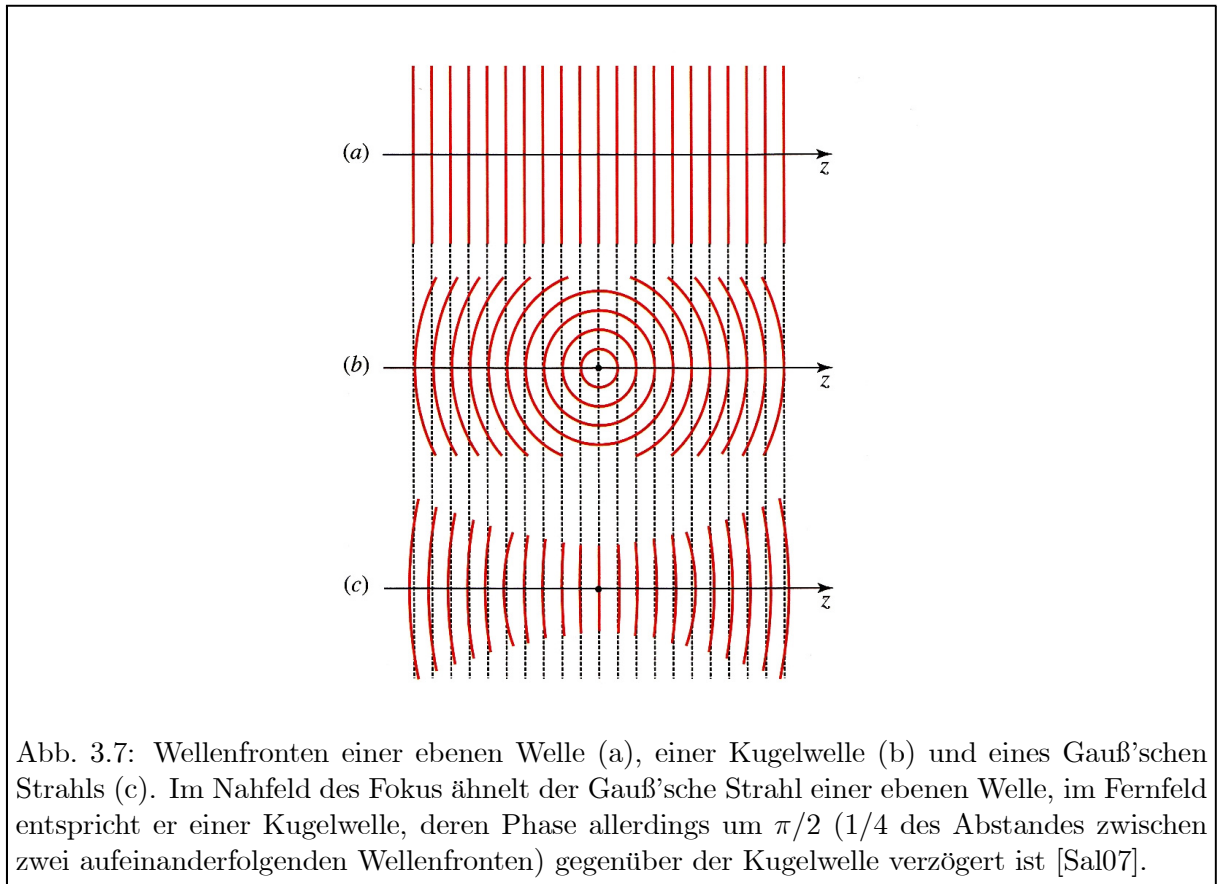


Abb. 3.7: Wellenfronten einer ebenen Welle (a), einer Kugelwelle (b) und eines Gauß'schen Strahls (c). Im Nahfeld des Fokus ähnelt der Gauß'sche Strahl einer ebenen Welle, im Fernfeld entspricht er einer Kugelwelle, deren Phase allerdings um $\pi/2$ ($1/4$ des Abstandes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenfronten) gegenüber der Kugelwelle verzögert ist [Sal07].

wollen nun noch einmal das Gesamtergebn der Gauß'schen Grundmode zusammenfassen

$$E(\rho, z) = \underbrace{A_0 \frac{w_0}{w(z)}}_{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{des Amplituden-} \\ \text{maximums entlang} \\ \text{der } z\text{-Achse}}} \times \underbrace{e^{-(\rho/w(z))^2}}_{\substack{\text{Gauß'sche} \\ \text{Amplituden-} \\ \text{verteilung}}} \times \underbrace{e^{ik\rho^2/2R(z)}}_{\substack{\text{kugelförmige} \\ \text{Krümmung der} \\ \text{Wellenfronten}}} \times \underbrace{e^{i(kz-\zeta(z))}}_{\substack{\text{Gouy-Phase} \\ \text{relativ zur} \\ \text{ebenen Welle}}} \quad (3.47)$$

3.2.3 Höhere Transversale Moden

Statt des Ansatzes (3.31) für die Lösung der paraxialen Wellengleichung hätten wir einen Ansatz der Form

$$\tilde{u}(x, y, z) = g\left(\frac{x}{w(z)}\right) h\left(\frac{y}{w(z)}\right) \exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2\tilde{q}(z)}\right) \quad (3.48)$$

wählen können. Dies führt zu höheren transversalen Moden die durch das Produkt von 2 Hermite Polynomen $H_m(\sqrt{2}\frac{x}{w})$, $H_n(\sqrt{2}\frac{y}{w})$ und einer Gaußfunktion dargestellt werden³. Die *Hermite*

³Eine ausführliche Herleitung der höheren Moden findet man z.B. [Mes99].

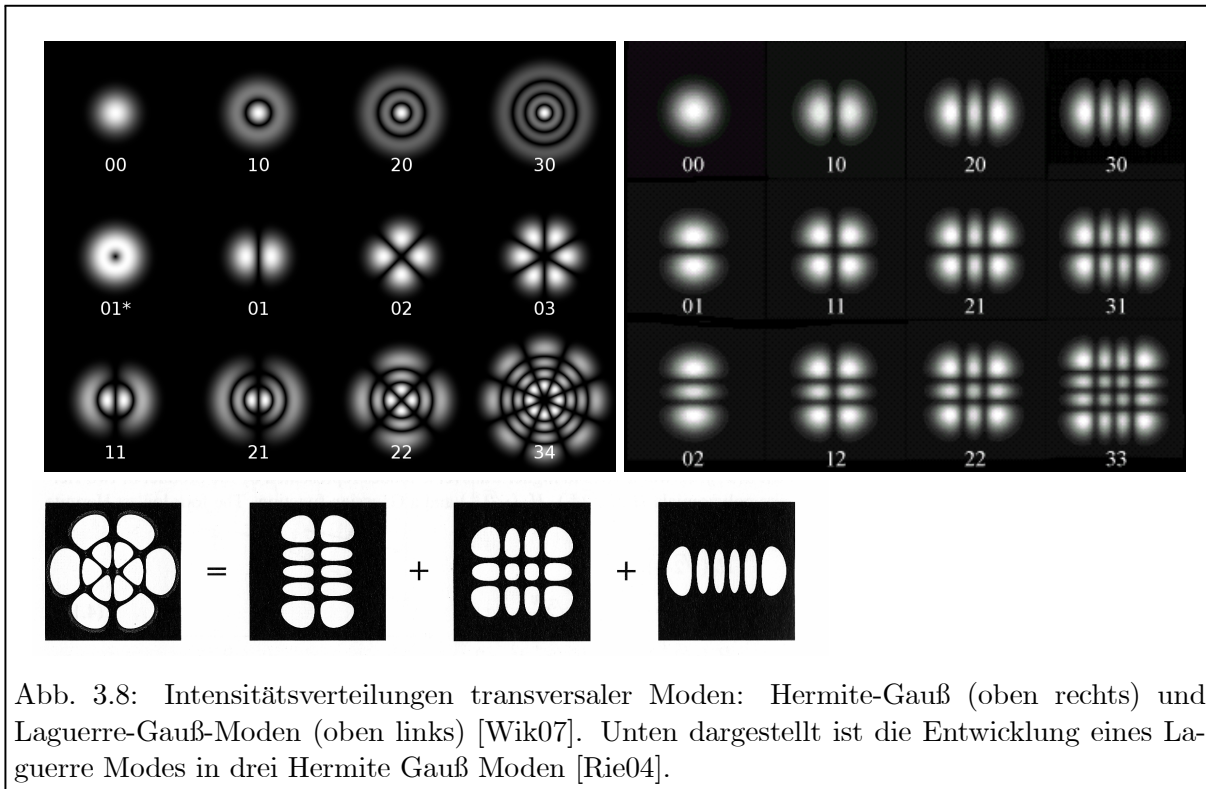


Abb. 3.8: Intensitätsverteilungen transversaler Moden: Hermite-Gauß (oben rechts) und Laguerre-Gauß-Moden (oben links) [Wik07]. Unten dargestellt ist die Entwicklung eines Laguerre Modens in drei Hermite Gauß Moden [Rie04].

Polynome niedrigster Ordnung lauten

$$H_0\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) = 1 \quad (3.49)$$

$$H_1\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) = 2\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) \quad (3.50)$$

$$H_2\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) = 4\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right)^2 - 2 \quad (3.51)$$

$$H_3\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) = 8\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right)^3 - 12\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right). \quad (3.52)$$

Das Hermite-Polynom n -ter Ordnung besitzt $n - 1$ Nullstellen. Dies führt zu $n - 1$ Knoten, also Dunkelstellen, im transversalen Intensitätsprofil. Dementsprechend charakterisiert man die höheren transversalen Moden durch die Anzahl der Dunkelstellen in horizontaler m und vertikaler n Richtung und nennt sie TEM_{mn} -Mode, abgeleitet von **T**ransversaler **E**lektromagnetischer **M**ode. Einige solche Resonatormoden sind im oberen rechten Teil von Abbildung 3.8 dargestellt. Die TEM_{00} Mode ist die Gauß'sche Grundmode und besitzt keine Knoten in transversaler Richtung. Alle TEM -Moden besitzen eine gaußförmige Einhüllende gemäß (3.47) die durch die Hermite-Polynome räumlich moduliert wird. Das Gesamtergebnis für diesen Modulationsfaktor der Amplitudenverteilung lautet

$$A_{mn} = H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) e^{-i(m+n)\zeta(z)}. \quad (3.53)$$

Aufgrund des zusätzlichen Faktors $(m + n)$ in (3.53) weisen die höheren Moden eine größere Gouy-Phasenverschiebung auf als die Grundmode. Dies ist wichtig für die Berechnung der Resonanzfrequenzen optischer Resonatoren, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Wichtig ist noch, dass die höheren Gauß'schen Moden aufgrund der Verteilung der Hermite Polynome

einen deutlich größeren Radius besitzen als die Grundmode. Dies kann man in Laserresonatoren ausnutzen um die meist unerwünschten höheren Moden zu unterdrücken. Eine Apertur (engl. Aperture, Diaphragm) im Resonator, die gerade groß genug ist, um den TEM₀₀ nicht zu beeinflussen, bei den höheren Moden aber zu großen Verlusten führt, sorgt dafür, dass die höheren Moden gar nicht erst anschwingen. Eine solche Apertur wird auch verwendet um Laserstrahlen von Anteilen höherer Moden zu "reinigen" und reine TEM₀₀-Moden zu erhalten. Ein *Raumfilter* (engl. *spatial filter*) besteht in der einfachsten Form aus einer kurzbrennweitigen Linse (z.B. einem Mikroskopobjektiv) und einer *Lochblende* (engl. *pin hole*) deren Durchmesser auf den TEM₀₀-Grundmode abgestimmt ist. Durch die Lochblende hindurch propagiert dann nur der TEM₀₀-Mode, der allerdings an Intensität verloren hat. Besonders gute Unterdrückung höherer Moden erreicht man, wenn statt der Lochblende ein *Einmoden-Wellenleiter* (Glasfaser, *single mode fiber*) verwendet wird.

Im Falle von zylindersymmetrischen Resonatoren ist die Benutzung von Zylinderkoordinaten ρ und ϕ angebrachter als von kartesischen Koordinaten. Hier werden die höheren Moden durch ein Produkt von *Laguerre-* und Gaußfunktionen beschrieben. Entsprechende Intensitätsverteilungen sind im oberen linken Teil von Abbildung 3.8 gezeigt. Hier beziehen sich die Indizes p und l von TEM _{pl} auf die Zahl der radialen bzw. azimutalen Nullstellen. Moden mit wachsendem p zeigen z.B. eine größer werdende Zahl konzentrischer Ringe. Der Mode TEM_{01*}, der sogenannte *Doughnut-Mode* ist ein Spezialfall. Es ist kein reiner Laguerre-Gaußmode sondern eine Superposition zweier TEM_{0 i} Moden ($i = 1, 2, 3$) die relativ zueinander um $360^\circ/4i$ rotiert sind.

Beide Polynomsysteme, Hermite und Laguerre, bilden ein vollständiges System von Eigenfunktionen. Entsprechend kann jede Hermite-Gauß-Mode als Superposition von Laguerre-Gauß-Moden beschrieben werden und umgekehrt. Dies ist unten in Abb. 3.8 dargestellt. Die Laguerre-Gauß-Moden spielen eine wichtige Rolle in der Atomoptik, da eine TEM_{01*}-Mode eines gegenüber einer atomaren Frequenz blau verstimmt Lasers⁴, quasi als Wellenleiter oder Schlauch für Atome genutzt werden kann. Bei der Betrachtung von Laserresonatoren spielen die Hermite-Gauß-Moden aber eine viel wichtigere Rolle, denn der Aufbau realer Resonatoren zeigt immer eine geringe Abweichung von der Zylindersymmetrie die für die Laguerre-Gauß-Moden notwendig ist.

3.2.4 Allgemeine Resonanzbedingung für optische Resonatoren

Resonatoren mit ebenen Spiegeln (Planspiegel) sind kritisch und äußerst schwer zu justieren. Technische Gründe sorgen dafür, dass ebene polierte Oberflächen immer eine geringe konvexe Krümmung aufweisen und daher tendiert ein entsprechender Resonator immer zur Instabilität. Deshalb verwendet man in der Regel gekrümmte Spiegel. Eine Grundbedingung ist, dass eine Resonatormode so aussehen muss, dass ihre Wellenfronten an der Stelle der Spiegel gerade den Spiegeloberflächen entsprechen. Doch nicht mit jedem Spiegelpaar läßt sich ein stabiler Resonatormode erzeugen. Das Stabilitätskriterium soll im Folgenden für die Gauß'schen Moden hergeleitet werden. Einen Resonator aus zwei Spiegeln charakterisiert man durch die Spiegelradien R_1 und R_2 und den Spiegelabstand d . Unter gewissen Randbedingungen, die wir gleich diskutieren, bildet sich zwischen den Spiegeln eine stehende Gaußwelle mit dem konfokalen Parameter $b = 2z_R$ und der Strahltaile w_0 am Ort $z_0 = 0$ aus. Die Spiegel befinden sich an den Positionen $z_1 < 0$ und $z_2 > 0$ mit

$$d = z_2 - z_1. \quad (3.54)$$

⁴Im Laserfeld eines gegenüber der Resonanz blau verstimmt Lasers hinkt die Phase des Dipolmomentes des Atoms hinter der Laserphase um π hinterher und daher wird das Atom aufgrund der Dipolkraft von Bereichen hoher Intensität abgestoßen.

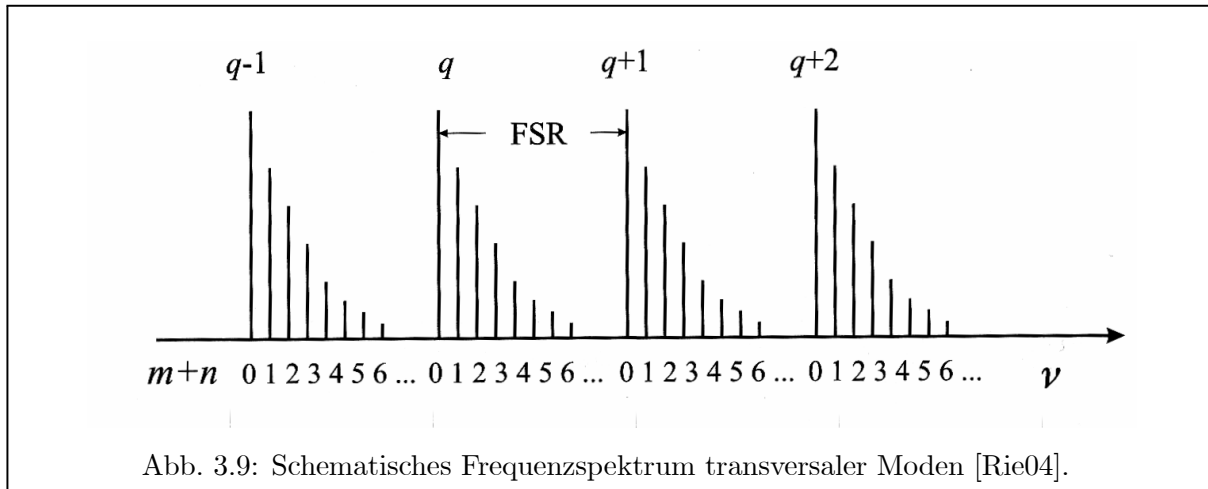


Abb. 3.9: Schematisches Frequenzspektrum transversaler Moden [Rie04].

Gemäß (3.47) ist die Phase des Grundmodes nach einer Strecke z gegeben durch

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}. \quad (3.55)$$

Auf der optischen Achse ($\rho = 0$) fällt der letzte Term weg. An den Spiegelposition z_1 und z_2 sind die Phasen entsprechend

$$\varphi(0, z_1) = kz_1 - \zeta(z_1), \quad (3.56)$$

$$\varphi(0, z_2) = kz_2 - \zeta(z_2). \quad (3.57)$$

Wie bereits erwähnt, müssen die Spiegel nun so beschaffen sein, dass ihre Oberfläche mit der Wellenfront zusammenfällt, d.h. an allen Punkten der Spiegeloberfläche muss die Welle die gleiche Phase besitzen. Bei der Propagation von Spiegel 1 nach 2 ändert sich die Phase um

$$\Delta\varphi = k(z_2 - z_1) - (\zeta(z_2) - \zeta(z_1)) = kd - \Delta\zeta$$

und nach einem Umlauf entsprechend um das doppelte dieses Betrages. Die Phasenbedingung verlangt, dass nach dem Umlauf sich die Phase um ein Vielfaches von 2π geändert hat

$$2kd - 2\Delta\zeta = 2\pi q, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.58)$$

Mit $k = 2\pi\nu/c$ und $\nu_{\text{FSR}} = c/2d$ erhält man für die q -te longitudinale Mode

$$\nu_q = q\nu_{\text{FSR}} + \frac{\Delta\zeta}{\pi}\nu_{\text{FSR}}. \quad (3.59)$$

Der Abstand der Moden ist also für gekrümmte Spiegel ebenso groß wie beim planparallelen Resonator, allerdings sind die Frequenzen der Moden alle durch den krümmungsabhängigen Term der Guoy-Phasenverschiebung verschoben. Analog läßt sich für Gauß'sche Moden höherer Ordnung unter Berücksichtigung von 3.53 der Term

$$\nu_{mnq} = q\nu_{\text{FSR}} + (m + n + 1)\frac{\Delta\zeta}{\pi}\nu_{\text{FSR}} \quad (3.60)$$

herleiten. Das zugehörige Frequenzspektrum der transversalen Moden ist schematisch in Abbildung 3.9 gezeigt. Alle transversalen Moden mit gleichem $m + n$ besitzen die gleichen

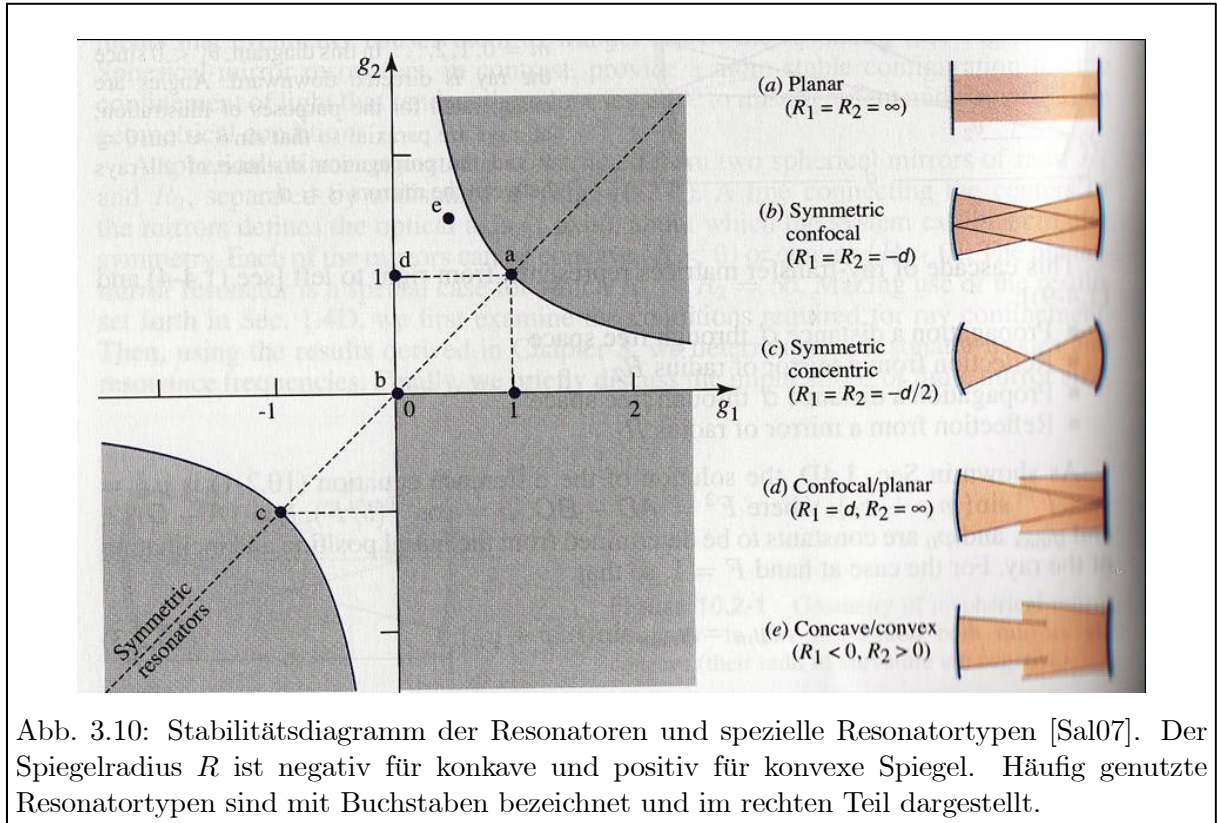


Abb. 3.10: Stabilitätsdiagramm der Resonatoren und spezielle Resonatortypen [Sal07]. Der Spiegelradius R ist negativ für konkave und positiv für konvexe Spiegel. Häufig genutzte Resonatortypen sind mit Buchstaben bezeichnet und im rechten Teil dargestellt.

Resonanzfrequenzen und Moden mit m, n und m', n' unterscheiden sich in ihrer Frequenz gerade um

$$\nu_{mnq} = (m - m' + n - n') \frac{\Delta\zeta}{\pi} \nu_{\text{FSR}}. \quad (3.61)$$

Weitere Umformungen des arctan in (3.45) führen auf

$$d \cdot k_{mnq} = q\pi + (m + n + 1) \arccos(\sqrt{g_1 g_2}) \quad (3.62)$$

mit dem Spiegelparameter⁵

$$g_i = \left(1 - \frac{d}{R_i}\right).$$

Der zweite Term in (3.62) gibt den Einfluß der transversalen Modes auf das Spektrum der Eigenfrequenzen wieder. In der Regel ist der transversale Modenabstand kleiner als der longitudinale wegen

$$0 \leq \arccos(x) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.63)$$

Der Mode ist so lange stabil, wie die arccos-Funktion im reellen Wertebereich bleibt; andernfalls wird die Wellenzahl komplex und die Amplitude ändert sich in Ausbreitungsrichtung. Das schränkt den Wertebereich des Wurzelausdrucks auf den Stabilitätsbereich ein:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (3.64)$$

⁵In [Sal07] lautet die Definition $g = 1 + d/R$, dabei ist allerdings das Vorzeichen für R zu berücksichtigen. Für konkave Spiegel ist $R < 0$, für konvexe $R > 0$ (vgl. Abb. 3.10). In der Tafelanschrift der Vorlesung wurde ebenfalls diese Definition verwendet..

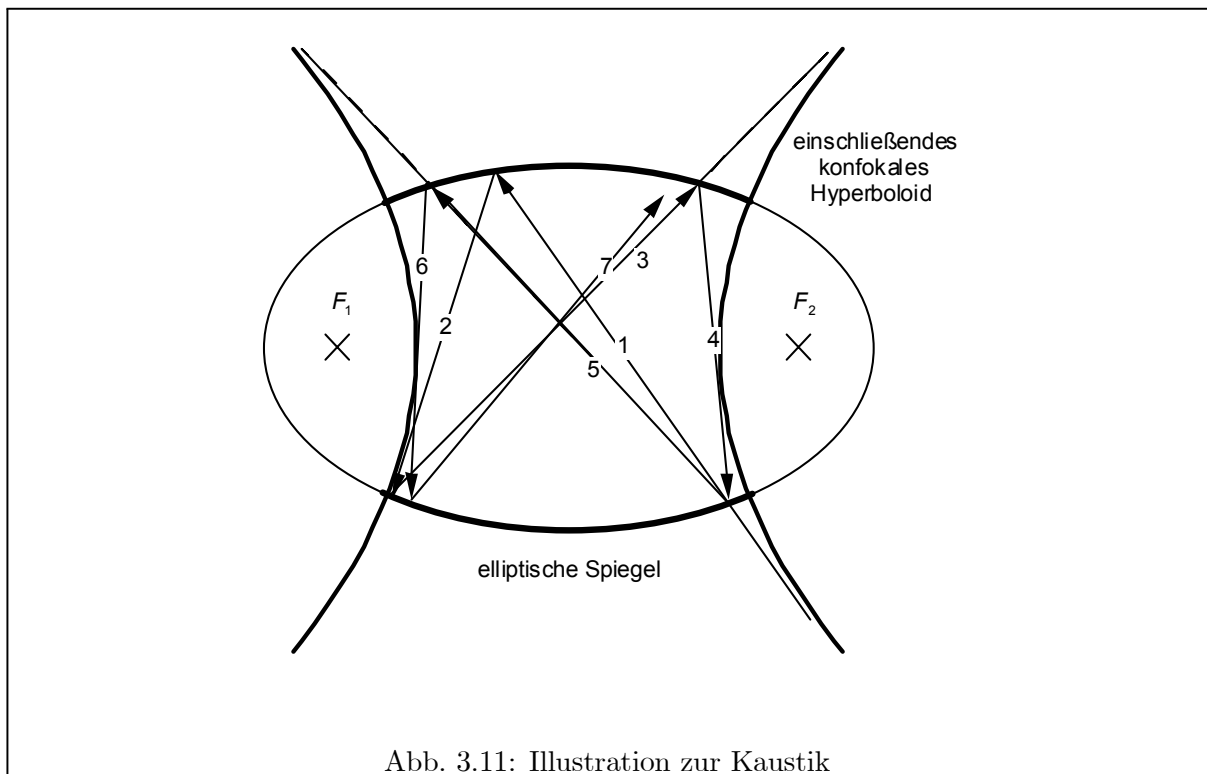


Abb. 3.11: Illustration zur Kaustik

In Abb. 3.10 sind in einer Ebene, die von den beiden Spiegelparametern $g_1 = (1 - L/R_1)$ und $g_2 = (1 - L/R_2)$ aufgespannt wird, die instabilen Bereiche grau dargestellt. Die symmetrischen Spiegelkonfigurationen liegen auf der Winkelhalbierenden. An den Stabilitätsgrenzen liegen der konzentrische Resonator bei den Koordinaten $(-1,-1)$ und der ebene Fabry-Perot-Resonator bei $(+1,+1)$. Auch der konfokale Resonator im Ursprung bildet einen kritischen Punkt im Fadenkreuz der beiden stabilen und instabilen Quadranten. Die Geraden $g_1 = 1$ und $g_2 = 1$ bilden die Grenze zwischen konvexen und konkaven Spiegeln. Bevor wir einige spezielle Resonatoren im Detail betrachten, wollen wir noch den Zusammenhang zwischen der Kaustik der Strahlenoptik und der Gauß'schen Mode betrachten.

3.2.5 Die Kaustik in der Strahlenoptik

Abgesehen von superradianten Lasern oder von Laserverstärkern ist ein Lasermedium in der Regel in einen optischen Resonator eingebettet, in dem sich eine Eigenschwingung in der Form einer stehenden Welle oder auch einer umlaufenden Ringwelle ausbildet. Nun stellt man sich normalerweise eine stehende Welle nur in einem allseits geschlossenen Resonator mit ideal spiegelnden Wänden vor. Ist die Resonatorausdehnung aber sehr groß gegen die Wellenlänge, wie das im Optischen immer der Fall ist, so kann man durchaus auch mit offenen Resonatoren arbeiten, wobei das Licht nur zwischen relativ kleinen Spiegeln hin und her läuft. Im Grenzfall der geometrischen Optik kann man sich leicht vorstellen, daß zwei gekrümmte Spiegel ein Lichtbündel, das natürlich nicht weiter sein darf als die Spiegel selbst, immer in sich selbst abbildet und somit das Licht im Zwischenraum zwischen den Spiegeln festhält.

Nimmt man z.B. als Spiegel zwei sich gegenüberliegende kreisförmige Ausschnitte aus einem Rotationsellipsoid (s. Abb. 3.11) und läßt einen Lichtstrahl auf einen der Spiegel treffen, so wird dieser auf den gegenüber liegenden reflektiert und wieder zurück und so fort. Man kann zeigen, daß der Lichtstrahl im Laufe der Zeit ein Volumen ausfüllt, das durch Hyperboloidschalen

begrenzt ist, die konfokal mit dem Ellipsoid sind. Alle Strahlen sind Tangenten an dieses Hyperboloid, wobei sie nach jeder Reflexion abwechselnd die eine und die andere Schale tangieren. Der Tangentenpunkt kann allerdings außerhalb des Ellipsoids liegen. In der geometrischen Optik nennt man diesen, das Lichtbündel einschließenden Raum, die Kaustik. Typisch für die Kaustik ist die Taille, zu der sich das Lichtbündel einschnürt.

Die oben gewonnene Einsicht über den Einschluß von Lichtbündeln läßt sich in zweifacher Hinsicht verallgemeinern:

1. Ersetzen wir die elliptischen Spiegel durch sphärische, so erwarten wir das gleiche qualitative Bild wie oben bis auf die üblichen Abbildungsfehler dritter und höherer Ordnung im Neigungswinkel zur optischen Achse. Für schlanke Bündel, wie sie in der Laseroptik vorliegen, ist also auch eine im wesentlichen fehlerfreie Kaustik zu erwarten.
2. Gehen wir von der geometrischen zur Wellenoptik über, so wird sich auch im Grenzfall kurzer Wellenlängen nicht viel ändern, außer daß die Kaustik diffus statt scharf ist, wodurch Beugungsverluste an den Spiegelrändern entstehen. Diese Beugungsverluste werden klein sein, wenn die Spiegel wesentlich größer als die Kaustik sind.

3.3 Spezielle Resonatoren

3.3.1 Der symmetrische konfokale Resonator

Im konfokalen Resonator fallen die Brennpunkte der beiden Resonatorspiegle ($f = R/2 = d/2$) zusammen. ($\implies g_1 = g_2 = 0, R_1 = R_2 = d$). Er ist zentraler Punkt des Stabilitätsdiagramms. In Gleichung (3.62) verschwindet für diesen Resonator der Wurzelterm und der arccos wird zu $\pi/2$. Damit werden die Eigenfrequenzen zu

$$\nu_{nmq} = \frac{c}{2d} \left[q + \frac{1}{2} (m + n + 1) \right]. \quad (3.65)$$

Für alle transversalen Moden mit ganzzahligem $m + n$ fallen die Eigenfrequenzen damit mit der Eigenfrequenz der Grundmode zusammen, sie sind degeneriert. Die Eigenfrequenzen der Moden mit ungeradem $m + n$ sind relativ dazu gerade um $\frac{c}{4d}$ verschoben. Folglich kann man im konfokalen Resonator Moden anregen, deren Frequenzen sich nur um

$$\Delta\nu_{\text{FSR}}^{\text{konfokal}} = \frac{c}{4d} \quad (3.66)$$

unterscheiden.

Gegenüber dem planparallelen Resonator mit gleichem FSR ist der konfokale Resonator um einen Faktor 2 kleiner. Diese hohe Entartung hat ein strahlenoptisches Analogon: Wie in Abbildung 3.12 gezeigt, ist eine paraxiale Trajektorie nach 2 Umläufen wieder geschlossen.

Dieser Resonator besitzt den kleinsten durchschnittlichen Radius der Mode aller stabilen Resonatoren. Er ist sehr insensitive zu Fehljustagen eines Spiegels, da der Spiegelmittelpunkt auch bei leichter Dejustage auf dem anderen Spiegel liegt und

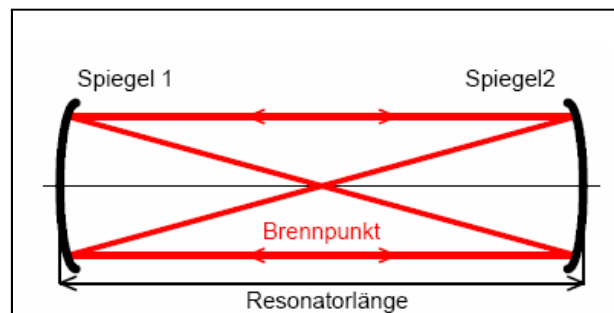


Abb. 3.12: Strahlenoptischer Gang im konfokalen Resonator.

lediglich die optische Achse gedreht wird. Dies macht ihn optimal geeignet für die Spektralanalyse. Ein Verstärkungsmedium, das sich zwischen den Spiegeln befindet, wird allerdings eine große Zahl transversaler Moden zum Anschwingen bringen.

3.3.2 Konzentrischer Resonator

Der konzentrische Resonator ($d/R = 2$) führt zu einer sehr scharfen Fokussierung, die das Beugungslimit erreicht. Aufgrund der hohen Divergenz ist in diesem Fall der Modendurchmesser auf den Resonatorspiegeln weitaus größer als bei dem äquivalenten konfokalen Resonator. Der (fast) konzentrische Resonator ist allerdings sehr empfindlich gegenüber leichten Variationen in der Spiegelposition. In Laserresonatoren werden nahezu konzentrische Teilelemente verwendet, um eine hohe Verstärkungsdichte zu erreichen.

3.4 Beugungsverluste

Qualitativ können wir schon folgendes erkennen: sphärische Spiegel, die den Mode zu einer schlanken Kaustik mit Gaußprofil fokussieren, haben besonders kleine Beugungsverluste an den Rändern, sobald der Spiegeldurchmesser etwa einen Faktor 2 größer ist als die Halbwertsbreite des Modes. Das ist vor allem den exponentiell abfallenden Flanken des Gaußprofils zu verdanken. Dagegen hat ein Lichtstrahl, dessen Emittanz durch einfache Beugung an einem Hindernis oder einer Blende bestimmt ist, zwar ein zentrales Maximum von der gleichen Größenordnung wie beim Gaußprofil; jedoch fällt die Intensität in den höheren Beugungsmaxima vergleichsweise schwach ab. Daher sind die Beugungsverluste an einem solchen Spiegelpaar, also einem Fabry-Perot-Resonator, besonders groß, weil der Laserstrahl bestrebt ist, die ganze Spiegelfläche, oder die einer anderen Blende im Strahlengang, auszufüllen, was zwangsweise zu Beugungsverlusten am Rand führt. Andererseits kann ein ebenes Spiegelpaar oder gar ein instabiler Resonator aus Intensitätsgründen vorteilhaft sein, weil eben der Laserstrahl keine seitliche Begrenzung hat und deswegen bestrebt ist, das ganze Lasermedium auszufüllen.

Das Verhältnis aus Durchmesser des Laserflecks zum Durchmesser des Spiegels und damit die Beugungsverluste pro Umlauf werden, wie in der Beugungsoptik üblich, durch die Fresnelzahl der Spiegel ausgedrückt:

$$N = \frac{a^2}{L\lambda} \quad (3.67)$$

wobei $2a$ der Spiegeldurchmesser ist. Zum Vergleich: beim konfokalen Resonator ist der Fleckradius am Spiegel gegeben durch

$$w = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \quad (3.68)$$

und damit ist für $a = w$ die Fresnelzahl

$$N_w = \frac{1}{\pi} < 1. \quad (3.69)$$

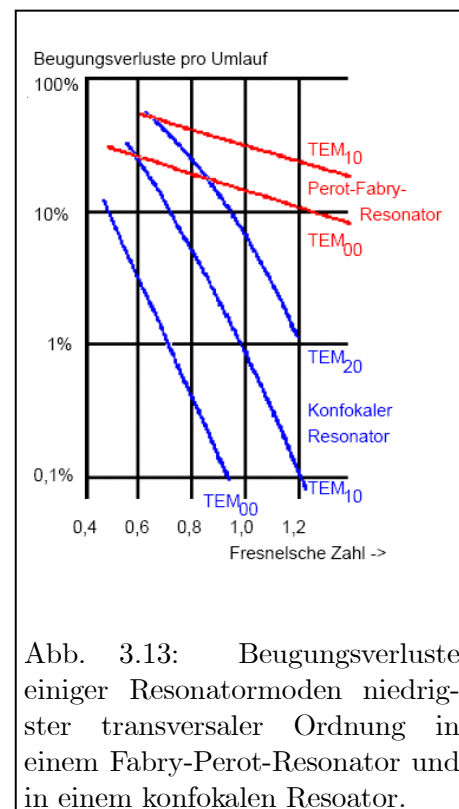


Abb. 3.13: Beugungsverluste einiger Resonatormoden niedrigster transversaler Ordnung in einem Fabry-Perot-Resonator und in einem konfokalen Resonator.

Es genügen daher wenige Fresnelzahlen, um die Beugung fast gänzlich zu unterbinden.

In Abbildung 3.13 sind die Beugungsverluste für zwei Resonatortypen (ebenes und konfokales FPI) und verschiedene niedrige TEM_{mn} Moden als Funktion der Fresnelzahl dargestellt. Folgende Charakteristika seien festgehalten:

1. Bei gegebener Fresnelzahl hat der konfokale Resonator die kleinsten, der ebene Fabry-Perot-Resonator die größten Verluste.
2. Mit wachsender transversaler Modenzahl ist die relative Zunahme der Verluste beim konfokalen Resonator am steilsten. Daher lassen sich in diesem Fall die transversalen Modes besonders gut durch eine Ringblende bedämpfen und gegenüber dem Grundmode so weit unterdrücken, daß die Laserschwelle nicht überschritten wird. Der Grundmode wird dabei kaum geschwächt.

Kapitel 4

Kontinuierliche (CW) Lasersysteme

In diesem Kapitel sollen einzelne wichtige kontinuierliche Lasersysteme im Detail besprochen werden. Dabei soll nicht nur das aktive Medium und das Erreichen der Lasertätigkeit, sondern insbesondere auch die Einschränkung der Lasertätigkeit auf einzelne Linien (*single line*) oder gar einzelne Frequenzen (*single frequency* oder *single mode operation*) im Blickpunkt stehen. Zu gepulsten Lasern werden wir im nächsten Kapitel kommen.

Generell kann man die Laser zunächst unterteilen anhand des aktiven Mediums. Dieses kann ein Gas, eine Flüssigkeit oder ein Feststoff sein. Dementsprechend unterscheidet man Gaslaser, Flüssigkeitslaser und Festkörperlaser. Innerhalb dieser Klassen gibt es wieder feinere Unterteilungen. Bei den Gaslasern gibt es solche die mit Molekülen (N_2 , CO_2) operieren und andere die Ionen (Ar^+ , Kr^+) oder Dimere (Excimer=excited Dimer) im aktiven Medium verwenden oder gar auf chemischen Reaktionen in der Gasphase beruhen (HF). Bei den Festkörperlaser bilden die Halbleiterlaser (z.B. Diodenlaser) gegenüber den Kristalllasern wie beispielsweise Titan-Saphir oder Nd-dotiertes Yttrium Aluminium Granat (Nd:YAG) wiederum eine Klasse für sich.

4.1 Halbleiterlaser

4.1.1 Historisches

Die ersten Laser dieser Bauart wurden 1962 von M. I. Nathan et al. [Nath62] vorgestellt. Diese Halbleiter-Laserdioden waren nur bei 77° Kelvin¹ bei Schwellenstromdichten zwischen $10^4 - 10^5$ A/cm² und Schwellenstromstärken von $I_{\text{Schwelle}} \approx 100$ A gepulst zu betreiben. Die Lebensdauer lag im günstigsten Fall im Bereich von Stunden, und sie oszillierten auf vielen Moden. Durch die Entwicklung sog. *Heterostrukturen* existieren seit 1969 auch Diodenlaser, die im Dauerstrichbetrieb benutzbar sind und bei Zimmertemperatur arbeiten [Hay69]. Kommerziell erhältliche Halbleiterlaser decken heute einen Wellenlängenbereich von etwa 400 – 32.000 nm ab und erreichen im Dauerstrichbetrieb Lebensdauern von über 100.000 Stunden. Beispielhaft seien Halbleiter auf der Basis von $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ genannt, die im Wellenlängenbereich von 750 bis 880 nm emittieren.

Vom besonderen Interesse sind Halbleiterlaser aus verschiedenen Gründen:

1. elektrischer Strom wird direkt in Laserlicht umgewandelt,
2. es ist ein Festkörperlaser von sehr kleinem Ausmaß und

¹gekühlt mit flüssigem Stickstoff

EXKURS: Halbleiter-Terminologie

Die Leitfähigkeit der Halbleiter kann im Rahmen des sogenannten *Bändermodells* erklärt werden.

Bändermodell: Das periodische Potential der Atome im Kristallgitter führt bei der Lösung der Schrödingergleichung einerseits auf Lösungen die laufenden Wellen (erlaubte Energiebänder) entsprechen und andererseits auf Energiebereiche in denen die Lösungen exponentiell abfallende Amplitude besitzen (verbotene Bänder, Bandlücken).

Valenzband (valence band): Das Valenzband ist das höchste vollbesetzte Elektronen-Energieband am absoluten Nullpunkt (Temperatur). Voll besetzte Bänder können zur Leitfähigkeit nicht beitragen, da auch bei Ortsveränderung der Elektronen kein Nettotransport von elektrischer Ladung erfolgt.

Leitungsband (conduction band): Das energetisch über dem Valenzband liegende, unbesetzte oder teilweise besetzte Band nennt man Leitungsband.

Bandlücke: verbotener energetischer Bereich zwischen Valenz- und Leitungsband.

Fermienergie, Fermi-niveau, Fermi-level: Das Fermi-niveau gibt an, bis zu welcher Energie Zustände am absoluten Nullpunkt, $T = 0$ K besetzt sind.

Eigenleitung: Wird in einem Halbleiter einem Elektron im Valenzband thermisch Energie zugeführt, die größer oder gleich der Bandlücke ist, so werden sie in das Leitungsband angeregt. Gemeinsam mit den entstandenen Defektelektronen, d. h. den „Löchern“ im Valenzband machen sie das Material leitfähig. Der Effekt nimmt mit der Temperatur stark zu und wird als Eigenleitung bezeichnet.

Photoleitung: Erfolgt die Anregung der Valenzelektronen durch die Absorption von Photonen spricht man von Photoleitung.

Störstellenleitung: Werden in das Halbleitermaterial Atome mit Elektronenüberschuss oder -unterschuss eingebracht (dotiert), so tragen diese Elektronen bzw. Löcher zur elektrischen Leitfähigkeit bei.

Rekombination: Wenn ein Elektron aus dem Leitungsband in das Valenzband übergeht und eines der dort vorhandenen Löcher besetzt, so wird dies als Rekombination bezeichnet. Es kann als Annihilation eines negativen mit einem positiven Leitungsträger aufgefasst werden. Die Energie wird entweder in Form eines Photons abgestrahlt oder als Wärme ins Kristallgitter eingebracht.

Isolatoren: Halbleiter und Isolatoren unterscheiden sich nur durch die Breite der Bandlücke. Bei letzteren ist diese so groß ($E_g > 3$ eV), dass Elektronen sie bei endlichen Temperaturen nicht durch thermische Anregung überwinden können.

3. der differentielle Wirkungsgrad ist sehr hoch und erreicht oberhalb der Laserschwelle über 50%, d.h., es wird mehr als die Hälfte der Pumpstromleistung in Lichtleistung umgesetzt.

Neben den klassischen Diodenlasern haben sich heute viele andere Bauarten und Kombinationen wie beispielsweise Faserlaser und sogenannte Trapezverstärker am Markt etabliert. Wir wollen die Grundlagen dieser Laser jetzt genauer untersuchen.

4.1.2 Grundlagen

4.1.2.1 Halbleiter

Halbleiter sind Materialien bei denen die Fermienergie zwischen dem Valenz- und dem Leitungsband liegt. Wichtige Halbleitermaterialien sind die Elemente Silizium und Germanium der vierten Hauptgruppe sowie verschiedene Verbindungen der dritten und vierten Hauptgruppe

des Periodensystems (III-V Materialien) wie beispielsweise Galliumarsenid GaAs. Typische Bandlücken dieser Materialien liegen bei $E_G = 1 - 2$ eV (Si: 1,11, GaAs: 1,42 eV). Am absoluten Nullpunkt befinden sich keine Elektronen im Leitungsband und das Material besitzt keine Leitfähigkeit. Durch Energiezufuhr (Wärme, Licht) können allerdings Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband angeregt werden (linker Teil der Abbildung 4.5). Die zurückbleibenden Fehlstellen im Valenzband (Löcher) stellen ebenso wie die angeregten Elektronen nun quasi freie Ladungsträger dar, die sich durch das Gitter fortbewegen können und dem Halbleiter eine endliche Leitfähigkeit verleihen. Die Besetzungswahrscheinlichkeit der Zustände ist durch die Fermi-Dirac Verteilung

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (4.1)$$

gegeben. Die Energie E_F bei der $f(E_F) = 1/2$ gilt, wird als Fermienergie bezeichnet und $f(E)$ ist symmetrisch um E_F . Im Leitungsband gibt $f(E)$ die Besetzungswahrscheinlichkeit mit einem Elektron an, im Valenzband ist $1 - f(E)$ die Besetzungswahrscheinlichkeit für ein Loch.

