

# ÁLGEBRAS DE LIE

Miguel A. Rodríguez  
Departamento de Física Teórica II, Facultad de Físicas  
Universidad Complutense  
Madrid, España

1 de octubre de 2007



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Objetos . . . . .	7
1.2. Morfismos . . . . .	10
1.3. Grupos y álgebras de Lie . . . . .	12
1.4. Operaciones con álgebras . . . . .	12
1.5. Algunos resultados en álgebra lineal . . . . .	14
<b>2. Álgebras nilpotentes, resolubles y semisimples</b>	<b>17</b>
2.1. Álgebras nilpotentes . . . . .	17
2.2. Álgebras resolubles . . . . .	20
2.3. Álgebras semisimples . . . . .	23
<b>3. Introducción a la teoría de representaciones</b>	<b>27</b>
3.1. Derivaciones . . . . .	27
3.2. Representaciones . . . . .	28
3.3. Reducibilidad de representaciones . . . . .	31
<b>4. Álgebras envolventes</b>	<b>33</b>
4.1. Álgebra tensorial . . . . .	33
4.2. El teorema PBW . . . . .	35
<b>5. Algunos complementos</b>	<b>39</b>
5.1. Cohomología de álgebras de Lie . . . . .	39
5.2. Graduaciones . . . . .	42
5.3. Extensiones centrales . . . . .	42
5.4. El álgebra de Virasoro . . . . .	46
5.5. El álgebra de Heisenberg . . . . .	49
5.6. Casimires . . . . .	50
<b>6. Estructura de las álgebras de Lie semisimples</b>	<b>51</b>
6.1. Subálgebras de Cartan . . . . .	51
6.2. Álgebras semisimples: raíces . . . . .	55
6.3. Representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . . . . .	58
6.4. Propiedades de las raíces de un álgebra semisimple . . . . .	59
6.5. Sistemas fundamentales de raíces y $\Pi$ -sistemas . . . . .	61
6.6. Clasificación de $\Pi$ -sistemas . . . . .	64
6.7. Clasificación de álgebras de Lie simples . . . . .	70
6.8. Álgebras de Lie simples clásicas . . . . .	72
6.8.1. $\mathfrak{sl}(l + 1, \mathbf{K})$ , $l \geq 1$ . . . . .	72
6.8.2. $\mathfrak{o}(2l + 1, \mathbf{K})$ . . . . .	73
6.8.3. $\mathfrak{sp}(2l, \mathbf{K})$ . . . . .	74

6.8.4.	$\mathfrak{o}(2l, \mathbf{K})$ . . . . .	75
<b>7.</b>	<b>Automorfismos de álgebras de Lie semisimples</b>	<b>77</b>
7.1.	Reflexiones en el sistema de raíces . . . . .	77
7.2.	El grupo de Weyl . . . . .	77
7.3.	Grupo de automorfismos de un álgebra de Lie semisimple compleja . . . . .	80
<b>8.</b>	<b>Teoría de representaciones</b>	<b>83</b>
8.1.	Representaciones en álgebras de Lie triangulares . . . . .	83
8.2.	Módulos de peso máximo . . . . .	86
8.3.	Módulos de Verma . . . . .	87
8.4.	El álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . . . . .	89
8.5.	Representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . . . . .	91
<b>9.</b>	<b>Representaciones de álgebras de Lie semisimples</b>	<b>93</b>
9.1.	Pesos fundamentales . . . . .	93
9.2.	Construcción de los sistemas de pesos . . . . .	94
9.3.	Diagramas de pesos . . . . .	97
9.4.	Acción del grupo de Weyl en los diagramas de pesos . . . . .	97
<b>10.</b>	<b>Bases en espacios de representación</b>	<b>101</b>
10.1.	Fórmulas de multiplicidad . . . . .	101
10.2.	Bases de Verma . . . . .	102
10.3.	Dimensiones de representaciones irreducibles . . . . .	107
<b>11.</b>	<b>Productos tensoriales de representaciones</b>	<b>111</b>
11.1.	Clases de congruencia . . . . .	111
11.2.	Índices de representaciones . . . . .	112
11.3.	Cadenas minimales . . . . .	113
<b>12.</b>	<b>Subálgebras de álgebras de Lie simples</b>	<b>119</b>
12.1.	Ejemplos de subálgebras . . . . .	119
12.2.	Subálgebras conjugadas . . . . .	122
12.3.	Pesos especiales . . . . .	124
12.4.	Resultados generales . . . . .	128
<b>13.</b>	<b>Subálgebras regulares</b>	<b>129</b>
13.1.	Definición y propiedades . . . . .	129
13.2.	Subálgebras regulares maximales no semisimples . . . . .	130
13.3.	Subálgebras regulares maximales reductivas . . . . .	131
13.4.	Determinación de los P-sistemas de un álgebra semisimple . . . . .	133
13.5.	Cálculo de las subálgebras reductivas maximales de las álgebras de Lie simples . . . . .	134
13.5.1.	$A_n$ . . . . .	134
13.5.2.	$B_n$ . . . . .	134
13.5.3.	$C_n$ . . . . .	135
13.5.4.	$D_n$ . . . . .	135
<b>14.</b>	<b>Subálgebras singulares de álgebras de Lie simples</b>	<b>137</b>
14.1.	Definiciones . . . . .	137
14.2.	Formas bilineales invariantes . . . . .	138
14.3.	Matrices de Proyección . . . . .	142