Der Quantenzustand eines Elektrons in einem Halbleitermaterial ist charakterisiert durch die Energie E , den Wellenvektor k und den Spin s . Die Wellenfunktion muss gewisse Randbedingungen erfüllen. Ein Elektron an der unteren Grenze des Leitungsbandes kann annähernd beschrieben werden als ein Teilchen der Masse m_c eingeschlossen in einen dreidimensionalen Kubus (Ausdehnung d) mit vollkommen reflektierenden Wänden, d.h. einem dreidimensionalen Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. Lösungen in der Form stehender Wellen müssen daher Wellenvektoren $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ besitzen, die die diskreten Werte $\vec{k} = (q_1\pi/d, q_2\pi/d, q_3\pi/d)$ annehmen. Die Modenzahlen q_j sind dabei positiv und ganzzahlig. Die Spitze von \vec{k} muss daher auf den Punkten eines Gitters liegen dessen kubische Einheitszelle die Dimension π/d besitzt. Daher gibt es insgesamt $(d/\pi)^3$ entsprechender Punkte pro Einheitsvolumen im k -Raum. Die Zahl der Wellenvektoren mit einer Länge zwischen 0 und k bestimmt man daher durch Abzählen der Gitterpunkte im positiven Oktanten einer Kugel mit Radius k . Deren Volumen beträgt $\frac{1}{8}4\pi k^3/3$. unter Berücksichtigung des Spins ergeben sich insgesamt

$$2 \cdot \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi k^3 \cdot \left(\frac{d}{\pi}\right)^3 = \frac{k^3}{3\pi^2} d^3 \quad (4.2)$$

solcher Zustände im Volumen d^3 oder $k^3/3\pi^2$ Zustände pro Einheitsvolumen. Für die Zustandsdichte ρ zwischen den Impulsen k und $k + \Delta k$ erhält man

$$\rho(k)\Delta k = \left(\frac{d}{dk} \frac{k^3}{3\pi^2}\right) \Delta k = \frac{k^2}{\pi^2} \Delta k \quad (4.3)$$

und somit

$$\rho(k) = \frac{k^2}{\pi^2}. \quad (4.4)$$

Um die Zustandsdichte als Funktion der Energie zu erhalten, müssen wir die entsprechende Dispersionsrelation kennen. Sie lautet für ein freies Teilchen mit Masse m_0

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}. \quad (4.5)$$

Nahe der unteren Kante des Leitungs- bzw. der oberen Kante des Valenzbandes kann man die $E - k$ Relation durch eine Parabel annähern. Für das Leitungsband lautet sie entsprechend

$$E = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} \quad (4.6)$$

wobei E_c die Energie der Leitungsbandkante ist und k von dem Punkt aus gemessen wird, an dem das Minimum der Parabel auftritt. Das Elektron verhält sich also wie ein freies Elektron mit einer *effektiven (Leitungsband) Masse* $m_c \neq m_0$. Der Einfluss des Kristallgitters auf die Elektronenbewegung ist in der effektiven Masse berücksichtigt. Die Krümmung der $E - k$ Relation (zweite Ableitung nach k) ist also umgekehrt proportional zur effektiven Masse. Ähnlich erhält man an der Oberkante des Valenzbandes

$$E = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} \quad (4.7)$$

mit $E_v = E_c - E_G$.

Wir wollen nun die Zahl der Zustände im Energieintervall $[E, E + dE]$ und damit $\rho_c(E)$ bestimmen. Im Leitungsband gehen wir dazu von (4.6) aus und benutzen

$$\rho_c(k)dk = \rho_c(E)dE \quad \implies \quad \rho_c(E) = \frac{\rho_c(k)}{\frac{dE}{dk}}dk. \quad (4.8)$$

Damit erhalten wir

$$\rho_c(E) = \frac{(2m_c)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_c} \quad E > E_c \quad (4.9)$$

und einen analogen Ausdruck im Valenzband

$$\rho_v(E) = \frac{(2m_v)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E_v - E} \quad E < E_v.$$

Diese Zusammenhänge sind in Abbildung 4.2 veranschaulicht.

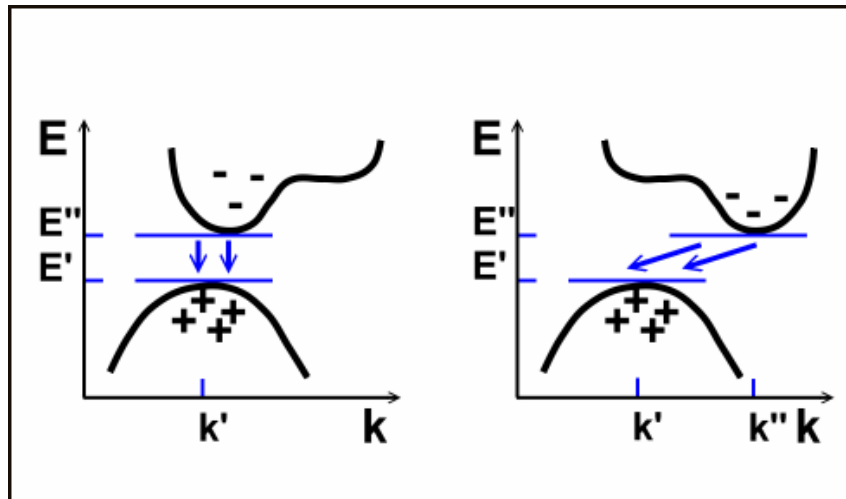


Abb. 4.1: Emission von Photonen bei Materialien mit direkter und indirekter Bandlücke.

Für die Emission von Licht bei der Rekombination von Elektronen und Löchern ist der Typ der Bandlücke von Bedeutung. Man unterscheidet zwei Fälle von Bandlücken:

1. **Direkte Bandlücke:** Das Minimum des Leitungsbandes liegt im $E(k)$ -Diagramm direkt über dem Maximum des Valenzbandes. Bei einem direkten Übergang von Valenzband zu Leitungsband liegt der kleinste Abstand zwischen den Bändern direkt über dem Maximum des Valenzbandes. GaAs besitzt eine direkte Bandlücke und war daher seit den sechziger Jahren das bevorzugte Material für die Konstruktion von Laserdioden.

2. **Indirekte Bandlücke:** Das Minimum ist gegenüber dem Maximum auf der k -Achse verschoben. Bei einem indirekten Übergang von Valenzband zu Leitungsband liegt der kleinste Abstand zwischen den Bändern versetzt zum Maximum des Valenzbandes. Die Emission eines Photons ist nur bei einer direkten Bandlücke effektiv möglich, bei einer indirekten Bandlücke muss in der Regel ein passendes Phonon beteiligt sein, weil eine substantielle Impulsänderung des Elektrons erfolgen muss. Dieser Prozess ist wesentlich unwahrscheinlicher, das Material zeigt eine schwächere Emissionstätigkeit. Silizium besitzt eine indirekte Bandlücke und eignet sich daher nicht für den Bau von Laserdioden². Man sollte beachten, dass Photodioden durchaus auch mit Materialien mit indirekten Bandlücken funktionieren. Die Anregung des Elektrons kann nämlich auch unter Impulserhaltung in energetisch höher gelegene Gebiete des Leitungsbandes erfolgen. Von dort relaxieren sie sehr schnell zur Bandkante hinunter wobei der Impulsübertrag auf das Gitter erfolgt. Bei der Emission muss aber die Emission des Photons und die Erzeugung des Phonons simultan erfolgen, weil bei k -Werten unterhalb des Minimums des Leitungsbandes keine Löcher im Valenzband vorhanden sind.

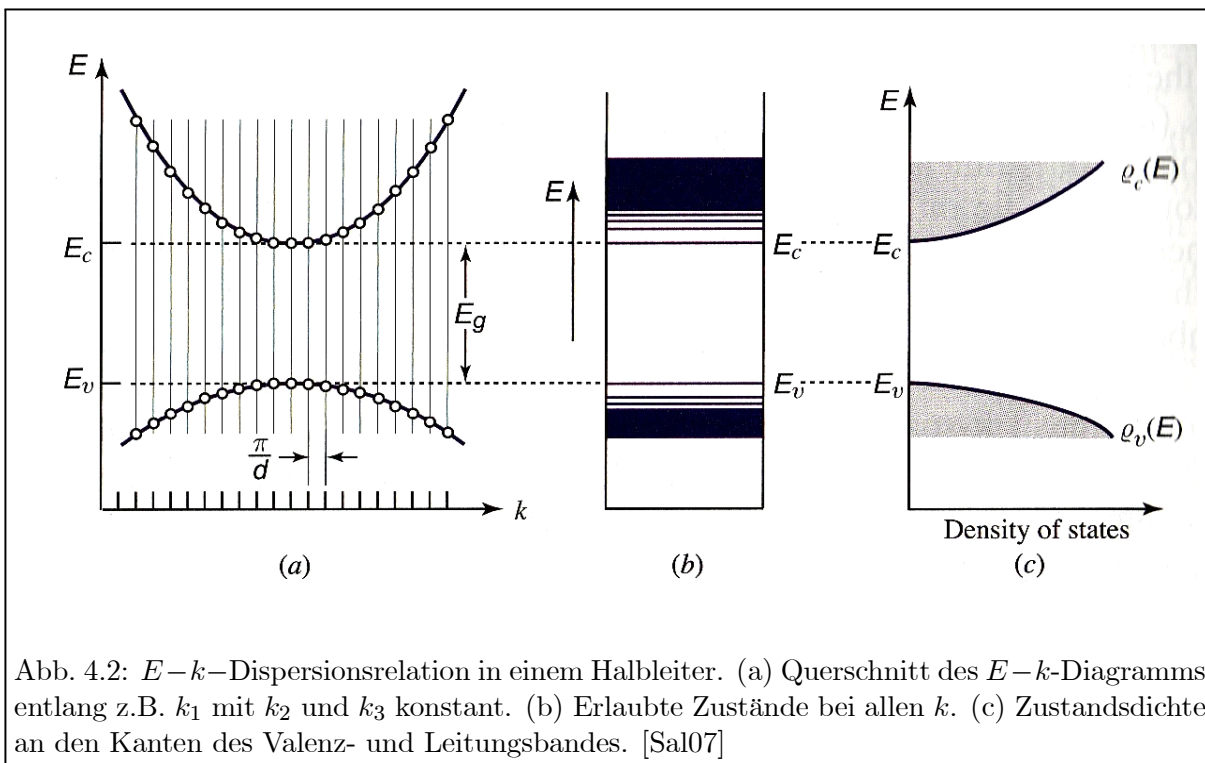


Abb. 4.2: $E-k$ -Dispersionsrelation in einem Halbleiter. (a) Querschnitt des $E-k$ -Diagramms entlang z.B. k_1 mit k_2 und k_3 konstant. (b) Erlaubte Zustände bei allen k . (c) Zustandsdichte an den Kanten des Valenz- und Leitungsbandes. [Sal07]

4.1.2.2 Halbleiter für die Optoelektronik

Für den Bau von optoelektronischen Komponenten ist die Energielücke an der Bandkante die wichtigste physikalische Größe. Sie bestimmt die Wellenlänge der Rekombinationsstrahlung und ist in Abbildung 4.3 (links) als Funktion der Gitterkonstanten gezeigt. Letztere besitzt eine technische Bedeutung bei der Herstellung von Mischkristallen. Günstig ist der extrem geringe Unterschied in der Gitterkonstanten zwischen GaAs und AlAs, der es erlaubt über einen weiten Bereich Mischkristalle herzustellen und damit die Bandlücke über das Mischungsverhältnis x in $(\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x})\text{As}$ zu kontrollieren. (rechts in der Abbildung am Beispiel InGaAsP). Die ersten blauen

²Jüngste Forschungsergebnisse zeigen, dass es mit Gemischen aus Silizium-Nanokristallen und Siliziumdioxid möglich sein könnte, optoelektronische Komponenten wie etwa Diodenlaser aus Silizium zu fertigen.

Laserdioden wurden Mitte der Neunziger Jahre hergestellt und beruhen auf dem Halbleiter Galliumnitrid GaN.

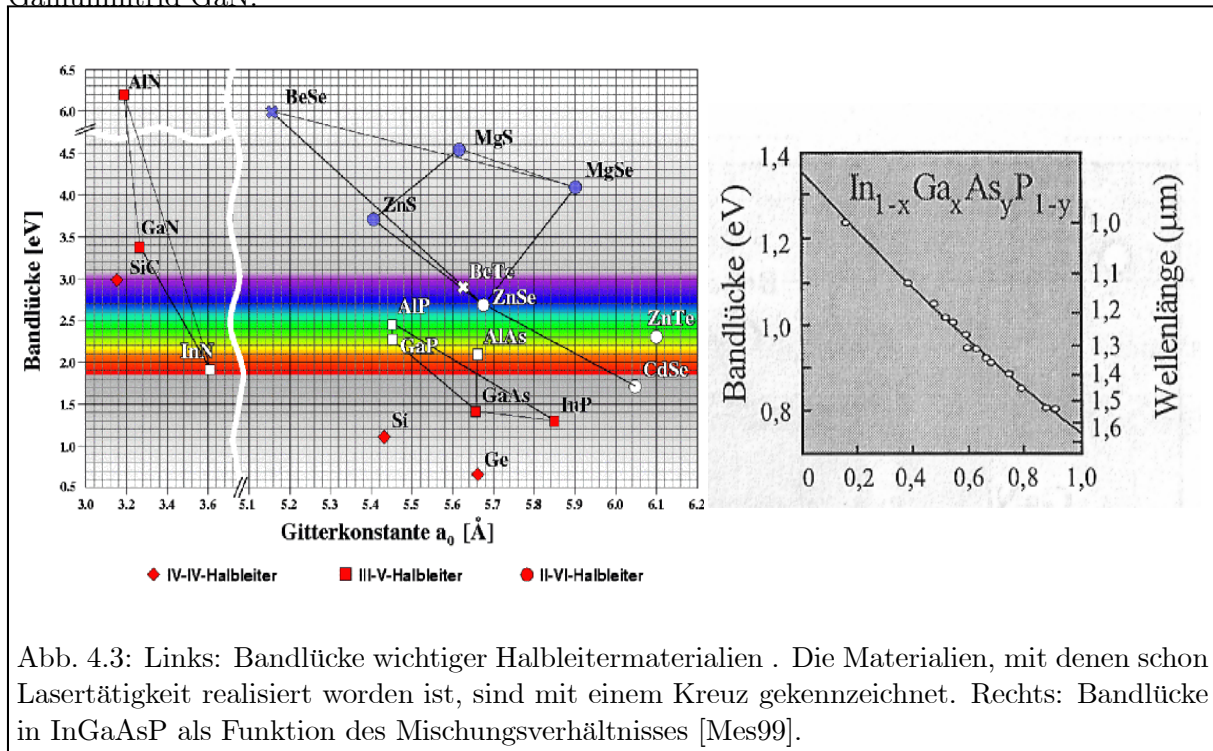


Abb. 4.3: Links: Bandlücke wichtiger Halbleitermaterialien . Die Materialien, mit denen schon Lasertätigkeit realisiert worden ist, sind mit einem Kreuz gekennzeichnet. Rechts: Bandlücke in InGaAsP als Funktion des Mischungsverhältnisses [Mes99].

4.1.2.3 Leuchtdioden

Halbleiter aus III-V-Verbindungen wie z.B. *Gallium-Arsenid* (GaAs) zeichnen sich dadurch aus, dass Elektronen und Löcher vorzugsweise unter Emission von Licht *rekombinieren*. Die Wellenlänge entspricht dem *Bandabstand* und liegt für reines GaAs im Bereich von 850 nm, kann aber durch *Dotierung* in gewissen Grenzen verschoben werden. ausserdem ist der Bandabstand temperaturabhängig, was zum Durchstimmen von Diodenlasern ausgenutzt wird. Bei der üblichen Leuchtdiode tritt dieses *Fluoreszenzlicht* an der Grenzfläche zwischen n- und p-leitendem GaAs auf, wo Elektronen und Löcher rekombinieren, wenn die Diode in Durchlassrichtung betrieben wird (Abb. 4.4). Die Wellenlänge des Lichtes lässt sich aus der Bandlücke des Halbleitermaterials grob anhand der Näherung

$$\lambda_G [\mu\text{m}] \approx \frac{1,24}{E_G [\text{eV}]} \tag{4.10}$$

bestimmen.

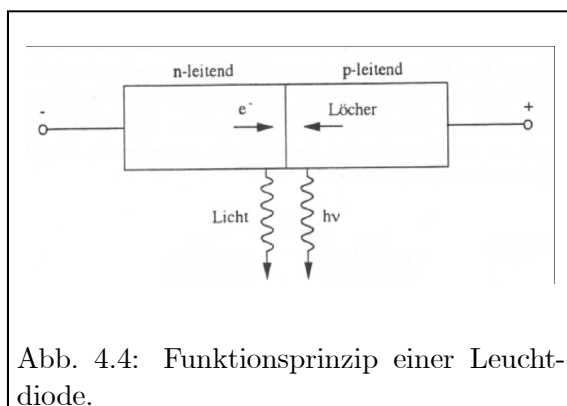


Abb. 4.4: Funktionsprinzip einer Leuchtdiode.

Bei schwacher Dotierung läßt sich aber auf diese Weise keine Inversion zwischen den Elektronen im Leitungsband und denen im Valenzband erzeugen; denn bei einem Halbleiter liegt per definitionem die *Fermi-Energie* E_F zwischen der Energie des Valenzbandes E_{Val} und der des Leitungsbandes E_{Leit} (s. Abb. 4.5 links). Die Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$ macht also gerade zwischen diesen Bändern ihren Sprung von $f \approx 1$ auf $f \approx 0$. Somit ist unter normalen Umständen an eine Inversion

nicht zu denken.

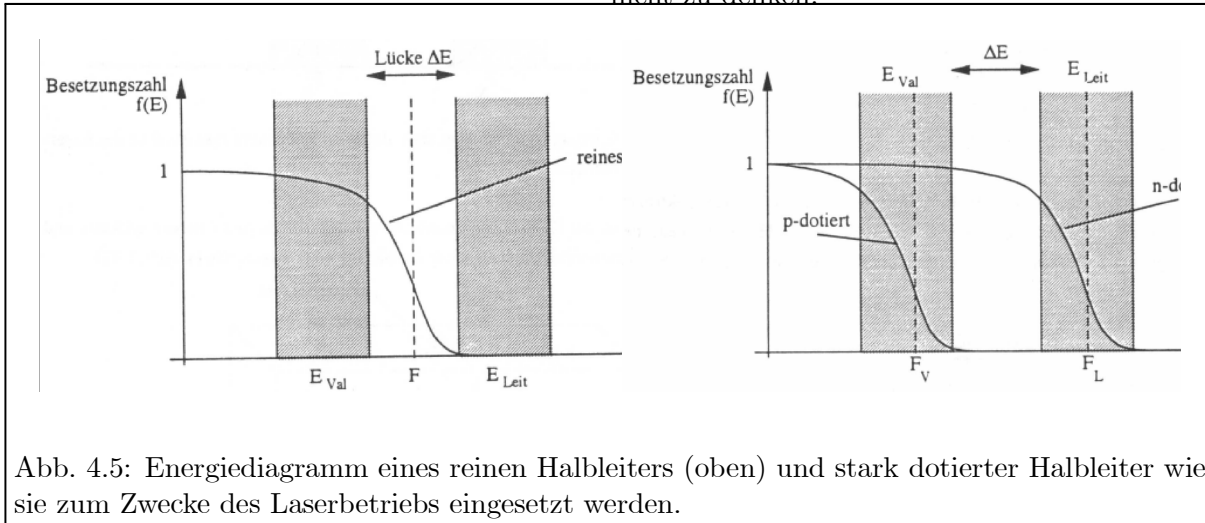


Abb. 4.5: Energiediagramm eines reinen Halbleiters (oben) und stark dotierter Halbleiter wie sie zum Zwecke des Laserbetriebs eingesetzt werden.

4.1.2.4 Laserdioden

Dotiert man die n- und p-Schichten sehr stark mit Donatoren bzw. Akzeptoren in einer Dichte von $n \approx 10^{19}/\text{cm}^3$, so werden in n-Leitern so viele Elektronen von den Donatoren in das Leitungsband gedrückt, daß sich dort die Fermi-Energie F_L ins Leitungsband hinein verschiebt. Umgekehrt saugen die Akzeptoren der p-leitenden Schicht so viele Valenzelektronen ab, daß die Oberkante des Valenzbandes leer wird und die Fermi-Energie F_V dort also in das Valenzband absinkt. Auf diese Weise kann die Besetzungszahl an der Unterkante des Leitungsbandes gegenüber der Oberkante des Valenzbandes invertiert werden, wie es im rechten Teilbild von Abb. 4.5 dargestellt ist. Diese Inversion wird an der Rekombinationsschicht von Elektronen und Löchern wirksam und führt entlang dieser Rekombinationsschicht zur Ausbildung einer Laserwelle. Wir wollen jetzt den Aufbau und die Dynamik von Laserdioden mehr im Detail betrachten

4.1.3 Aufbau und Dynamik einer Laserdiode

Für eine Laserdiode benötigen wir wie für alle Laser im Wesentlichen

1. Pumpmechanismus: In der Regel erfolgt eine Injektion von Elektronen/Löchern in die aktive Region durch Stromfluss oder durch optisches Pumpen.
2. Verstärkungsmechanismus: Licht wird durch induzierte Emission in der aktiven Schicht an einem p-n-Übergang verstärkt.
3. Rückkopplungsmechanismus: Die gespaltenen Kristalloberflächen wirken bereits wie Spiegel. Eine Seite der Laserdiode ist üblicherweise verspiegelt, auf der Frontfacette der Laserdiode reicht die Brechungsindexänderung beim Übergang GaAs/Luft in der Regel zur Rückkopplung aus: Wegen des hohen Brechungsindex (GaAs hat bei $\lambda = 850 \text{ nm}$ einen Brechungsindex $n = 3,5$) wird das Reflexionsvermögen gemäß der Fresnel Beziehung

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \approx 0,30. \quad (4.11)$$

Aufgrund der hohen Verstärkung genügt dieser Wert, um trotz der hohen Reflexionsverluste von 70% pro Umlauf die Schwelle zur Laseroszillation zu erreichen.

Zu den ersten beiden Punkten wollen wir jetzt Versuchen einige quantitative Aussagen zu gewinnen.

4.1.3.1 Generation und Rekombination von Ladungsträgern

Im thermischen Gleichgewicht muss die Erzeugungsrate für Elektronen-Loch Paare durch thermische Anregung ebenso groß sein wie ihre Vernichtungsrate. Die "Vernichtung" geschieht in der sogenannten Rekombination, d.h. Elektronen fallen aus dem Leitungsband zurück ins Valenzband und füllen eines der dort vorhandenen Löcher. Diese Rekombination kann strahlend, d.h. unter Aussendung von Photonen (radiative Rekombination), oder nicht-strahlend (nicht-radiative Rekombination) erfolgen. Im letzteren Fall wird die freiwerdende Energie als Wärme auf das Kristallgitter übertragen (Phononen) oder an freie Elektronen abgegeben (Auger Prozess). Die Rekombination erfordert die gleichzeitige Anwesenheit eines Lochs und eines Elektrons und erfolgt daher mit einer Rate die proportional ist zum Produkt der beiden Dichten

$$R_0 = r \cdot n_e \cdot p \quad (4.12)$$

mit dem Rekombinationskoeffizienten r (Einheit cm^3/s), der Elektronendichte im Leitungsband n_e und der Löcherdichte im Valenzband p . Gemäß unserer Argumentation muss diese im Gleichgewicht mit der Generierungsrate G_0 bei einer Temperatur T übereinstimmen und es stellt sich eine Gleichgewichtspopulation n_0 bzw. p_0 ein

$$G_0 = r \cdot n_0 \cdot p_0. \quad (4.13)$$

Das Produkt $n_0 \cdot p_0 = G_0/r$ ist annähernd unabhängig davon, ob es um einen intrinsischen Halbleiter, ein n- oder ein p-dotiertes Material handelt. Wir können es daher gleichsetzen mit dem Ladungsträgerprodukt in einem intrinsischen Halbleiter bei gleicher Temperatur

$$G_0/r = n_i^2 \quad (4.14)$$

und damit erhalten wir das sogenannte *Massenwirkungsgesetz* ("*Law of Mass Action*"), welches dem einen oder anderen für chemische Reaktionen bekannt sein dürfte (z.B. Löslichkeitsprodukt)

$$n_i^2 = n_0 \cdot p_0,$$

d.h. das Produkt der Ladungsträgerkonzentrationen ist konstant. Durch die Erhöhung der Elektronendichte in einem n-dotierten Material mit der *Donorenkonzentration* N_D sinkt die Löcherdichte auf

$$p = n_i^2/N_D. \quad (4.15)$$

Für die Temperaturabhängigkeit von n_i gilt

$$n_i \approx \sqrt{N_c N_v} e^{-E_G/2kT} \quad (4.16)$$

und damit steigt die Konzentration exponentiell mit der Temperatur an. Einige Beispiele für n_i sind in Tabelle 4.1 angegeben.

4.1.3.2 Injektion von Ladungsträgern

Im Fall einer Laserdiode werden zusätzliche Ladungsträger durch Stromfluss oder mittels eines Pumplasers generiert. Dies geschehe mit einer Rate R . Im stationären Betrieb stellen sich dann

Tabelle 4.1: Ladungsträgerkonzentration intrinsischer Halbleiter bei $T = 300$ K.

Material	Si	GaAs	GaN
n_i [cm^{-3}]	$1,5 \cdot 10^{10}$	$1,8 \cdot 10^6$	$1,9 \cdot 10^{-10}$

neue Gleichgewichtskonzentrationen n und p ein

$$n = n_0 + \Delta n \quad (4.17a)$$

$$p = p_0 + \Delta p \quad (4.17b)$$

$$R + G_0 = rnp. \quad (4.17c)$$

Da Löcher und Elektronen immer in Paaren erzeugt werden gilt $\Delta n = \Delta p$ und wir erhalten

$$rn_0p_0 + R = r(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta n), \quad (4.18)$$

eine Beziehung die wir zunächst nach R auflösen, um

$$R = r\Delta n(n_0 + p_0 + \Delta n) \quad (4.19)$$

zu erhalten. Dies können wir umschreiben als

$$R = \frac{\Delta n}{\tau} \quad (4.20)$$

mit

$$\tau = \frac{1}{r[(n_0 + p_0) + \Delta n]} \approx \frac{1}{r(n_0 + p_0)} \quad (4.21)$$

für ausreichend kleine Injektionsraten R bei denen $\Delta n \ll n_0 + p_0$. Die Zeitkonstante τ stellt die *Lebensdauer der Überschuss-Ladungsträger* dar, denn in einem n-dotierten Material ist $n_0 \gg p_0$ und damit wird $\tau \approx 1/rn_0$. Dies gilt allerdings nur solange *Fallenzustände (Traps)* keine wesentliche Rolle für die Rekombinationsrate spielen³. Man beachte, dass (4.21) bei großen Injektionsraten nichtlinear ist, weil Δn selbst in der Zeitkonstante wieder auftaucht.

Die Konzentration der injizierten Ladungsträgerpaare folgt der Differentialgleichung

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = R - \frac{\Delta n}{\tau} \quad (4.22)$$

die im stationären Zustand genau auf (4.20) führt. $1/\tau$ ist damit also die *Elektron-Loch-Rekombinations-Zeitkonstante* der injizierten überschüssigen Ladungsträger.

4.1.3.3 Interne Quanteneffizienz

Das Verhältnis der radiativen (r) zur nichtradiativen (r_{nr}) Rekombination bestimmt die Effizienz mit der die in die Diode eingebrachten Ladungsträger in Photonen umgewandelt werden können. Es gilt

$$r = r_{nr} + r_r \quad (4.23)$$

und man definiert die interne Quanteneffizienz des Materials als

$$\eta_i = \frac{r_r}{r_{nr} + r_r} = \frac{\tau_{nr}}{\tau_{nr} + \tau_r}. \quad (4.24)$$

³Fallenzustände sind Energiezustände die in der Bandlücke liegen und z.B. durch Verunreinigungen im Kristallgitter, Korngrenzen, etc., verursacht werden. Sie sind in der Lage als Rekombinationszentren zu wirken, weil sie Elektronen und Löcher einfangen und dadurch die Rekombinationsrate erhöhen.

Tabelle 4.2: Radiative Rekombinationskoeffizienten r_r , radiative (τ_r) und nichtradiative (τ_{nr}) Rekombinationslebensdauern, Lebensdauern τ und interne Quanteneffizienzen η_i einiger Halbleitermaterialien.

Material	r_r [cm^3/s]	τ_r	τ_{nr}	τ	η_i
Si	10^{-15}	10 ms	100 ns	100 ns	10^{-5}
GaAs	10^{-10}	100 ns	100 ns	50 ns	0,5
GaN	10^{-8}	20 ms	0,1 ns	0,1 ns	0,005

In Tabelle 4.2 sind die relevanten Größen für drei Halbleitermaterialien angegeben. Dabei wurde n-dotiertes Material mit einer Ladungsträgerkonzentration von $n_0 = 10^{17}/\text{cm}^3$, 10^{15} Defektzentren/ cm^3 und einer Temperatur von $T = 300$ K angenommen [Sal07]. Die geringe Quanteneffizienz von Silizium ist auf die indirekte Bandlücke dieses Halbleiters zurückzuführen, während GaAs eine direkte Bandlücke aufweist und eine gute Quanteneffizienz besitzt. Die geringe Quanteneffizienz von GaN wird praktisch durch Beimischungen von Indium in GaInAs aufgebessert. Hier können Quanteneffizienzen von 0,3 erreicht werden.

4.1.3.4 Der Verstärkungskoeffizient

Die komplexe Abhängigkeit des Verstärkungskoeffizienten von der injizierten Ladungsträgermenge macht die genaue Analyse von Halbleiterlasern schwierig. Daher verwendet man oft statt des exakten Verstärkungskoeffizienten den maximalen (Peak) Verstärkungskoeffizienten γ_p indem man davon ausgeht, dass der Peak-Verstärkungskoeffizient durch eine lineare Abhängigkeit von Δn ausgedrückt wird. Diese Näherung ist korrekt, solange γ_p hinreichend groß ist. In dieser linearen Näherung können wir die Verstärkung schreiben als

$$\gamma_p = \alpha \left(\frac{\Delta n}{n} - 1 \right). \quad (4.25)$$

Solange $\Delta n \leq \Delta n_{\text{Schwelle}}$ ist, überwiegt die Absorption und bei Gleichheit wird das Medium transparent. Um einen Ausdruck mit den Betriebsparametern der Diode zu bekommen, betrachten wir eine Diode mit den Abmessungen l und w und einer Dicke der aktiven Schicht von d . Wenn die Elektronen bei einem Stromfluss I gleichmäßig verteilt über die ganze Fläche $A = l \cdot w$ in die aktive Zone injiziert werden, so ist die Injektionsrate gegeben durch

$$R = \frac{I}{edA} = \frac{J}{ed} \quad (4.26)$$

mit der Stromdichte J . Damit können wir (4.25) umschreiben in

$$\gamma_p = \alpha \left(\frac{J}{J_{\text{Schwelle}}} - 1 \right), \quad (4.27a)$$

$$J_{\text{Schwelle}} = \frac{ed}{\eta_i \tau_r} \cdot \Delta n_{\text{Schwelle}}. \quad (4.27b)$$

Typische Werte für Homostrukturen, d.h. pn-Übergänge des gleichen Halbleitermaterials auf beiden Seiten der Verbindung, sind $w = 10 \mu\text{m}$, $l = 200 \mu\text{m}$, $\eta_i = 0,5$, $\tau = 2 \mu\text{s}$ und $d = 2 \mu\text{m}$. Mit $\Delta n_{\text{Schwelle}} = 1,2 \cdot 10^{18}$ ergibt sich eine Schwellstromdichte von $J_{\text{Schwelle}} = 48 \text{ kA}/\text{cm}^2$ und damit ein Strom von 1 A durch die Laserdiode. Diese Stromdichten sind für einen Dauerstrichbetrieb von Laserdioden viel zu hoch. Daher waren die ersten Laserdioden

gekühlt und konnten nur im Pulsbetrieb betätigt werden. Wichtig ist die Proportionalität der Schwellstromdichte zur Dicke der aktiven Schicht d . Wenn die Rekombination auf einen kleinen Raum beschränkt werden kann, ist es viel einfacher dort Inversion zu erzeugen. Mit der Entwicklung der Hetero- und Doppelheterostrukturen ($d \approx 100 - 200$ nm) gelang es die erforderlichen Stromdichten, um etwa einen Faktor 40-60 zu reduzieren und damit erstmals den cw Betrieb von Laserdioden möglich zu machen.

4.1.3.5 Heterostruktur und Doppel-Heterostruktur-Laser

Um die Dicke der aktiven Schicht einzuengen ist man von den Homostrukturlasern - deren p- und n-dotierte Schichten aus dem gleichen Halbleitermaterial bestehen - zunächst zu Heterostruktur und dann zu Doppel-Heterostruktur lasern übergegangen. Das Problem der Homostrukturen ist die große Diffusionslänge der Elektronen in das p-dotierte Material und der Löcher in das n-dotierte Material. Dadurch kommt es auf eine Ausweitung der aktiven Schicht auf einige μm und es sind hohe Schwellströme von einigen 10 kA/cm^2 erforderlich. Durch die Verwendung von Materialien mit unterschiedlicher Bandlücke können aber gezielt Barrieren für die Ladungsträger aufgebaut werden. Dies ist in Abbildung 4.6 vereinfacht dargestellt.

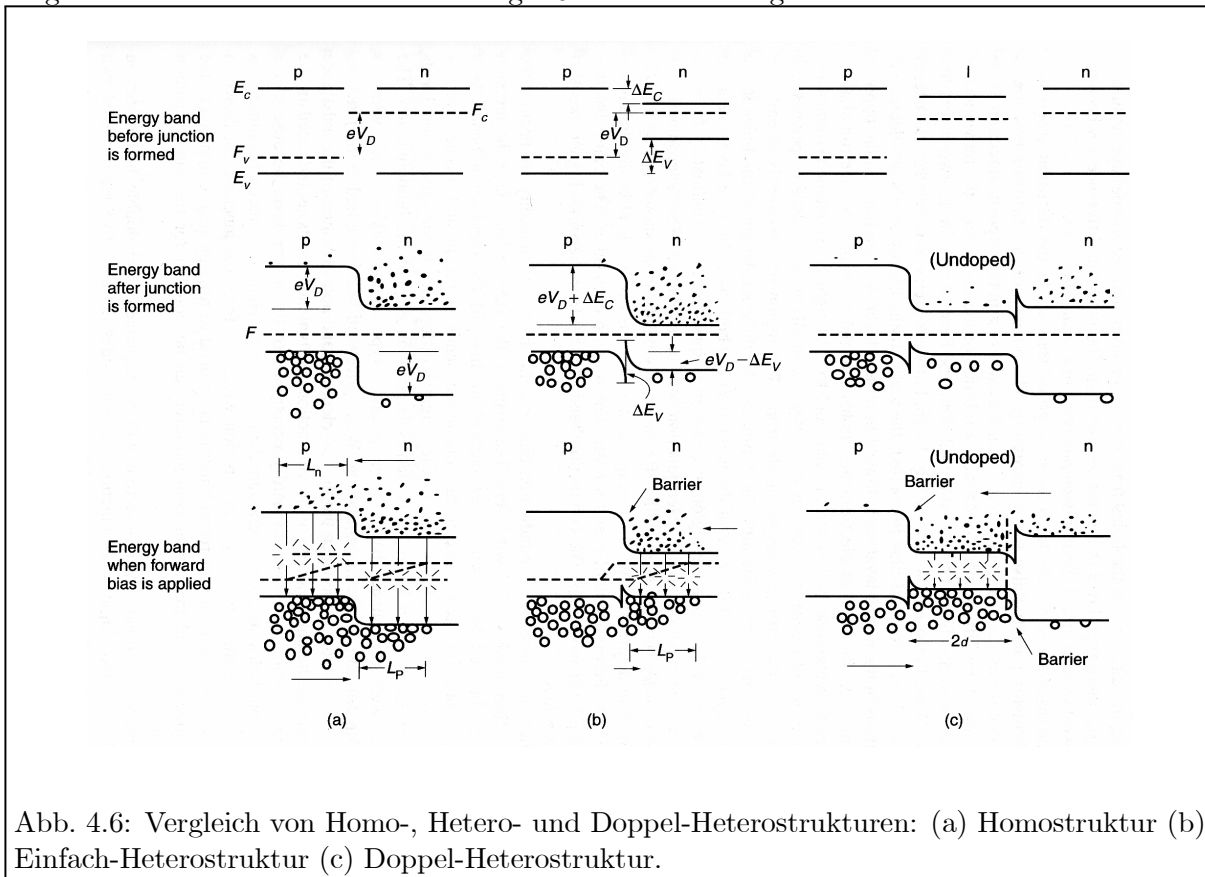


Abb. 4.6: Vergleich von Homo-, Hetero- und Doppel-Heterostrukturen: (a) Homostruktur (b) Einfach-Heterostruktur (c) Doppel-Heterostruktur.

In einem Einfach- Heterostruktur laser wird die Diffusion einer der beiden Ladungsträgerarten eingeschränkt und die Dicke der Zone halbiert sich annähernd. Der Durchbruch kam mit den Doppel-Heterostrukturen. Hier wird eine dünne Schicht eines Materials mit kleinerer Bandlücke zwischen zwei Schichten eines Materials mit größerer Bandlücke gepackt. Die entstehenden Potentialbarrieren verhindern die Diffusion der Ladungsträger über die Grenzschicht hinweg - die Ladungsträger werden effizient eingesperrt und die Dicke der aktiven Zone kann dadurch gering gehalten werden. Sie liegt typischerweise bei 100-200 nm. Der Laserstrahl wird in der Diode durch den Brechungsindexsprung von aktiver Schicht zu p- bzw. n-dotiertem Substrat

in vertikaler Richtung wie in einem Wellenleiter geführt. Zur horizontalen Führung eignen sich Verstärkungsführung (Gewinnführung, gain-guiding) oder die Brechungsindexführung (index-guiding), wie in Abbildung 4.7 gezeigt. Bei der Verstärkungsführung erfolgt durch die räumliche Variation der Ladungsträger eine Brechungsindexänderung, die zum Einschluss des Lichtes ausgenutzt wird. Sie kann durch eine entsprechende Form einer Elektrode realisiert werden: Eine schmale Elektrode begrenzt räumlich den Stromfluss und induziert thermisch einen Brechungsindexunterschied. Bei der Indexführung hingegen ist ein Brechungsindexprofil in das Substrat eingepreßt. Wenn die Dicke der aktiven schicht noch weiter eingeeengt wird ($\lesssim 50$ nm) verändern sich die Eigenschaften solcher System auch qualitativ, es kommt zur Ausbildung von Quantenfilmen (Quantum-Well-Lasers), auf die wir an dieser Stelle aber nicht weiter eingehen wollen.

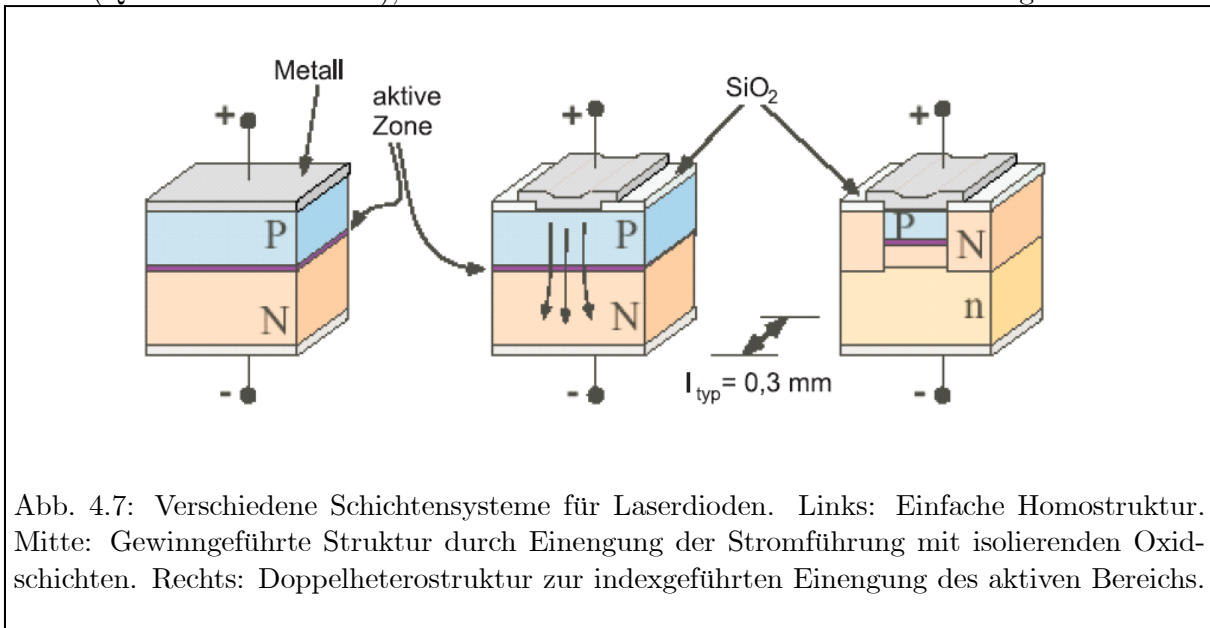


Abb. 4.7: Verschiedene Schichtensysteme für Laserdioden. Links: Einfache Homostruktur. Mitte: Gewinngeführte Struktur durch Einengung der Stromführung mit isolierenden Oxidschichten. Rechts: Doppelheterostruktur zur indexgeführten Einengung des aktiven Bereichs.

4.1.4 Praktische Aspekte von Diodenlasern

4.1.4.1 Generelles

Die Bruchfläche (Facette) ist äußerst empfindlich gegenüber Verschmutzung, da im Bereich des Strahlungsaustritts aus der schmalen aktiven Zone sehr hohe Strahlungsflussdichten bestehen. Zu hohe Stromimpulse können dort sogar bereits ohne Verschmutzung zu optisch induzierten, thermischen Zerstörungen der Facette führen. Diese Art der Zerstörung wird als COD (catastrophic optical damage) bezeichnet. Die Stromversorgung von Diodenlasern muss daher frei von Stromspitzen sein. Laserdioden vertragen nur geringe Sperrspannungen (3 bis 5 V). Daher sind sie empfindlich gegenüber elektrostatischen Entladungen (ESD) und werden zum Transport üblicherweise kurzgeschlossen. Bei Handhabung und Einbau müssen Schutzmaßnahmen getroffen werden, die elektrische Spannungen zwischen den Anschlüssen verhindern.

4.1.4.2 Abstrahlcharakteristik

In Abb. 4.8 ist eine *Doppel-Heterostruktur-Diode* und die Abstrahlcharakteristik eines solchen *Kantenemitters* dargestellt. Lateral wird die aktive Zone durch die entsprechende Präparierung des oberen Metallkontaktes eingeeengt. Der Kontakt wird mit einer nichtleitenden Schicht Siliziumoxid unterlegt, die in der entsprechenden Breite, je nachdem wie groß die aktive Zone lateral sein soll, unterbrochen ist. Die Ausdehnung der aktiven Zone liegt typischerweise zwischen $3 \mu\text{m}$

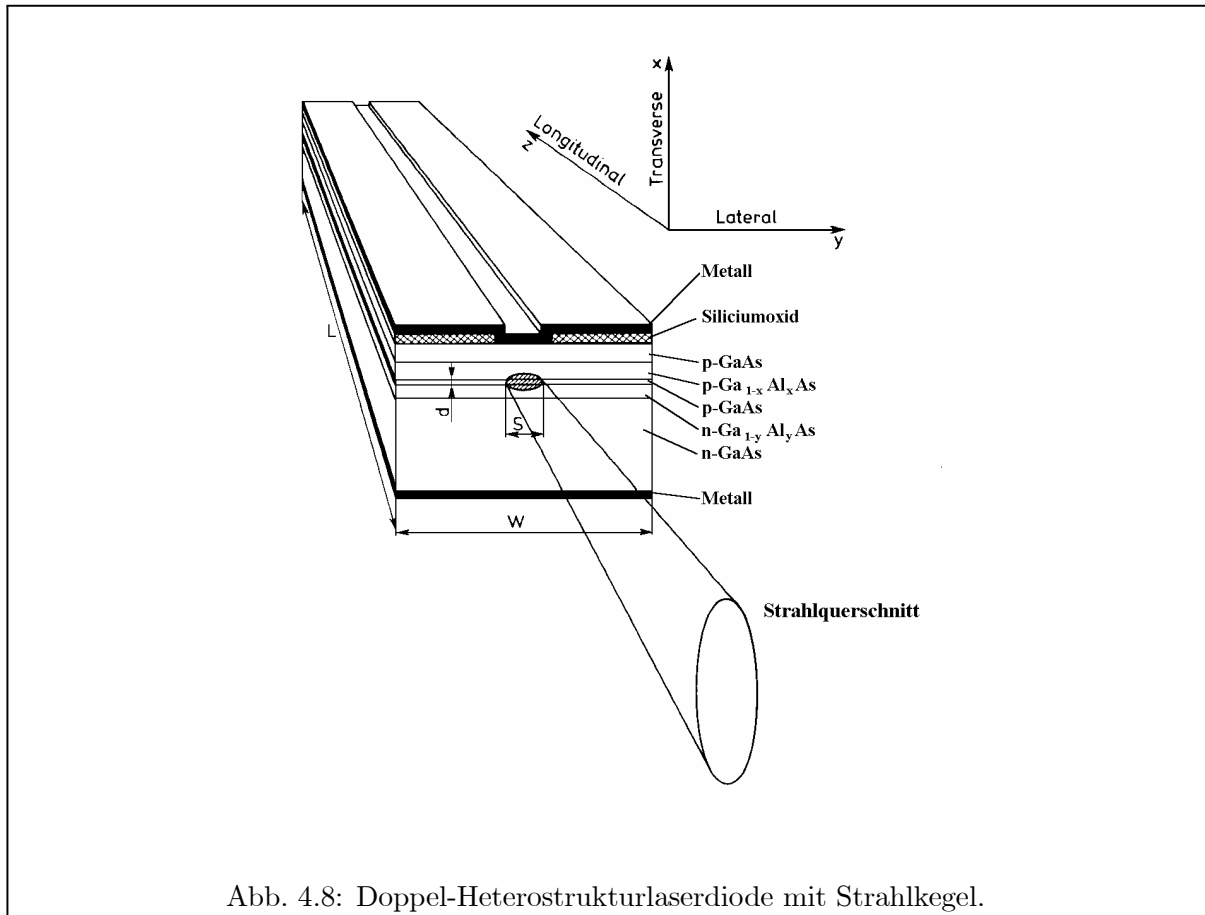


Abb. 4.8: Doppel-Heterostrukturlaserdiode mit Strahlkegel.

bis $5 \mu\text{m}$ lateral und $0,1 \mu\text{m}$ bis $0,3 \mu\text{m}$ transversal zum p–n–Übergang. Durch diese Werte wird gewährleistet, dass bei maximaler Inversion der TEM₀₀-Mode bevorzugt ist und anschwingen kann. Aufgrund der kleinen Querschnittsfläche des aktiven Volumens emittieren Laserdioden beugungsbedingt mit relativ *großem Öffnungswinkel* $\theta \approx \sqrt{\lambda/l}$ der durchaus einige 10 Grad betragen kann.. Eine Strahlformung kann durch *Zylinderlinsen*, direkt aufgebraute Mikrolinsen, ein *anamorphotisches Prismenpaar*, andere Kollimatoroptiken oder durch direktes Anbringen einer Faser realisiert werden. Bessere Strahleigenschaften aber geringere Ausgangsleistungen haben die neuartigen *Oberflächenemitterdioden (VCSEL, vertical cavity surface emitting diode)*, deren Strahlen im Gegensatz zu den bisher besprochenen Kantenemittern rund und nicht so stark beugungsbegrenzt sind.

4.1.4.3 Wellenlängenbeeinflussung ohne externen Resonator

Der interne Resonator eines Kantenemitters hat in der Regel eine optische Weglänge von ca. 1 mm. An den Resonatorendflächen muß die sinusförmige Feldstärkefunktion Nullstellen besitzen, weshalb im Resonator nur Moden anschwingen können, deren Frequenzen ein halbzahliges Vielfaches des Resonatormodes mit der Resonatorlänge L ist. Daher beträgt der Frequenzabstand zweier benachbarter Moden

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}, \quad (4.28)$$

und es resultiert ein typischer intrinsischer Modenabstand von $\approx 150 \text{ GHz}$.

Die Laserdiode kann auch ohne weiteren Resonator in der Frequenz beeinflusst werden. Dazu ist es notwendig, den Strom oder die Temperatur zu ändern. Die Wellenlänge in Abhängigkeit

von der Temperatur bzw. dem Strom ist in Abbildung 4.9 gezeigt.

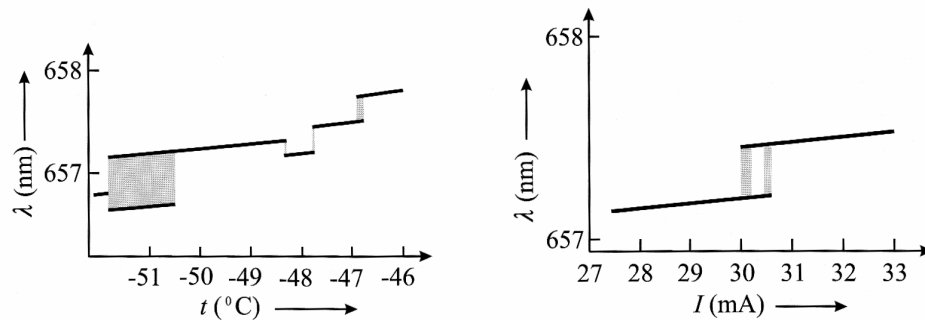


Abb. 4.9: Temperatur und Stromeinfluß auf die Wellenlänge eines Diodenlasers.

Im allgemeinen wird man beide Parameter gleichzeitig verändern müssen, um einen stabilen Einmodenbetrieb über einen größeren Verstimmungsbereich zu erreichen. Bei einer Stromerhöhung wird nämlich die Ladungsträgerdichte und damit der Brechungsindex erhöht, gleichzeitig steigt die Ausgangsleistung und indirekt die Temperatur. Eine aktive Veränderung der Temperatur hingegen ändert den optischen Weg in der Diode, außerdem kommt es zu einer Änderung des Brechungsindex. Beide Arten der Frequenzveränderung verschieben auch das Maximum des Verstärkungsprofils, und zwar nicht synchron zur Längenänderung. Aufgrund dieser Umstände sind nicht alle Wellenlängen erreichbar, und beim Durchstimmen der Laserdiode treten Modensprünge auf. Dies ist in Abbildung 4.10 veranschaulicht.

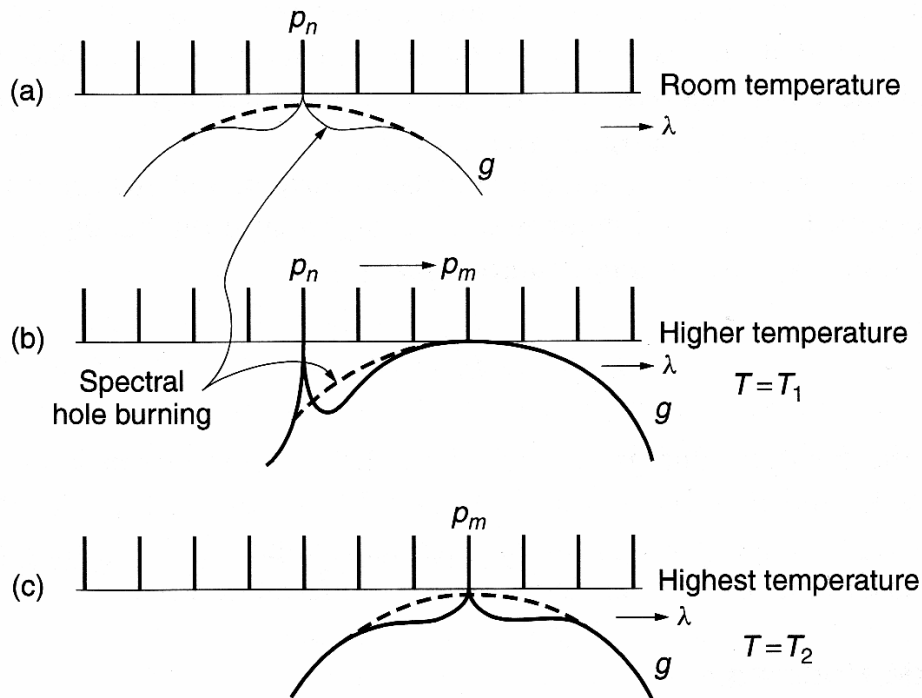


Abb. 4.10: Modensprung eines Diodenlasers.

Eine Regelung der Wellenlänge mit der Temperatur bringt außerdem weitere entscheidende Nachteile mit sich:

1. eine schwerfällige Wellenlängenselektion, da die Temperaturregelung nur langsam stattfinden kann,
2. hohe Temperaturen, die die Lebensdauer der Laserdiode verkürzen und
3. tiefe Temperaturen, die zur Taubildung führen können.

4.1.4.4 Wellenlängenbeeinflussung mit externem Resonator

Für einen Einsatz der Laserdioden in der Spektroskopie ist in der Regel eine höhere Stabilität, ein verbessertes Durchstimmen und eine kleinere Linienbreite notwendig, als es eine frei betriebene Laserdiode ermöglicht. Beim bisher behandelten einfachen Diodenlaser werden die Frequenzschwankungen zu einem großen Teil durch die Schwankungen des Brechungsindex im aktiven Medium des Diodenlasers verursacht. Verlängert man die Länge des optischen Resonators z.B. dadurch, dass man die Frontfacette des Diodenlasers entspiegelt, und den dadurch wegfallenden Resonatorspiegel durch einen externen Spiegel im Abstand L_0 von der Austrittsfläche des Diodenlasers ersetzt, so wird die optische Länge $L = nL_{LD} + L_0$ eines solchen Lasers mit verlängertem Resonator (extended cavity diode laser) durch die Änderung δn des Brechungsindex im aktiven Medium nur noch zu einem Anteil beeinflusst: Bei einer Änderung des Brechungsindex in der aktiven Zone der Länge L_{LD} um δn , ändert sich die Frequenz auf

$$\nu_0 - \delta\nu = \frac{qc}{2} \frac{1}{L_0 + L_{LD}(n + \delta n)} \quad (4.29a)$$

$$= \frac{qc}{2(L_0 + nL_{LD})} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta n}{L_0 + nL_{LD}}\right)} \quad (4.29b)$$

$$\approx \frac{qc}{2(L_0 + nL_{LD})} \left(1 - \frac{\delta n}{L_0 + nL_{LD}}\right) \quad (4.29c)$$

$$= \nu_0 - \nu_0 \frac{L_{LD}}{L_0} \frac{\delta n}{n}. \quad (4.29d)$$

Die Frequenzänderung ist also mit

$$\delta\nu = \nu_0 \frac{L_{LD}}{L_0} \frac{\delta n}{n}$$

um das Längenverhältnis der luftgefüllten Resonatorstrecke zur materialgefüllten Strecke unterdrückt, solange der externe Spiegel genügend störungsarm aufgebaut ist. Die Länge eines erweiterten Resonators kann bis zu 20 cm betragen.

Da Laserdioden ein flaches Verstärkungsprofil besitzen, ist die Anfälligkeit für Modensprünge groß, weil für eine große Anzahl von Resonatormoden eine annähernd gleiche Verstärkung auftritt. Durch die Ankopplung eines externen Resonators mit einem Gitter wird ein schmaler Wellenlängenbereich in die Diode zurückgekoppelt. Dies führt zur Überhöhung des Modes der Laserdiode, der in diesem Bereich liegt. Spontane Modensprünge, die durch Strom- und Temperaturschwankungen oder mechanische Instabilitäten hervorgerufen werden können, lassen sich so unterdrücken, da der Unterschied in der Verstärkung zwischen dem ausgewählten Mode und dem nächstmöglichen Mode durch den externen Resonator groß genug geworden ist. Hierdurch bleibt auch bei Störungen der selektierte Mode im Maximum des Verstärkungsprofils. Durch die Wellenlängenselektion mit einem externen Resonator wird die Zahl der möglichen Moden

erhöht, weil aus dem längeren Resonator ein kleinerer Modenabstand resultiert. Bei einer Resonatorlänge von $L_0 \approx 10$ cm folgt für den externen Resonator mit Gleichung 4.28 ein freier Spektralbereich von ca. 1,5 GHz; dieser ist damit ungefähr um den Faktor 100 kleiner als der freie Spektralbereich des internen Resonators.

Oft wird zur Rückkopplung ein Gitter benutzt, das durch die Gittergleichung (s. EXKURS in Abbildung 4.12)

$$m\lambda = d(\sin \alpha - \sin \beta) \quad (4.30)$$

charakterisiert ist. Im Aufbau nach Littrow steht das Gitter so, dass die erste Beugungsordnung in die Diode zurückreflektiert wird. Dies ist links in Abbildung 4.11 zu sehen. Die nullte Ordnung wird zur Auskopplung benutzt. Mit einer einfachen Laserdiode kann etwa das 30-fache des freien Spektralbereiches des Laserresonators durchgestimmt werden, wobei jedoch Modensprünge auftreten. Um den Laser kontinuierlich durchstimmen zu können, müssen gleichzeitig der Drehwinkel des Gitters und die Länge des Resonators verändert werden. Ein Nachteil dieser Anordnung besteht darin, dass sich die Richtung der ausgekoppelten nullten Ordnung durch Drehung des Gitters verändert. Aus diesem Grund wird bei der Littrow-Anordnung gelegentlich am hoch reflektierenden, rückseitigen Laserdiodenspiegel ausgekoppelt.

Beim Diodenlaser mit verlängertem Resonator in Littman-Anordnung wird durch Verkipfung des Stellspiegels die Wellenlänge selektiert. Bei der Littman-Anordnung fällt die erste Beugungsordnung auf einen drehbaren Stellspiegel, durch dessen Drehwinkel die Frequenz durchgestimmt wird. Da das Gitter nicht bewegt wird, bleibt auch die Richtung der genutzten nullten Ordnung stabil. Nachteil dieser Anordnung sind die zusätzlichen Reflexionen am Spiegel bzw. am Gitter, durch die sich die Resonatorverluste vergrößern.

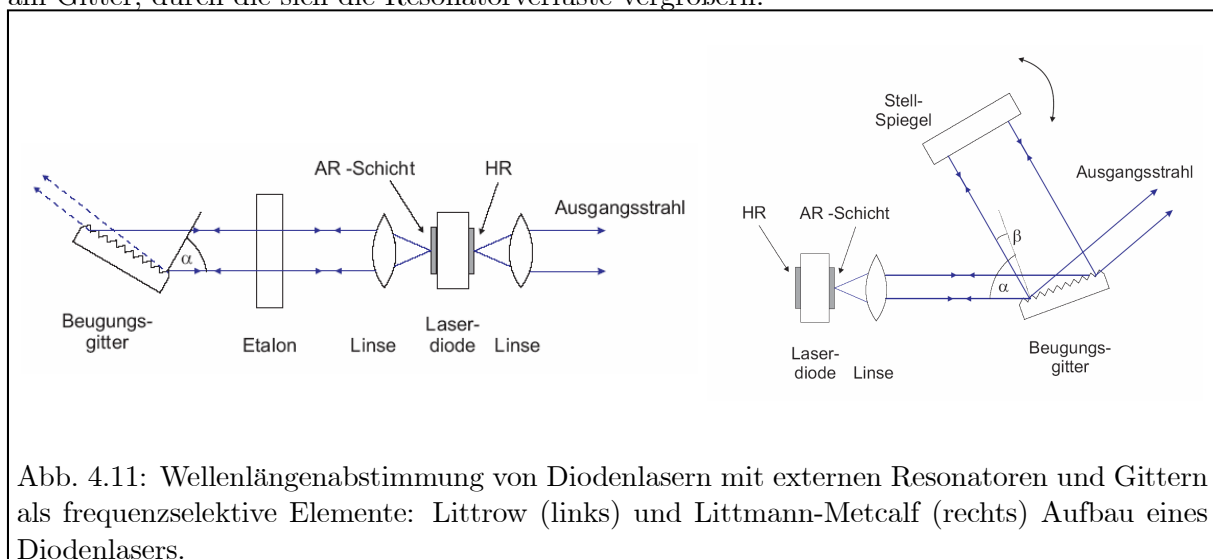


Abb. 4.11: Wellenlängenabstimmung von Diodenlasern mit externen Resonatoren und Gittern als frequenzselektive Elemente: Littrow (links) und Littman-Metcalf (rechts) Aufbau eines Diodenlasers.

4.1.5 Faserlaser

Bereits 1961 erkannte E. Snitzer, dass Glasfasern gute Voraussetzungen zum Betrieb von Lasern bieten, da in ihnen die Grundmode und das Pumplicht bei hoher Intensität und mit gutem räumlichen Überlapp über weite Strecken geführt werden können. Erst mit der Verfügbarkeit robuster Diodenlaser als Pumplichtquellen sind Faserlaser jedoch technologisch wichtig geworden. Der wichtigste Typ ist der der Erbium-dotierte Faserlaser. Er wird hauptsächlich bei einer Wellenlänge von 1550 nm betrieben. Diese Wellenlänge ist von größter Bedeutung in der optischen Nachrichtentechnik, da hier Glasfasern geringste Absorption und Dispersion haben. Zudem ist diese Wellenlänge „augensicher“, da Licht bei 1550 nm bereits im Glaskörper des

EXKURS: Littrow-Winkel

Für ein Gitter mit der Gitterkonstante d und einfallendem Strahl unter dem Winkel θ sowie ausfallendem Strahl unter dem Winkel ϕ stellt sich die Situation wie unten gezeigt dar, und es gilt für eine konstruktive Interferenz der Ordnung m folgende Bedingung :

$$m \lambda = d (\sin \theta \pm \sin \phi). \quad (4.31)$$

Liegen beide Strahlen auf der gleichen Seite der Gitternormalen, so gilt

$$m \lambda = d (\sin \theta + \sin \phi). \quad (4.32)$$

Sind Einfallswinkel θ und Ausfallswinkel ϕ gleich ($\theta = \phi$), so vereinfacht sich Gleichung 4.31 zu

$$m \lambda = 2d \sin \theta \quad (4.33)$$

womit sich der Brewsterwinkel zu

$$\theta = \arcsin \frac{m \lambda}{2d} \quad (4.34)$$

ergibt. Das Auflösungsvermögen des Gitters ist gegeben durch

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{n d (\sin \theta + \sin \phi)}{\lambda}, \quad (4.35)$$

n ist hier die Anzahl der ausgeleuchteten Gitterfurchen.

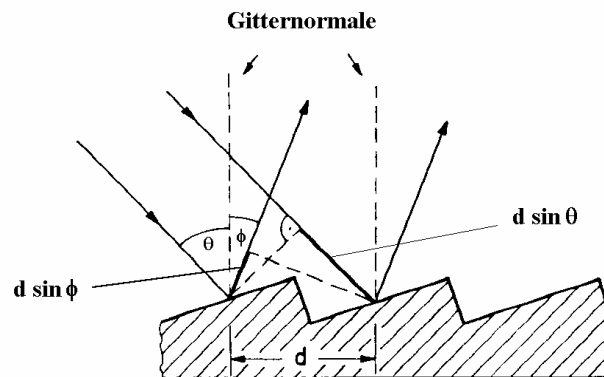


Abb. 4.12: Illustration zur Gittergleichung.

Auges absorbiert wird, in dem die Wärmeableitung relativ gut ist und in dem der Strahl nicht die hohen Intensitäten erreicht wie im Fokus auf der Netzhaut.

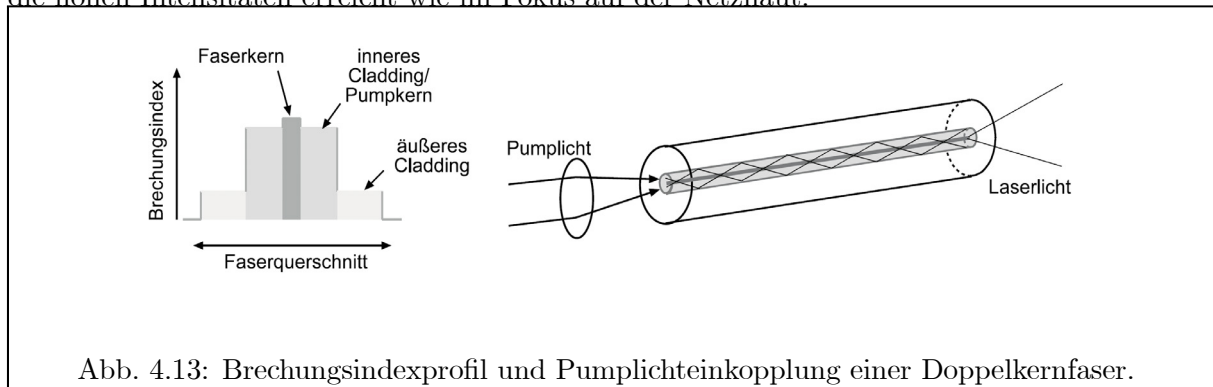


Abb. 4.13: Brechungsindexprofil und Pumplichteinkopplung einer Doppelkernfaser.

Erbium kann z.B. mit 960 nm gepumpt werden. Für diese Wellenlänge gibt es leistungsstarke Diodenlaser und das Problem der Anregung aus langlebigen, angeregten Zuständen (engl. ESA, excited state absorption) ist relativ gering. Erbium ist auch bei anderen Wellenlängen pumppbar, wie z.B. 530 nm oder 660 nm. Die Schwierigkeit bei Faserlasern ist die Einkopplung des Pumplichtes. Ein häufig verwendetes Schema basiert auf der Verwendung einer Doppelkernfaser, deren stufenförmiges Brechungsindexprofil und Aufbau in Abbildung 4.13 skizziert sind. Die Faser führt den entstehenden Laserstrahl monomodig und den Pumpstrahl multimodig. Das Pumplicht wird immer wieder in den Kern reflektiert und dort allmählich absorbiert. Es wurden bereits Ausgangsleistungen von mehreren 10 W erreicht. Neben Erbium werden auch andere Seltenerdmaterialien dotiert, z.B. Yb, Tm, Ho, Nd, Pr und Sm.

4.2 Gaslaser

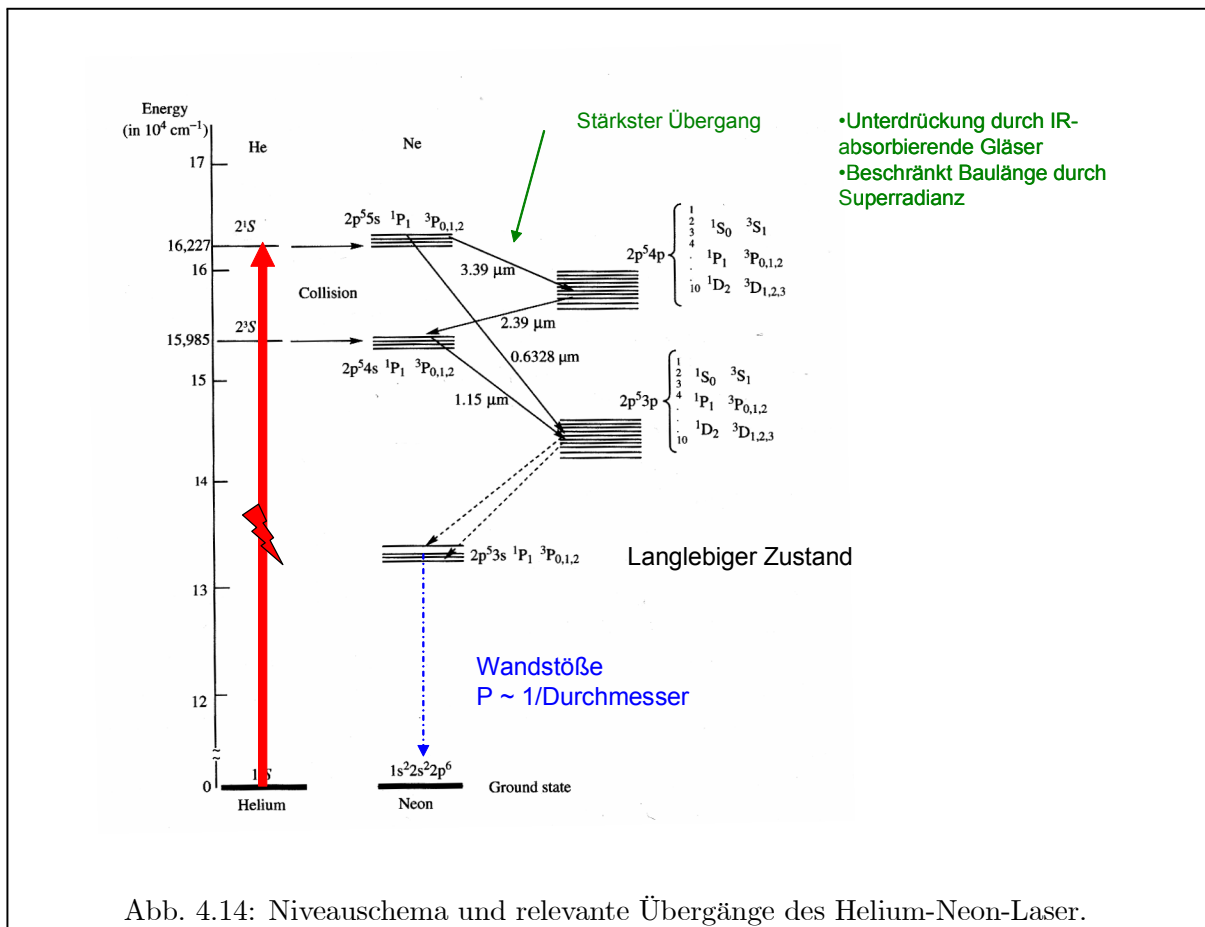
4.2.1 Helium-Neon Laser

Der sicherlich bekannteste Gaslaser ist der Helium-Neon-Laser (HeNe-Laser). Er basiert auf Laserübergängen im Neonatom und gehört damit in die Klasse der Neutralgaslaser. In einer Glaskapillare wird bei geringem Druck (< 1 mbar) eine Mischung aus Helium und Neon in einer elektrischen Entladung angeregt. Diese Gasentladung wird mit einem Spannungspuls von mehreren kV gezündet und dann durch eine Spannung von etwa 1,5-2 kV aufrecht erhalten. Durch Stöße mit Plasmaelektronen werden Heliumatome in den 2^1S_0 - und den 2^3S_1 -Zustand angeregt. Die Heliumatome geben ihre Energie durch inelastische Stöße zweiter Art an Neonatome ab, deren $2p^5 5s$ - und $2p^5 4s$ -Zustände sehr nahe bei den Energieniveaus der Heliumatome liegen (siehe Abb.4.14). Dadurch wird eine Besetzungsinversion der Neonatome erreicht. Es existiert eine Reihe von strahlenden Übergängen in tieferliegende Zustände, die als Laserübergänge genutzt werden.

Die bekanntesten sind:

- $5s \rightarrow 4p$, $\lambda = 3,39 \mu\text{m}$ (infrarot)
- $4s \rightarrow 3p$, $\lambda = 1,15 \mu\text{m}$ (infrarot)
- $5s \rightarrow 3p$, $\lambda = 633 \text{ nm}$ (rot)
- $5s \rightarrow 3p$, $\lambda = 543 \text{ nm}$ (grün).

Der untere $3p$ Laserzustand der 633 nm-Linie zerfällt strahlend weiter in die $2p^5 3s$ -Niveaus. Bei hohen Gasdrücken wird dieser Zustand durch Strahlungseinfang und bei hohen Stromstärken



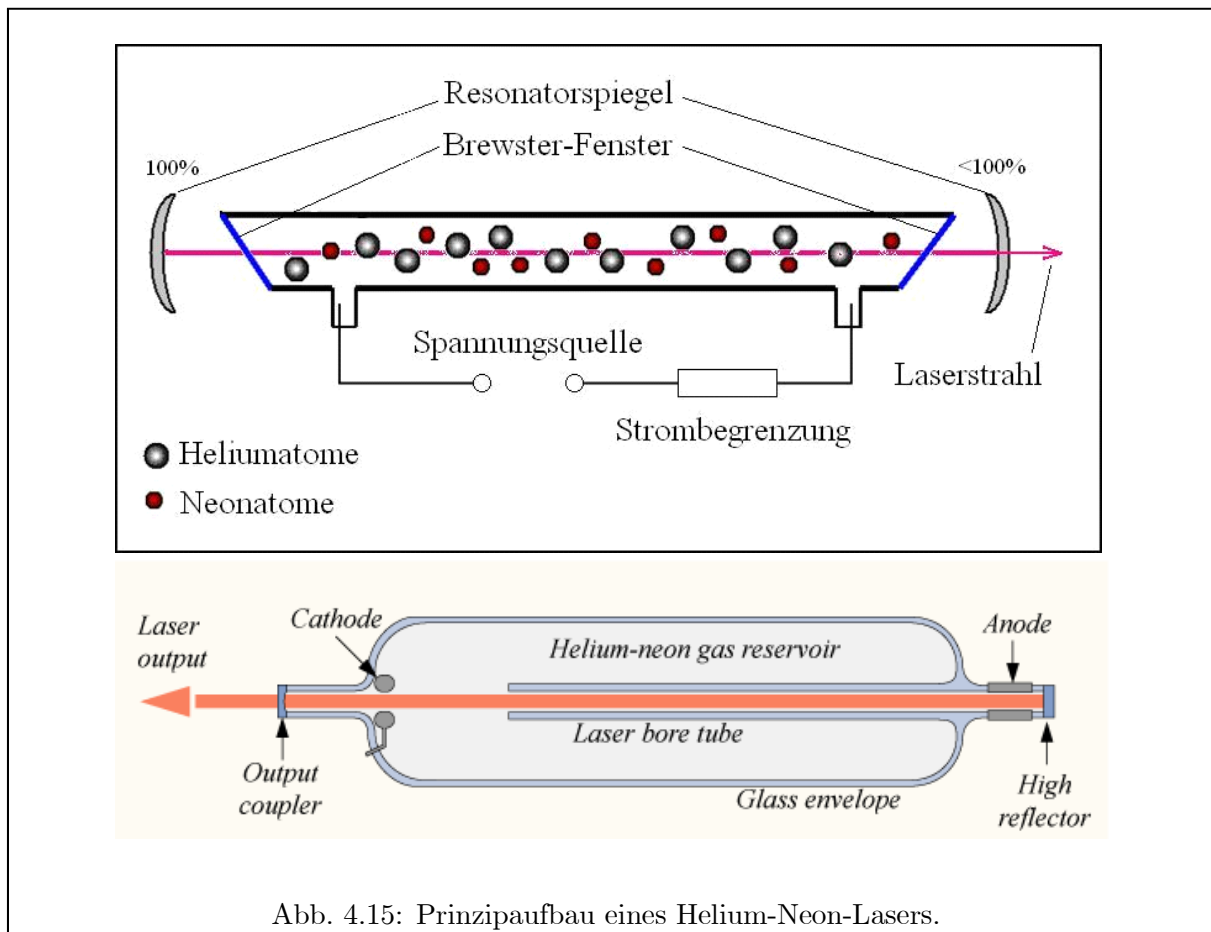
durch Elektronenstöße teilweise wieder besetzt, was zu einer Verlängerung der effektiven Lebensdauer $\tau_2 \geq 20$ ns des unteren Laserniveaus führt. Die $3s$ -Niveaus gehen schließlich durch Wandstöße in den Grundzustand über.

Abbildung 4.15 zeigt den Aufbau eines Helium-Neon-Lasers. Der Durchmesser der Glaskapillare beträgt in der Regel nur etwa 1 mm bei einer Länge von mindestens 10 cm. Bei Vergrößerung des Durchmessers sinkt der Wirkungsgrad, da weniger Wandstöße zur Entvölkerung des $3s$ -Niveaus auftreten. Im HeNe-Laser wird der Entladungsstrom in der Kapillare durch einen Vorwiderstand auf einen Strom I von einigen mA begrenzt. In einfachen Aufbauten wird die Entladungsröhre direkt durch Spiegel abgeschlossen, die den Laserresonator bilden. Sollen zusätzliche optische Elemente in den Resonator eingebracht oder dessen Länge geändert werden, wird das Entladungsrohr durch Brewsterfenster abgeschlossen, um zumindest für eine Polarisationsrichtung die Reflexionsverluste zu minimieren. Der optische Resonator wird dann durch zwei justierbare Spiegel gebildet, die in einem stabilen Rahmen befestigt sind.

4.2.2 Edelgas-Ionen-Laser

Diese Laser arbeiten im Dauerstrichbetrieb (cw = continuous wave). Das Verstärkungsmedium eines Argon- bzw. Krypton-Ionenlasers besteht aus dem entsprechenden Edelgas in dem bei einem Druck von 0.01 - 0.1 mbar eine Plasmaentladung mit Entladungsströmen von bis zu 60 A brennt. Durch sukzessive Kollisionen mit den Elektronen werden die Edelgasatome ionisiert und angeregte ionische Zustände bevölkert.

Das vereinfachte Niveauschema ist in Abb. 4.16 dargestellt. Während Ar^+ -Laser im blau-



grünen Bereich und im nahen ultravioletten Lasertätigkeit zeigen, liegen die Wellenlängen des Kr^+ -Lasers vorwiegend im roten Bereich. Beim Ar^+ -Laser sind im Multiline-Betrieb 2 bis 100 W (1 bis 20 W für Kr^+) erreichbar, während für Einzellinien maximal 10 bis 15 Watt erzielt werden können (Ar^+ : 2 W @ 363 nm, 15 W @ 488 nm, 14 W @ 514 nm, Kr^+ 10 W @ 647 nm).

Der Ar^+ -Laser hat in der Spektroskopie eine sehr große Bedeutung als Pumplichtquelle für Farbstoff- und Titan-Saphirlaser erlangt. Darüberhinaus wird er in der Medizin z.B. in der Augen Chirurgie eingesetzt; auch Disco-Laser sind häufig Ionen-Laser.

Nachteile der Ionen-Laser sind ihre geringen Konversionseffizienzen die im Promillebereich liegt (bspw. 10 W Laserlicht bei etwa 10 kW elektrischer Leistung) und der große technologische Aufwand, der durch die hohen Temperaturen im Plasma (ca. 5000°C) bedingt ist. Das Entladungsrohr und die Anode müssen gekühlt und hitzebeständige Materialien (Graphit, BeO und Metallkeramik) eingesetzt werden. Abb. 4.16 zeigt einen Querschnitt durch das typischerweise 0,5 bis 1 m lange Plasmarohr. Die inneren Bohrungen des Plasmarohres werden durch widerstandsfähige Wolframscheiben geschützt. Diese sind in Kupferscheiben eingesetzt, die für einen schnellen Abtransport der Wärme sorgen. Axiale Magnetfelder sorgen für eine Einschnürung des Gasplasmas um die Leistung durch die hohen Stromdichten zu verbessern und die Wände vor Abtragung zu schützen. Die Leistung ist über den Entladungsstrom des Plasmas regelbar. Da die Edelgasionen zur Kathode diffundieren, muss das Gas zurückgeführt werden, damit die Plasmaröhre gleichmäßig mit Ar befüllt bleibt. Dies geschieht durch Löcher in den Kupferscheiben in denen der Ausgleichsstrom zurückfließen kann. Durch Implantation der Edelgasionen in die Behälterwand wird das Edelgas im Laufe der Zeit aufgebraucht. Deshalb sind

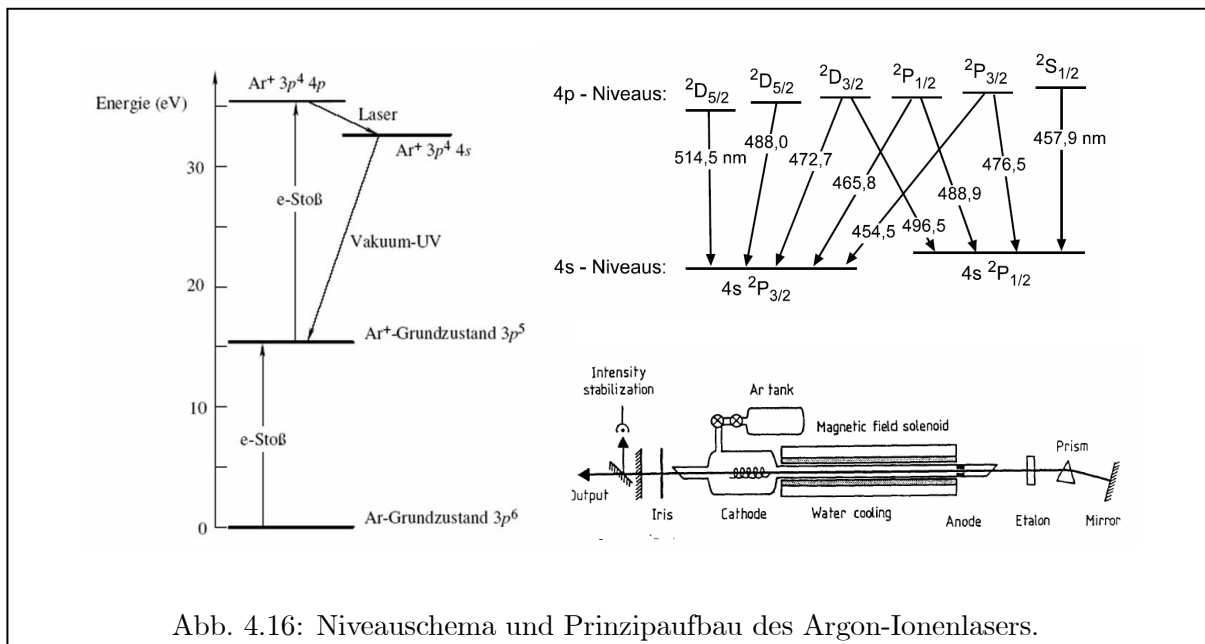


Abb. 4.16: Niveauschema und Prinzipaufbau des Argon-Ionenlasers.

die kommerziellen Ionenlaser mit einem Reservoir ausgestattet, aus dem das Edelgas bei Bedarf automatisch nachgefüllt wird. Die ungenutzte elektrische Leistung wird überwiegend in Wärme umgesetzt und muss durch eine aufwändige Wasserkühlung wieder abtransportiert werden. Aus diesen Gründen werden die Ionenlaser zunehmend durch frequenzverdoppelte Festkörperlaser (Nd:YAG) ersetzt. Falls Pumplicht im UV Bereich benötigt wird, sind die Argon-Ionenlaser allerdings bis heute konkurrenzlos.

In Abbildung 4.17 ist die Frequenz- und modenselektion in einem Argon-Ionenlaser veranschaulicht. Zur groben Frequenzkontrolle dient ein *Prisma*. Damit wird eine der zahlreichen in Abbildung 4.16 gezeigten Übergänge ausgewählt und der Laser läuft im "Einzel-Linien" (Single-Line) -Betrieb. Wird das Prisma aus dem Resonator entfernt, last der Argon-Ionenlaser auf allen Linien für die die Verstärkung ausreichend ist. Man spricht dann vom *Multi-Line-Betrieb* (*Viellinienbetrieb*). Wie man im unteren Teil der Abbildung 4.17 sehen kann, überdeckt auch das Verstärkungsprofil mit Prisma immer noch zahlreiche longitudinale Moden des Resonators. Um gezielt eine Mode des Resonators anschwingen zu lassen und damit single-frequency Operation zu erreichen, verwendet man zusätzlich ein Fabry-Perot Etalon (siehe Exkurs), dessen freier Spektralbereich FSR ausreichend groß ist, um eine einzelne longitudinale Mode im Verstärkungsprofil auszuwählen.

4.2.3 CO₂-Laser

Kohlendioxid (CO₂) ist das wichtigste Lasermedium, das für das *mittlere Infrarot* ($\lambda \approx 10\mu\text{m}$) zur Verfügung steht. Dieser Wellenlängenbereich entspricht Übergangsenergien von ca. 0.1eV, wie sie typisch für Schwingungsspektren leichterer Moleküle sind. CO₂ ist ein lineares Molekül mit dem Kohlenstoffatom in der Mitte. Es hat demnach 3 Normalschwingungen

1. die *symmetrische Streckschwingung* mit der Quantenzahl v_s
2. die *Knickschwingung* mit der Quantenzahl v_k
3. die *antisymmetrische Streckschwingung* mit der Quantenzahl v_a

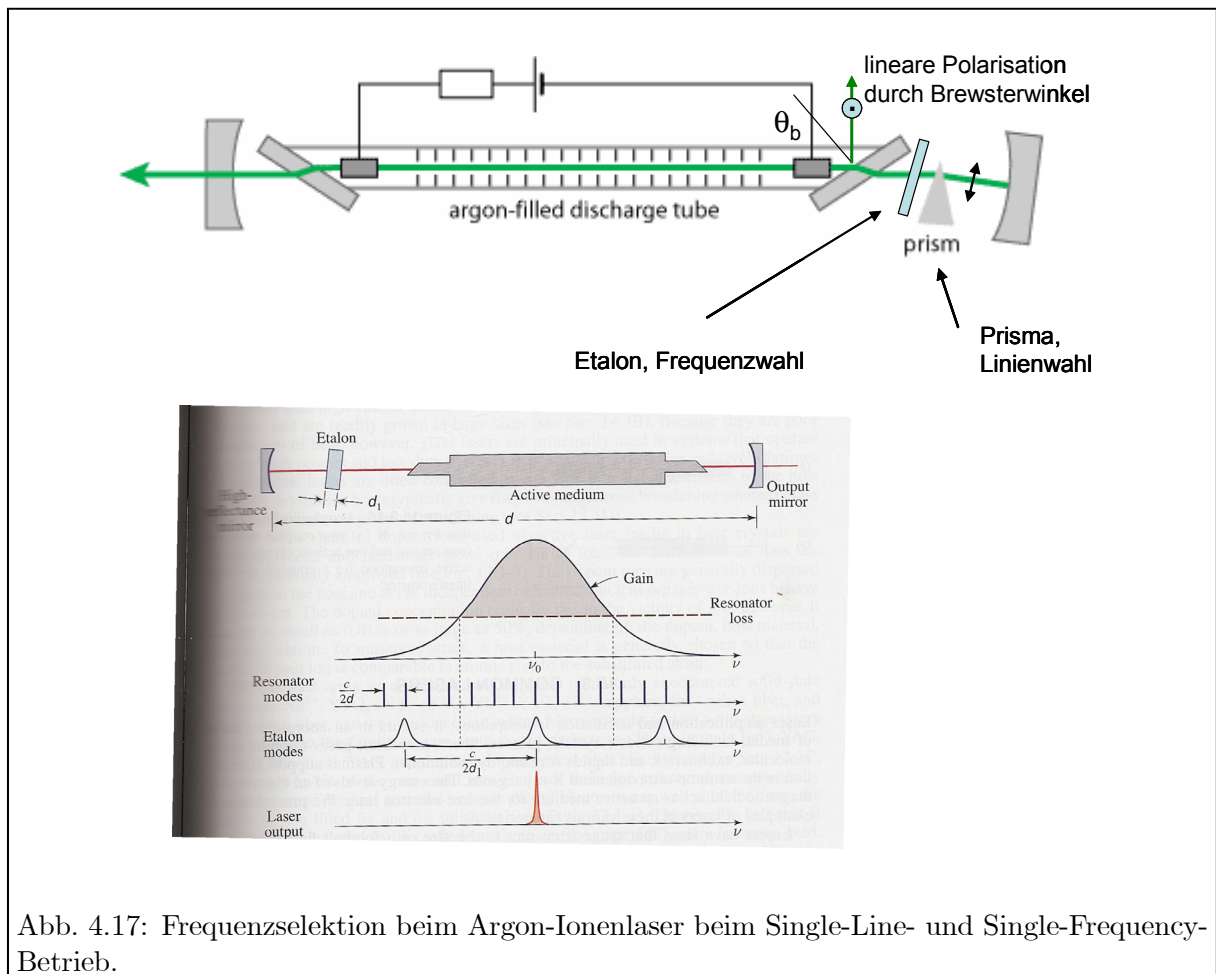


Abb. 4.17: Frequenzselektion beim Argon-Ionenlaser beim Single-Line- und Single-Frequency-Betrieb.

Man charakterisiert den vibratorischen Anregungszustand durch Angabe der drei Quantenzahlen (v_s, v_k, v_a). Die Frequenzen der Normalschwingungen sind in der Reihenfolge $\omega_k < \omega_s < \omega_a$ gestaffelt. Das Termschema in Abbildung 4.19. gibt einen Überblick über den Anregungs-, Laser- und Zerfallsmechanismus. Es handelt sich um einen *Dreinevelaser* mit direktem Pumpen in das obere Laserniveau. Ähnlich wie beim Helium-Neon-Laser benutzt man hier die gezielte Population eines höher angeregten Zustands durch resonante *Stöße zweiter Art* mit einem Reservoir metastabiler Stickstoffmoleküle (N_2) im Anregungszustand $v=1$. (Der Zustand ist deswegen metastabil, weil die Schwingung eines symmetrischen, zweiatomigen Moleküls kein elektrisches Dipolmoment hat). Die Anregung geschieht durch eine *Gasentladung*. Eine Inversion der unteren Laserniveaus des CO_2 (100) und (020) erreicht man durch Zugabe von *Helium*, das diese Zustände durch Stoßrelaxation schnell depopuliert. So entstehen Gruppen von Laserlinien um die Zentralwellenlängen $\lambda_1 = 10,6\mu m$ und $\lambda_1 = 9,6\mu m$. Beide sind noch in eine Vielzahl von Rotationsübergängen aufgespalten.

Der CO_2 -Laser hat als Leistungslaser große technische Bedeutung gewonnen. Das liegt an folgenden Vorzügen:

1. einfacher zuverlässiger Aufbau
2. hoher Wirkungsgrad mit $\eta_{el \rightarrow opt} \approx 30\%$
3. hohe kontinuierliche Leistung bis $P \approx 100kW$.

EXKURS: Etalon

Das Transmissionsspektrum eines Etalons ergibt sich aus der phasenrichtigen Überlagerung aller Teilwellen und entspricht einer Airy-Funktion. Der freie Spektralbereich ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta\nu_{FSR} &= \frac{c}{2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \\ &\approx \frac{c}{2dn} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right).\end{aligned}\quad (4.36)$$

Durch Verkippung des Etalons um den Winkel α werden die Transmissionsmaxima zu kürzeren Wellenlängen verschoben. Bei stärkerem Verkippen überlappen sich jedoch die Teilstrahlen aufgrund des seitlichen Versatzes nicht mehr vollständig, und die Finesse nimmt ab. Dieses *Auswandern* (*Walk-off*) beschränkt die Verkippung auf kleine Winkel.

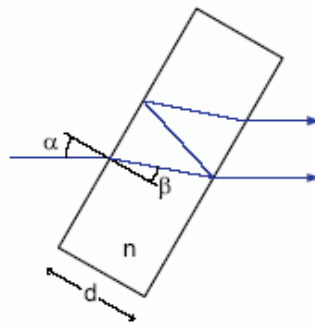


Abb. 4.18: Etalon zur Frequenzselektion.

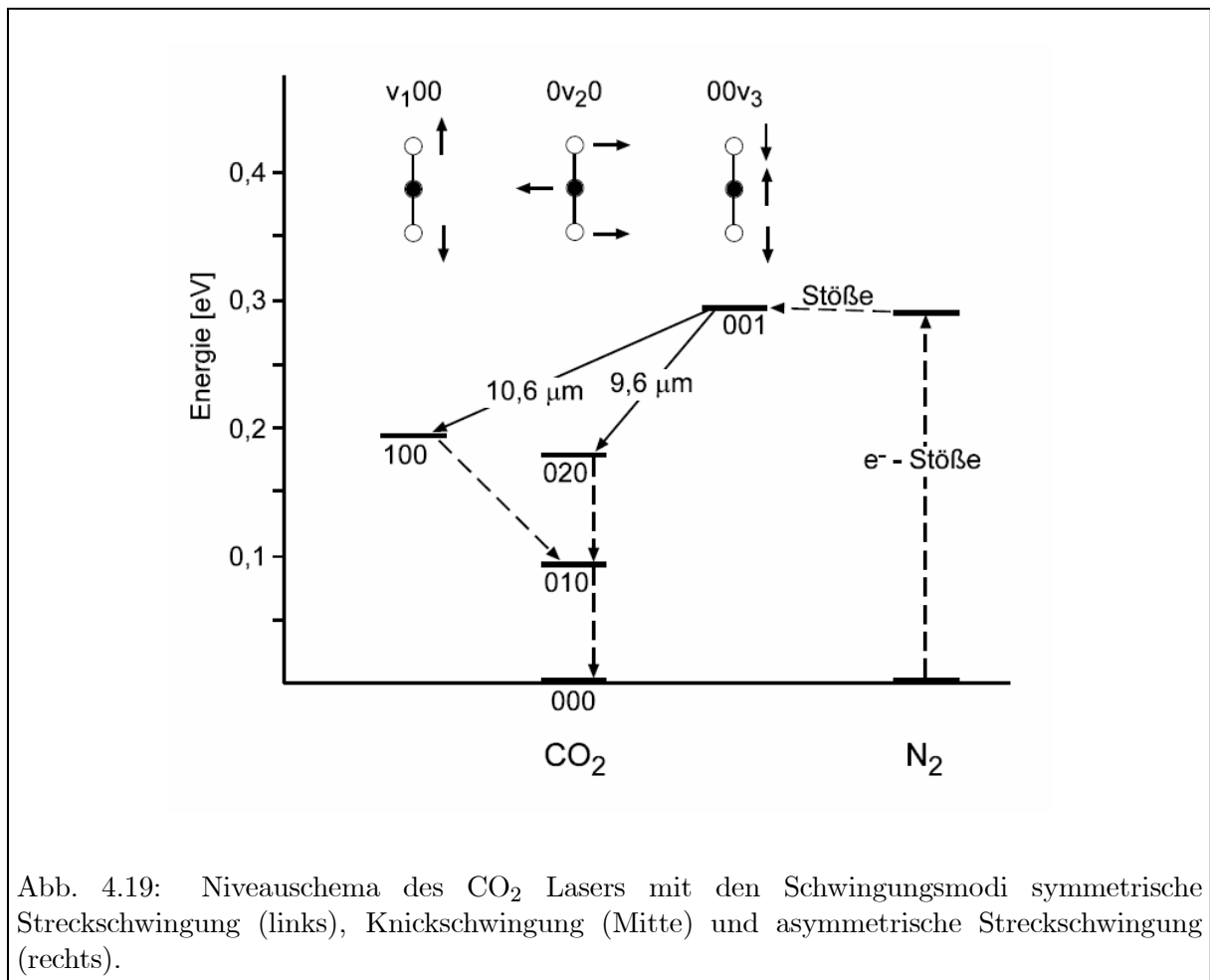


Abb. 4.19: Niveauschema des CO₂ Lasers mit den Schwingungsmodi symmetrische Streckschwingung (links), Knickschwingung (Mitte) und asymmetrische Streckschwingung (rechts).

4. hohe Pulsenergien bis $E_{puls} \approx 10 \text{ kJ}$ und Pulsleistungen $P_{puls} \approx 1 \text{ TW}$

Entsprechend den verschiedenen Anwendungen in Medizin und Technik als Schneid- und Schweißwerkzeug etc. gibt es viele verschiedene Konstruktionstypen von CO₂-Lasern.

4.3 Flüssigkeitslaser - Der Farbstofflaser

4.3.1 Organische Farbstoffe

Bei gesättigten Kohlenwasserstoffen liegen die Absorptionskanten bei Wellenlängen unterhalb von 200 nm; sie sind also ausserordentlich transparent. Der Grund liegt in der sehr festen Bindung der Valenzelektronen, die alle in sogenannten σ -Zuständen gebunden sind. Wie beim freien Atom die s -Zustände die tiefsten Eigenwerte besitzen, weil sie aufgrund ihres Bahndrehimpulses $\ell = 0$ dem Kern am nächsten sind, so sind es bei den Molekülen die σ -Zustände, deren Bahndrehimpulskomponente entlang der Kernverbindungsachse gleich Null ist. Man beachte, dass das im Molekül gebundene Elektron sich nicht mehr in einem radialsymmetrischen Potential bewegt und daher sein Bahndrehimpuls keine Erhaltungsgröße der Bewegung und nicht quantisiert ist. Bei einem zweiatomigen Molekül herrscht aber noch eine *axiale Symmetrie entlang der Kernverbindungsachse*. Das hat zur Folge, dass wenigstens die Bahndrehimpulskomponente entlang dieser Achse noch eine Erhaltungsgröße und daher quantisiert ist.

Für ihre *Quantenzahlen* $\ell_z = 0, 1, 2, \dots$ wählt man in Analogie zur Terminologie in der Atom-spektroskopie die Bezeichnungen $\sigma, \pi, \delta, \dots$. Die kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen die Drehimpulsprojektion eines einzelnen Valenzelektrons; die Summe aller Valenzelektronen wird mit großen griechischen Buchstaben $\Sigma, \Pi, \Delta, \dots$ bezeichnet; auch dies in Analogie zur atomspektroskopischen Terminologie. Abbildung 4.20. zeigt schematisch den Verlauf der Wellenfunktionen als Funktion des Abstands r von der Kernverbindungsachse für die niedrigsten Drehimpulszustände. Auch hier ist klar, dass die σ -Funktion den Atomkernen - und damit den Zentren des Potentials - am nächsten ist und deswegen die festeste Bindung hat.

Größere organische Moleküle, wie etwa Ethan (C_2H_6) sind natürlich nicht als lineare Ketten aufgebaut, sondern haben eine kompliziertere räumliche Struktur, die keine rotationssymmetrische Achse mehr aufweist. Daher ist auch die obige Einteilung nach $\sigma, \pi, \delta, \dots$ nicht mehr streng gültig. Vielmehr genügen die Wellenfunktionen der Valenzelektronen anderen Symmetriegruppen, nämlich den aus der Kristallographie her bekannten *Punktsymmetriegruppen*. Dennoch kann man gerade bei kovalenten Bindungen, wie sie in der organischen Chemie in der Regel vorliegen, noch wenigstens lokal, d.h. zum Beispiel in der Umgebung der Verbindungsachse zwischen einem C- und einem H-Atom, noch näherungsweise von einer axialen Symmetrie sprechen. Daher ist das Modell der σ - und π -Bindung noch sehr tragfähig.

Die *gesättigten Kohlenwasserstoffe* sind nun dadurch gekennzeichnet, dass auf der Verbindungslinie zwischen jeder C-C- und C-H-Bindung genau ein Elektronenpaar im σ -Zustand und entgegengesetztem Spin gebunden ist. Damit sind die σ -Bahnen besetzt. Ein weiteres Elektronenpaar, das in der bekannten Doppelbindung an eine solche Kernverbindungsachse fixiert ist, muss daher in π -Bahnen ausweichen. Diese π -Elektronen sind

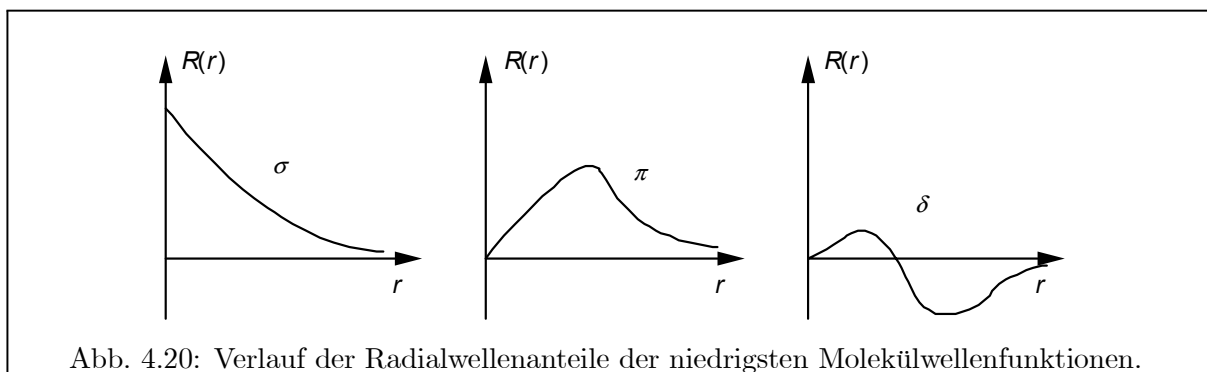
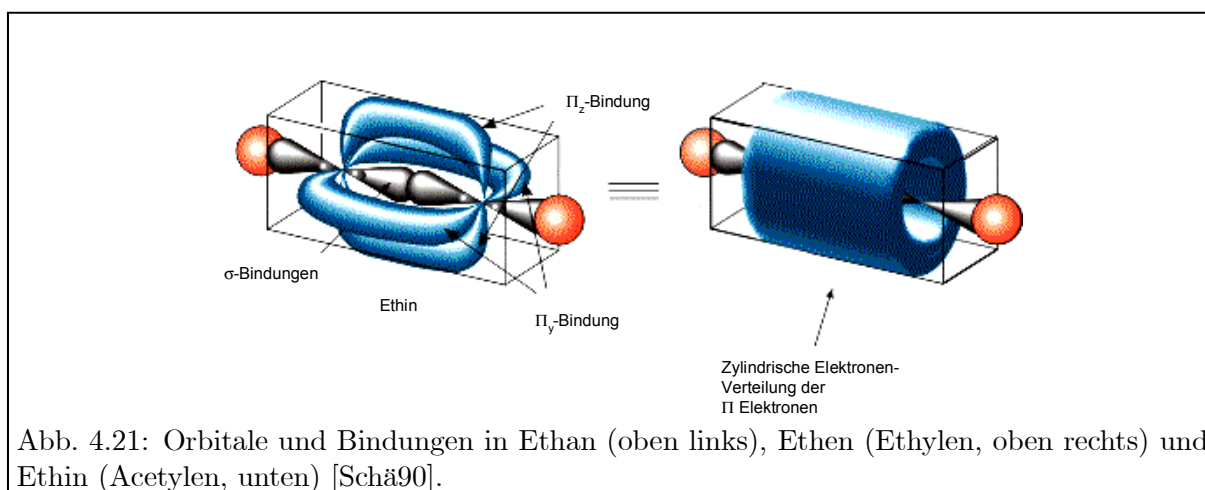


Abb. 4.20: Verlauf der Radialwellenanteile der niedrigsten Molekülwellenfunktionen.



wesentlich lockerer gebunden. Daher beruhen alle organischen Farbstoffe, die schon im sichtbaren Licht absorbieren und fluoreszieren, auf *Doppelbindungen*. 4.21. zeigt schematisch die Orbitale von σ - und π -Elektronen im Ethan, Ethen und Ethin. Die σ -Elektronen bilden kleine Keulen auf der jeweiligen Kernverbindungsachse, während die Orbitale der π -Elektronen größere Zigarren im deutlichen Abstand von der Kernverbindungsachse bilden

Eine einzige Doppelbindung, wie etwa beim Ethen, genügt allerdings nicht, um das Spektrum schon ins Sichtbare zu verschieben. Vielmehr braucht man Ketten *konjugierter Doppelbindungen*, wie sie etwa bei den Cyaninen vorliegen (vgl. 4.22). Auch die Doppelbindungen in den Benzolringen aromatischer Kohlenwasserstoffe geben Anlass zu Farbstoffen.

Da die π -Elektronen einen größeren Abstand von der Kernverbindungsachse haben, sind sie nicht mehr so ausschliesslich an diese eine bestimmte Achse gebunden, sondern erstrecken ihre Wellenfunktionen über die gesamte Länge der konjugierten Kette. Im genannten Beispiel der Cyanine bildet das Potential für die π -Elektronen einen Topf zwischen den Kettenenden, der verglichen zum Ionisationsniveau recht tief, aber im Inneren relativ flach ist mit nur schwach entwickelten Minima in der Umgebung der Kohlenstoffkerne. Diese Minima sind nicht tief genug, um die Wellenfunktion der π -Elektronen darin zu lokalisieren. Vielmehr verteilt sie sich auf die gesamte Kettenlänge. Daher ist es statthaft, das Potential entlang der Kette durch ein *Kastenpotential* zu approximieren. Die π -Elektronen nehmen dann in dieser Koordinate die Wellenfunktionen des Reflexionsoszillators an, d.h. es sind sinusförmige stehende Wellen mit je einem Knoten an jedem Ende und den Wellenlängen

$$\lambda_n \frac{n}{2} = L \quad (4.37)$$

Daraus folgt für die *Energie*, die sich in diesem Kastenpotential auf die kinetische Energie beschränkt:

$$E_n = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h/\lambda}{3m_e} = \frac{h^2 n^2}{8m_e L^2} \quad (4.38)$$

Nach dem Pauli-Prinzip wird jeder Zustand mit einem Elektronenpärchen mit abgesättigtem Spin besetzt. Seien also n Zustände mit insgesamt $2n$ Elektronen besetzt, so beträgt die *Anregungsenergie* in den nächsten freien Zustand

$$E_{n+1} - E_n = \frac{(2n+1)h^2}{8m_e L^2} = \frac{(N+1)h^2}{8m_e L^2} = \frac{hc}{\lambda} \quad (4.39)$$

wobei N die Anzahl der π -Elektronen und damit auch die Anzahl der Kettenglieder ist. Da aber auch die Länge L der Kette annähernd proportional zu der Anzahl ihrer Glieder wächst ($L \approx 1,4$

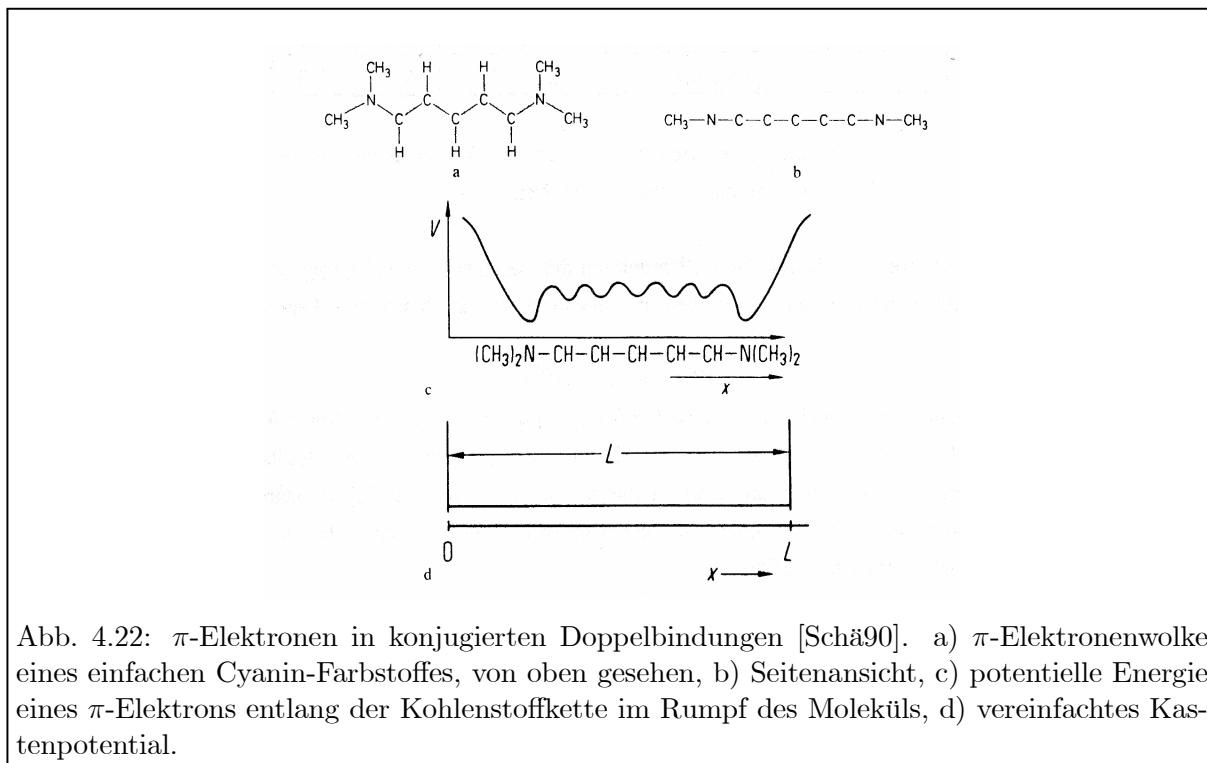


Tabelle 4.3: Vergleich von berechneten und gemessenen Wellenlängen für Absorptionskanten

N	4	6	8	10
λ [nm], berechnet nach (4.39)	395	521	649	776
λ [nm], gemessen	422	556	652	760

$\text{\AA}/\text{Glieder}$), wächst demnach die Wellenlänge der Absorptionskante entsprechend (4.39) annähernd proportional zur Zahl der Kettenglieder in konjugierter Doppelbindung. Tabelle 4.3. vergleicht die nach (4.39) berechneten mit den experimentellen Absorptionskanten. Die Übereinstimmung ist verblüffend gut, vor allem für die längeren Ketten.

Die große lineare Ausdehnung der Wellenfunktion führt auch zu großen *Matrixelementen für die Dipolstrahlung* und somit auch zu großen spontanen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$10^7 \text{ s}^{-1} \leq \Gamma_{\text{spont}} \leq 10^8 \text{ s}^{-1} \quad (4.40)$$

die bei gegebener Wellenlänge ca. eine Größenordnung über denjenigen freier Atome liegen. Man beachte allerdings, dass es sich hierbei um einen eindimensionalen Oszillator handelt. Kristallisiert man also die Farbstoffmoleküle mit ihren Ketten parallel zueinander aus, so absorbieren sie nur eine Komponente des elektrischen Feldvektors. Darauf beruht die Wirkung der organischen Polarisationsfilter.

4.3.2 Bandenstruktur und Relaxation

Da die π -Elektronenpaare im Grundzustand ihren Spin zu Null koppeln, also einen *Singulettzustand* (S_0 -Band) bilden, führt auch die optische Dipolanregung dank des Interkombinationsverbotes wiederum zu einem *Singulettzustand* (S_1 -Band). Der zur gleichen Elektronenkonfiguration

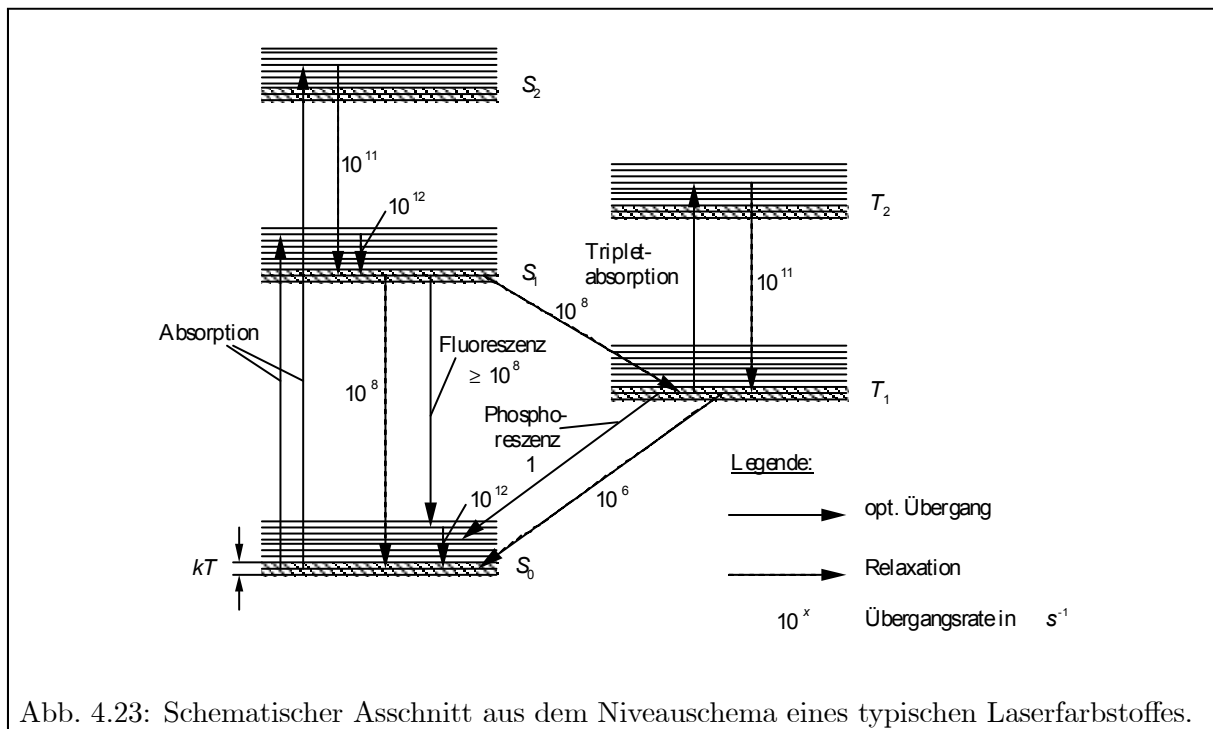


Abb. 4.23: Schematischer Asschnitt aus dem Niveauschema eines typischen Laserfarbstoffes.

gehörende Triplettzustand mit Spin $S = 1$, der das T_1 -Band bildet, liegt analog zu den Atomsppektren in der Energie tiefer als das zugehörige S_1 -Band (vgl. Abb. 4.23).

Da organische Moleküle aus Elementen mit kleiner Ordnungszahl aufgebaut sind, gilt das *Interkombinationsverbot* sehr streng - wie auch bei leichten Atomen. So beträgt die partielle Lebensdauer für den Strahlungszerfall aus dem T_1 -Band in das S_0 -Band ca. 1 s, verglichen mit weniger als 10^{-8} s für den erlaubten Übergang. Beim schnellen Strahlungszerfall innerhalb des Singulettsystems spricht man von Fluoreszenz, beim langsamen Interkombinationsübergang von Phosphoreszenz. Die Lasertätigkeit beschränkt sich immer auf den schnellen Zweig.

Große Moleküle verfügen über ein riesiges Spektrum von *longitudinalen und Knickschwingungen*, deren Anregungsenergien im Infraroten liegen. Dazu kommen noch *Rotationsanregungen* im Mikrowellenbereich. Da sich alle diese Freiheitsgrade superponieren, entsteht ein nahezu *kontinuierliches Band* von Schwingungs- und Rotationszuständen oberhalb des Bandenkopfes eines jeden elektronisch angeregten Niveaus. Diese Bänder besitzen eine Breite von einigen 0,1 eV. Sind die Farbstoffe in einer Flüssigkeit gelöst, so *relaxieren* die Schwingungs- und Rotationsanregungen des Moleküls untereinander mit Zeitkonstanten von etwa 10^{-12} s aufgrund der zahlreichen Stöße mit dem Lösungsmittel.

Im einzelnen ergeben sich aus dieser Situation folgende Konsequenzen:

a) Bei kleinen, freien Molekülen müssen beim optischen Übergang zwischen zwei elektronischen Anregungszuständen normalerweise auch Auswahlregeln bezüglich der Änderung der Schwingungs- und Rotationsquantenzahl beachtet werden; z.B. dürfen sich letztere um nicht mehr als eine Einheit ändern. Diese Übergangsverbote werden durch die schnellen Relaxationen aufgehoben, die alle Schwingungs- und Rotationszustände miteinander koppeln. Deswegen liegen nicht nur die Zustände dicht, sondern auch das Spektrum der auftretenden Linien füllt das ganze Band quasi kontinuierlich aus. Das gilt übrigens nicht nur für gelöste, sondern mit leichten Einschränkungen auch für große, freie Farbstoffmoleküle im gasförmigen Zustand. Das liegt daran, dass ein solches großes Molekül schon über eine so riesige Anzahl miteinander verkoppelter Freiheitsgrade verfügt, dass es schon selbst ein kleines thermodynamisches System darstellt, in dem

die statistische Physik gilt. Erst wenn man Farbstoffe bei sehr tiefen Temperaturen in organische Gläser oder feste Edelgasmatrizen einfriert, werden auch so viele Freiheitsgrade eingefroren, dass man im optischen Spektrum wenigstens die energiereichsten inneren Anregungen (das sind die longitudinalen Streckenschwingungen) auflöst.

b) Innerhalb von 10^{-12} s nach einer Anregung in energiereichere Zonen einer Bande *relaxiert* das Molekül *zum Bandenkopf* herunter bzw. in eine Umgebung von $\delta E \approx kT$ oberhalb des Bandenkopfes und bildet dort eine *Boltzmannverteilung*. Optische Absorption und spontane Emission erfolgen also immer aus der Umgebung des Bandenkopfes.

c) Die Vibrationen ändern den Potentialtopf der delokalisierten π -Elektronen. Daher sind die Wellenfunktionen der *Vibrations- und der Elektronenbewegungen* nicht separierbar sondern miteinander gemischt. Anschaulich gesprochen sind beide Bewegungen aneinander *gekoppelt*. Das führt nun dazu, dass die elektronische Anregungsenergie aus höheren Bändern nicht nur durch Strahlung sondern auch per Relaxation abgeführt werden kann. Die Relaxation konkurriert daher mit der Fluoreszenz, und die Güte eines Farbstoffes wird an dem Verhältnis aus Fluoreszenzausbeute und Relaxationsrate gemessen. Bei guten Laserfarbstoffen, wie etwa Rhodamin-6G beträgt die *Fluoreszenzausbeute* aus dem S_1 -Band ca. 90%. Die Kopplung der π -Elektronen an die Normalschwingungen des Moleküls und damit an das thermische Relaxationsband ist umso stärker, je höher ihre Anregungsenergie ist. Daher ist die direkte Fluoreszenz aus den höheren Banden S_2 , T_2 usw. durch Relaxationen sehr stark unterdrückt, die die Moleküle innerhalb von 10^{-11} s zu den jeweiligen Bandenköpfen der ersten Anregungsstufen S_1 , T_1 führen. Aus dem gleichen Grund ist auch die direkte Absorption von S_0 nach S_2 erlaubt, so dass man Farbstoffe über alle angeregten S-Bänder pumpen kann. Die höheren Bänder liegen in der Regel im UV-Bereich. Sie sind auch schon mehr oder weniger reaktiv, so dass sich der *Farbstoff bei längerer UV-Einstrahlung photochemisch zersetzt*. Hierdurch (sowie durch Verunreinigungen des Lösungsmittels) wird in der Regel die Lebensdauer eines Laserfarbstoffes begrenzt.

d) Die *Relaxation* bricht auch das *Interkombinationsverbot* zwischen Singulett und Triplettssystem, zum Beispiel dadurch, dass in einem Stoß nicht nur Anregungsenergie sondern auch der Elektronenspin auf ein anderes Molekül übertragen wird (Stöße zweiter Art). Diese Relaxationen sind deutlich langsamer als diejenigen innerhalb einer Bande; dennoch konkurriert die Relaxation von S_1 nach T_1 beträchtlich mit dem Zerfall nach S_0 . Der Zerfall von T_1 nach S_0 erfolgt ganz überwiegend durch Relaxationen (reinen Phosphoreszenzzerfall mit Lebensdauern von Sekunden und mehr beobachtet man nur in ganz bestimmten organischen Kristallen). Das Verhältnis der Relaxationsraten in der Kaskade $S_1 \rightarrow T_1 \rightarrow S_0$ zeigt, dass sich im optischen Pumpzyklus der T_1 -Zustand aufgrund seiner größeren Lebensdauer anreichert. Das ist unangenehm für den Laserbetrieb, da die Absorption vom T_1 - zum T_2 -Band in den Bereich der Laserwellenlänge fällt und somit den Laser bedämpft. Ohne zusätzliche Maßnahmen, die die Triplettmoleküle auf irgend eine Art und Weise beseitigen (siehe unten) setzt daher der Laservorgang schon nach Zeiten von nur einer Mikrosekunde und weniger aus.

e) *Stokesverschiebung*: Die Absorption führt vom Boden des S_0 -Bandes in das ganze S_1 -Band hinein und darüber hinaus in die höheren S-Bänder. Die Fluoreszenz erfolgt dagegen aus dem Bandenkopf von S_1 in das ganze Band S_0 . Aus dem in Abb. 4.23 gezeigten Termschema ist daher evident, dass das Emissionsspektrum gegenüber dem Absorptionsspektrum rotverschoben ist. Die beiden Spektren überlappen sich in einem sehr schmalen Bereich in der Nähe der Absorptionskante mit ihren jeweiligen steilen Flanken, deren Breite von der Größenordnung kT ist, bestimmt durch die Boltzmannverteilung an den Bandenköpfen. Da im übrigen die Bandenstruktur in S_0 und S_1 ähnlich ist, sind Absorptions- und Emissionsspektrum mehr oder weniger spiegelbildlich (s. Abb. 4.24.).

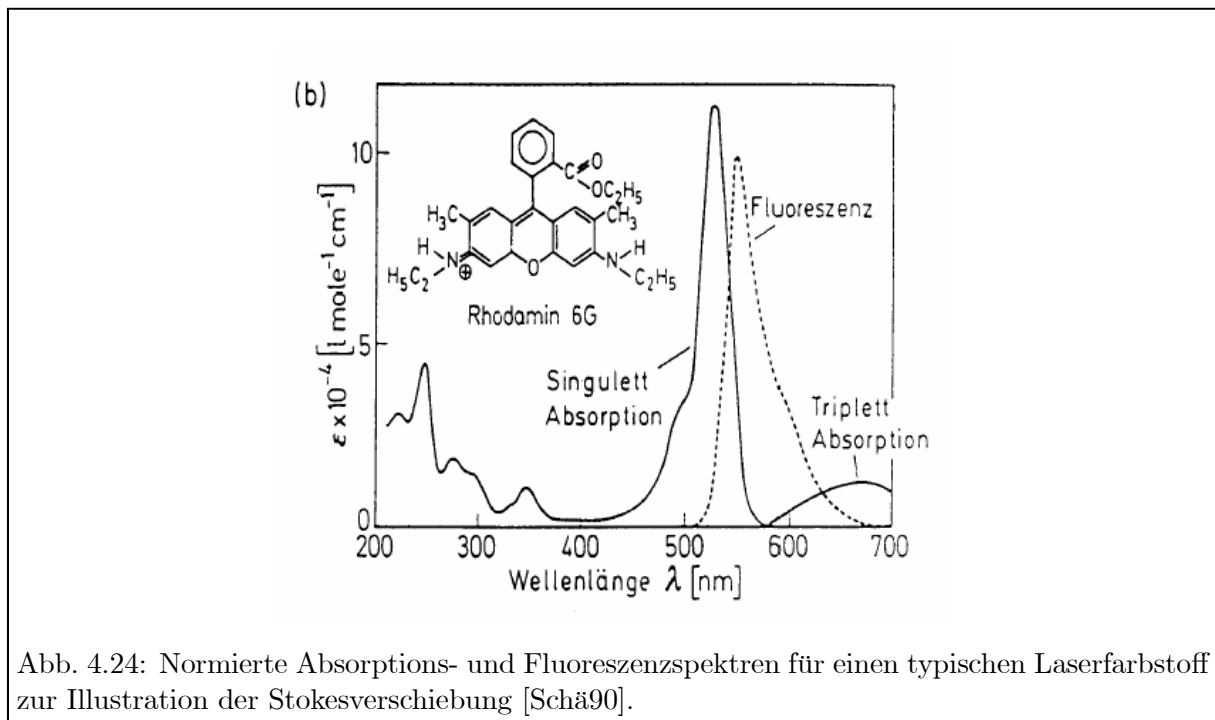


Abb. 4.24: Normierte Absorptions- und Fluoreszenzspektren für einen typischen Laserfarbstoff zur Illustration der Stokesverschiebung [Schä90].

4.3.3 Farbstoffe als Lasermedien

Das Singulettssystem von Farbstoffen bietet ideale Voraussetzungen zum Bau eines Vier-niveaulasers. Als Grundniveau dient der Bandenkopf des S_0 -Bandes. Als Pumpniveau steht das gesamte S_1 - und eventuell noch das S_2 -Band zur Verfügung. Es ist also sehr breit und kann dementsprechend mit breitbandigen Lichtquellen angeregt werden. Als oberes Laserniveau dient der Bandenkopf von S_1 , zu dem die angeregten Moleküle innerhalb von 10^{-12} s relaxieren. Als unteres Laserniveau steht das gesamte S_0 -Band oberhalb des Bandenkopfes zur Verfügung, das je nach Farbstoff eine Breite von 100 - 1000 Å hat. Hier ist die Inversion gegenüber S_1 durch die schnelle Relaxation zum Bandenkopf von S_0 innerhalb von 10^{-12} s garantiert. Dadurch hat das Emissionsband auch den Charakter einer homogenen Linienbreite, die Modenkopplung zu sehr kurzen Pulsen erlaubt.

Im Vergleich zu anderen Lasermedien kann man in Farbstoffen enorm hohe Verstärkungen erzielen und zwar aus folgenden Gründen:

1) Man kann *sehr hohe Farbstoffkonzentrationen* (genauer gesagt Schichtdicken) optisch pumpen, weil z.B. für die Anregung mit breitbandigem Blitzlampenlicht auch ein breites Absorptionsband zur Verfügung steht. Andererseits ist auch das Pumpen mit einem monochromatischen Laser zu einem bestimmten Punkt des S_1 -Bandes hin genauso effektiv, da die Relaxation das Molekül zum Bandenkopf von S_1 transportiert und somit eine induzierte Reemission durch den Pumplaser zurück nach S_0 ausgeschlossen bleibt. In beiden Fällen bleibt die Schicht trotz der hohen Konzentration optisch dünn; denn die Oszillatorenstärke, die sich bei einer elektronischen Anregung in einem freien Atom auf einen Frequenzbereich entsprechend der natürlichen Linienbreite oder allenfalls der Dopplerbreite konzentriert, wird hier auf das gesamte Band verteilt, so dass der *Absorptionswirkungsquerschnitt* für das einzelne Photon sehr klein wird. War er im Fall einer Spektrallinie mit natürlicher Linienbreite in der Größenordnung λ_0^2 , so schwächt er sich jetzt etwa um das Verhältnis aus natürlicher Linienbreite zur Breite des Absorptionsbandes ab. Typische Farbstoffkonzentrationen sind z.B. 10^{-3} mol/l; das entspricht etwa 10^{17} Farbstoffmolekülen pro cm^3 . Hingegen sind für die Absorption der Resonanzlinie des Natriums schon

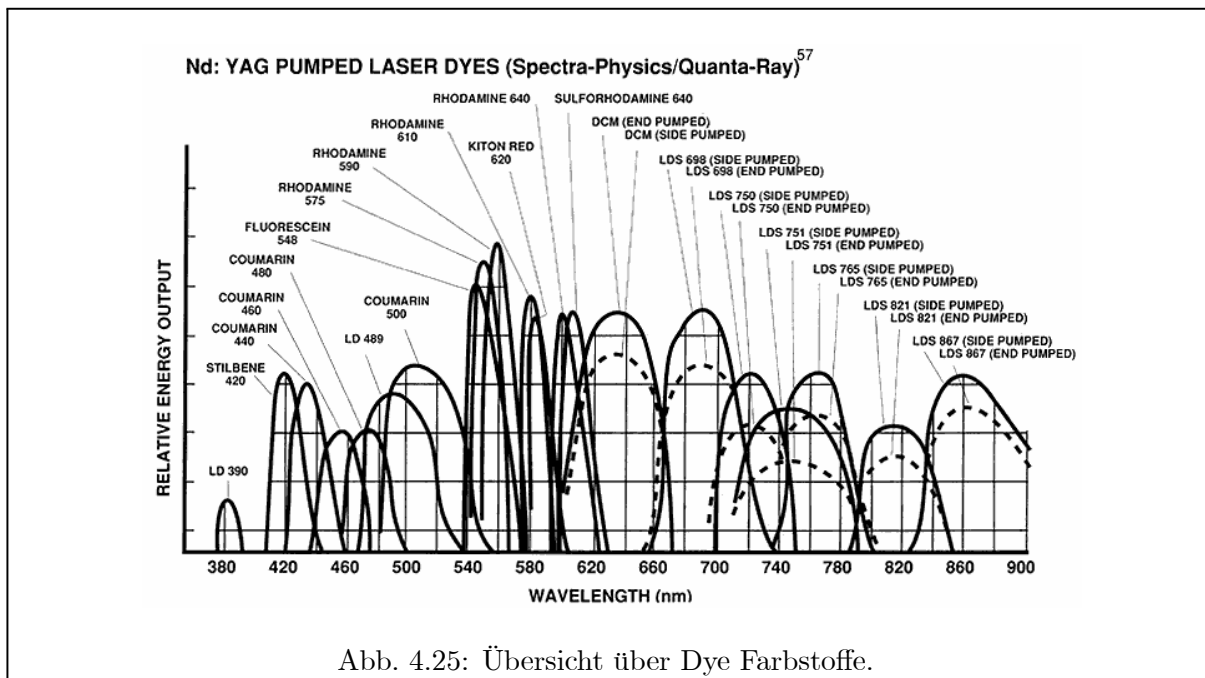


Abb. 4.25: Übersicht über Dye Farbstoffe.

Schichtdicken von einigen 10^{11} Na-Atomen/cm³ optisch dick.

2) Die *spontane Reemission* in den Grundzustand ist eine erlaubte Dipolstrahlung mit einer Rate $\Gamma \approx 10^8$ s⁻¹. Das ist der große Unterschied zum Festkörperlaser, etwa dem Rubinlaser, wo der Strahlungszerfall durch ein Übergangsverbot um etwa einen Faktor 10^5 behindert ist. Diese größere Übergangswahrscheinlichkeit kommt natürlich auch dem induzierten Laserübergang zugute, so dass die Schwellenbedingung viel schneller erreicht wird als beim Festkörperlaser. Im Grunde genommen wird der durch die große Bandbreite des Farbstofflasers bedingte Verlust an Wirkungsquerschnitt, der ja Absorption wie stimulierte Emission gleichermaßen betrifft, durch die große Dichte des Mediums kompensiert. So ist es zu verstehen, dass auf sehr kurzen Strecken *hohe Verstärkungen* erreicht werden. Volze hat 1969 systematische Verstärkungsmessungen gemacht und z.B. bei einer Pumpleistung von 350 kW/cm^2 eine Verstärkung von $V=1,02$ auf einer Länge von $5 \mu\text{m}$ gemessen. Das würde auf der Länge von 1 cm eine Verstärkung von 170 dB ergeben, also bereits weit über der Superradianzschwelle liegen. In der Tat neigen Farbstofflaser sehr leicht zur Superradianz und können keine hohen Pumpenergien speichern, mit denen man Riesenimpulse erzeugen könnte.

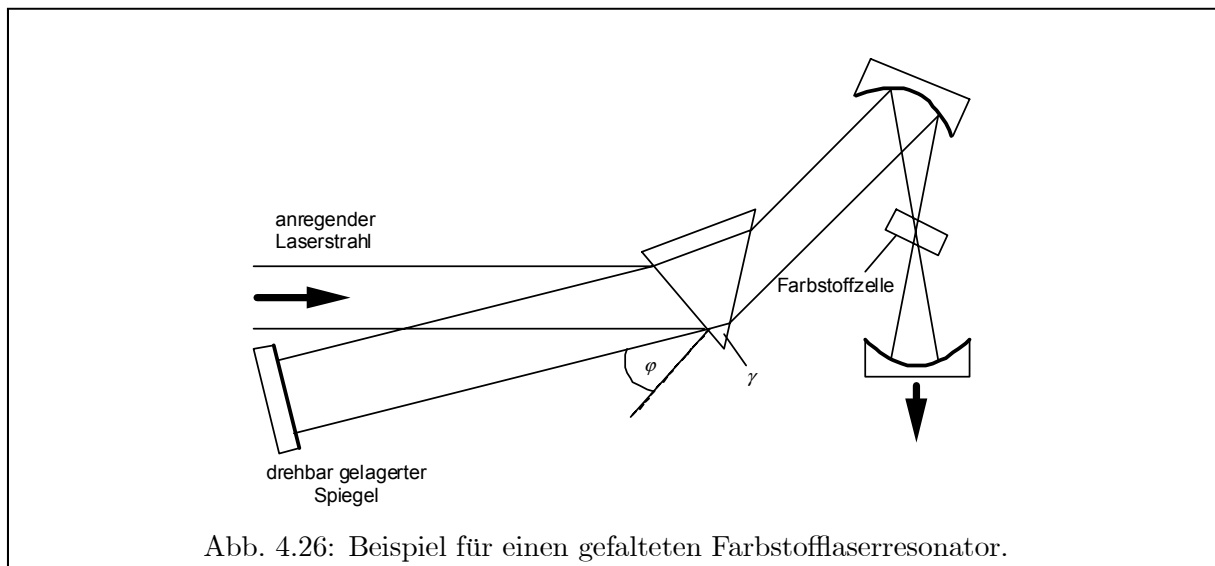
4.3.4 Farbstofflaserkonfigurationen

Abstimmbare Farbstofflaser decken heute ein Wellenlängenintervall von etwas mehr als dem sichtbaren Bereich ab:

$$370 \text{ nm} \leq \lambda \leq 900 \text{ nm}, \quad (4.41)$$

wobei ein bestimmter Farbstoff immer nur einen kleinen Bruchteil dieses Intervalls abdecken kann. Die Farbstoffe müssen also bei Übergang vom einen zum anderen Wellenlängenbereich gewechselt werden. Einen Überblick über verschiedene Farbstoffe im sichtbaren Spektrum gibt Abb. 4.25.

Beim Bau von *kontinuierlichen Farbstofflasern* steht man zunächst vor der großen Schwierigkeit, die *hohe Pumplichtintensität* im Dauerstrich aufzubringen. Das gelingt nur dadurch, dass man das Volumen des Lasermediums - oder genauer gesagt seinen Querschnitt



- extrem klein wählt, damit sich die totale Pumpleistung in Grenzen hält. Man benutzt daher als Pumpe wiederum einen kontinuierlichen Laser, z.B. einen Argon-Ionenlaser (siehe unten), der kommerziell Leistungen zwischen 1 W und 30 W erreicht, und fokussiert ihn mit einem relativ kurzbrennweitigen Spiegel ($f \approx 5\text{cm}$) auf den Farbstoff. Dabei entsteht ein Brennfleck mit einem Radius von wenigen Mikrometern, innerhalb dessen die kritische Inversion erreicht wird. Dann muß man aber auch die Taille des Lasermoden, der sich in dem Resonator des Farbstofflasers ausbilden soll, entsprechend eng wählen. Das setzt eine sehr kurze Resonatorlänge voraus, innerhalb derer man die notwendigen frequenzabstimmenden Elemente nicht mehr unterbringen könnte. Man wählt daher einen sogenannten *gefalteten Resonator* mit insgesamt mindestens drei Spiegeln, wie in Abbildung 4.26. gezeigt wird.

Zwischen den beiden kurzbrennweitigen Spiegeln ist der Mode stark fokussiert, während er auf dem Weg zum dritten, ebenen Endspiegel hin weit und wenig divergent ist. Letzteres ist vor allem für die Abstimmung wichtig; denn alle hochauflösenden Spektrometer verlangen bekanntlich einen parallelen Strahlengang. Bei dem gewählten Beispiel ist es ein *Prisma*. Die Abstimmung erfolgt durch Rotation des ebenen Endspiegels und nützt dabei die Dispersion des Prismas aus. Es wird nur diejenige Wellenlänge exakt in sich selbst reflektiert und bildet einen stabilen Lasermode aus, die senkrecht auf dem Spiegel auftrifft. Der Pumplaserstrahl, der wegen der Stokesverschiebung kurzwelliger sein muss, kann über das gleiche Prisma eingespiegelt werden, wobei man ihn wegen des größeren Brechungswinkels am Endspiegel vorbei leiten kann.

Folgende Überlegung führt uns zu einer *Abschätzung der Bandbreite* eines solchen, durch ein Prisma monochromatisierten Farbstofflasers: der zur Abstimmung benutzte, drehbare Endspiegel sei eben; dann sieht man schon aus den Gesetzen der geometrischen Optik, dass ein stabiler Mode genau dann erreicht wird, wenn die Strahltaile, die in der Farbstoffzelle liegt, genau auf diesen Spiegel abgebildet wird. Es handelt sich also um eine Variante eines hemisphärischen Resonators, der um einen dritten Spiegel erweitert ist. Der Mode habe an dieser Stelle den Durchmesser von $2w_0 \approx 0,2\text{ mm}$. Demnach beträgt der mittlere Öffnungswinkel des Modes

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{\pi w_0} \approx 2\text{ mrad} \quad (4.42)$$

bei einer Wellenlänge von 600 nm. Es ist nun plausibel, dass der Laser noch bei einer Dejustage dieses Endspiegels um einen Winkel $\Delta\varphi \approx \Delta\varphi/20$ arbeitet. Dann würde ein Lichtstrahl nach

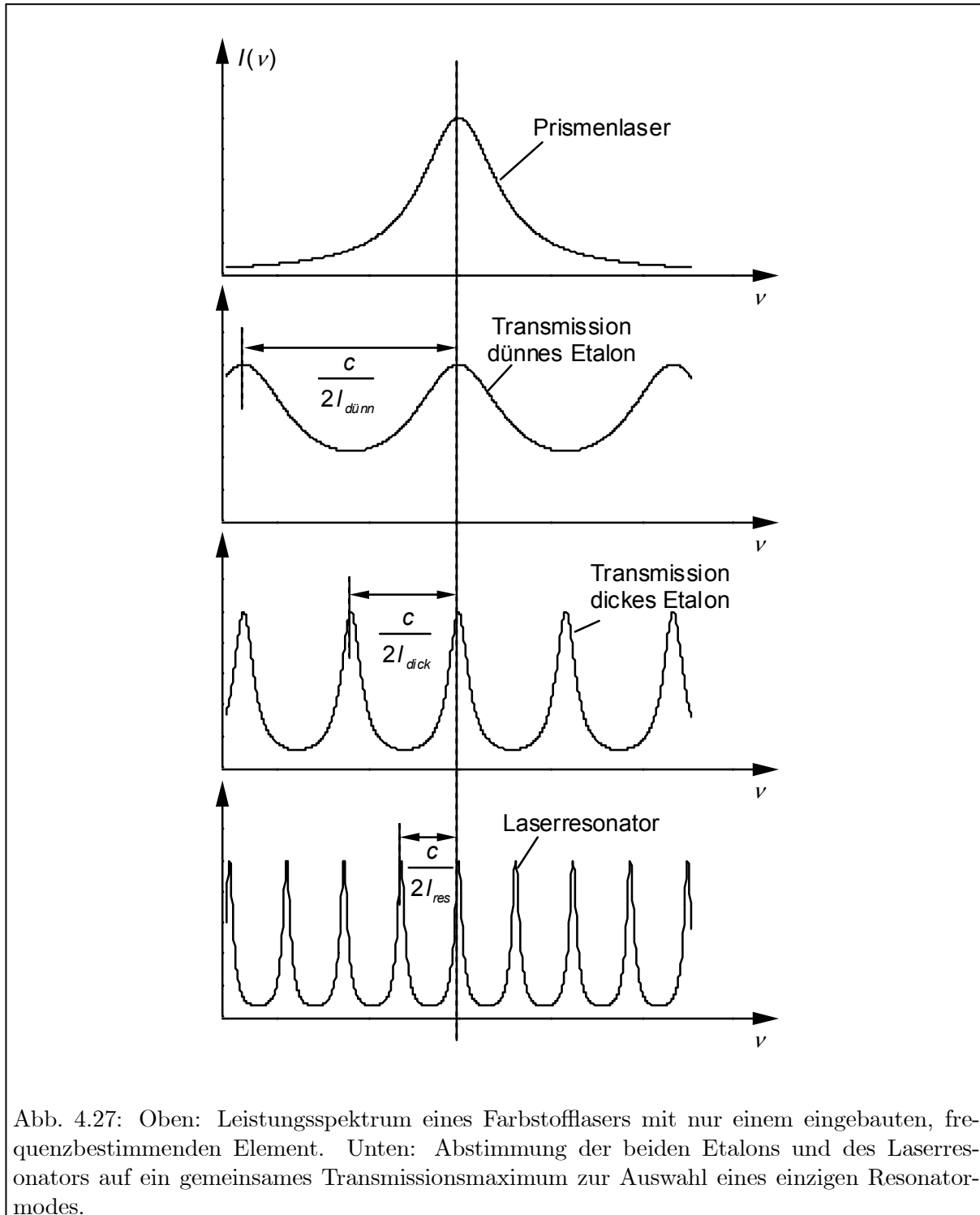


Abb. 4.27: Oben: Leistungsspektrum eines Farbstofflasers mit nur einem eingebauten, frequenzbestimmenden Element. Unten: Abstimmung der beiden Etalons und des Laserresonators auf ein gemeinsames Transmissionsmaximum zur Auswahl eines einzigen Resonatormodes.

ca. 10 Umläufen im Laser vom Zentrum an die Halbertsbreite des Modes weggewandert sein, was Kreisverlusten von der Größenordnung 5% bis 10% entspricht, die bei guter Verstärkung des Mediums ausgeglichen werden können. Wir rechnen nun diesen Grenzwinkel $\Delta\varphi$ mit Hilfe der Winkeldispersion des Prismas

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \quad (4.43)$$

in ein Wellenlängenintervall $\delta\lambda$ um, innerhalb dessen der Laser schwingen kann. Mit

$$\varphi \approx (n-1)\gamma \quad \text{und} \quad \gamma \approx 1 \quad (4.44)$$

wobei φ der Ablenkwinkel und γ der Keilwinkel des Prismas sind, folgt

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} \approx \frac{dn}{d\lambda}. \quad (4.45)$$

Somit erhalten wir die Abschätzung

$$\delta\lambda \approx \frac{\delta\varphi}{d\varphi/d\lambda} \approx \frac{\lambda}{20\pi w_0 dn/d\lambda} \approx 0,1 \text{ nm} \quad (4.46)$$

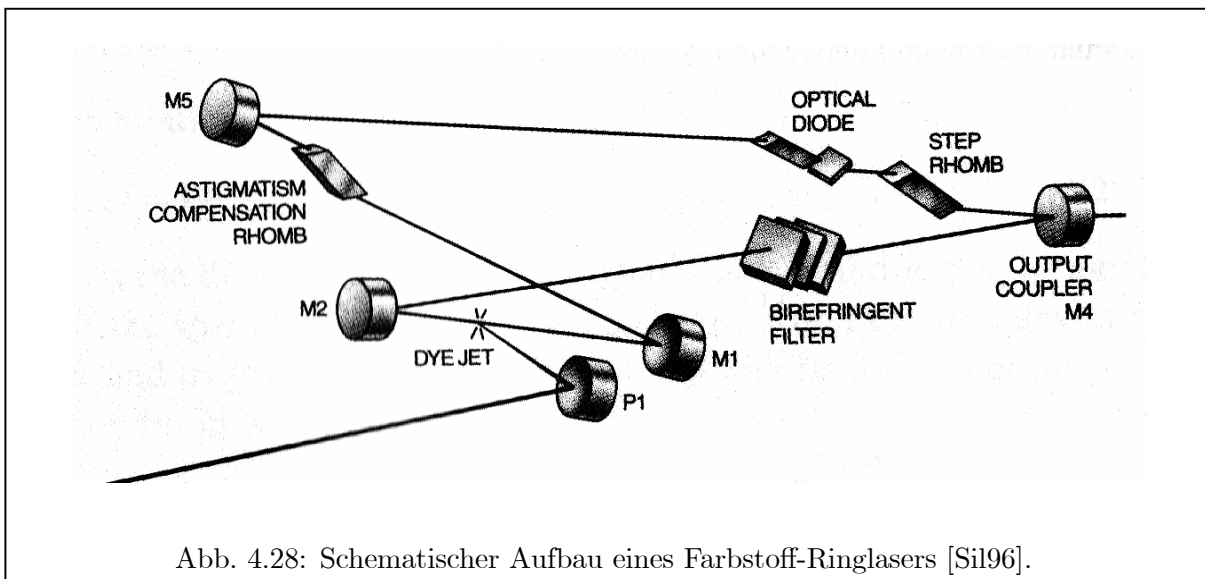
wobei wir für die Dispersion $dn/d\lambda$ einen Schätzwert von ca. $1/\mu\text{m}$ eingesetzt haben.

Statt eines Prismas kann auch ein Gitter, oder ein anderes, monochromatisierendes Element gewählt werden, wie z.B. ein Lyot-Filter (s.u.). Auch hier werden *typische Bandbreiten von ca. 0.1 nm* erreicht. In keinem Falle genügt aber ein einzelnes derartiges Element, um den Laser auf einen single-mode-Betrieb einzuengen, in dem nur ein einziger axialer Mode des Resonators angeregt ist. Wir erinnern uns, dass bei einer Resonatorlänge von 50 cm der axiale Modenabstand 300 MHz beträgt. Das entspricht einigen hundert Modes innerhalb der oben angegebenen Bandbreite. Der Laser schwingt also gleichzeitig auf vielen Modes, oder aber er springt von einem zum anderen in stochastischer Folge.

Um einen Farbstofflaser auf einen einzigen Resonatormode festzulegen, muss man in der Regel noch zwei weitere *Fabry-Perot-Etalons* in den Strahlengang einfügen, und zwar ein dünneres und ein dickeres, deren frequer Spektralbereich (=Modenabstand) sich um ca. eine Größenordnung unterscheidet. Das *Auflösungsvermögen* eines jeden Elements ist so *abgestuft*, dass immer nur ein Mode des nächst feineren Filters innerhalb der Linienbreite des nächst gröberen liegt (s. Abb. 4.27).

Ausserdem müssen alle Elemente einschließlich der Länge des Laserresonators selbst so aufeinander abgestimmt werden, dass die Maxima stets aufeinanderfallen. Bei der Anwendung solcher Farbstofflaser verlangt man in der Regel, dass sie kontinuierlich abstimmbare sind. Die synchrone Abstimmung all dieser Elemente ist von Hand natürlich nicht möglich, sondern muss von *Regelungsmechanismen* vorgenommen werden.

Abbildung 4.28 zeigt den Aufbau eines kommerziellen, kontinuierlichen Farbstofflasers. Die Grobabstimmung erfolgt hier nicht durch ein Prisma oder ein Gitter, sondern durch ein *Lyot-Filter* (*Birefringent*, siehe Abbildung 4.29). Es ist ein doppelbrechender Kristall, der die Polarisationsebene des Lichts dreht. Es besteht in der Regel aus mehreren Platten hintereinander, z.B. drei Platten im Dickenverhältnis 1:10:100. Die erste Platte erzeugt einen Gangunterschied von insgesamt 10λ , die zweite also einen von 100λ , die dritte einen von 1000λ . Der Polarisationsvektor des Lichts hat sich nach einem optischen Gangunterschied von $\Delta nd = k\lambda$ (k : ganze Zahl, Δn : Unterschied im Brechungsindex zwischen ausserordentlichem und ordentlichem Strahl) um $k \cdot 180^\circ$ gedreht, ist also wieder in der ursprünglichen Richtung und kann im Laser weiter verstärkt werden. Da aber auch die Doppelbrechung eine Dispersion zeigt, ist diese Bedingung eines ganzzahligen Gangunterschieds bei gegebener Dicke des Kristalls nur für eine bestimmte



Wellenlänge erfüllt. Durch die Staffellung der Kristalle wird exakt der Mode $k = 1000$ selektiert, folglich auch mit einem Auflösungsvermögen $\lambda/\delta\lambda \approx k$.

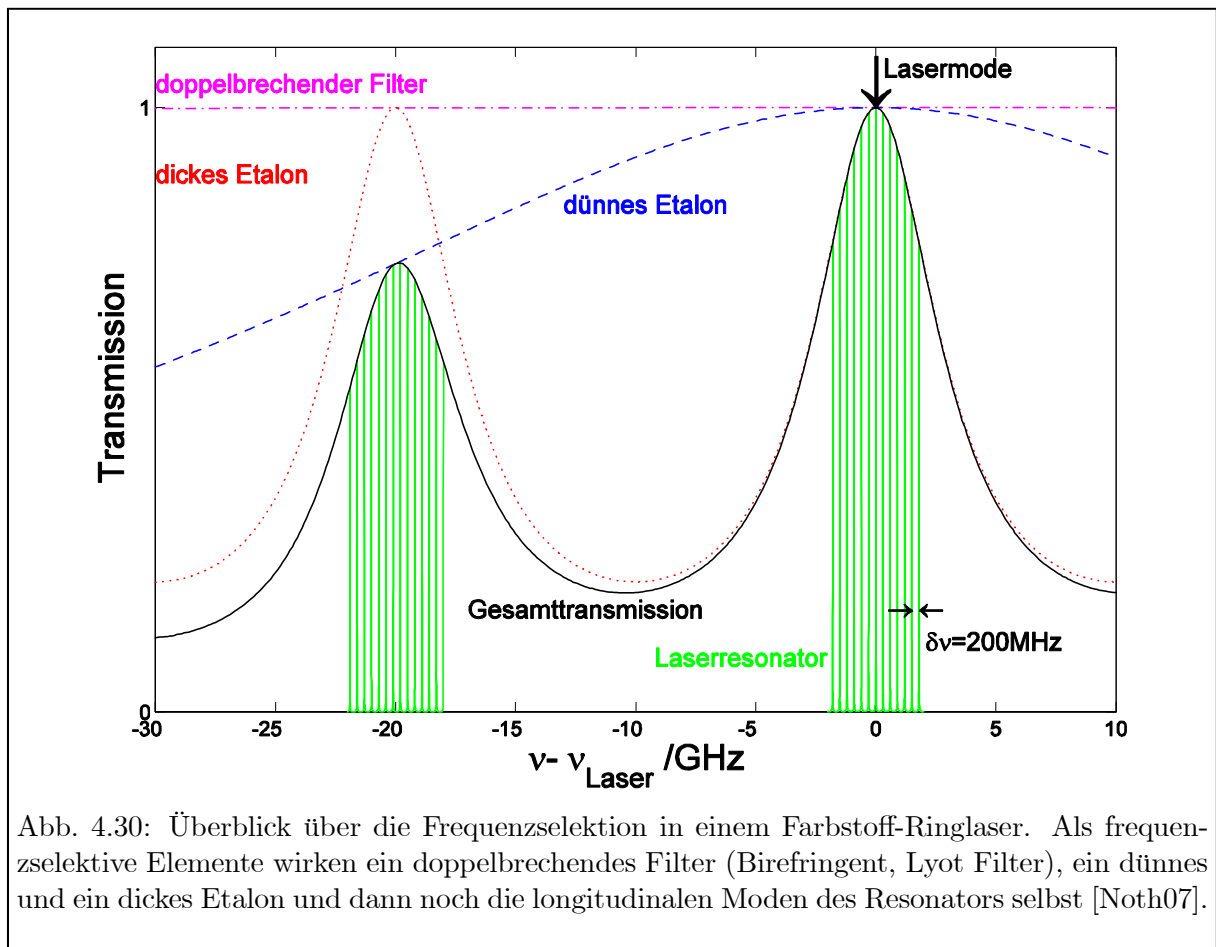
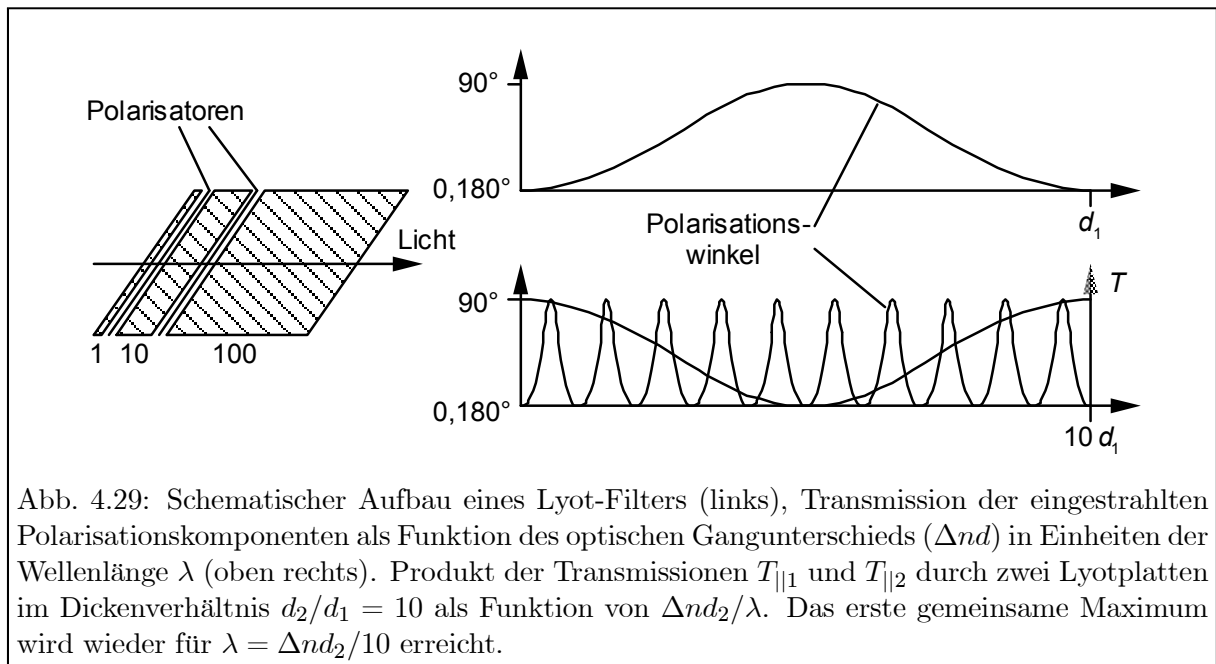
Die Platten sind im allgemeinen mit dem Brewsterwinkel zur optischen Achse geneigt, so dass nur die \vec{E} -Vektorkomponente in der Einfallsebene ohne Reflexionsverluste transmittiert wird. Auf diese Weise arbeitet jede Platte für sich verlustfrei nur für Wellenlängen, bei denen der Gangunterschied ein Vielfaches von 2π ist. Die Abstimmung erfolgt durch Drehen des Filters um seine Achse, wobei sich die optische Weglänge für den ausserordentlichen Strahl verändert.

Der Laser besitzt als weitere Abstimmelemente zwei Fabry-Perot-Etalons, eine drehbare Glasplatte im Strahlengang und den mit Hilfe einer Piezokeramik verstellbaren, mittleren Resonatorspiegel, den sogenannten Faltspiegel. Die beiden letzteren Elemente dienen zur Feinabstimmung des Laserresonators. Die *Laserfrequenz* wird schließlich durch ein externes, hochauflösendes und thermisch stabilisiertes *Etalon kontrolliert*, das seinerseits wiederum durch eine schwenkbare Glasplatte abgestimmt werden kann. Alle frequenzbestimmenden Elemente sind durch eine *Regel- und Servoelektronik* miteinander verkoppelt, so dass der Laser single-mode und synchron der vom externen Resonator vorgegebenen, kontinuierlich verstellbaren Frequenz mit einer Stabilität von etwa 1 MHz folgt. Einen Überblick über das Zusammenwirken der einzelnen frequenzselektiven Elemente gibt Abbildung 4.30.

Die Regelung unterdrückt auch alle Schwankungen, die durch die akustischen Schwingungen der Laserspiegel, Instabilitäten in der Farbstofflüssigkeit etc. hervorgerufen werden. Bei modernen Lasern pumpt man den Farbstoff nicht mehr durch eine geschlossene Zelle, sondern lässt ihn als einen feinen *Düsenstrahl* den Resonator durchqueren. Bei einer Geschwindigkeit von einigen Metern pro Sekunde wird dabei die Farbstofflüssigkeit im Brennfleck, der nur wenige μm Durchmesser besitzt, in Zeiten von weniger als einer μs ersetzt, so dass sich Tripletmoleküle nicht anreichern können.

Will man einen Farbstofflaser noch weiter stabilisieren, so muss man ihn mit hochauflösender Spektroskopie an einen besonders schmalbandigen atomaren oder molekularen Übergang ankopeln. Stabilitäten von bis zu einem 1 kHz sind auf diese Weise schon erreicht worden. Darunter macht sich ein Frequenzrauschen bemerkbar, das auf Dichteschwankungen der Farbstoffmoleküle in der Lösung zurückgeht und von deren Brownscher Molekularbewegung verursacht wird.

Die elektronischen Grund- und angeregten Zustände dieser Moleküle weisen eine Vibrations- (IR-Bereich) und Rotations-Feinstruktur (Mikrowellenbereich) auf, durch die ein nahezu kon-



tinuierliches Band von Schwingungs- und Rotationszuständen oberhalb des Bandenkopfes jedes elektronisch angeregten Niveaus entsteht. Durch Stöße mit den Lösungsmittelmolekülen relaxieren die Schwingungs- und Rotationsanregungen des Farbstoffmoleküls untereinander mit Zeitkonstanten im Pikosekundenbereich. Diese "Mischung" der Zustände führt dazu, dass die Auswahlregeln der Übergänge bezüglich der Rotations- und Schwingungsquantenzahl aufgehoben sind. Deshalb liegen nicht nur die Zustände dicht, sondern auch das Spektrum der auftretenden Linien füllt das ganze Band quasi kontinuierlich aus.

4.4 Festkörperlaser

Als aktives Medium von Festkörperlasern dienen Gläser oder Kristalle, die mit optisch anregbaren Atomen oder Ionen dotiert sind. Als optisch durchlässige Festkörper werden eine Reihe von Kristallen aber auch Glas verwendet die als laseraktive Zentren Ionen von Metallen, seltenen Erden oder Aktiniden enthalten. Die Ionen besetzen in der Regel normale Gitterplätze des Wirtsgitters und besitzen einerseits breite Absorptionsbänder im optischen Bereich und zum anderen eine Reihe von Fluoreszenzlinien. Abhängig davon, ob das obere Laserniveau an die Schwingungen des Kristallgitters ankoppelt, erhält man Festfrequenzlaser (z.B. Nd:YAG) oder breit abstimmbare Laser (z.B. Titan:Saphir). Festkörperlaser werden ausschliesslich optisch gepumpt, dazu werden meist Blitzlampen oder Diodenlaser verwendet; festfrequente Festkörperlaser werden ihrerseits häufig wieder als Pumplaser für Farbstoff- oder Titan-Saphirlaser eingesetzt und verdrängen hier nach und nach die früher meist verwendeten Argon-Ionen-Laser. Tabelle 4.4 zeigt eine kleine Auswahl solcher Laser.

Tabelle 4.4: Aktive, dotierte Ionen und Wirtskristalle für Festkörperlaser

aktives Ion	Wirtskristall	Wellenlänge [μm]
Gd ³⁺	Y ₃ Al ₅ O ₁₂	0,3146
Ti ³⁺	Al ₂ O ₃	0,800
Cr ³⁺	BeAl ₂ O ₄	0,752
Er ³⁺	YAlO ₃	1,6630
Nd ³⁺	Y ₃ Al ₅ O ₁₂	1,0642
Nd ³⁺	CaWO ₄	1,0582
Ho ³⁺	(Y,Er)AlO ₃	2,1230
Tm ³⁺	YAlO ₃	2,3490
U ³⁺	CaF ₂	2,6130

4.4.1 Neodym-Laser

Die leistungsstärksten Laser sind Neodym-Glas und Neodym:YAG (Yttrium Aluminium Granat Y₃Al₅O₁₂) Laser. Mit ihnen lassen sich bei einer entsprechenden Nachverstärkung im Impulsbetrieb höchste Strahlungsleistungen im nahen Infrarotbereich (1.06 μm) erzeugen. Das aktive Medium enthält als strahlende Zentren Neodym (Nd³⁺) Ionen. Nd dotiertes Glas (bis zu 8% Nd-Ionen) hat den Vorteil, dass es sich in optisch einwandfreier Qualität in größeren Abmessungen (Stäbe bis zu 1 m Länge) herstellen lässt. Beim Nd:YAG Laser sind bis zu 4% Nd Ionen in einen YAG Kristall eingebettet. Vorteilhaft ist hier der gegenüber Glas bis zu einem

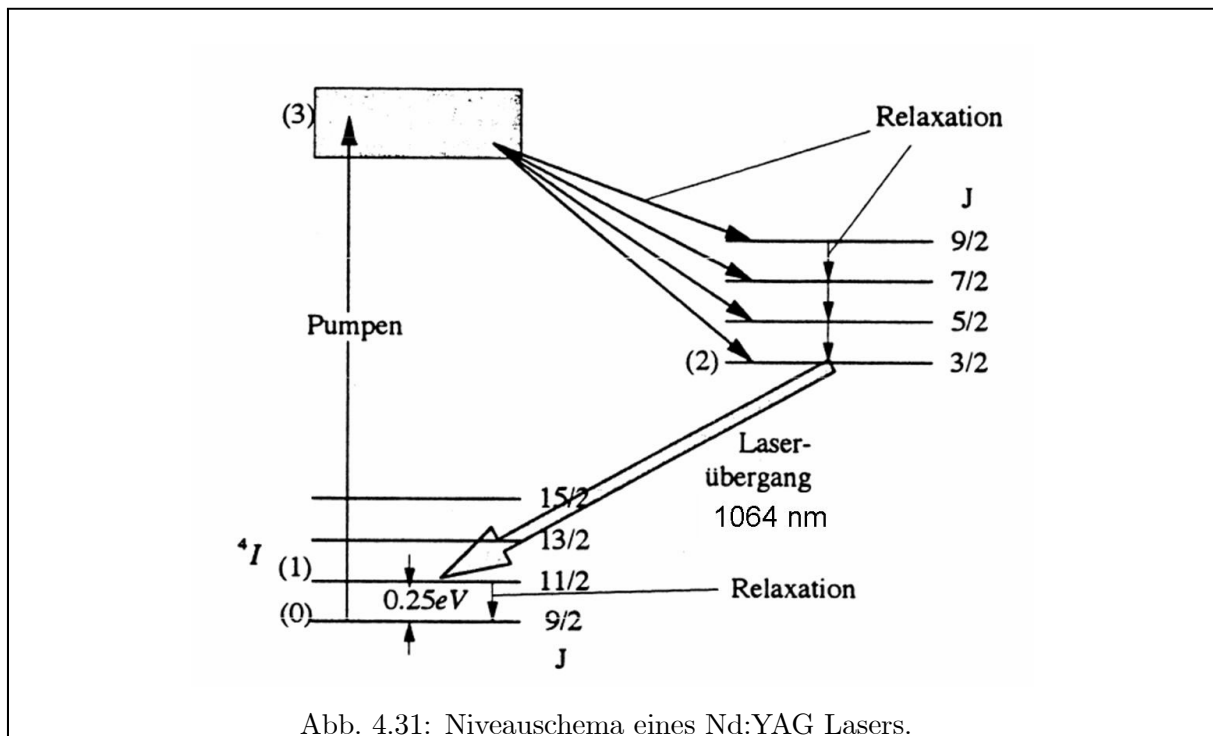


Abb. 4.31: Niveauschema eines Nd:YAG Lasers.

Faktor drei höhere Absorptionsquerschnitt der Nd Ionen und die höhere optische Qualität der Kristalle. Diese können allerdings nur in kleineren Abmessungen produziert werden. Das Energieniveauschema der Nd^{3+} Ionen in einem Nd:YAG Laser ist vereinfacht in Abbildung 4.31 gezeigt. Es handelt sich um ein typisches Vier-Niveau-System. Die Ionen besitzen breite Absorptionsbanden im oberen Pumpniveau 3 die durch optisches Pumpen mit Blitzlichtlampen oder Diodenlasern populiert werden. Durch einen schnellen Relaxationsprozess wird die Energie dann in das obere Laserniveau 2 übertragen. Das untere Laserniveau 1 entleert ebenfalls rasch in das Pumpniveau 0, so dass zwischen den Laserniveaus 1 und 2 Inversion leicht erreicht werden kann. Damit ist Laseremission sowohl im Puls- als auch im kontinuierlichen Betrieb möglich. Fluoreszenzübergänge treten bei den Wellenlängen 920 nm, 1060 nm und 1370 nm auf, wobei üblicherweise der in der Abbildung 4.31 gezeigte, intensivste Übergang bei etwa 1060 nm verwendet wird (die genaue Lage ist vom verwendeten Glas abhängig). Weitere Varianten der Nd-Laser sind Nd:YLF und Nd:YVO₄-Laser bei denen die Nd-Ionen in Yttrium-Lithium-Fluorid bzw. Yttrium-Vanadat Kristalle eingebettet sind. Der Nd:YLF Laser (1048.5 nm) besitzt eine hohe Energiespeicherkapazität und eignet sich daher für besonders hohe Pulsleistungen. Nd:YVO₄ Laser zeichnen sich hingegen durch einen hohen Wirkungsgrad aus und besitzen mit 1064.3 nm fast die gleiche Wellenlänge wie ein Nd:YAG-Laser (1064.2 nm). Nd-Laser werden unter anderem als Pump Laser für Farbstoff und Titan:Saphir-Laser (frequenzverdoppelt bei 532 nm), zur Materialbearbeitung und in der nichtlinearen Optik angewendet.

4.4.2 Titan:Saphir-Laser

Der Titan:Saphir-Laser (Ti:Sa) besitzt als aktives Medium Titan Ionen (Ti^{3+} , bis zu 5%) die in einem Korund Kristall (Al_2O_3) eingebaut sind. Die Vorteile des Ti:Sa liegen vor allem in den guten optischen Eigenschaften des Wirtskristalls und seiner hohen Wärmeleitfähigkeit, die auch die Realisierung sehr hoher Pumpleistungsdichten ermöglicht. Der Ti:Sa Kristall absorbiert zwischen 400 und 600 nm, wobei ein Maximum bei 485 nm (blau-grün) liegt. Optisch gepumpt

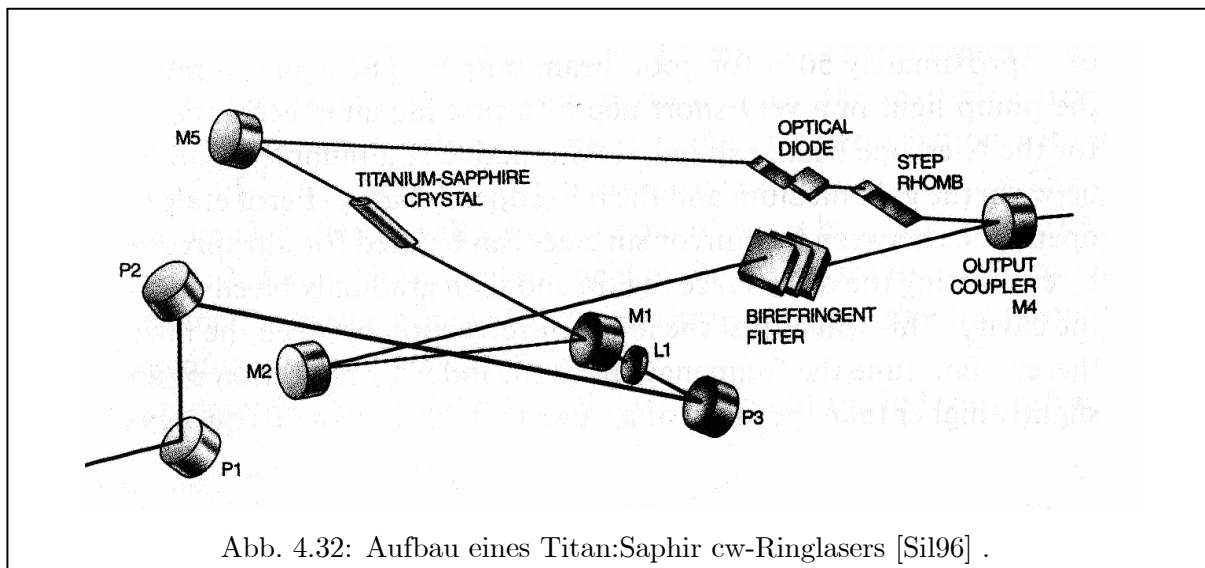


Abb. 4.32: Aufbau eines Titan:Saphir cw-Ringlasers [Sil96].

wird er meist mit der Strahlung eines Argon-Ionen-Lasers (λ zwischen 488 und 514 nm) oder der zweiten Harmonischen eines Nd:YAG-Lasers bei 532 nm. Die Laserniveaus sind durch Schwingungswechselwirkung verbreitert, wodurch der Laser über einen weiten Bereich abstimmbare (gepulst etwa 650-1100 nm, cw von etwa 700-1000 nm) wird. Mit fast 400 nm ist er der Festkörperlaser mit dem größten Aktionsbereich.

Analog zum Farbstofflaser handelt es sich beim Ti:Al₂O₃-Laser um ein Vier-Niveau-System, wobei die Inversion des angeregten gegenüber dem Grundzustand ebenfalls durch schnelle Relaxationen innerhalb der jeweiligen Banden gegeben ist. Der Titan:Saphir-Laser kann durch Argon-Ionenlaser gepumpt werden, da sein Absorptionsmaximum nahe bei der stärksten Argon-Linie ($\lambda = 514$ nm) liegt. Langsamer als beim Farbstofflaser erfolgt die Fluoreszenz zurück in den Grundzustand mit einer Lebensdauer von $\tau = 3,2 \mu\text{s}$, was einerseits dazu führt, dass sehr viel höhere Energien gespeichert werden können, andererseits jedoch die Verstärkung im Medium sehr viel niedriger bleibt. Aus diesem Grund müssen die Titan:Saphir-Kristalle longitudinal gepumpt werden, so dass man die Inversion über einer relativ großen Strecke (einige cm) ausbildet und abrufen kann. Dies bedeutet jedoch, dass man, um den Kristall genügend transparent zu halten, nur geringe Dotierungen von etwa 0.1% Ti³⁺-Ionen benutzen darf. Dieser Nachteil wird jedoch durch die sehr hohen Absorptionswirkungsquerschnitte wieder wettgemacht.

Kontinuierlich wird der Ti:Sa meist als Ringlaser, analog zu dem in Abb. 4.28 gezeigten Farbstofflaser, betrieben. Kommerzielle Titan:Saphir-Laser entsprechen in ihrem apparativen Aufbau Farbstoff-Ringlasern. In der Tat lassen sich beide Laserkonfigurationen durch wenige Umbauten ineinander überführen. Abbildung 4.32. zeigt einen solchen am Beispiel des Coherent 899-Ringlasers. Der wesentliche prinzipielle Unterschied wird durch das oben erwähnte longitudinale Pumpen des Titan:Saphir-Kristalls bedingt. Anstelle nur eines einzigen Pumpspiegels (P) beim Farbstofflaser benötigt man für die Ti:Al₂O₃-Konfiguration deren drei (P1, P2, P3) sowie eine fokussierende Linse (L1) im Pumplaserstrahlengang. Der Faltspiegel (M1) muss für das Pumplaserlicht durchlässig sein, während er das Titan:Saphir-Laserlicht zu 100% reflektieren muss. Im Vergleich zum linearen Laser in Abbildung 4.26 muss in beiden Konfigurationen eine optische Diode (OD) eingefügt werden, die gewährleistet, dass das Licht nur in einer Richtung im Resonator umläuft. Der ringresonator hat gegenüber dem linearen Resonator auch noch den Vorteil, dass sich keine stehende Welle ausbildet und daher kein räumliches Lochbrennen (spatial hole burning) auftritt.

Daneben ist zu bemerken, dass die Ausgangsleistung des Titan:Saphir-Lasers um bis zu einem Faktor drei größer ist als die der besten Farbstoffe. Dies macht ihn besonders für Anwendungen interessant, bei denen frequenzverdoppelte Laserstrahlen benötigt werden, da hohe Intensitäten für nichtlineare Prozesse wie die Frequenzverdopplung notwendig sind. Der Titan:Saphir-Laser kann Farbstofflaser nicht vollständig ersetzen, bietet aber eine wichtige Ergänzung und Alternative besonders für die größeren Wellenlängen. Auch die mechanische, thermische und photochemische Stabilität des Materials sind große Vorzüge von Festkörperlasern. Darüber hinaus ist der Kristall wesentlich angenehmer zu handhaben, da das Hantieren mit den meist giftigen Farbstoffen wegfällt.

Es sei an dieser Stelle bereits vorweggenommen, dass er aufgrund seiner hohen Bandbreite von bis zu 100 THz, im Pulsbetrieb einer der wichtigsten Laser zur Erzeugung ultrakurzer Pulse ist. Die bandbreitenbegrenzte Pulslänge (Fourierlimit) beträgt etwa 6 fs und es werden Ausgangsenergien von etwa 1 nJ pro Puls bei 10 fs Pulslänge und 100 MHz Repetitionsrate (Pulsfolgefrequenz) erreicht.

Kapitel 5

Frequenzselektion und Stabilisierung

Die Frequenz eines Laseroszillators hängt sehr empfindlich von vielen Einflüssen ab. Insbesondere die Resonatorlänge ist ein kritischer Parameter. Vibrationen der Resonatorspiegel, aber auch Dichtefluktuationen in der Luft oder dem Verstärkermedium, Brechungsindexänderungen aufgrund einer Änderung der Ladungsträgerdichte in einem Halbleiterlaser oder die Änderung der Schichtdicke des Dye-Jets in einem Farbstofflaser bewirken eine Änderung der optischen Weglänge. Bei einem Resonator der Länge l der bei einer Laserwellenlänge λ betrieben wird verursacht eine Änderung um Δl eine Frequenzshift von

$$\begin{aligned}\Delta\nu &= \frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda \\ &= \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\Delta l}{l}\end{aligned}\tag{5.1}$$

mit $\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{\Delta l}{l}$. Bei einem 30 cm langen Resonator, der bei einer Wellenlänge von 400 nm betrieben wird, resultiert aus einer Änderung der Resonatorlänge um 1 nm bereits eine Frequenzveränderung von $2.5 \cdot 10^6$ Hz.

Um die Frequenz eines Lasers sehr stabil zu halten ist daher in der Regel eine aktive Regulierung (*Stabilisierung*) des Lasers notwendig. Dazu benutzt man Referenzen, die eine deutlich stabilere Frequenz aufweisen als der freilaufende Laser. Eine solche Referenz kann beispielsweise ein passiv stabiler Resonator oder ein atomarer oder molekularer Übergang sein.

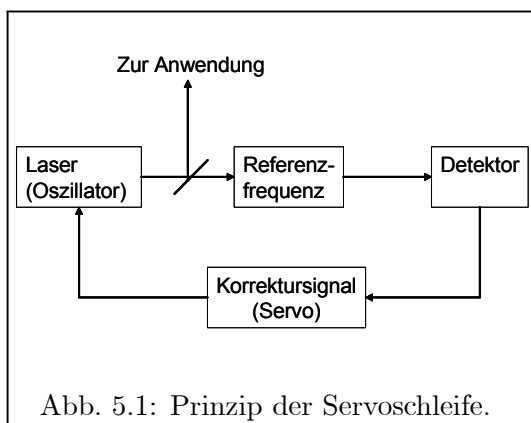


Abb. 5.1: Prinzip der Servoschleife.

Abb. 5.1 zeigt das Schema eines *frequenzstabilisierten Lasers*. Ein Teilstrahl wird zur Frequenzanalyse geleitet und mit einem Detektor das zugehörige Signal registriert. Dabei kann es sich z.B. um ein Transmissionsmaximum eines Fabry-Perot Resonators oder das Transmissionsmaximum einer Gaszelle handeln. Aus diesem Signal gilt es nun ein *Korrektursignal (Servo)* zu erzeugen, welches bei einer Abweichung der Laserfrequenz von der Sollfrequenz dazu führt, dass der Laser zur Sollfrequenz zurückkehrt. Wir wollen im Folgenden solche Stabilisierungssysteme näher untersuchen und einige Beispiele kennen lernen.

Stabilisierungssysteme näher untersuchen und einige Beispiele kennen lernen.

5.1 Modell einer Servoschleife

Jedes Stabilisierungssystem besitzt eine Komponente, den *Diskriminator*, der ein Signal erzeugt, welches ein Maß für die Frequenzabweichung

$$\delta\nu = \nu_S - \nu_0 \quad (5.2)$$

ist. Dabei ist ν_S die Frequenz des stabilisierten Lasers und ν_0 die Referenz- also Sollfrequenz. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass das Fehlersignal S proportional zur Frequenzabweichung $\delta\nu$ ist

$$S \approx C \cdot (\nu_S - \nu_0) = C \cdot \delta\nu \quad (5.3)$$

solange die Abweichung $\delta\nu$ nicht zu groß wird. Dieses Fehlersignal wird nun gefiltert und verstärkt. Das resultierende *Servosignal* U_R wirkt dann in geeigneter Weise auf den Resonator des Lasers, um die Frequenzabweichung $\delta\nu$ zu minimieren. Wenn wir den *Servoverstärker* durch eine frequenzabhängige Verstärkung $g(f)$ beschreiben¹, so lautet das Servosignal

$$U(f) = g(f) \cdot C \cdot \delta\nu \quad (5.4)$$

Der Oszillator reagiert auf das Servosignal mit einer Antwort- oder *Responsefunktion* $D(f)$ die ebenfalls frequenzabhängig ist. Die gesamte *Übertragungsfunktion* der geschlossenen Servoschleife (*Transfer function*) ist $D(f) \cdot g(f) \cdot C$. Also gilt für die Frequenz des stabilisierten Lasers:

$$\nu_S = \nu_i - D(f) \cdot g(f) \cdot C \cdot \delta\nu \quad (5.5)$$

wobei ν_i die Frequenz des freilaufenden Lasers ist. Damit erhalten wir für die Abweichung des stabilisierten Lasers von der Sollfrequenz

$$\delta\nu = \Delta\nu - D(f) \cdot g(f) \cdot C \cdot \delta\nu, \quad (5.6)$$

wobei $\Delta\nu = \nu_i - \nu_0$ ist. Dies kann man auflösen nach:

$$\delta\nu = \frac{\Delta\nu}{1 + D(f) \cdot g(f) \cdot C}. \quad (5.7)$$

In diesem einfachen Modell mit proportionaler Verstärkung wird die Abweichung der Laserfrequenz von der Sollfrequenz also mit wachsender Verstärkung kleiner. Daher sollte der Gesamtverstärkungsfaktor $D(f) \cdot g(f) \cdot C$ so groß wie möglich sein. Dabei ist jedoch zu beachten, dass in der Regel sowohl die Verstärkung, als auch die Responsefunktion frequenzabhängig sind. Es ist daher erforderlich die komplexe Antwortfunktion jeder Komponente zu analysieren - das heisst, sowohl ihre Amplitude, als auch ihre Phase φ . Wenn die Phasenverschiebungen sich zu 180° addieren wird die negative zu einer positiven Rückkopplung und erhöht die Frequenzdifferenz statt sie zu vermindern. Daher muss die Verstärkung bei der Frequenz, die eine Phasenverschiebung von π aufweist auf unter 1 abgefallen sein:

$$\Delta\varphi(f_{\text{Grenz}}) = \pi \quad (5.8)$$

$$D(f_{\text{Grenz}}) \cdot g(f_{\text{Grenz}}) \cdot C \stackrel{!}{<} 1. \quad (5.9)$$

Dies setzt der Maximalverstärkung Grenzen. Es fällt auf, dass bei reiner Proportionalverstärkung $\delta\nu$ niemals exakt Null wird. Wir werden später andere Elemente kennen lernen die eine bessere Frequenzstabilisierung ermöglichen.

¹Wir benutzen hier für die auftretenden Frequenzen im Servosystem die Variable f um sie von den optischen Frequenzen des Lasers ν unterscheiden zu können.

5.2 Generierung eines Fehlersignals

Es gibt eine Vielzahl von Methoden um *Fehlersignale* zu generieren. Dies muss nicht notwendigerweise eine lineare Funktion der Frequenzdifferenz $\delta\nu$ sein, sollte aber möglichst *monoton* sein und einen *Nulldurchgang* bei der Resonanz besitzen. Dies erlaubt es dem *Servosystem* festzustellen, ob die Laserfrequenz ober- oder unterhalb der Resonanzfrequenz liegt und eine entsprechende Korrektur vorzunehmen.

Denken wir nun an die Transmission eines Resonators oder die Absorption eines Gases, so sind das symmetrische Funktionen um die Resonanzfrequenz, die auch keinen Nulldurchgang sondern ein Maximum oder Minimum besitzen. Um daraus ein Fehlersignal zu erzeugen kann man beispielsweise den "*Side-lock*" (*Flankenstabilisierung*) oder *Modulationstechniken* verwenden.

5.2.1 Flankenstabilisierung

Bei der Flankenstabilisierung handelt es sich um eine sehr einfache Methode bei der als Referenzfrequenz nicht das Maximum oder Minimum des Absorptions- oder Transmissionspeaks dient, sondern eine Frequenz die auf der Flanke des Peaks liegt. Die Technik ist einfach zu implementieren. Abb. 5.2 (a) zeigt den prinzipiellen Aufbau. Ein Teilstrahl des Lasers wird mit einem Strahlteiler in zwei etwa gleich starke Teile aufgespalten. Der eine Teil durchläuft das frequenzselektive Element bevor es auf einen Photodetektor trifft. Der zweite Teil wird variabel abgeschwächt und direkt auf einen ähnlichen Detektor geleitet. Mit Hilfe eines *Differenzverstärkers* (*Differential Amplifier*) wird die Differenz zwischen den Signalstärken auf den beiden Photodetektoren gebildet. In Abb. 5.2 (b) ist das Differenzsignal als Funktion der Frequenz dargestellt. Es stellt zwei *Stabilisierungspunkte* (*lock points*) A und B zur Verfügung. In der Umgebung jedes dieser Punkte weist das Signal die erforderlichen Eigenschaften auf. Es ist monoton und besitzt einen Nulldurchgang. Die Flankenstabilisierung ist einfach zu implementieren und ist durch die Verwendung des Referenzsignals weitgehend unabhängig von Amplitudenschwankungen des Lasers. Nachteilig ist allerdings, dass der Stabilisierungspunkt nicht auf der Resonanz liegt, sondern durch die Wahl der Abschwächung des Referenzstrahls festgelegt wird. Daher ist der Referenzpunkt nicht sehr stabil und nicht sehr genau reproduzierbar einstellbar. Leistungsschwankungen werden nur soweit abgepuffert wie sie zur gleichen Änderung der Signalintensität auf den beiden Photodetektoren führen. Wenn die Polarität der Rückkopplung so eingestellt ist, dass der Laser auf den Referenzpunkt A stabilisiert wird (für eine Stabilisierung auf B müsste die Phase um 180° gedreht werden, weil die Steigung das entgegenge-

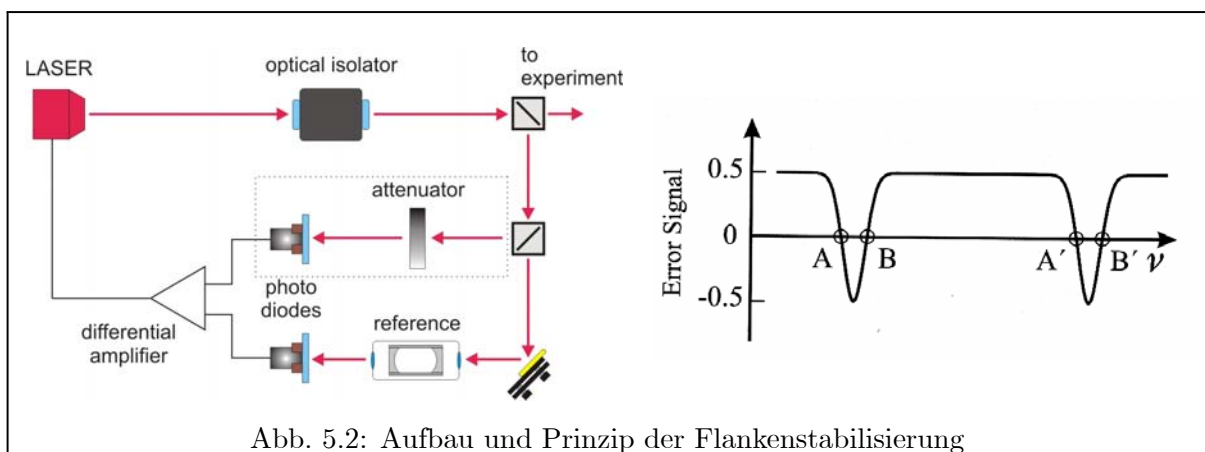


Abb. 5.2: Aufbau und Prinzip der Flankenstabilisierung

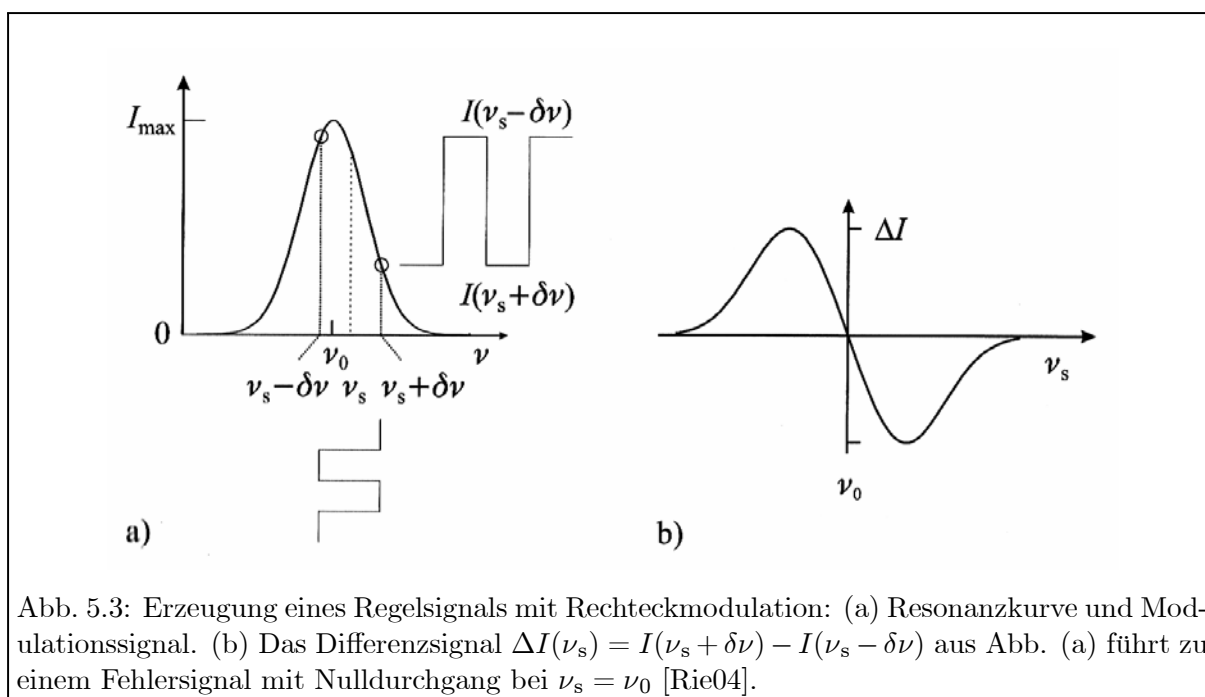


Abb. 5.3: Erzeugung eines Regelsignals mit Rechteckmodulation: (a) Resonanzkurve und Modulationssignal. (b) Das Differenzsignal $\Delta I(\nu_s) = I(\nu_s + \delta\nu) - I(\nu_s - \delta\nu)$ aus Abb. (a) führt zu einem Fehlersignal mit Nulldurchgang bei $\nu_s = \nu_0$ [Rie04].

setzte Vorzeichen besitzt), so werden positive Frequenzexkursionen bis $\nu(B)$ zum Referenzpunkt A zurückreguliert. Wird die Frequenzabweichung aber noch größer, d.h. $\nu > \nu(B)$, so wird das Servosignal positiv und der Laser wird vom Stabilisierungspunkt abgestoßen. Dies führt zu einem Sprung der Laserfrequenz zum nächsten Stabilisierungspunkt A' .²

5.2.2 Modulationstechniken zur Erzeugung von Fehlersignalen

Ein Fehlersignal kann durch die Modulation der Laserfrequenz um die Resonanzfrequenz gewonnen werden. Dabei wird entweder der Laser direkt moduliert oder externe Modulatoren wie AOMs und EOMs eingesetzt. Man kann die Frequenz entweder *harmonisch* oder mit einem *Rechtecksignal modulieren*. Im letzteren Fall wird die Laserfrequenz ν_S periodisch zwischen zwei Frequenzen $\nu_S + \delta$ und $\nu_S - \delta$ geschaltet. Abbildung. 5.3 veranschaulicht das Verfahren. Die Intensität auf dem Photodetektor werde jeweils über die halbe Periodendauer $\frac{T}{2}$ integriert. Abbildung 5.3 (b) zeigt die Differenz der beiden integrierten Signale.

$$\Delta I(\nu_S) = I(\nu_S + \delta) - I(\nu_S - \delta), \quad (5.10)$$

als Funktion der Abweichung der Laserfrequenz ν_S von der Resonanzmitte ν_0 . Man erkennt die typische anti-symmetrische Kurvenform die für die Laserstabilisierung geeignet ist. Das Signal kann mit einem *phasenempfindlichen Verstärker (Lock-in-Amplifier)* aufgenommen werden. Die Verwendung der Rechteckmodulation besitzt den Nachteil, dass sie hohe Harmonische im Spektrum besitzt die Hochfrequenzrauschen in das System einstreuen kann. Deshalb wird die harmonische Modulation bevorzugt. Das Verfahren ist dem zuvor geschilderten analog und in Abb. 5.4 verdeutlicht.

²Hier ist natürlich ein System mit periodischen Verlusten, also z.B. ein FPI angenommen. Eine atomare oder molekulare Resonanz besitzt unter Umständen gar keinen zweiten Stabilisierungspunkt.

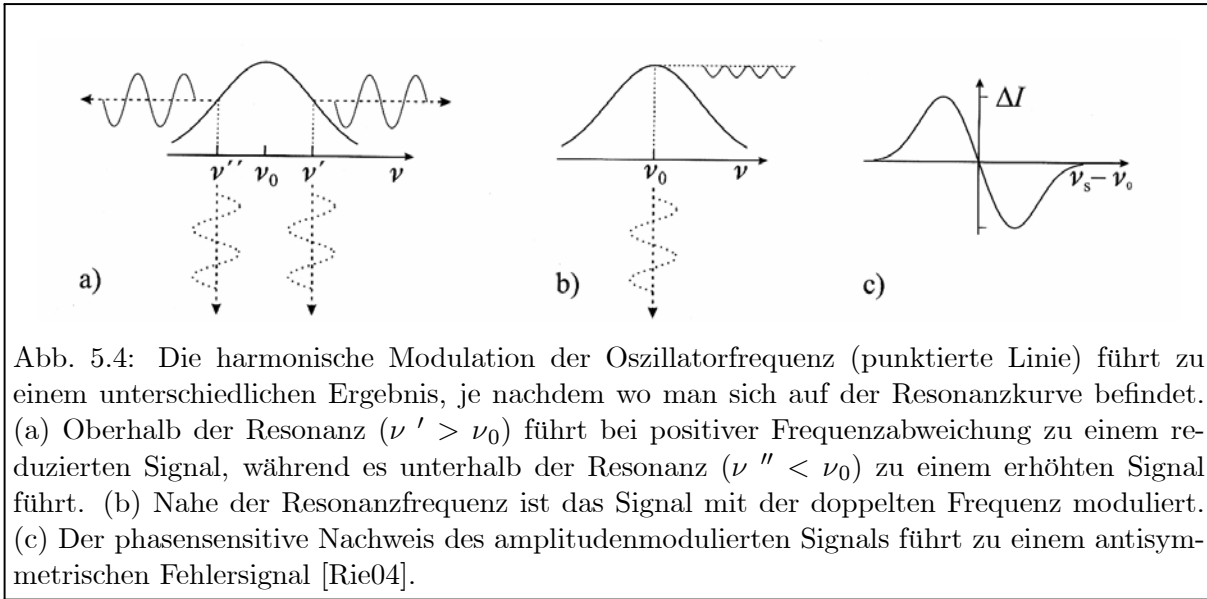


Abb. 5.4: Die harmonische Modulation der Oszillatorfrequenz (punktierte Linie) führt zu einem unterschiedlichen Ergebnis, je nachdem wo man sich auf der Resonanzkurve befindet. (a) Oberhalb der Resonanz ($\nu' > \nu_0$) führt bei positiver Frequenzabweichung zu einem reduzierten Signal, während es unterhalb der Resonanz ($\nu'' < \nu_0$) zu einem erhöhten Signal führt. (b) Nahe der Resonanzfrequenz ist das Signal mit der doppelten Frequenz moduliert. (c) Der phasensensitive Nachweis des amplitudenmodulierten Signals führt zu einem antisymmetrischen Fehlersignal [Rie04].

5.2.3 Stabilisierung nach Hänsch - Couillaud

Hänsch und Couillaud entwickelten eine Stabilisierungstechnik, die die *Polarisationsspektroskopie* in Verbindung mit einem optischen Resonator verwendet, um ein dispersionsähnliches Regelsignal zu erzeugen. Grundlage dafür ist ein Element im Resonator, welches unterschiedlich hohe Verluste für die beiden senkrecht zueinander stehenden Polarisations Ebenen bedingt. Dies kann z.B. eine Glasscheibe im Brewsterwinkel, ein doppelbrechender Kristall oder ein Polarisator sein. Ein entsprechender Aufbau ist in Abbildung 5.5 gezeigt. Wir wollen nun die Reflexion des Lichtes durch den Resonator im Detail studieren.

Es sei Θ der Winkel zwischen der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichts E_0 und der Polarisationsrichtung mit minimalen Verlusten im Resonator. Wir zerlegen nun das einfallende Licht mit Amplitude E_0 in die zwei Komponenten

$$E_{\perp}^{(0)} = E_0 \cdot \cos \Theta \quad (5.11)$$

$$E_{\parallel}^{(0)} = E_0 \cdot \sin \Theta \quad (5.12)$$

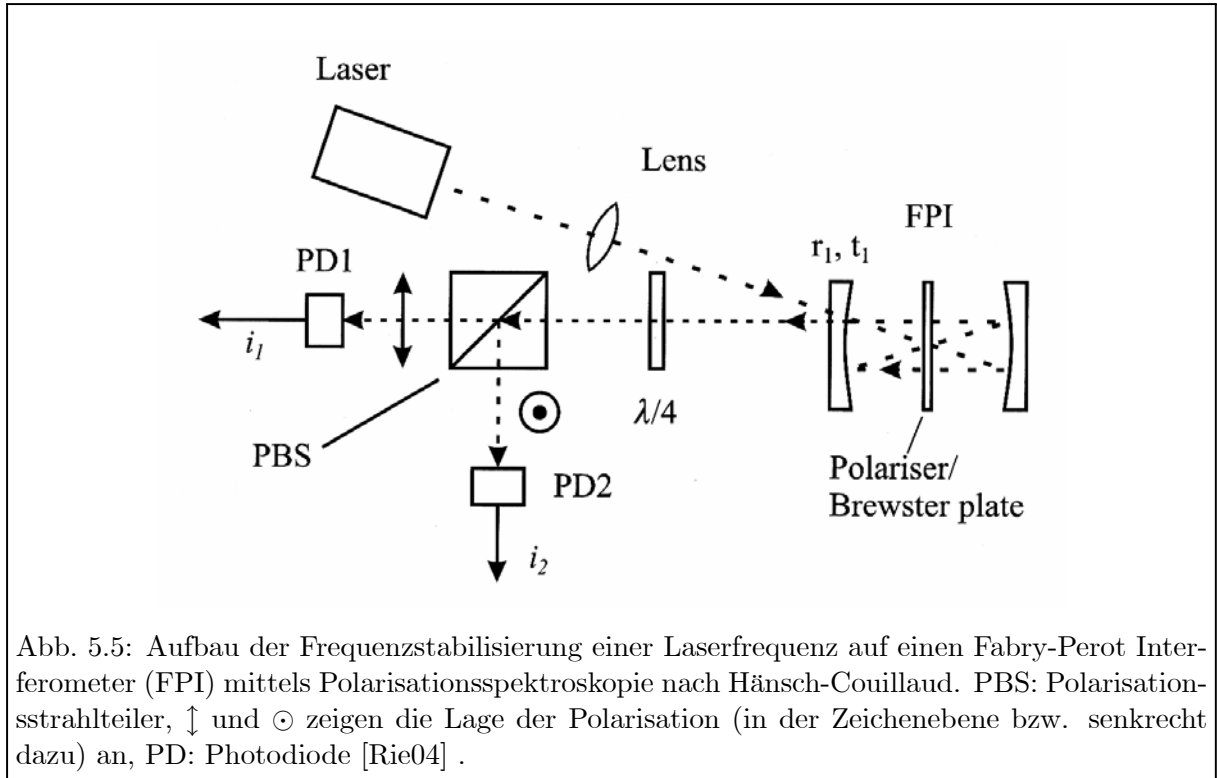
die senkrecht bzw. parallel zur Richtung der Polarisationsrichtung mit minimalen Verlusten in dem Resonator sind. Die komplexen Amplituden der reflektierten Wellen ergeben sich zu

$$E_{\perp}^{(r)} = E_{\perp}^{(0)} \cdot r_1 \quad (5.13)$$

$$E_{\parallel}^{(r)} = E_{\parallel}^{(0)} \cdot \left(r_1 - \frac{t_1^2}{r_1} \frac{r \cdot e^{-i\delta}}{1 - r \cdot e^{-i\delta}} \right) \quad (5.14)$$

$$= E_{\parallel}^{(0)} \cdot \left(r_1 - \frac{t_1^2 \cdot r^2}{r_1} \frac{-r^2 + \cos \delta - i \sin \delta}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2(\delta/2)} \right) \quad (5.15)$$

wobei r_1 und t_1 die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten des Einkoppelspiegels sind, während r der Amplitudenreduktionsfaktor ist der alle Verluste eines Umlaufes, bzw. von zwei Umläufen wenn der Laser schräg (off axis) eingestrahlt wird wie es in Abb. 5.5 gezeigt ist. Da die beiden Polarisationsrichtungen aufgrund der unterschiedlichen Verluste stark verschiedene Finesse aufweisen, erleiden sie auch unterschiedliche Phasenverschiebungen solange die Frequenz des Lasers nicht mit einer Eigenfrequenz des optischen Resonators übereinstimmt.



Die E_{\perp} Komponente wird aufgrund der großen Verluste im Wesentlichen vom Einkoppelspiegel mit nur geringer Phasenverschiebung reflektiert und kann daher quasi als *Phasenreferenz* dienen. Die E_{\parallel} Komponente wird nahe der Resonanz effizient eingekoppelt und erfährt große Phasenverschiebungen. Das im Resonator umlaufende Licht verlässt durch den Einkoppelspiegel zu einem Teil den Resonator (Lecklicht) und überlagert sich mit dem zuvor reflektiertem Teilstrahl. Die unterschiedliche Phasenverschiebung führt zu einer elliptischen Polarisation des reflektierten Lichts die mit einer Polarisationsanalyse detektiert werden kann. Dazu dient die $\frac{\lambda}{4}$ -Platte (*quarter wave plate*) und der *Polarisationsstrahlteilerwürfel* (*polarisation beam splitter, PBS*) in Abb. 5.5.

Die $\frac{\lambda}{4}$ -Platte wird zunächst so eingestellt, dass das linear polarisierte Licht zu gleichen Teilen auf die beiden Photodioden PD1 und PD2 aufgeteilt wird. Das elliptische Licht, das nahe der Resonanz auftritt, kann man sich aus einer σ^{+} und σ^{-} Komponente mit unterschiedlichen Amplituden zusammengesetzt denken. Die $\frac{\lambda}{4}$ Platte erzeugt daraus linear polarisiertes Licht mit zwei orthogonalen Komponenten die dann von den beiden Photodetektoren registriert werden. Die Photoströme $I_1 \sim |E_{\parallel}|^2$ und $I_2 \sim |E_{\perp}|^2$ werden durch geeignete elektronische Bauteile subtrahiert. Es gilt

$$(I_1 - I_2) \propto |E^{(0)}|^2 \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Theta \cdot \frac{t_1^2 \cdot r^2 \cdot \sin \delta}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2(\delta/2)}. \quad (5.16)$$

Dieses Signal ist in Abb. 5.6 dargestellt. Es weist eine steile Steigung in der Resonanz auf und hat einen "Fangbereich", der dem halben Abstand zur nächsten Resonanz entspricht. Die Form des Fehlersignals kann man sich auf folgende Art erklären. Unterhalb der Resonanz weist die E_{\perp} Komponente eine kleinere negative Phasenverschiebung auf, oberhalb eine kleinere positive Phasenverschiebung. Entsprechend überwiegt in einem Fall die σ^{+} und im anderen Fall die σ^{-} Amplitude. Damit erhält einmal PD1 und das andere Mal PD2 mehr Licht. Im Resonanzfall ist für beide Polarisationsrichtungen die Phasenverschiebung Null und man erhält gleiche

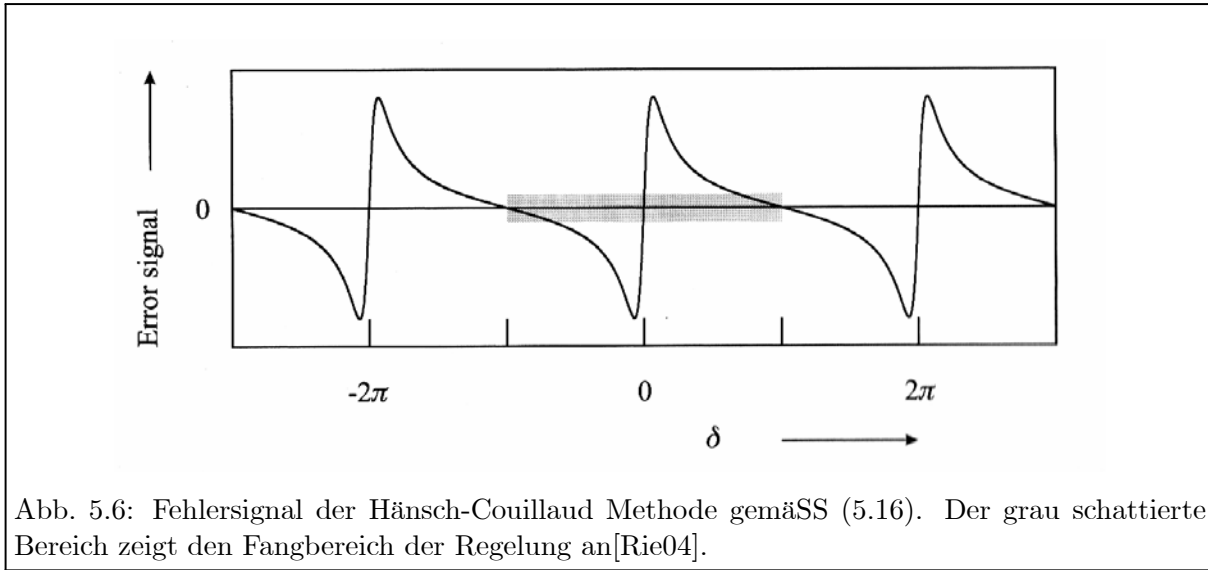


Abb. 5.6: Fehlersignal der Hänsch-Couillaud Methode gemäss (5.16). Der grau schattierte Bereich zeigt den Fangbereich der Regelung an[Rie04].

Intensitäten auf beiden Photodetektoren.

Die Hänsch-Couillaud Methode zeichnet sich durch einen einfachen und recht kostengünstigen Aufbau aus. Von Nachteil sind die Empfindlichkeit des Stabilisierungspunktes auf langsames Driften der Basislinie und der Einfluss technischen Rauschens bei kleinen Fourierfrequenzen. Letzteres kann bei der Verwendung der sogenannten Pound-Drever-Hall Technik vermieden werden.

5.2.4 Pound-Drever-Hall

Bei der PDM Technik, benannt nach ihren Erfindern R.W.P. Drever und J.L. Hall sowie R.V. Pound, der eine entsprechende Technik in der Mikrowellentechnik entwickelte, wird eine *Phasenmodulation* des Laserlichts verwendet.

Dabei werden dem Laserlicht mit der Laserfrequenz ω_L , zwei *Seitenbänder* mit den Frequenzen $\omega_L \pm \Omega_m$ hinzugefügt. Abbildung 5.7 zeigt einen Aufbau wie er typischerweise verwendet wird. Ein Teil des Laserlichts wird durch einen *elektrooptischen Modulator (EOM)* geschickt, an dem die Modulationsfrequenz ω_M angelegt wird. Typischerweise verwendet man einen kleinen Modulationsindex $\delta \ll 1$, so dass es genügt den Träger und die Seitenbänder erster Ordnung zu betrachten.

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 \cdot \cos(\omega_L \cdot t + \delta \cdot \cos \Omega_m \cdot t) \\
 &= E_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_L \cdot t + \delta \cdot \cos \Omega_m \cdot t)} \\
 &\approx E_0 \cdot \left[J_0(\delta) \cdot e^{i\omega_L t} + J_1(\delta) \cdot e^{i(\omega_L + \Omega_m)t} - J_1(\delta) \cdot e^{i(\omega_L - \Omega_m)t} \right]
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Es ist wichtig, dass bei reiner Phasenmodulation die Intensität des Lichts auf der Photodiode konstant bleibt. Da die beiden Seitenbänder um 180° phasenverschoben sind, kompensieren sich ihre Schwebungssignale mit dem Träger gegenseitig. Das Licht trifft danach auf den optischen Resonator und wird von diesem reflektiert. Der Träger und die Seitenbänder erfahren bei der Reflexion in der Nähe der Resonanz Änderungen ihrer Amplitude und ihrer Phasen durch den komplexen Reflektionskoeffizienten $r(\omega)$.

$$r(\omega) = r \frac{1 - e^{i \frac{\omega}{\Delta\nu_{\text{FSR}}}}}
 {1 - r^2 e^{i \frac{\omega}{\Delta\nu_{\text{FSR}}}}} \tag{5.22}$$

EXKURS: Phasenmodulation

Bei der *Phasenmodulation* wird die Phase einer harmonischen Welle periodisch mit der Zeit variiert.

$$E = E_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (5.17)$$

$$= E_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \delta \cdot \cos(\Omega_m t)) \quad (5.18)$$

mit dem *Modulationsindex* δ , der die maximale Differenz zwischen der Phase der modulierten und des unmodulierten Oszillators angibt. Die *momentane Laserfrequenz* ist gegeben durch:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\phi = \omega_0 - \Delta\omega \cdot \sin(\Omega_m t) \quad (5.19)$$

mit $\Delta\omega = \Omega_m \cdot \delta$. $\Delta\omega$ ist also die maximale Abweichung der momentanen Kreisfrequenz von ω_0 .

Phasen- und Frequenzmodulation sind also eng miteinander verknüpft. Statt einer Phasenmodulation mit Modulationsindex δ kann man ebensogut eine Frequenzmodulation mit dem Hub $\Omega_m \cdot \delta$ durchführen. Aus einer detaillierten Analyse des modulierten Signales erhält man

$$\begin{aligned} E = & J_0(\delta) \cos(\omega_0 t) + J_1(\delta) \{ \sin[(\omega_0 + \Omega_m)t] - \sin[(\omega_0 - \Omega_m)t] \} \\ & + J_2(\delta) \{ \sin[(\omega_0 + 2\Omega_m)t] + \sin[(\omega_0 - 2\Omega_m)t] \} \\ & + J_3(\delta) \{ \sin[(\omega_0 + 3\Omega_m)t] - \sin[(\omega_0 - 3\Omega_m)t] \} \\ & \text{etc.} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Es treten also neben der Trägerfrequenz ω_0 , *Seitenbänder* bei $\omega_0 \pm \Omega_m$, $\omega_0 \pm 2\Omega_m$, etc. auf, deren Amplituden durch die *Besselfunktion* $J_n(\delta)$ des Modulationskoeffizienten gegeben sind. Die Leistung in den Seitenbändern entspricht also $J_n^2(\delta)$ und als Daumenregel kann man sich merken, dass bei einer Modulation mit Modulationsindex δ nur die Seitenbänder bis zur Ordnung δ berücksichtigt werden müssen. Also für $\delta < 1$ genügt es den Träger und die beiden Seitenbänder erster Ordnung zu betrachten.

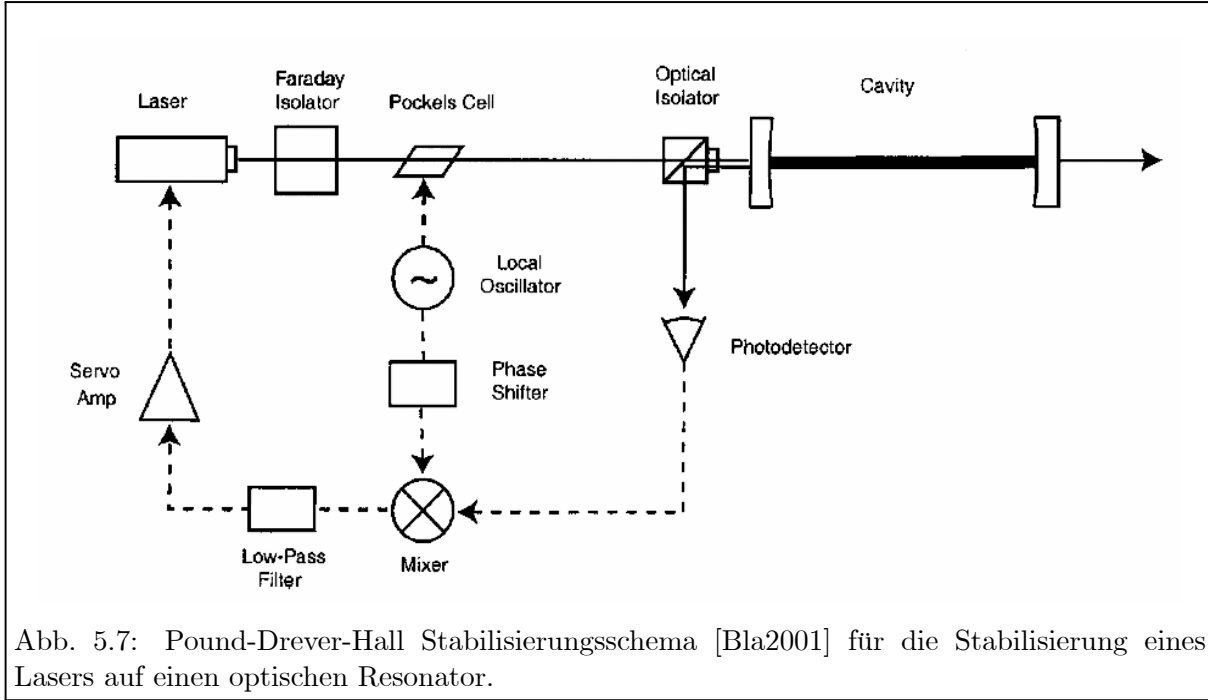


Abb. 5.7: Pound-Drever-Hall Stabilisierungsschema [Bla2001] für die Stabilisierung eines Lasers auf einen optischen Resonator.

Hiermit erhält man:

$$E_r(\omega) = \frac{E_0}{L} \left[r(\omega_L) \cdot J_0(\delta) \cdot e^{i\omega_L t} + r(\omega_L + \Omega_m) \cdot J_1(\delta) \cdot e^{i(\omega_L + \Omega_m)t} \right. \quad (5.23)$$

$$\left. - r(\omega_L - \Omega_m) \cdot J_1(\delta) \cdot e^{i(\omega_L - \Omega_m)t} \right] + \text{c.c.} \quad (5.24)$$

Um das reflektierte Licht zu analysieren, muss es vom einfallenden Licht getrennt werden. Dazu verwendet man entweder, wie in Abb. 5.7 gezeigt, einen *optischen Isolator* oder eine Kombination aus *Polstrahlteiler (PBS)* und $\frac{\lambda}{4}$ -Platte. Der zweifache Durchgang durch die $\frac{\lambda}{4}$ -Platte bewirkt eine Rotation der Polarisationssebene um 90° und dadurch eine Trennung am PBS.

Aus der Photodiode mit der Nachweiseffizienz η_{PD} wird durch das Licht ein Photostrom $i_{PD} \approx \eta_{PD} \cdot P_r \propto E_r E_r^*$ ausgelöst. Auf der Photodiode treten Schwebungssignale zwischen der Trägerfrequenz und den Seitenbändern mit der Frequenz Ω_m auf³. Eine genaue Analyse des Photostroms, die wir hier nicht im Detail ausführen wollen führt auf:

$$i_{PD}^{(\omega_M)} \propto J_0(\delta) \cdot J_1(\delta) \{ A(\Delta\omega) \cos(\Omega_m t) + D(\Delta\omega) \sin(\Omega_m t) \} \quad (5.25)$$

Die Koeffizienten $A(\Delta\omega)$ und $D(\Delta\omega)$ sind abhängig von der Abweichung der Laserfrequenz ω_L und der Resonanzfrequenz des optischen Resonators.

$$A(\Delta\omega) = -4 \frac{\Omega_m (\Gamma/2) \Delta\omega \cdot [(\Gamma/2)^2 - \Delta\omega^2 + \Omega_m^2]}{[(\Gamma/2)^2 + \Delta\omega^2] \cdot [(\Gamma/2)^2 + (\Delta\omega + \Omega_m)^2] \cdot [(\Gamma/2)^2 + (\Delta\omega - \Omega_m)^2]} \quad (5.26)$$

$$D(\Delta\omega) = -4 \frac{\Omega_m (\Gamma/2)^2 \Delta\omega \cdot [(\Gamma/2)^2 - \Delta\omega^2 + \Omega_m^2]}{[(\Gamma/2)^2 + \Delta\omega^2] \cdot [(\Gamma/2)^2 + (\Delta\omega + \Omega_m)^2] \cdot [(\Gamma/2)^2 + (\Delta\omega - \Omega_m)^2]} \quad (5.27)$$

³Darüber hinaus erhält das Spektrum natürlich auch Schwebungssignale zwischen den Seitenbändern mit der Frequenz 2ω , die im Folgenden aber nicht interessieren.

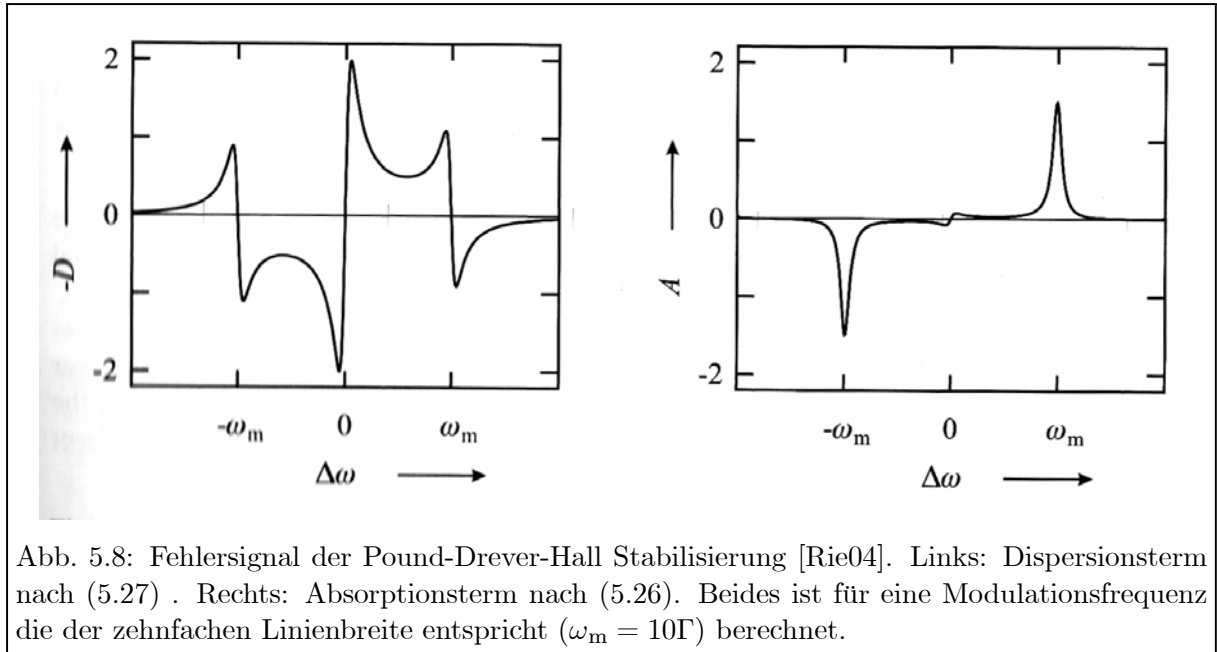


Abb. 5.8: Fehlersignal der Pound-Drever-Hall Stabilisierung [Rie04]. Links: Dispersionsterm nach (5.27) . Rechts: Absorptionsterm nach (5.26). Beides ist für eine Modulationsfrequenz die der zehnfachen Linienbreite entspricht ($\omega_m = 10\Gamma$) berechnet.

Gemäß Gleichung 5.21 erhält der Photostrom also Anteile die mit $\cos(\Omega_m \cdot t)$ oszillieren, also in Phase mit der Modulationsfrequenz, und solche die mit $\sin(\Omega_m \cdot t)$ oszillieren und damit 90° Phasenverschoben sind. Bei einem *phasenempfindlichen Nachweis* kann man eine der beiden Komponenten wählen und detektieren. Bei dem unverschobenen Anteil handelt es sich um das Signal, welches durch die Absorption einer der Frequenzkomponenten verursacht wird. Es ist daher in Phase mit der Modulation. Der phasenverschobene Anteil hingegen kommt durch die Phasenverschiebung zwischen dem prompt reflektierten und dem aus dem Resonatorinneren austretenden Licht einer der Frequenzkomponenten nahe der FPI - Resonanz zustande.

Die Frequenzabhängigkeit der beiden Komponenten ist in Abb. 5.8 wiedergegeben ($\Omega_m = 10 \cdot \Gamma$) . Der phasenverschobene Term $D(\Delta\omega)$ (links) kann als Superposition von drei Dispersionssignalen der drei Frequenzkomponenten aufgefasst werden. Die Vorzeichen der Dispersionssignale von Träger und Seitenbändern sind entgegengesetzt. Nahe der Resonanzfrequenz verschwindet die Reflexion des Trägers, weist aber eine extreme Phasenabhängigkeit auf. Daraus ergibt sich im Fehlersignal der Nulldurchgang. Der steile Nulldurchgang ist für die Laserstabilisierung sehr gut geeignet.

Es lässt sich zeigen [Bla2001], dass dieser Teil des Signals nur bei hohen Modulationsfrequenzen $\omega_L \gg \Delta\nu_{FSR}/F$ von Bedeutung ist (F : Finesse, siehe Kapitel 2). Bei kleinen Modulationsfrequenzen ist der Anteil $A(\Delta\omega)$, der in Phase mit der Modulationsfrequenz auftritt und in Abbildung 5.8 rechts dargestellt ist, dominierend. Bei diesem handelt es sich um ein "Absorptions" Signal, das durch die Absorption der Seitenbänder dominiert. Im einfallenden Strahl sind die beiden Seitenbänder um 180° außer Phase. Ihre Beatsignale mit dem Träger heben sich also gerade auf, solange ihre Intensität oder ihre Phase relativ zum Träger durch die Reflexion kaum geändert wird. Die Absorption zeigt ausgeprägte Strukturen, wenn eines der beiden Seitenbänder stark absorbiert wird. Die Absorption des Trägers spielt eine viel kleinere Rolle, weil dadurch die Beatsignale der beiden Seitenbändern in gleicher Weise beeinflusst wird. Beim dispersiven Signal $D(\Delta\omega)$ spielt es dagegen keine Rolle, ob eine der Phasen der Seitenbänder oder ein Phase des Trägers variiert. Daher sind alle drei Signale deutlich sichtbar.

Ein wesentlicher Vorteil des dispersiven Signals ist die hohe Geschwindigkeit mit der Phasenfluktuation des Laserstrahls kompensiert werden können. Eine plötzliche Frequenzänderung des

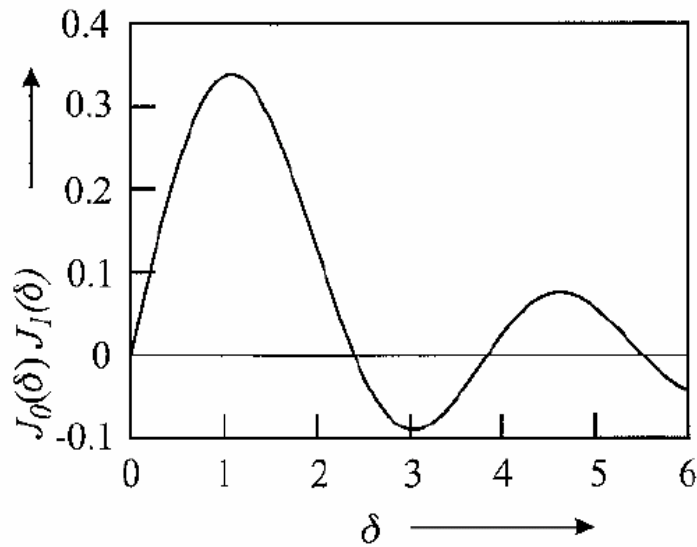


Abb. 5.9: Produkt der Besselfunktionen $J_0(\delta) \times J_1(\delta)$ als Funktion des Modulationsindex δ . Die Kurve ist proportional zur Steigung des Fehlersignals im Pound-Drever-Hall Verfahren [Rie04].

Lasers führt bei der Superposition von reflektiertem Licht und dem Lecklicht aus dem Resonator prompt zu einer *Phasensprung*, der detektiert und unmittelbar korrigiert werden kann. Das im Oszillator gespeicherte Licht dient als Frequenz- und Phasenreferenz über die Lebensdauer der Photonen im Resonator. Man vergleicht also quasi die Momentanfrequenz (Phase) des Lasers mit seiner über die "Erinnerungszeit" des Resonators zeitlich gemittelte Frequenz (Phase).

Das Fehlersignal (5.25) ist proportional zum Produkt der Besselfunktion $J_0 \times J_1$. Plottet man dieses Produkt, wie in Abb. 5.9 gezeigt, als Funktion des Modulationsindex δ , so erhält man das Maximum für $\delta \approx 1,08$.

5.2.5 Frequenz-Abstands-Stabilisierung

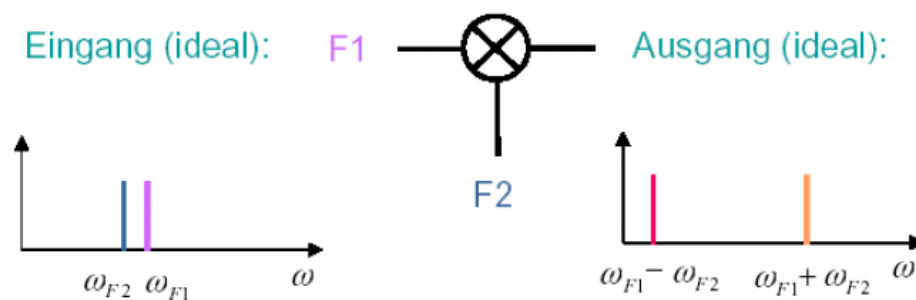
Hat man einen Laser auf eine sehr genau bekannte atomare oder molekulare Referenz stabilisiert, so kann man diesen nutzen, um einen weiteren Laser in einem Bereich von etwa ± 100 GHz um die Referenz herum zu stabilisieren und kontrolliert zu verstimmen. Dazu überlagert man Teilstrahlen der beiden Laser auf einer Photodiode, misst die Frequenz des Schwebungssignals $\propto \sin(\omega_1 - \omega_2)$ und regelt den zweiten Laser so, dass die Schwebungsfrequenz $\omega_{\text{BeatSoll}} = \omega_1 - \omega_2$ konstant bleibt. ω_{BeatSoll} kann dabei mit Radiofrequenzgenauigkeit eingestellt und gemessen werden. In der Regel hängt die Unsicherheit der Frequenz $\omega_2 = \omega_1 + \omega_{\text{BeatSoll}}$ daher nur von der Unsicherheit in der Referenzfrequenz ω_1 ab. In Abbildung 5.10 ist eine mögliche Realisation dieses Stabilisierungsverfahrens gezeigt.

Das mit der Photodiode registrierte Schwebungssignal wird zunächst verstärkt und dann in einen Eingang eines Mischers eingespeist. Der zweite Eingang des Mischers wird mit dem Signal eines Synthesizers versorgt, der bei einer Frequenz, die dem gewünschten Frequenzabstand ω_{BeatSoll} zwischen den beiden Lasern plus einem festen Frequenzoffset $\Delta\omega$ entspricht, betrieben wird $\Omega_{\text{Osz}} = \omega_{\text{BeatSoll}} + \Delta\omega$. Wenn der Frequenzabstand der beiden Laser korrekt ist, liegt am Ausgang des Mischers die Offsetfrequenz $\Delta\omega$ an, andernfalls $\Delta\omega + \delta$ mit der Abweichung δ von der gewünschten Laserfrequenz. Ein sogenannter Frequenzdiskriminator mit Zentralfrequenz $\Delta\omega$

EXKURS: Mixer/ Mischer

Ein idealer Mischer entspricht einem Multiplizierer. Er bildet das Produkt zweier Eingangssignale und gibt das resultierende Produktsignal an einen dritten Ausgang aus. Die beiden Eingänge werden als *RF* (Radiofrequenz) und *LO* (Lokaler Oszillator) bezeichnet. Daran erkennt man bereits, dass die Benennung aus der Radiotechnik stammt.

Der Ausgang wird als *IF* (Intermediate Frequency) bezeichnet. Das Schaltbild des Mixers ist ein Produktkreuz in einem Kreis.



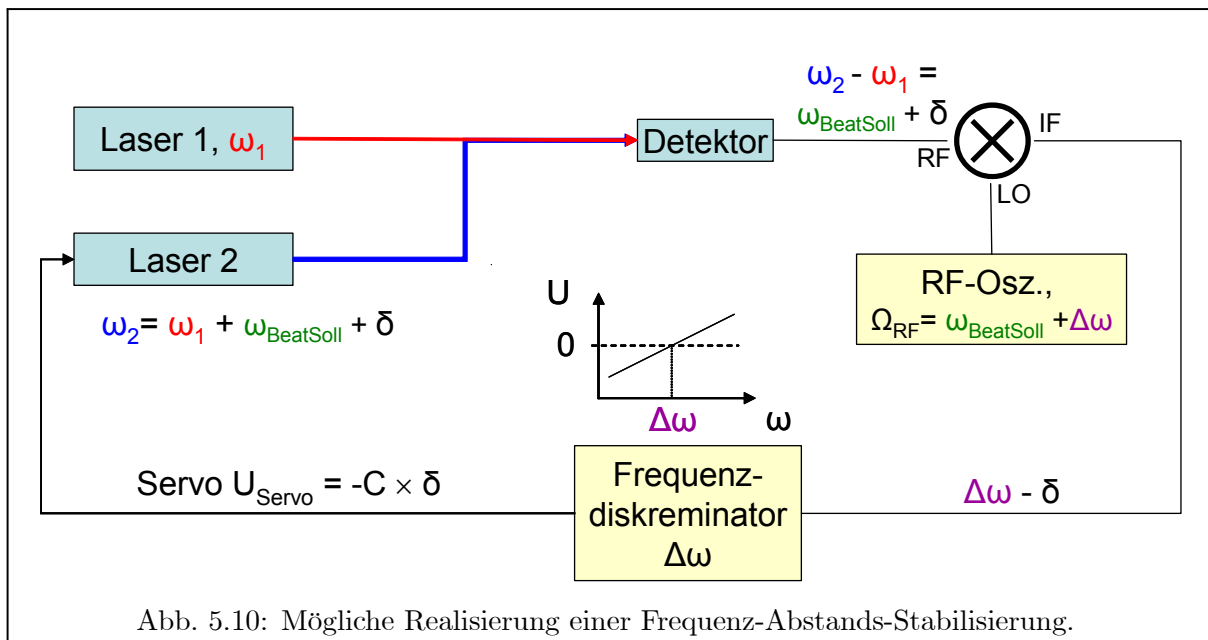
Die Mischer werden häufig mit einem sinusförmigen Eingangs- und einem sinusförmigen Ausgangssignalpegel unterschiedlicher Frequenz ω_{F1} und ω_{F2} betrieben. Die Multiplikation der beiden Signale führt gemäß

$$\sin(\omega_{F1}t) \sin(\omega_{F2}t) = \frac{1}{2} \left\{ \cos[(\omega_{F1} - \omega_{F2}) \cdot t] - \cos[(\omega_{F1} + \omega_{F2}) \cdot t] \right\} \quad (5.28)$$

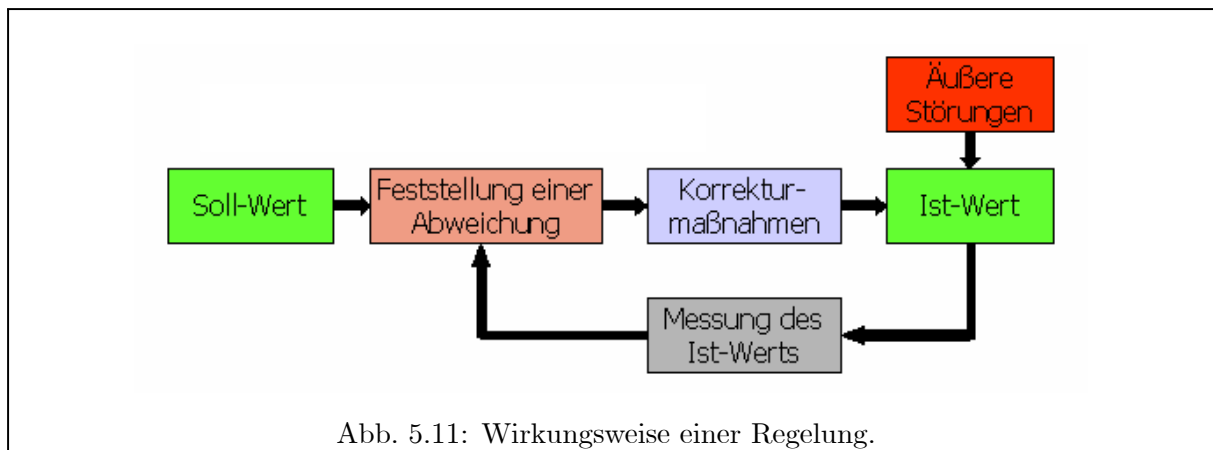
zu einem Ausgangssignal, das aus zwei Frequenzen besteht - der Differenz- und der Summenfrequenz. Filtert man nun einen der beiden Anteile mit einem Hoch- oder Tiefpass heraus, so erhält man einen *Aufwärts-* (*up converter*) bzw. einen *Abwärtsmischer* (*down converter*). Ein spezieller Fall tritt ein, wenn RF und LO die gleiche Frequenz, aber unterschiedliche Phase besitzen. Dann ergibt sich:

$$\sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \{ \cos \varphi - \cos(2\omega_0 t + \varphi) \} \quad (5.29)$$

Mit einem Tiefpassfilter erhält man jetzt eine Gleichspannung, die von der Phasenverschiebung der beiden Signale abhängt. Es handelt sich also um einen *Phasendetektor*. Zuletzt sei noch erwähnt, dass das Produktsignal aktiv (mit Transistoren) oder passiv (z.B. Schottky-Dioden) erzeugt werden kann. Es kommt durch die Verarbeitung der Spannungen in hochgradig nicht-linearen Elementen zustande. Wenn die beiden Eingangssignale im Ausgang unterdrückt werden und dort nur Summen- und Differenzfrequenzen erscheinen, so spricht man von einem *Double-Balanced Mixer (DBM)*.



erzeugt aus dieser Frequenz eine Gleichspannung die direkt proportional zu δ ist und anschließend in einem Regelverstärker zu einem Servosignal $U_{\text{Servo}} = -C \cdot \delta$ verarbeitet und auf ein Regelglied in Laser 2 zurückgeführt wird. Damit wird Laser 2 auf die Frequenz $\omega_1 + \omega_{\text{BeatSoll}} = \omega_1 + \Omega_{\text{Osz}} - \Delta\omega$ stabilisiert. Neben diesem Schema gibt es eine Vielzahl weiterer Möglichkeiten "Frequency-Offset-Stabilisierungen" zu realisieren. Charakteristisch ist der Einsatz von Mischern als up oder down-Konverter.



5.3 Grundlagen der Regeltechnik

Wir wollen jetzt kurz einige Grundlagen der Regeltechnik zusammenfassen, die bei der Laserstabilisierung zum Einsatz kommen. Für Details sei auf Vorlesungen über Mess- und Regeltechnik verwiesen.

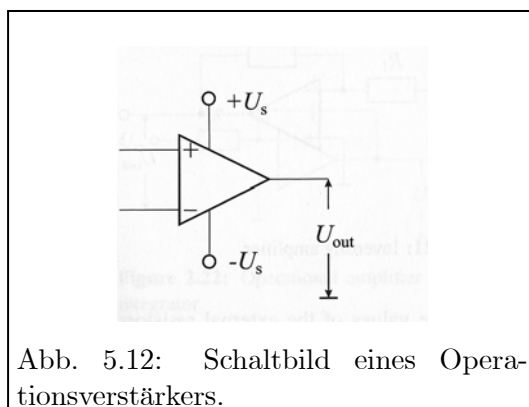
Der Regler hat die Aufgabe, die Regelgröße (Laserfrequenz) zu messen, sie mit dem Sollwert (Sollfrequenz) zu vergleichen und bei Abweichungen die Stellgröße so zu verändern, dass Soll- und Istwert der Regelgröße wieder übereinstimmen bzw. die Differenz minimal wird. Die Wirkungsweise eines Reglers ist in Abbildung 5.11 dargestellt.

5.3.1 Der Operationsverstärker

Das wichtigste Bauteil der meisten Regelkreise ist der sogenannte *Operationsverstärker*. Durch geeignete *Rückkoppelkreise* lassen sich mit ihm verschiedene Reglertypen realisieren. Ein Operationsverstärker (OP) ist ein Differenzverstärker mit idealerweise

- (a) unendlich hohem Eingangswiderstand,
- (b) unendlich hoher Verstärkung und
- (c) vernachlässigbarem Ausgangswiderstand.

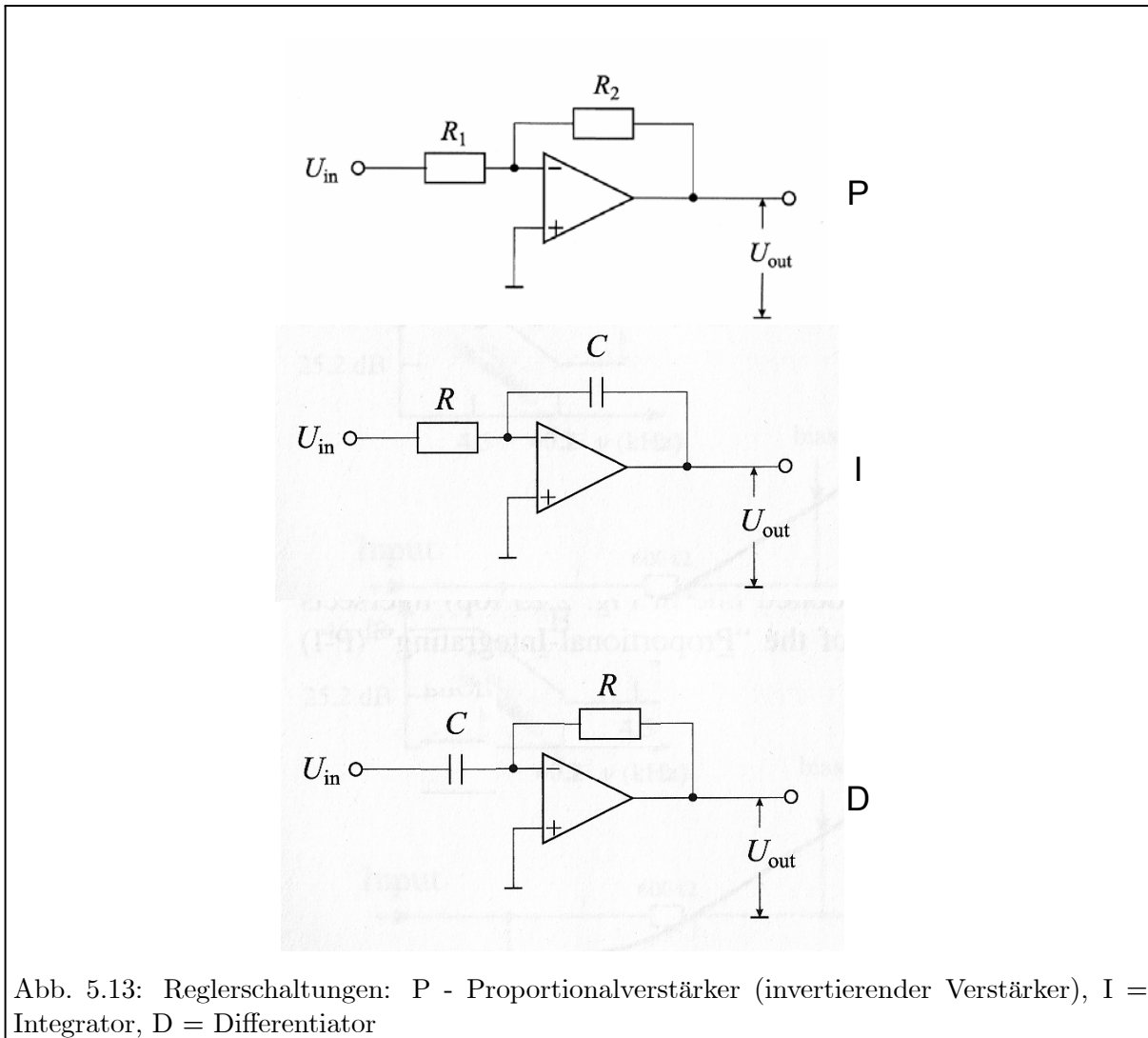
Das Schaltbild eines OP ist in Abbildung 5.12 dargestellt.



Der OP besitzt einen *invertierenden* (-) und einen *nicht invertierenden* Eingang. Die Differenz zwischen diesen beiden Eingängen wird verstärkt und eine Ausgangsspannung aus der Versorgungsspannung $\pm U_S$ erzeugt. Die maximale Ausgangsspannung liegt dabei ein wenig unterhalb der Versorgungsspannung. Seine Nützlichkeit erhält der OP, wenn er mit einer Rückkopplungsschleife versehen wird, d. h., ein Teil seiner Ausgangsspannung wird auf einen der Eingangskanäle zurückgeführt. Wir wollen einige der wichtigsten Schaltungen jetzt kennen lernen- Um sie zu analysieren sollte man die

zwei "*goldenen Regeln*" des OP mit Rückkopplungskreis kennen:

- (I) Die Ausgangsspannung stellt sich so ein, dass die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Eingängen Null wird.



(II) Der Eingang des OP zieht nur einen vernachlässigbar kleinen Strom $I_{in} \approx 0$

5.3.2 Der invertierende Verstärker (Proportionalregler)

Das Schaltbild des invertierenden Verstärkers ist in Abbildung 5.13 (oben) gezeigt. Das Ausgangssignal wird über den Widerstand R_2 auf den invertierenden Eingang des OP's zurückgeführt. Gemäß Regel (I) muss Punkt A ebenso wie Punkt B auf Masse sein d.h. die Eingangsspannung U_{in} fällt komplett über R_1 ab, die Ausgangsspannung U_{aus} komplett über R_2 . Gemäß Regel 2 muss gelten

$$\frac{U_{aus}}{R_2} = -\frac{U_{in}}{R_1} \quad (5.30)$$

Damit erhält man für die Verstärkung (Gain):

$$G = \frac{U_{aus}}{U_{in}} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (5.31)$$

Die Eingangsspannung wird also um den Faktor G Verstärkt und besitzt das umgekehrte Vorzeichen wie die Eingangsspannung.

5.3.3 Der Integrator

Ersetzt man nun im invertierendem (proportional) Verstärker den Rückkopplungswiderstand durch eine Kapazität C wie in Abbildung 5.13 (mitte), so erhält man

$$I_{\text{in}} = \frac{U_{\text{in}}}{R} = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{d}{dt} U_{\text{aus}} \quad (5.32)$$

$$U_{\text{aus}}(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U_{\text{in}}(t') dt' + \text{const} \quad (5.33)$$

Die Ausgangsspannung ist proportional zur über die Zeit t integrierten Eingangsspannung. Der *Integrator* ist für Stabilisierungsnetzwerke von extremer Wichtigkeit, da es nur mit ihm gelingt, die Regelabweichungen wirklich auf Null zu bringen und damit den Laser exakt auf die Resonanzposition zu stabilisieren. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass es nicht zur Integration von Offset Spannungen des OP kommt, die dazu führen können, dass der OP in Sättigung läuft, obwohl beide Eingänge kurz geschlossen sind.

Präzisions-OP's besitzen die Möglichkeit solche Offsets zu kompensieren. Wenn man dies durchführt, sollte es unter Betriebsbedingungen geschehen, da die Offsets und die Kompensation oft auch noch eine Temperaturabhängigkeit besitzen.

5.3.4 Der Differentiator

Für die Laserstabilisierung besitzt der *Differentiator* keine so große Bedeutung wie der Integrator. Der Vollständigkeitshalber sei er hier jedoch aufgeführt, da er in vielen anderen Regelkreisen durchaus wichtig ist. Gegenüber dem Integrator ist die Rolle von R und C jetzt gerade vertauscht, wie in Abbildung 5.13 (unten) zu sehen ist. Jetzt verursacht eine sich ändernde Eingangsspannung einen Strom

$$I_{\text{in}} = C \frac{d}{dt} U_{\text{in}} \quad (5.34)$$

der aufgrund von Regel (II) über den Widerstand R_2 fließen muss. Über R_2 liegt jedoch wegen Regel (I) gerade U_{aus} an. Also gilt:

$$U_{\text{aus}} = -RC \frac{d}{dt} U_{\text{in}} \quad (5.35)$$

Die Ausgangsspannung ist damit proportional zur zeitlichen Ableitung der Eingangsspannung.

5.4 Servokreise für die Laserstabilisierung

Die Wahl eines bestimmten Reglertyps richtet sich nach dem geforderten Zeitverhalten und der geforderten Regelgenauigkeit der Regelstrecke. Wir wollen im Folgenden die verschiedenen Kombinationen von Reglertypen, die häufig zum Einsatz kommen, kurz besprechen. Für nähere Details sei wiederum auf eine Vorlesung über die Mess- und Regeltechnik verwiesen.

5.4.1 P-Regler

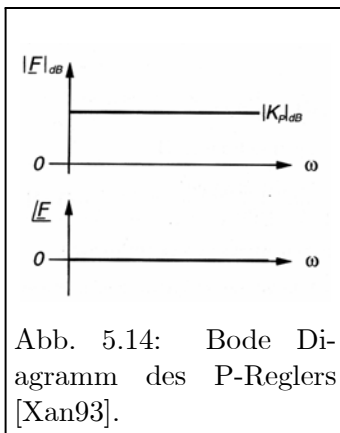


Abb. 5.14: Bode Diagramm des P-Reglers [Xan93].

Der *proportionalwirkende Regler* multipliziert die Regelabweichung mit einem Verstärkungsfaktor K_p und gibt das Ergebnis unverzögert weiter. Der P-geregelte Kreis ist einfach und mittelschnell im Vergleich zu anderen Regelungen. Das Problem ist die bleibende Regelabweichung!

Bei der Konzeption solcher Regler sind der *Amplitudengang der Verstärkung* und der *Phasengang* wichtige Kenngrößen. Diese werden üblicherweise in einem *Bode-Diagramm* dargestellt. Dieses besteht aus einem Graph für den Betrag (die Amplitudenverstärkung) und einem für das Argument (die Phasenverschiebung) einer komplexen *Übertragungsfunktion*. Auf der Abszisse wird die Frequenz logarithmisch dargestellt, um das Verhalten über einen großen Frequenzbereich ersichtlich zu machen. Auf der Ordinate des ersten Graphen wird die Verstärkung der Amplitude, also der komplexe Betrag der Übertragungsfunktion in *Dezibel* dargestellt. Dieser Graph heisst *Amplitudengang*. Die Auftragung in Dezibel ist deshalb geschickt, weil bei der Kombination verschiedener Reglertypen die Verstärkungen der Einzelkomponenten multipliziert werden müssen, was auf einer logarithmischen Achse einer einfachen Addition entspricht. Auf der zweiten Ordinate wird die Phasenverschiebung, also das komplexe Argument der Übertragungsfunktion linear aufgetragen. Dies ist der *Phasengang*. Das triviale Bode-Diagramm des P-Reglers ist in Abbildung 5.14 gezeigt, die Verstärkung ist ebenso konstant und frequenzunabhängig wie die Phase ($\varphi = 0$).

5.4.2 I-Regler

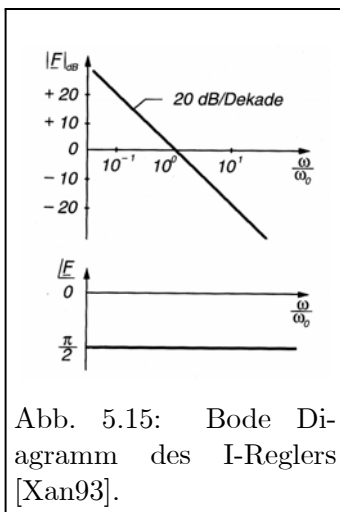


Abb. 5.15: Bode Diagramm des I-Reglers [Xan93].

Der *integralwirkende Regler* summiert die Regelabweichung über der Zeit auf und multipliziert die Summe (d.h. das Integral) mit dem Faktor K_i . Je länger eine Regelabweichung ansteht, desto größer wird die Stellgröße des I-Reglers. Der I-geregelte Kreis ist langsam im Vergleich zu anderen Regelungen. Er hat aber den Vorteil, dass die Abweichung vollständig eliminiert wird. Der Integrator ergibt sich aus dem Proportionalverstärker indem man im Rückkoppelkreis den ohmschen Widerstand R durch einen Kondensator C ersetzt, dessen komplexe Impedanz durch

$$R_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \tag{5.36}$$

gegeben ist. Für die komplexe Verstärkung

$$A = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} \tag{5.37}$$

folgt damit

$$A = \frac{-i}{\omega RC} \tag{5.38}$$

und damit

$$|A| = \frac{1}{\omega RC}, \quad \tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(A)}{\text{Re}(A)} = -\infty \rightsquigarrow \varphi = -90^\circ. \tag{5.39}$$

Die Phasenverschiebung beträgt also konstant -90° und die Verstärkung nimmt mit 20 dB/Dekade , bzw. 6 dB/Oktave ab⁴. Bei der Frequenz $\omega = 1/RC$ beträgt die Verstärkung gerade 1.

5.4.3 PI-Regler

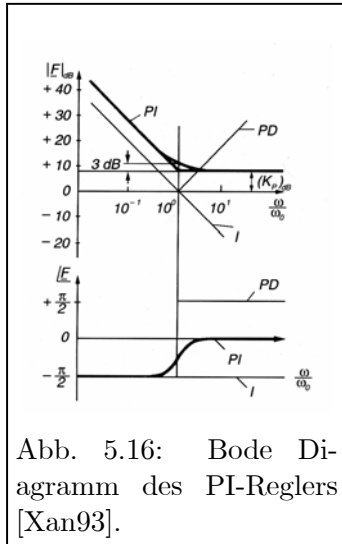


Abb. 5.16: Bode Diagramm des PI-Reglers [Xan93].

Der PI-Regler ist die Kombination aus P- und I-Regler und kombiniert den Vorteil des P-Reglers, nämlich schnelle Reaktion, mit dem Vorteil des I-Reglers, der exakten Ausregelung. Der PI-geregelte Kreis ist also *genau und mittelschnell*. Man kann ihn durch den zusätzlichen Einbau eines Kondensators in die Rückkopplungsschleife des Proportionalverstärkers realisieren. Bei niedrigen Frequenzen ist die Reaktanz C dominierend, bei hohen Frequenzen der ohmsche Widerstand R . Eine einfache Analyse ergibt

$$|A| = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}} \quad \varphi = -\arctan \frac{1}{\omega RC}. \quad (5.40)$$

Damit fällt die Verstärkung A zunächst mit 20 dB/Dekade bevor bei der sogenannten Eckfrequenz $\omega_C = 1/RC$ der Proportionalanteil dominierend wird. Der Phasengang beginnt bei -90° bei kleinen Frequenzen, durchtritt die 45° bei der Eckfrequenz und läuft asymptotisch gegen Null.

5.4.4 D-Regler

Der D-Regler bewertet die Änderung einer Regelabweichung, er differenziert. Ein reiner D-Regler ergibt sich aus dem Proportionalverstärker indem man den Widerstand am Eingang des OP's durch einen Kondensator ersetzt. Dadurch wird nur der variierende Teil der Eingangsspannung an den OP übergeben

$$I_{\text{ein}} = \frac{U_{\text{aus}}}{R} = -C \frac{d}{dt} U_{\text{ein}} \quad (5.41)$$

womit sich

$$U_{\text{aus}} = -RC \frac{d}{dt} U_{\text{ein}} \quad (5.42)$$

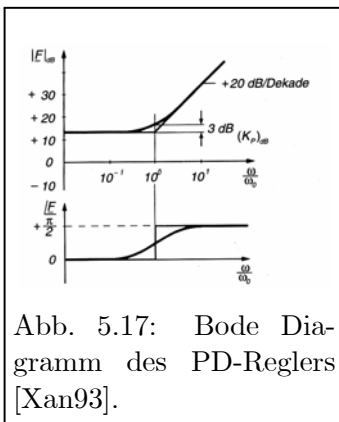
ergibt. Für Amplituden- und Phasengang erhält man damit

$$|A| = \omega RC \quad \varphi = +90^\circ. \quad (5.43)$$

Die Verstärkung steigt also mit 20 dB/Dekade und die Phase ist konstant bei $+90^\circ$. Weil der D-Regler nur auf Signaländerungen reagiert, eine konstante Regelabweichung also niemals eliminieren kann, tritt er nie in Reinform auf, sondern nur in Kombination mit einem der anderen Grundtypen.

⁴Die Einheit des dekadischen Logarithmus eines Leistungsverhältnisses $\frac{P_{\text{aus}}}{P_{\text{ein}}}$ ist 1 Bel = 10 Dezibel (dBel). Bezogen auf die Spannungspegel gilt $10 \log(P_{\text{aus}}/P_{\text{ein}}) = 10 \log(U_{\text{aus}}^2/U_{\text{ein}}^2) = 20 \log(U_{\text{aus}}/U_{\text{ein}})$.

5.4.5 PD-Regler



Der PD-Regler kombiniert den D-Regler mit einem P-Anteil. Er reagiert im Gegensatz zum reinen P-Regler schon auf Ankündigungen von Veränderungen, das bewirkt sozusagen ein Vorhalten beim Regeln. Der PD-geregelte Kreis ist sehr schnell im Vergleich zu anderen Regelungen, und manche Regelkreise (solche mit zweifacher Integration) sind ohne D-Anteil überhaupt nicht stabilisierbar (das liegt an der großen auftretenden Phasenverschiebung die durch den D-Anteil wieder kompensiert wird). Das Problem der proportionalen Regler, die bleibende Regelabweichung, ist beim PD-Regler allerdings weiterhin vorhanden! Darüber hinaus sollte der D-Anteil vorsichtig eingesetzt werden, weil er hochfrequente Störsignale verstärkt.

5.4.6 PID-Regler

Der PID Regler ist der universellste der klassischen Regler und vereinigt die guten Eigenschaften der anderen Regler. Der PID-geregelte Kreis ist *genau und sehr schnell*. Er kommt deshalb in vielen Anwendungen zum Einsatz.

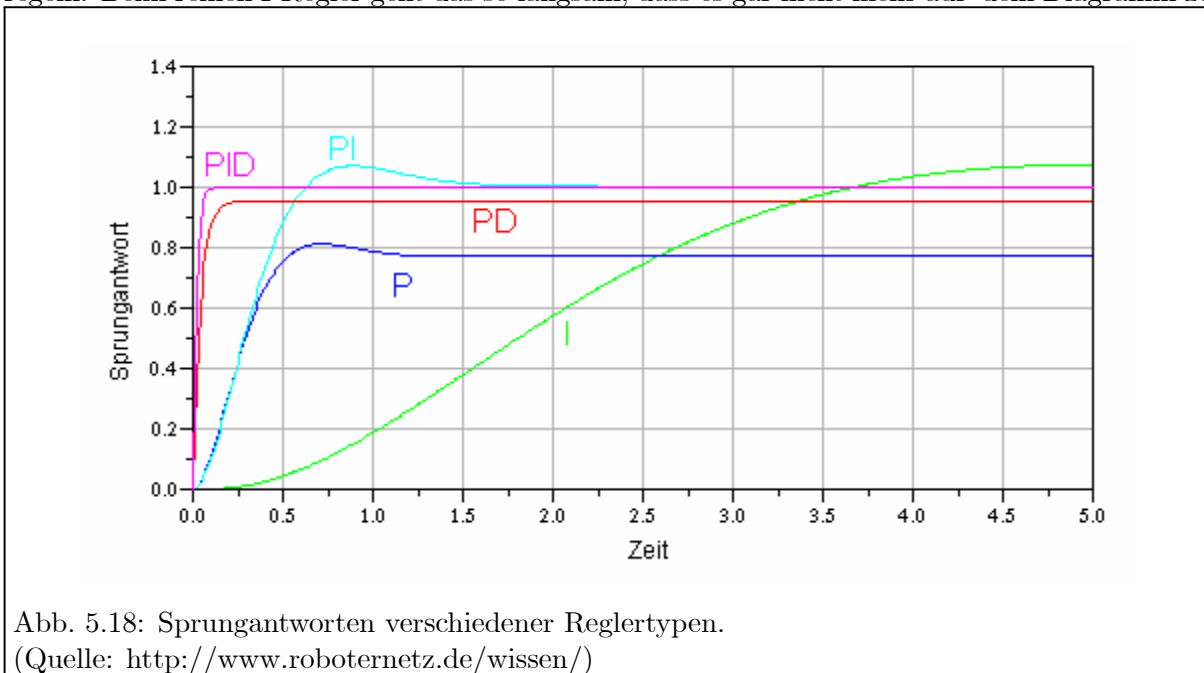
Zusammenfassend lassen sich die Anteile wie folgt griffig beschreiben:

P – Anteil: „Je größer die Regelabweichung, umso größer muss die Stellgröße sein“

I – Anteil: „Solange die Regelabweichung auftritt, muss die Stellgröße verändert werden“

D – Anteil: „Je stärker sich die Regelabweichung verändert, umso stärker muss die Regelung eingreifen“

In Abbildung 5.18 ist der Vergleich von P-, I-, PI-, PD- und PID-Regler in einem Regelkreis dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass die Regler ohne I-Anteil (P und PD) eine bleibende Regelabweichung aufweisen. Erst die Regler mit I-Anteil können auf den Endwert von 1 ausregeln. Beim reinen I-Regler geht das so langsam, dass es gar nicht mehr auf dem Diagramm zu



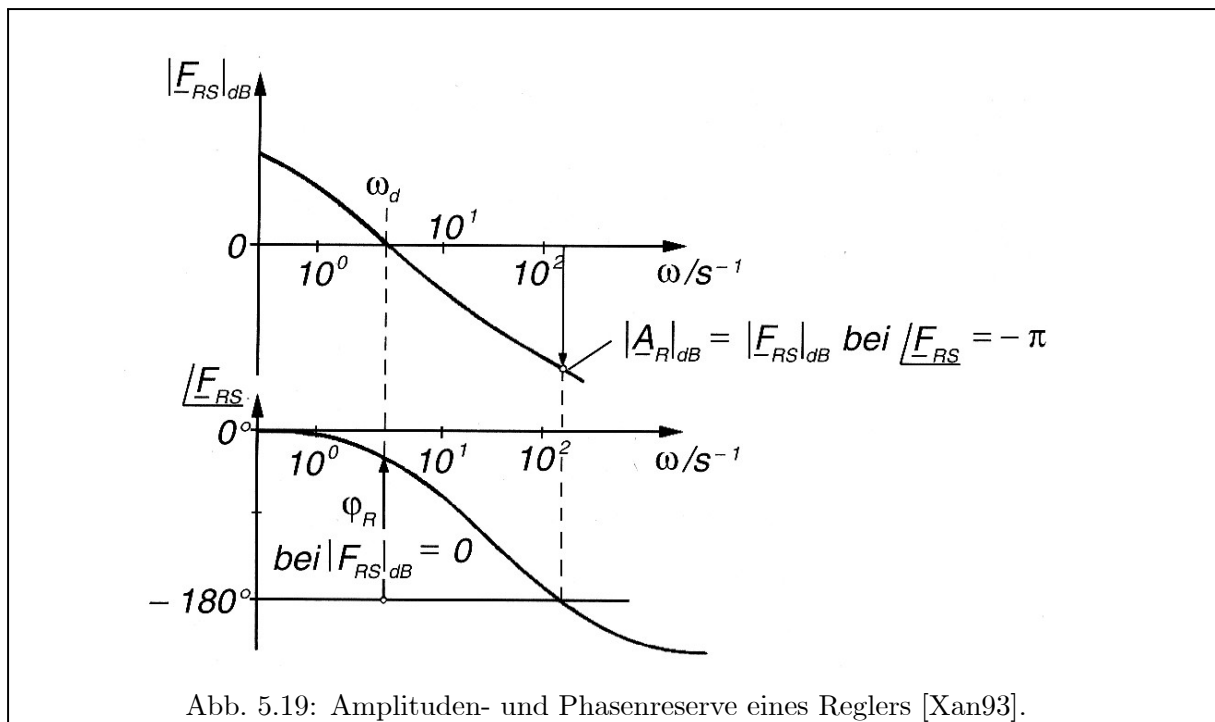


Abb. 5.19: Amplituden- und Phasenreserve eines Reglers [Xan93].

sehen ist. Der Hauptzweck eines I-Anteils ist also die Vermeidung bleibender Regelabweichungen.

Die schnellsten Regler sind die mit einem D-Anteil (PD und PID). Der D-Anteil kommt deshalb hauptsächlich zum Einsatz, wenn schnelle Dynamik gefragt ist oder die Strecke selbst schon instabil ist. Voraussetzung für die Schnelligkeit ist allerdings, dass keine Begrenzung im Stellglied oder Aktuator auftritt. In der Praxis ist eine Begrenzung meistens nicht zu vermeiden, deshalb gilt die *Sprungantwort* in der Praxis nur für kleine Sprünge.

5.4.7 Stabilitätskriterium des Regelkreises

Das Zeitverhalten des rückgekoppelten Regelkreises hängt entscheidend vom Verlauf des Frequenzganges der offenen Regelschleife in der Umgebung des Durchtretens durch die 0 dB-Achse ab. In der Regelungstechnik wird daher der offene Regelkreis im Bode-Diagramm aufgetragen. Das erlaubt einen schnellen Überblick über Stabilität und möglichen Reserven zur Optimierung. Das *Nyquist-Kriterium* hilft uns, die *Stabilität* eines Regelkreises zu beurteilen. Wir wollen an dieser Stelle nur das *vereinfachte Stabilitätskriterium nach Bode* behandeln, welches unter der Voraussetzung gilt, dass der Amplitudengang des offenen Regelkreises monoton fallend ist. Es erlaubt uns, die Stabilität des Kreises direkt aus dem Bode-Diagramm abzulesen und besagt:

Der geschlossene Regelkreis ist stabil

- wenn bei der Durchtrittsfrequenz - die Durchtrittsfrequenz ω_D ist diejenige Frequenz, bei der der Amplitudengang durch die 0 dB-Linie geht.- der Phasengang des offenen Kreises oberhalb von -180° verläuft (*Phasenreserve*, *Phasenrand* $\varphi_{\text{Res}} = 180^\circ - |\varphi(A(\omega_D))|$)
- wenn bei der Phase -180° die Amplitude unterhalb der 0 dB Linie verläuft (*Amplitudenreserve*, *Amplitudenrand* A_{Res}).

Dies ist in Abb.5.19 dargestellt.

5.5 Linienbreite des eingeschwingenen Lasers nach Schawlow und Townes

Wir haben bereits beschrieben, dass es möglich ist, einen Laser auf genau einem Resonatormode schwingen zu lassen. Nun ist der Verstärkungsprozess, wie wir mehrfach bemerkt haben, nichtlinear - die Verstärkung ist in den Spitzen um ein mehrfaches größer als an den Flanken - und daher werden Laserprofile i. A. sehr viel schmaler sein als die Eigenbreite der Resonatoren. Externe Einflüsse wie mechanische Schwingungen etc. werden die Linienbreite des Lasers allerdings beeinflussen und evtl. wieder verbreitern. Diese können mit den zuvor diskutierten Stabilisierungstechniken und Regelsystemen reduziert werden.

Uns interessiert nun, welche *prinzipiellen Beschränkungen* es für die tatsächliche Frequenzbreite $\Delta\nu_{\text{Laser}}$ gibt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass das Lasermedium den Resonator homogen und voll ausfüllt, d. h. die Inversion soll nicht ortsabhängig sein und es soll $d = L$ sein. Die praktische Beschränkung wird dann z. B. durch Fluktuationen der Brechzahl n und der Länge L des Resonators gegeben sein:

$$\frac{\Delta\nu_{\text{Laser}}}{\nu_{\text{Laser}}} = \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta L}{L} \quad (5.44)$$

Diese Effekte sollten technisch aber im Prinzip beliebig klein gemacht werden können. Wie schmal könnten die Moden eines Lasers wirklich werden? Die prinzipielle Begrenzung ist das nicht zu verhindernde Rauschen durch spontane Emission. Wir wollen dies anhand der folgenden Überlegungen plausibel machen.

Durch das Rauschen entsteht eine Amplitudenfluktuation und eine Phasenfluktuation. Im Laserbetrieb erfolgt eine Stabilisierung der Amplitude, die nur noch nach der *Poisson-Statistik* fluktuiert. Die Schwankungen der mittleren Besetzungszahlen in einem Lasermode des Resonators betragen danach

$$\frac{\langle \Delta N \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}. \quad (5.45)$$

Die Fluktuation der Besetzungszahl ist direkt mit der Amplitudenfluktuation der ausgekoppelten Strahlung gleichzusetzen.

Beispiel: Die Rate der aus einem Resonator ausgekoppelten Photonen eines He-Ne-Lasers von $P = 1$ mW mit der Photonenenergie $h\nu = 1,9$ eV ($\lambda = 633$ nm) ist $\dot{N}_L = P/h\nu \approx 10^{16} \text{ s}^{-1}$ mit einer relativen Fluktuation von 10^{-8} . Die Auswirkung dieser Amplitudenfluktuation auf die Frequenzverteilung ist vernachlässigbar.

Etwas anders sieht es mit der Phasenfluktuation aus. Wir wollen ihren Effekt auf die Breite der Frequenzverteilung anhand der Verlustrate der im Resonator gespeicherten kohärenten Energie behandeln. Der Zusammenhang zwischen der Frequenzbreite eines Oszillators $\Delta\nu_{\text{Osz}}$ und der Verlustrate seiner Energie γ ist durch

$$\Delta\nu_{\text{Osz}} = \frac{\gamma}{2\pi} \quad (5.46)$$

gegeben. Die Verlustrate können wir in der Form $\gamma = \dot{W}/W = P/W$ ausdrücken wobei W die im Resonator gespeicherte Energie und $P_{\text{Aus}} = \dot{W}$ die vom Resonatormode abgegebene Leistung ist. Wir erhalten

$$\Delta\nu_{\text{Osz}} = \frac{P_{\text{Aus}}}{2\pi W}. \quad (5.47)$$

Im stationären Laser-Betrieb weit oberhalb der Pumpschwelle ist aber die gespeicherte Energie des Lasermoden weitgehend konstant, denn die ausgekoppelte Leistung P wird durch die vom

Lasermedium an den Lasermode zugeführte Leistung gerade kompensiert. Letztere setzt sich aber aus induzierten und spontanen Prozessen zusammen. Während die induzierten Prozesse kohärent erfolgen, also weitere Photonen der Lasermode phasenrichtig zuführen, erfolgen die spontanen Prozesse statistisch. Diese Photonen stellen also quasi einen Verlustprozess dar, und ihr Anteil ist durch P_e , die dem Resonatormode zugeführten Leistung durch spontane Prozesse, gegeben. Damit ist aber eine Frequenzbreite von

$$\Delta\nu_{\text{Laser}} = \frac{P_e}{2\pi W} = \frac{P_e \gamma_R}{2\pi P_{\text{Aus}}} = \frac{P_e}{P_{\text{Aus}}} \Delta\nu_R \quad (5.48)$$

verbunden. Im zweiten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Leistung $P = \gamma_R W$ im Wesentlichen durch den Auskoppelspiegel verloren geht, was ja zu der Eigenbreite $\Delta\nu_R = \gamma_R/2\pi$ der Resonatormoden führt. Im stationären Betrieb ist die Leistung P_e die an spontanen Prozessen genau in den einen Lasermode erfolgt durch die Gesamtleistung an spontanen Prozessen, dividiert durch die Zahl $Z(\nu)$ der Moden im Modenvolumen V gegeben

$$P_e = \frac{n_2 A_{21} h\nu}{8\pi\nu^2/c^3} = n_2 B_{21} (h\nu)^2 \quad (5.49)$$

Die Besetzungsdichte n_2 kann aus der Schwellwertinversion (2.13) bestimmt werden

$$\Delta n_{\text{Schwelle}} = n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1 = n_2 (1 - g_2 n_1 / g_1 n_2) = \frac{\gamma}{B_{21} h\nu} = \frac{2\pi}{B_{21} h\nu} \Delta\nu_R. \quad (5.50)$$

Insgesamt erhält man somit die bereits 1958 von Schawlow und Townes angegebene Formel

$$\Delta\nu_{\text{Laser}} = \frac{2\pi h\nu (\Delta\nu_R)^2}{P_{\text{Aus}} (1 - g_2 n_1 / g_1 n_2)} \approx \frac{2\pi h\nu (\Delta\nu_R)^2}{P_{\text{Aus}}} \quad (5.51)$$

Für sichtbares Licht mit $\nu_L = 6 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ und $\Delta\nu_R = 4 \text{ MHz}$ erhalten wir bei einer ausgekoppelten Leistung von $P = 1 \text{ Watt}$ eine Frequenzbreite der Strahlung von $\Delta\nu_{\text{Laser}} = 2 \times 10^{-5} \text{ Hz}$.

Natürlich sind so hohe Stabilitäten nie erreicht worden, weil alle möglichen mechanischen Instabilitäten, z.B. der Laserspiegel, Luftdruckschwankungen, Instabilitäten im Pumpprozess etc., die Kurzzeitstabilität eines Lasers auf einige MHz beschränken. Für die Langzeitstabilität des freilaufenden Lasers, die durch Temperaturdriften, Alterungseffekte etc. bestimmt wird, läßt sich überhaupt keine definierte obere Grenze angeben, es sei denn die Linienbreite der Spektralfunktion des Laserübergangs. Um hier weiterzukommen muß man den Laser an einen externen Standard koppeln. Man hat damit inzwischen eine Stabilitätsgrenze von unter 1 Hz erreicht.

Kapitel 6

Gepulste Lasersysteme

6.1 Gütegeschaltete Laser

Für viele wissenschaftliche und technische Anwendungen ist man an sehr *leistungsstarken, kurzen Laserimpulsen* interessiert. Hierzu ist es nötig, möglichst viel Energie im Lasermedium zu speichern, was nur möglich ist, wenn man die Laserschwelle heraufsetzt. Wie wir bereits bemerkt haben, sind hierfür *Festkörperlaser* geeignet, weil bei ihnen das Verhältnis aus inhomogener und homogener Linienbreite besonders groß ist; die lange Lebensdauer des oberen Laserniveaus erleichtert zudem das Pumpen mit Hilfe von Blitzlampen, deren Lichtpulse typisch einige μs lang sind. Um die Schwelle noch zusätzlich zu erhöhen, kann man zwei Wege gehen:

1. Man erhöht künstlich die inhomogene Linienbreite durch Anlegen eines starken elektrischen Feldes an den Laserstab. Dadurch entsteht ein Starkeffekt in der Laserlinie, der sie weiter aufspaltet und verbreitert.
2. Man koppelt den Resonator vom Laserstab ab, indem man einen *optischen Schalter* dazwischen setzt („Q-switch“, d.h. man schaltet die Güte Q des Resonators), wie in Abbildung 6.1 dargestellt ist

Solche Schalter kann man, ähnlich wie in der Mikrowellentechnik, aus Elementen aufbauen, die die Polarisationssebene der Welle drehen. Hier ist es ein sogenannter Isolator. Er besteht aus einem *Nicol-Prisma* und einer *Pockels- oder Kerrzelle*, die durch *Doppelbrechung* zwischen x - und y -Komponente der elektrischen Feldstärke einen optischen Gangunterschied von $\lambda/4$ erzeugt (siehe Abbildung 6.1) gemäß der Gleichung

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\hat{x} \sin(\omega_0 t - n_x k_0 z) + \hat{y} \sin(\omega_0 t - n_y k_0 z)) \quad (6.1)$$

Nach Reflexion am Spiegel und nochmaligem Durchgang durch die Zelle beträgt der Gangunterschied $\lambda/2$. War also der Feldvektor vorher in der Ebene $x = y$ polarisiert, so ist er nach zweimaligem Durchgang durch die Zelle in der Ebene $x = -y$, also senkrecht dazu, polarisiert und wird vom Nicol geblockt. Die Doppelbrechung in der Zelle wird durch Anlegen eines elektrischen Feldes erzeugt. Die Kerrzelle ist mit einer Flüssigkeit gefüllt, und es gilt $(n_x - n_y) \sim E^2$, während die Pockelszelle ein bereits optisch aktives Material (z.B. einen KDP-Kristall = Kaliumdihydrogenphosphat) enthält, so daß gilt $(n_x - n_y) \sim E$. Während des Pumpvorgangs ist also der Schalter geschlossen. Nach Öffnen desselben liegt dann die Inversion um ein Vielfaches über dem Schwellenwert. Die Abbildung 6.2 zeigt den zeitlichen Verlauf von Resonatorgüte, Inversion und Ausgangsleistung .

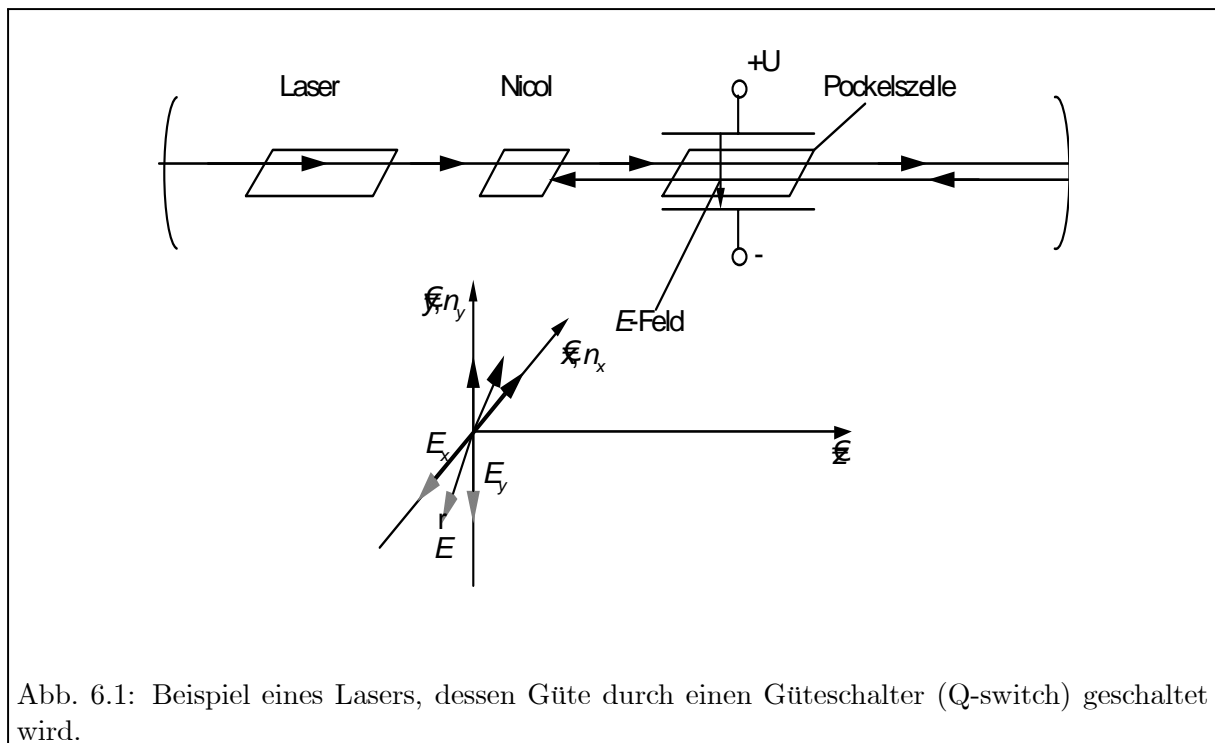


Abb. 6.1: Beispiel eines Lasers, dessen Güte durch einen Güteschalter (Q-switch) geschaltet wird.

6.2 Beschreibung kurzer Pulse

Das Ausschneiden eines kurzen Pulses aus einem monochromen Pulszug, wie es das Funktionsbild des Q-Switch-Lasers nahelegt, trifft auf prinzipielle Grenzen. Aus der Wellen-Beschreibung ergibt sich die Limitierung der Pulslänge als Konsequenz der Unschärferelation:

Frequenz-Bild

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t) e^{i\omega t} dt$$

Zeit-Bild

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\Delta t^2 = \frac{\int (t - \langle t \rangle)^2 \epsilon(t) e^{i\omega t} dt}{\int \epsilon(t) e^{i\omega t} dt}$$

$$\Delta \omega^2 = \frac{\int (\omega - \langle \omega \rangle)^2 E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega}{\int E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega}$$

$$\Delta t^2 \Delta \omega^2 \geq \frac{1}{2} \longrightarrow \text{Die spektrale Breite im Frequenzraum beschränkt die minimale Pulsdauer.}$$

Fourierlimitierte Pulse : $\Delta t^2 \Delta \omega^2 = \frac{1}{2}$

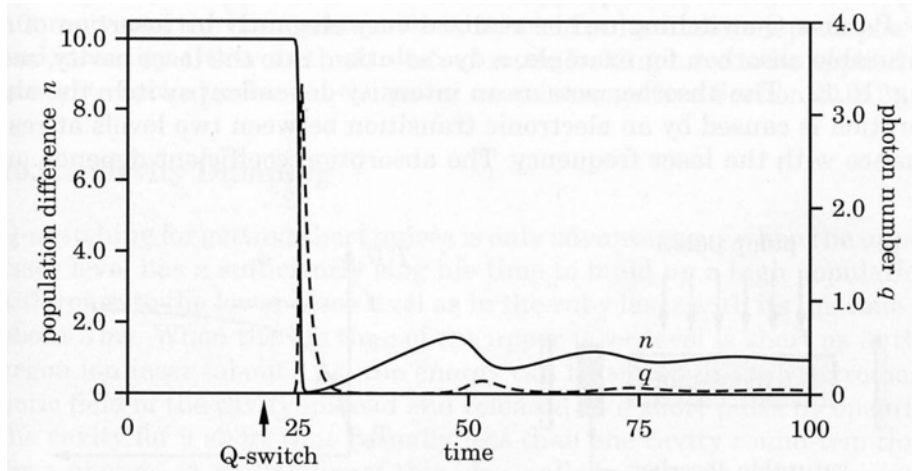


Abb. 6.2: Zeitlicher Verlauf eines gütegeschalteten Lasers. n = Inversion, q =Photonenzahl.

Tatsächlich muss im Wellenbild ein kurzer Lichtpuls als Überlagerung von Wellen mit unterschiedlicher Wellenlänge beschrieben werden. Betrachtet man die Superposition von 3 Wellen unterschiedlicher Wellenlänge (z.B. 3 Moden in einem Oszillator), so ergibt sich daraus unmittelbar ein gepulster zeitlicher Verlauf, wie in Abbildung 6.3 gezeigt ist.

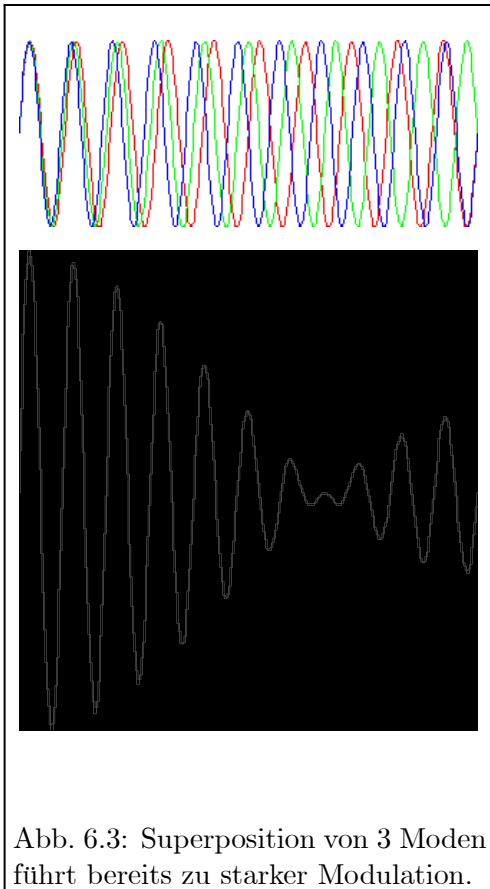
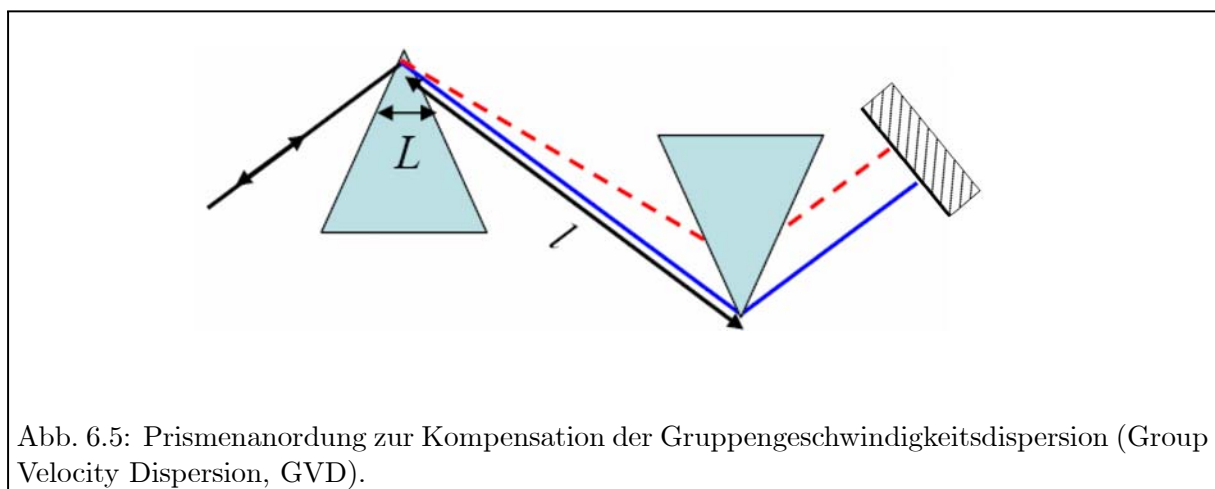
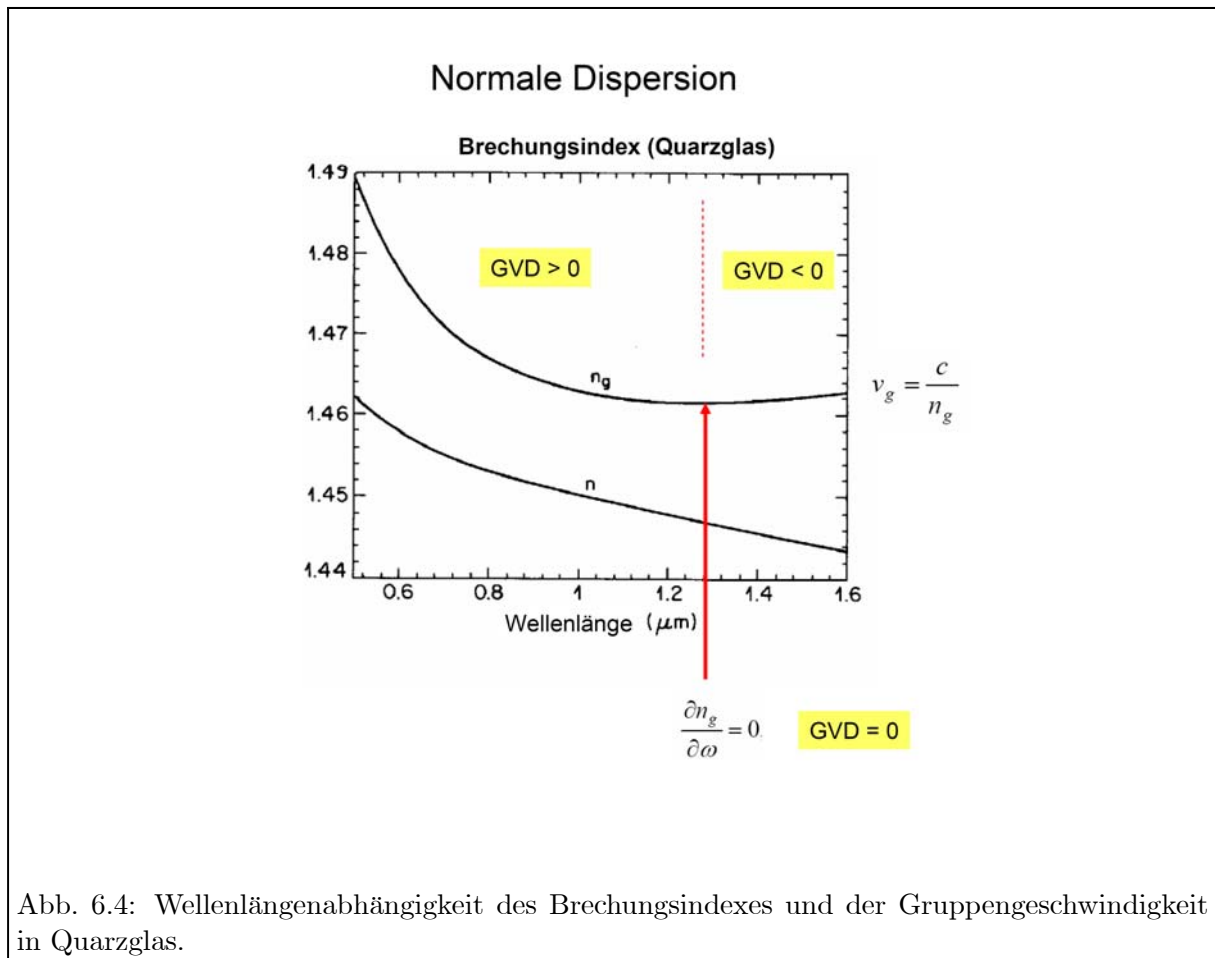


Abb. 6.3: Superposition von 3 Moden führt bereits zu starker Modulation.

Für die Anwendung zur Erzeugung kurzer Pulse im Laserresonator muss die Phase der Wellen synchronisiert werden. Dafür müssen zwei Bedingungen erfüllt werden:

1. Für alle Wellen muss ein gemeinsamer Startpunkt geschaffen werden
2. Die Umlauffrequenz aller Moden muss gleich sein.

Punkt 1 wird z.B. durch einen schnellen Schalter erfüllt. Punkt 2 erfordert eine spezielle Anpassung des Laserresonators, um den unvermeidlichen Einfluss von Dispersion im Lasermedium und in den Optiken auszugleichen (siehe Abbildungen 6.4 und 6.5).



Kapitel 7

Der Frequenzkamm

Während man Frequenzen im Bereich bis zu 100 GHz mit elektronischen Zählern sehr zuverlässig bestimmen kann, ist die Messung absoluter optischer Frequenzen von mehreren 100 THz immer noch eine Herausforderung. Der jüngst entwickelte Frequenzkamm, für den T.W. Hänsch und J.L. Hall im Jahr 2004 den Nobelpreis bekamen, revolutioniert die Messung absoluter optischer Frequenzen und beeinflusst viele Bereiche der Laserspektroskopie. Seine Grundlagen sollen im Folgenden kurz erläutert werden. Als Literatur seien in diesem Zusammenhang der Artikel von Th. Udem, R. Holzwarth und T.W. Hänsch im Physik Journal [Udem02] empfohlen, aus dem auch Teile des folgenden Textes entnommen sind.

In einem modengekoppelten Laser addieren sich die longitudinalen Moden, so dass sich ein kurzer Puls ergibt. Dieser Puls läuft zwischen den Endspiegeln des Laserresonators umher und man erhält nach jedem Umlauf eine Kopie des Pulses am Auskoppelspiegel. Das Spektrum eines modengekoppelten Lasers besteht demnach aus einem Kamm von Laserfrequenzen, die mit den aktiven Moden identifiziert werden können. Wie wir bereits gesehen haben, ermöglicht das Verfahren der Kerr-Linsen Modenkopplung mit einem Titan-Saphir-Kristall als Lasermedium und resonatorinterner Kompensation der Gruppengeschwindigkeitsdispersion auf recht einfache Weise die Erzeugung von Pulsen von nur wenigen Femtosekunden Dauer.

7.1 Das Frequenzspektrum modengellockter Pulse

Frequenzkämme sind spezielle modengellockte Pulslaser, die sich aufgrund ihres sehr gut kontrollierbaren Frequenzspektrums zum präzisen Vergleichen von Frequenzen eignen. Insbesondere machen sie es möglich, ganzzahlige Vielfache von RF-Frequenzen mit optischen Frequenzen zu vergleichen, und haben damit die Messung der Frequenzen von Laserlicht revolutioniert.

Im Resonator eines modengellockten Lasers läuft, wie in Abbildung 7.1 skizziert, ein einzelner Puls der Trägerfrequenz ν_c mit der Gruppengeschwindigkeit v_g um. Die Gesamtlänge des Resonators l_r wird in der Zeit $\tau = \frac{l_r}{v_g}$ durchlaufen. In diesen Intervallen werden die Pulse, deren Dauer in der Größenordnung einiger weniger Perioden der Trägerfrequenz liegen, durch den Auskoppelspiegel transmittiert. Das elektrische Feld $E_1(t)$ eines einzelnen Pulses an einem festen Ort lässt sich durch das Produkt der Einhüllenden $\hat{E}(t)$ und der Oszillation der Trägerfrequenz darstellen:

$$E_1(t) = \hat{E}(t)e^{i(2\pi\nu_c t)}. \quad (7.1)$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist die Propagationsgeschwindigkeit der Einhüllenden, die Phasengeschwindigkeit v_p die Propagationsgeschwindigkeit eines Nulldurchganges des elektrischen Feldes. Da aufgrund der Dispersion der optischen Elemente im Resonator $v_g \neq v_p$

ist, verändert sich ϕ_0 zwischen zwei Pulsen um die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_p} \right) l_r 2\pi\nu_c \bmod 2\pi. \quad (7.2)$$

Der gesamte Pulszug an einem festen Ort wird mit dem elektrischen Feld

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{E}(t - n\tau) e^{i(2\pi\nu_c t - n2\pi\nu_c \tau + n\Delta\varphi)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{E}(t - n\tau) e^{i(2\pi\nu_c t + n(\Delta\varphi - 2\pi\nu_c \tau))} \end{aligned} \quad (7.3)$$

beschrieben. Dabei ist n die Nummer des Pulses und $\hat{E}(t)$ die Einhüllende eines einzelnen Pulses. Es kann gezeigt werden, dass sich die Fouriertransformierte von $E(t)$, $\tilde{E}(\nu)$ als Summe

$$\tilde{E}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(n\Delta\varphi - n2\pi\nu\tau)} \tilde{E}(\nu - \nu_c) \quad (7.4)$$

schreiben lässt. Hier ist $\tilde{E}(\nu)$ die Fouriertransformierte von $\hat{E}(t)$. Sie stellt die Einhüllende des Frequenzspektrum der Breite $\Delta\nu$ dar. Je kürzer die Dauer der Pulse $\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$, desto breiter die Einhüllende. Anders gesagt: Um kurze Pulse zu ermöglichen, wird ein breites Verstärkungsspektrum des aktiven Mediums benötigt.

Die Funktion (7.4) kann nur für Funktionswerte ungleich Null sein, bei denen sich die Exponentialfunktion kohärent addiert, also die Bedingung

$$\nu = \nu_m \equiv \frac{\Delta\varphi}{\tau 2\pi} - \frac{m}{\tau} \quad \text{oder} \quad (7.5)$$

$$\equiv \nu_{\text{CE}} + m\nu_{\text{rep}} \quad (7.6)$$

erfüllt ist. Hier ist $\nu_{\text{rep}} = \frac{1}{\tau}$ die Repetitionsrate, m die Modennummer mit $m \in \mathbb{N}_0$ und

$$\nu_{\text{CE}} = \frac{\Delta\varphi \nu_{\text{rep}}}{2\pi} \quad (7.7)$$

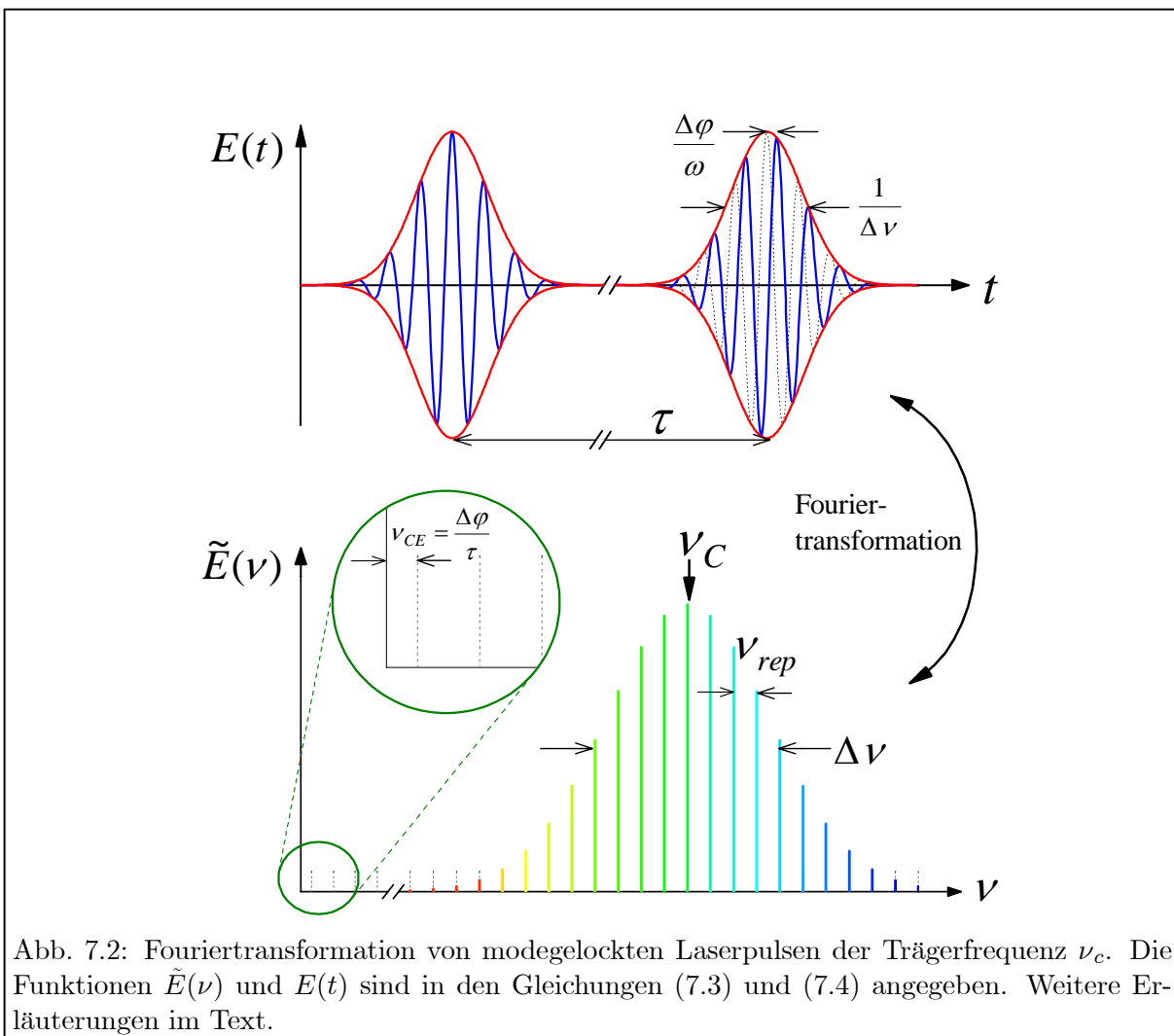
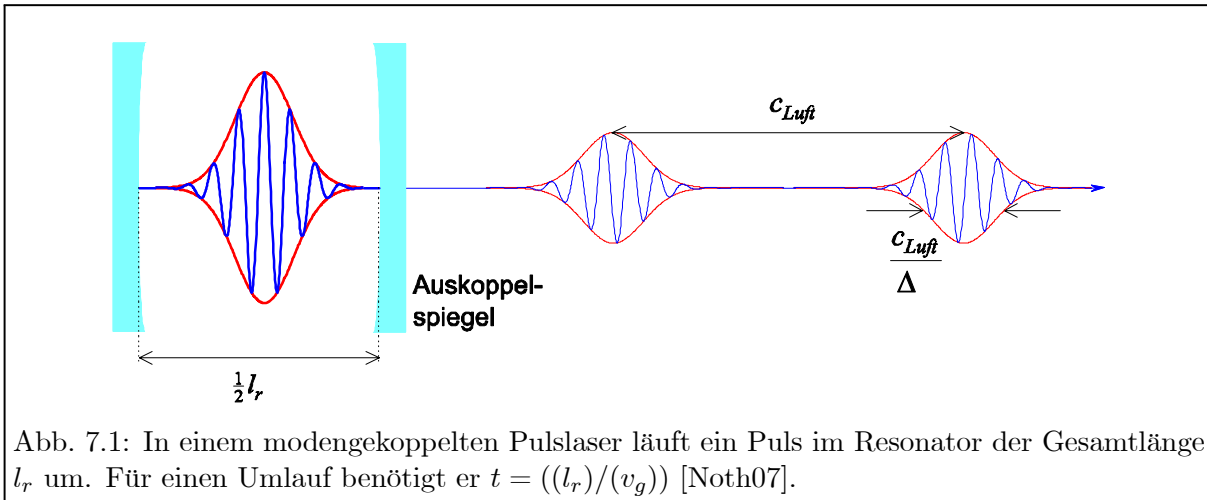
die Phasenschlupffrequenz (engl. *Carrier Envelope Offset*, CE, CEO). Je nach Vorzeichen von $\Delta\varphi$ kann auch ν_{CE} positiv oder negativ sein. In Abbildung 7.2 ist der Zusammenhang zwischen Frequenz- und Zeitdarstellung verdeutlicht. Für eine Repetitionsrate $\nu_{\text{rep}} = 100$ MHz, und der Wellenlänge $\lambda \approx 1000$ nm ist $m \approx 3 \cdot 10^6$. Sind ν_{CE} , ν_{rep} und m bekannt, kann man mit Gleichung (7.6) die genaue Frequenz der Mode angeben.

7.2 Ableitung des Modenkamms aus den Resonator-Randbedingungen

Die Moden eines Lasers müssen den Randbedingungen des Resonators mit der Länge L genügen:

$$2k(\omega_n)L = 2\pi n + \Delta\Phi_n \quad (7.8)$$

Hierbei ist n eine große ganze Zahl, die in dieser Formel die Anzahl der Halbwellen im Resonator angibt. Außerdem ist $\Delta\Phi_n$ eine zusätzliche Phasenverschiebung, die durch Beugung (Guoy Phase) und durch die dielektrischen Schichten der Resonatorspiegel verursacht wird und möglicherweise von der Wellenlänge, also von n , abhängt. Diese Phasenverschiebung ist in der



Praxis schwer zu bestimmen. Sie führt dazu, dass die Frequenzen der Lasermoden n nicht einfach ein ganzzahliges Vielfaches des freien Spektralbereichs $\text{FSR } 2\pi c/2Ln_b(\omega_n)$ mit dem Brechungsindex n_b sind, sondern vielmehr

$$\omega_n = (2\pi n + \Delta\Phi_n) \frac{c}{2Ln_b(\omega_n)} \quad (7.9)$$

gilt. Diese Größe ist, nicht zuletzt wegen ihrer Wellenlängenabhängigkeit, für Präzisionsanwendungen ungeeignet und wird daher im Folgenden vermieden.

Um den Abstand zwischen benachbarten Moden unter Berücksichtigung der Dispersion genauer zu untersuchen, ist die folgende Entwicklung des Wellenzahlvektors um eine zentrale Mode m nützlich

$$2L \left[k(\omega_m) + k'(\omega_m)(\omega_n - \omega_m) + \frac{k''(\omega_m)}{2}(\omega_n - \omega_m)^2 + \dots \right] = 2\pi n + \Delta\Phi_n \quad (7.10)$$

Den Modenabstand $\omega_r \equiv \omega_{n+1} - \omega_n$ erhält man, indem diese Gleichung für n von derselben Gleichung für $n + 1$ abgezogen wird:

$$\left[k'(\omega_m)\omega_r + \frac{k''(\omega_m)}{2} ((\omega_{n+1} - \omega_m)^2(\omega_n - \omega_m)^2) + \dots \right] = \pi/L + (\Delta\Phi_{n+1} - \Delta\Phi_n)/2L. \quad (7.11)$$

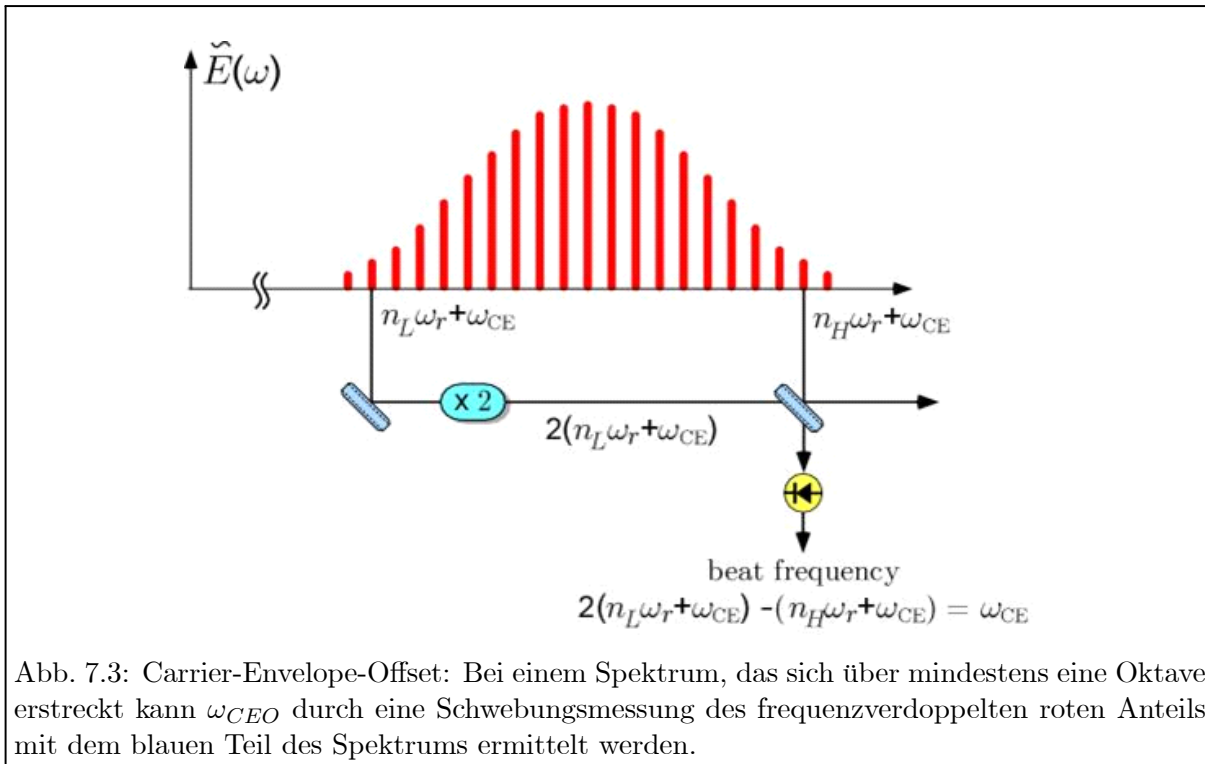
Einen konstanten Modenabstand, wie bei den Kammgeneratoren, erhält man, falls dieser Ausdruck, nach ω_r aufgelöst, unabhängig von n ist. Dies ist der Fall, falls alle Beiträge in der Entwicklung von $k(\omega)$, bis auf den konstanten Term $k(\omega_m)$ und den Gruppengeschwindigkeitsterm $v_g^{-1} = k'(\omega_m)$, exakt verschwinden. Außerdem darf die Differenz $\Delta\Phi_{n+1} - \Delta\Phi_n$ nicht von n abhängen. Die zentrale Aussage ist nun, dass die Terme, die einen nicht äquidistanten Frequenzkamm bewirken würden, dieselben sind, die auch einen gespeicherten Puls verformen bzw. zerfließen lassen. Wobei eine im Vergleich zu den optischen Frequenzen winzige Unregelmäßigkeit von zum Beispiel 1 Hz den Puls bereits nach etwa 1 s zerstören sollte. Die Beobachtung einer konstanten Pulseinhüllenden ist daher ein experimentelles Indiz für das Verschwinden dieser Terme. Der Modenabstand $\omega_r = 2v_g/2L$ ergibt sich sehr anschaulich aus der inversen Pulsumlaufzeit $T^{-1} = v_g/2L = \omega_r/2$ und ist somit identisch mit der Pulswiederholrate¹. Diese ist experimentell äußerst leicht zugänglich. Die Willkur bei der Wahl von ω_m verschwindet, wenn man statt $v_g^{-1} = k'(\omega_m)$ zu berechnen, einen experimentellen Wert für ω_r verwendet.

Im Experiment beobachtet man auch nach Stunden kein Zerfließen eines einmal gespeicherten Pulses. Dieses Wellenpaket hat also Soliton-Eigenschaften. Offensichtlich zieht das Verkoppeln der Moden zu einem Puls die nicht ganz regelmäßig angeordneten Moden des kalten Laserresonators auf ein streng periodisches Gitter im Frequenzraum. Dadurch ergibt sich eine weitere, schwer zu kontrollierende Frequenzverschiebung in (7.9), die verschieden ausfällt, je nachdem, wie die Irregularitäten ausgeglichen werden. Daher schreiben wir allgemeiner statt (7.9)

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_{CE} \quad (7.12)$$

mit einem zunächst unbekanntem Frequenzoffset ω_{CE} . Die Moden wollen wir so nummerieren, dass $0 \leq \omega_{CE} \leq \omega_r$ gilt. Die Kernaussage von (7.9) ist, dass alle Moden den gleichen Abstand zu ihren nächsten Nachbarn haben (n ist eine ganze Zahl), und dass dieser Abstand durch die leicht zu messende Pulswiederholrate gegeben ist. Des weiteren ist der sich so ergebende Frequenzkamm um ω_{CE} gegen die Harmonischen der Pulswiederholrate verschoben.

¹ACHTUNG: Der freie Spektralbereich ist in fast allen Lehrbüchern (auch in diesem Skript) als die inverse Phasenumlaufzeit $v_p/2L$ mit $v_p = c/n_b(\omega)$ anstelle der inversen Gruppenumlaufzeit $v_g/2L$ definiert und berücksichtigt daher nicht die Dispersion.



7.3 Bestimmung des Carrier-Envelope-Offset

Alle Kammmoden können in ihrer Frequenz stabilisiert werden, wenn die Repetitionsrate und die Offsetfrequenz konstant gehalten werden. Die Repetitionsrate kann leicht mit einer Photodiode gemessen und dann durch die Anpassung der Resonatorlänge stabilisiert werden. Hingegen ist eine Messung des CEO wesentlich schwieriger. Die zugrundeliegende Idee ist in Abb. 7.3 [Udem02] dargestellt.

Wenn das Kammspektrum sich über mehr als eine Oktave erstreckt d.h. es Frequenzen ω_L und Frequenzen die größer sind als $2\omega_L$ beinhaltet, so ist es möglich, den roten Teil des Spektrums zu isolieren und durch einen Frequenzverdoppler zu schicken. Aus der Frequenz ω_L wird dann

$$2\omega_L = 2(n_L \times \omega_r + \omega_{CEO}). \quad (7.13)$$

Überlagert man nun das rote Licht wieder mit dem blauen Teil des Spektrums, der die Frequenz

$$\omega_H = n_H \times \omega_r + \omega_{CEO} = 2n_L \times \omega_r + \omega_{CEO} \quad (7.14)$$

enthält, so kann ω_{CEO} als Schwebungsfrequenz (Beatfrequenz) auf einer Photodiode gemessen werden. In vielen Fällen kann der Carrier-Envelope-Offset im Laserresonator durch die Variation der Pumpleistung verändert und dadurch die Offsetfrequenz stabilisiert werden.

Die optische Frequenz einer jeden Mode des Kamms kann als einfache Funktion zweier Radiofrequenzen geschrieben werden

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_{CEO}, \quad \omega_{CEO} \leq \omega_r \quad (7.15)$$

wobei n eine große Zahl (bis zu 10^6) ist und die n -te Mode des Kamms darstellt. Damit kann im gesamten vom Kamm abgedeckten Frequenzbereich ein kontinuierlicher Laser auf den Kamm phasenstabilisiert werden.

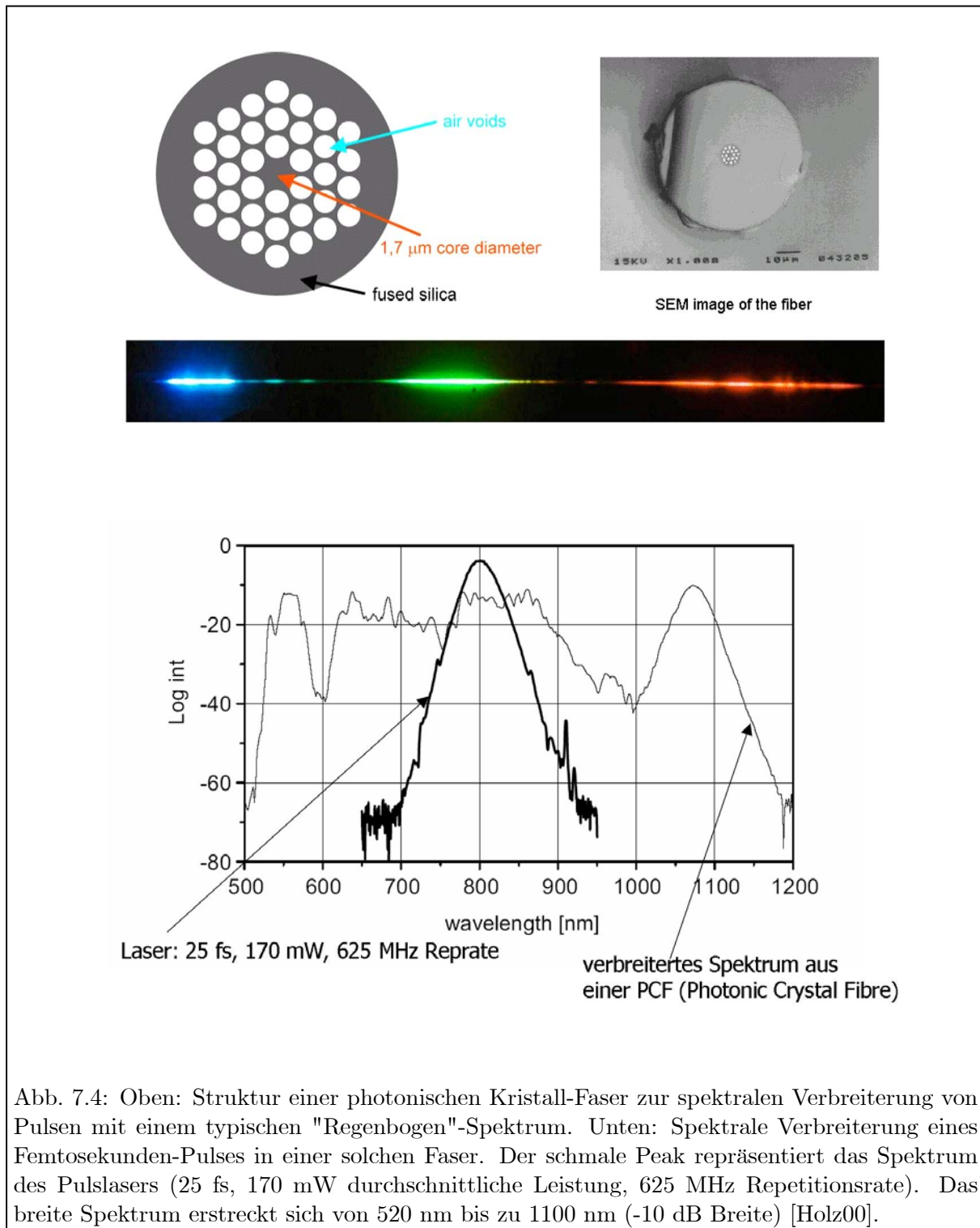


Abb. 7.4: Oben: Struktur einer photonischen Kristall-Faser zur spektralen Verbreiterung von Pulsen mit einem typischen "Regenbogen"-Spektrum. Unten: Spektrale Verbreiterung eines Femtosekunden-Pulses in einer solchen Faser. Der schmale Peak repräsentiert das Spektrum des Pulsasers (25 fs, 170 mW durchschnittliche Leistung, 625 MHz Repetitionsrate). Das breite Spektrum erstreckt sich von 520 nm bis zu 1100 nm (-10 dB Breite) [Holz00].

Als Referenz für die beiden Radiofrequenzen ω_r und ω_{CEO} dienen üblicherweise Rubidium- oder Cäsiumuhren oder ein Wasserstoffmaser, abhängig von der benötigten Genauigkeit. Die Präzision dieser Uhren wird damit direkt in den optischen Bereich übersetzt.

7.3.1 Erzeugung und Stabilisation eines Frequenzkamms

Um einen Frequenzkamm nach dem eben geschilderten Prinzip erzeugen und stabilisieren zu können, ist es zunächst erforderlich ein Spektrum mit einer Breite von mehr als einer Oktave zu produzieren. Dazu verwendet man in den meisten Fällen sogenannte "Photonische-Kristallfasern" (Photonic Crystal Fibers, PCF), speziell solche, die das Licht stark führen d.h. es auf einem sehr kleinen Durchmesser bündeln. Eine photonische Kristallfaser besteht aus einem Array von luftgefüllten Kanälen, die sich parallel um den Faserkern herum erstrecken und die ganze Faser durchziehen. Eine elektronenmikroskopische Aufnahme des Querschnitts einer solchen Faser ist in Abb. 7.4 gezeigt. Der große Kontrast im Brechungsindex zwischen dem Faserkern aus Siliziumdioxid und dem "löchrigen" Fasermantel (engl. cladding) führt zum starken Einschluss des Lichtes. Durch Variationen der Lochstruktur kann die Charakteristik dieser Fasern in weitem Umfang geändert werden. Für die spektrale Verbreiterung von Femtosekunden-Pulsen werden Fasern mit Kerndurchmessern von 1-2 μm verwendet. Die dadurch erreichten hohen Intensitäten führen zu einer ganzen Reihe nichtlinearer Effekte, die zur gewünschten spektralen Verbreiterung führen (Stichworte: Selbstphasenmodulation, stimulierte Raman und Brillouin Streuung). Beispielhaft ist das Ergebnis einer solchen Verbreiterung im unteren Graphen in Abb. 7.4 dargestellt. Ausgehend von einer spektralen Breite in der Größenordnung von 100 nm, ergibt sich ein verbreitertes Spektrum von 520 nm bis 1100 nm, welches sich für die Bestimmung von ω_{CEO} eignet.

Um die Frequenzen der Moden des so erzeugten Frequenzkamms zu stabilisieren, kann man einen Aufbau verwenden, wie er in Abb. 7.5 gezeigt ist: Zunächst wird die Repetitionsrate direkt mit einer Photodiode gemessen und durch die Anpassung der Resonatorlänge des Ti:Sa-Lasers und damit der Umlaufzeit des Pulses konstant gehalten. Der Laserstrahl für die Detektion von ω_{CEO} wird zunächst an einem dichroitischen Strahlteiler aufgeteilt. Dieser Strahlteiler transmittiert den infraroten Anteil des Spektrums, der dann frequenzverdoppelt wird, und reflektiert den grünen Anteil, der nach einer Verzögerungsstrecke wieder mit dem frequenzverdoppelten infraroten Anteil überlagert wird. Die Notwendigkeit der Verzögerungsstrecke ist in der Zeitdomäne leicht einzusehen, muss doch der Puls mit dem grünen Anteil gemeinsam mit dem infraroten Puls bei der Photodiode eintreffen. Ein Gitter wirkt als Bandpass, um überlappende Bereiche des Spektrums auszuwählen und auf die Photodiode zur Messung des Schwebungssignals zu lenken. Dadurch werden nicht benötigte Anteile des Spektrums abgetrennt und das Rauschen sowie eine mögliche Sättigung der Photodiode durch die zusätzlichen Photonen unterdrückt. Das elektronische Signal der Photodiode enthält nun die Schwebungsfrequenz ω_{CEO} , die mittels elektrischer Filter isoliert und zur Stabilisierung des Carrier-Envelope-Offset verwendet werden kann. Als Regelgröße dient in vielen Fällen die Leistung des Pump lasers, die zur Variation von ω_{CEO} angepasst wird.

7.3.2 Messung einer Laserfrequenz mit einem Frequenzkamm

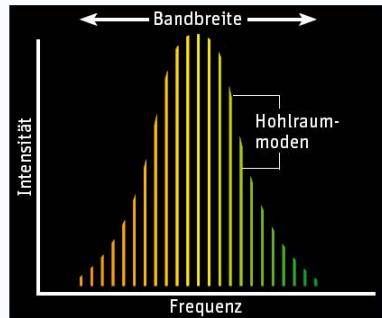
Um die Frequenz eines kontinuierlichen single-mode Lasers mit einem Frequenzkamm zu messen, wird der in Abb. 7.6 dargestellte Aufbau verwendet. Der Laserstrahl des fs-Frequenzkamm wird mit Hilfe eines Polarisations-Strahlteilers mit dem zu messenden Laserstrahl überlagert. Da die Polarisierungsebenen der beiden Laserstrahlen nun senkrecht zueinander sind und auf diese Weise kein Schwebungssignal erzeugt werden kann, benutzt man noch eine $\lambda/2$ -Platte und einen weit-

EXKURS: Superkontinuum (entnommen aus: Spektrum der Wissenschaft, März 2007)

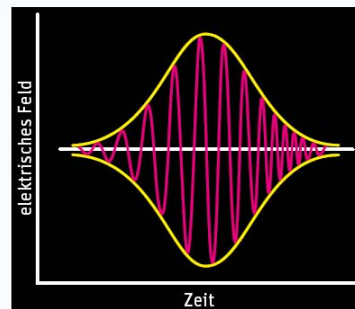
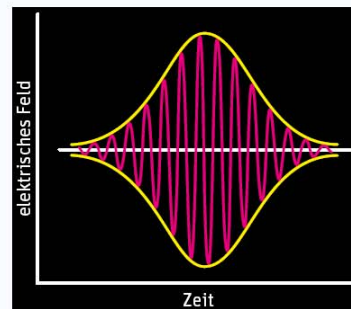
GEPULSTE LASER EMITTIERTEN LICHTBLITZE in einem engen Frequenzbereich. Wenn ein genügend intensiver Puls eine Glasfaser durchläuft, treten gewisse nichtlineare Prozesse auf, unter anderem die so genannte Selbstphasenmodulation. Diese Prozesse erzeugen zusätzliche Lichtfrequenzen und liefern schließlich ein Superkontinuum mit breitem Spektrum.

FREQUENZKAMM

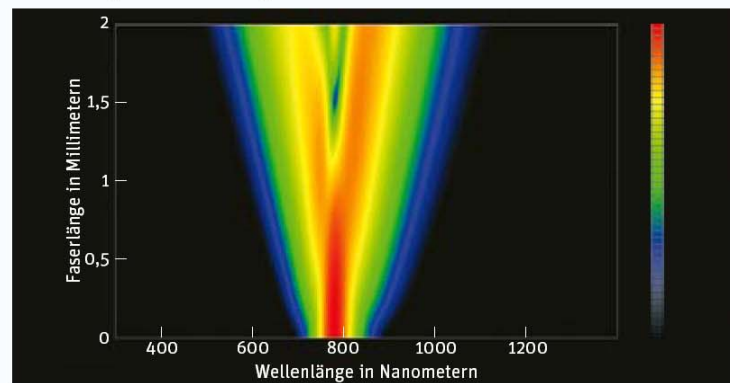
Gepulste Laser emittieren eine wiederkehrende Pulsfolge. Jeder Puls ist die Summe vieler Teilstrahlen unterschiedlicher Frequenz. Das Spektrum der Pulsserie bildet einen Frequenzkamm – eine gleichmäßige Anordnung diskreter Frequenzen.

**SELBSTPHASENMODULATION**

Die elektromagnetischen Schwingungen eines Laserpulses (links, pink) haben konstante Wellenlänge, doch die Intensität steigt und fällt gemäß einer Hüllkurve (gelb). Ein Puls mit hoher Spitzenintensität kann die Brechzahl des Mediums momentan um einen Betrag erhöhen, der proportional zur augenblicklichen Intensität ist. Da die Brechzahl des Mediums zeitlich variiert, verändert sie ihrerseits die Phase der Welle, das heißt die Lage der Wellenberge und -täler. So entstehen neue Wellenlängen und Frequenzen.

**Spektralverbreiterung**

Diese Simulation eines 20 Femtosekunden (2×10^{-14} Sekunden) langen Pulses auf seinem Weg durch eine Glasfaser zeigt, wie nichtlineare Effekte – insbesondere die Selbstphasenmodulation – das Pulsspektrum verbreitern. Die Farben stellen die Lichtintensität bei jeder Wellenlänge auf einer logarithmischen Skala dar; rot entspricht hoher Intensität. In diesem Beispiel erstreckt sich das Spektrum nach zwei Millimeter Wegstrecke über eine Oktave. Wie in der Musik reicht eine Lichtoktave von einer Frequenz bis zum Doppelten dieser Frequenz.



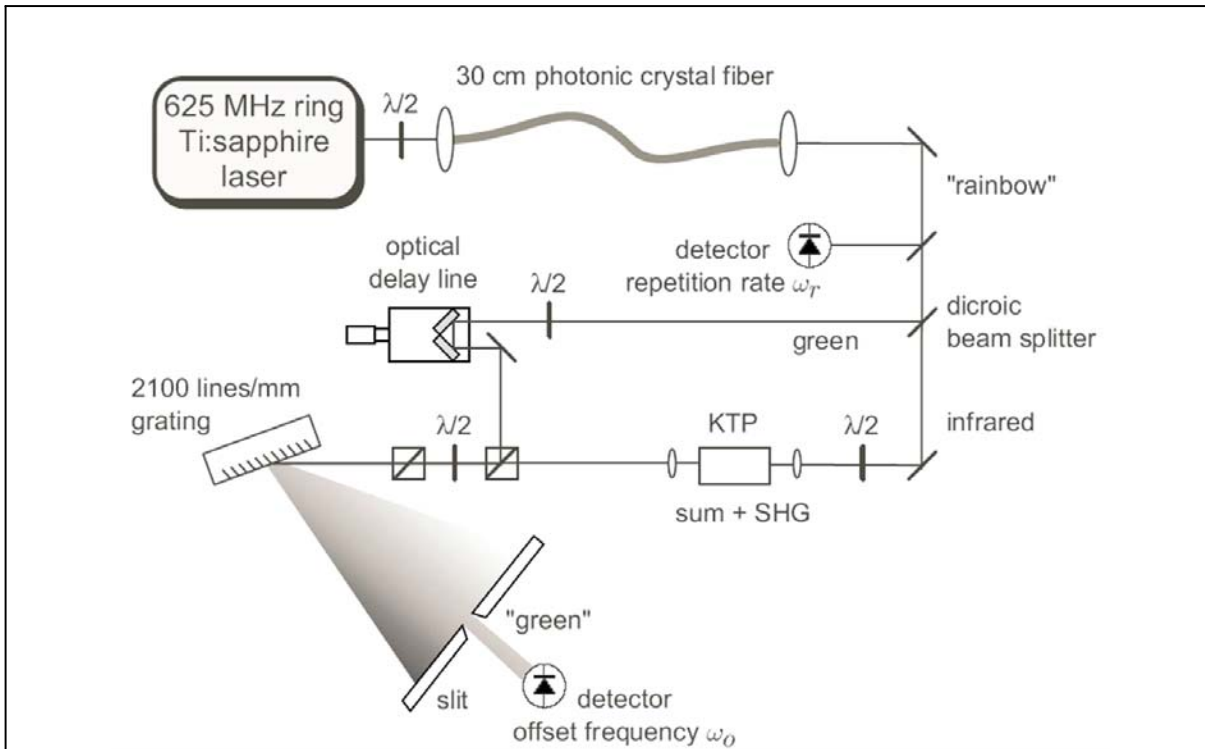


Abb. 7.5: Detektion von ω_r und ω_{CEO} eines Frequenzkamms: Nach der spektralen Verbreiterung des Femtosekunden-Titan:Saphir-Lasers wird die Repetitionsrate direkt mit einer Photodiode gemessen während der Laserstrahl für die Detektion von ω_{CEO} zunächst an einem dichroitischen Strahlteiler aufgeteilt wird. Nach einer Verzögerungsstrecke wird der grüne Anteil des Spektrums mit dem frequenzverdoppelten infraroten Anteil überlagert und mittels eines Gitters auf eine Photodiode zur Messung des Schwebungssignals gelenkt.

eren Polstrahlteiler um die beiden Strahlen zu mischen. Danach werden sie über ein optisches Gitter auf eine Photodiode gesendet. Das Gitter separiert den für die Messung der Schwebungsfrequenz nützlichen Teil des Kammspektrums von den überflüssigen Anteilen, die nur zu einem größeren Rauschen der Photodiode führen würden. Das Signal der Avalanche Photodiode wird nun über einen Tiefpass, mit einer Grenzfrequenz kleiner als der halbe Modenabstand (=Repetitionsrate), einem Radiofrequenzzähler zugeführt. Damit kann die Schwebungsfrequenz des Lasers mit der am nächsten liegenden Kammmode ω_{Beat} bestimmt werden. Um die Absolutfrequenz des Lasers zu erhalten, kann durch eine "Grobmessung" der Laserfrequenz (beispielsweise mit einem Wavemeter ausreichender Auflösung (also besser als der halbe Modenabstand) die zugehörige Mode n bestimmt werden. Daraus ergibt sich dann die Absolutfrequenz

$$\omega_{\text{Laser}} = n \times \omega_r \pm \omega_{\text{CEO}} \pm \omega_{\text{Beat}}. \quad (7.16)$$

Das Vorzeichen bei der Schwebungs- und der CEO Frequenz hängt davon ab, ob die Schwebung mit einer im Frequenzraum oberhalb oder unterhalb liegenden Mode erfolgt. Es sei hier nur angemerkt, dass man dies durch eine Variation der Repetitionsrate oder des CEO bestimmen kann und die Frequenz des Lasers damit eindeutig festgelegt ist.

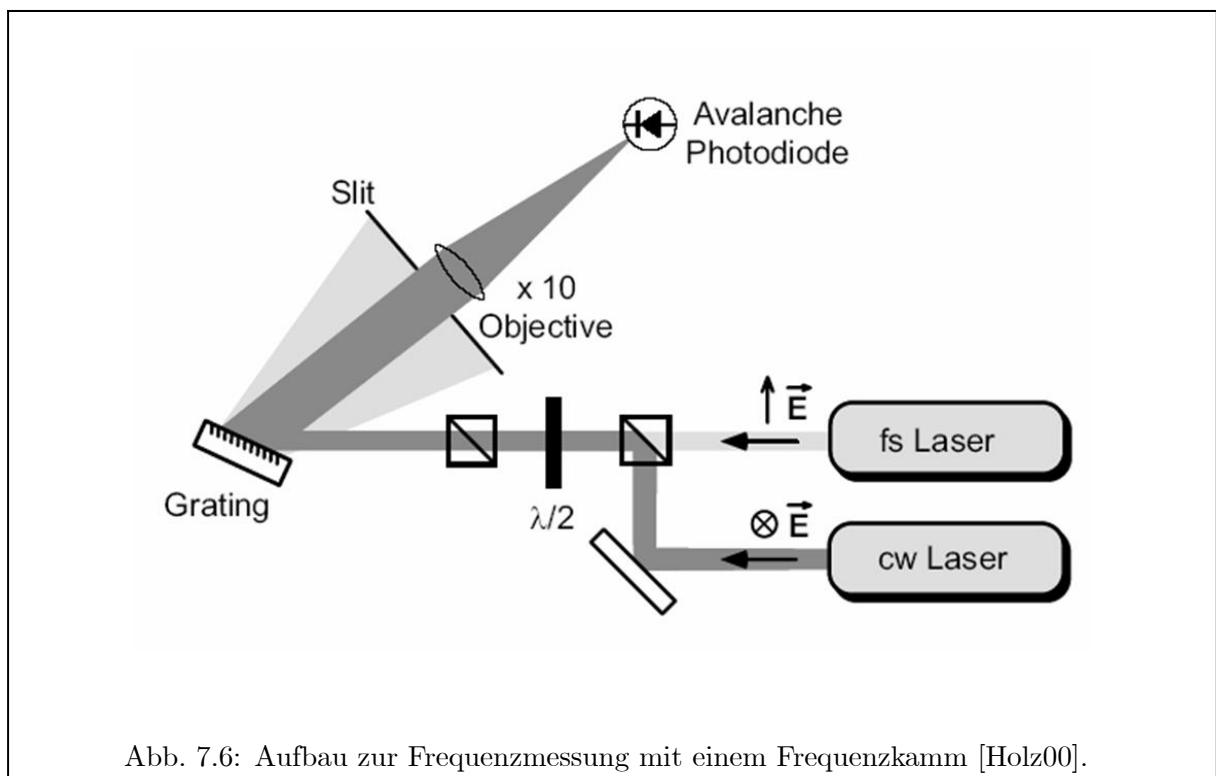


Abb. 7.6: Aufbau zur Frequenzmessung mit einem Frequenzkamm [Holz00].

Literatur

- [Bus97] B.A. Bushaw, *Diode-Laser-Based Resonance Ionization Mass Spectrometric Measurement of Calcium Isotopes*, Dissertation, Uni Mainz (1997).
- [Bla2001] E. Black, *Notes on the Pound-Drever-Hall technique*, Technical Note LIGO-T980045-00- D 4/16/98.
- [Gor54] J.P. Gordon, H.J. Zeiger, C.H. Townes, Phys. Rev. 95 (1954) 282 und Phys. Rev. **99**, 1253-1274 (1955).
- [Hay69] I. Hayashi *et al.*, IEEE J. Quant. Electr., **QE-5**, 211-212 (1969).
- [Holz00] R. Holzwarth, *Measuring the Frequency of Light using Femtosecond Laser Pulses*, Dissertation, LMU München (2000).
- [Iiz02] K. Iizuka, *Elements of Photonics Vol. 1+2*, Wiley Series in Pure and Applied Optics, 2nd Edition (2002).
- [Kog66] H. Kogelnik and T. Li, Laser Beams and Resonators. Proceedings of the IEEE **54**, 1312-1334 (1966).
- [Mai60] T. Mainman, Nature **187**, 493-494 (1960).
- [Nath62] M.I. Nathan, W.P. Dumke, *et al.*, Applied Physics Letters **1**, 62-64 (1962).
- [Noth07] M. Nothhelfer, *Aufbau und Test eines frequenzkammstabilisierten Lasersystems für die Spektroskopie an Berylliumionen in einer Paulfalle*, Diplomarbeit, Universität Mainz (2006).
- [Mes99] D. Meschede, *Optik, Licht und Laser*, Teubner Studienbücher Stuttgart (1999).
- [Rie04] F. Riehle, *Frequency Standards - Basics and Applications*, Wiley-VCH, Weinheim (2004).
- [Sal07] Saleh, Bahaa, *Fundamentals of Photonics*, Wiley Series in Pure and Applied Optics, 2nd Edition (2007).
- [Schä90] B. B. Snavely: Continuous-Wave Dye Lasers in Topics in Applied Physics, Bd. 1. Dye Lasers, F. P. Schäfer ed. (Springer, 1990).
- [Sil96] W.T. Silfvast: Laser Fundamentals, Cambridge University Press (1996).
- [Udem01] T. Udem, et al., *A New Type of Frequency Chain and Its Application to Fundamental Frequency Metrology*, in: F. S. F. W. Karshenboim (Hrsg.): The Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic Systems Bd. 570, 2001, S. 125

- [Udem02] T. Udem *et al.*, Physik Journal. Vol. 1 (2) (2002) 39.
- [Wik07] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Transverse_mode.
- [Xan93] Xanders/Enders, *Regelungstechnik mit elektronischen Bauelementen*, 5. Auflage, Werner Ingenieur Texte, Werner Verlag (1993).