<b>15. Álgebras de Kac-Moody</b>	<b>145</b>
15.1. Matrices de Cartan generalizadas . . . . .	145
15.2. El álgebra $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ . . . . .	147
15.3. El álgebra $\mathfrak{g}(A)$ . . . . .	147
15.4. Clasificación de matrices de Cartan generalizadas . . . . .	148
15.5. Forma bilineal invariante . . . . .	149
<b>16. Representación de álgebras de Lie afines</b>	<b>153</b>
16.1. Álgebras afines no giradas . . . . .	153
16.2. Ejemplo de álgebras de Lie afines no giradas . . . . .	156
<b>17. Álgebras afines giradas</b>	<b>159</b>
17.1. Automorfismos de orden finito . . . . .	159
17.2. Ejemplos . . . . .	164



# Capítulo 1

## Introducción

Los conceptos de álgebras de Lie (objetos) y homomorfismos entre álgebras de Lie (morfismos) se desarrollan en las próximas secciones.

### 1.1. Objetos

El ejemplo más sencillo de un álgebra de Lie es el siguiente.

#### Ejemplo 1.1

Sea  $M_n(\mathbf{K})$  el espacio vectorial de las matrices de orden  $n \times n$  sobre un cuerpo  $\mathbf{K}$ . Además de esta estructura de espacio vectorial, existe una operación de multiplicación en este conjunto con las siguientes propiedades. Si  $A, B, C \in M_n(\mathbf{K})$ :

1. Distributiva:  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(A + B)C = AC + BC$
2. Asociativa:  $A(BC) = (AB)C$
3. En general,  $AB \neq BA$
4. La matriz identidad verifica:  $AI = IA = A$

Se dice que  $M_n(\mathbf{K})$  es un álgebra asociativa no conmutativa con elemento unidad. En este conjunto definimos una nueva operación de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} [ \ ] : M_n(\mathbf{K}) \times M_n(\mathbf{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbf{K}) \\ (A, B) &\longmapsto [A, B] = AB - BA \end{aligned} \tag{1.1}$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. Antisimétrica:  $[A, B] = -[B, A]$
2. Jacobi:  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

Se dice que  $M_n(\mathbf{K})$  es un álgebra de Lie con esta operación (conmutador de dos matrices). Como veremos, toda álgebra de Lie de dimensión finita se obtiene esencialmente de esta forma.

Un álgebra sobre un cuerpo  $\mathbf{K}$  (que siempre consideraremos de característica cero, y más concretamente en estas notas  $\mathbf{R}$  o  $\mathbf{C}$ ) se define de la siguiente forma:

**Definición 1.1** *Un álgebra sobre un cuerpo  $\mathbf{K}$  es un espacio vectorial  $A$ , sobre  $\mathbf{K}$ , en el que se define una operación (producto):*

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned} \tag{1.2}$$

que tiene las siguientes propiedades:

1.  $x(y + z) = xy + xz$ ,  $(x + y)z = xz + yz$ ,  $x, y, z \in A$
2.  $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,  $x, y \in A$

La dimensión del álgebra es la dimensión de  $A$  como espacio vectorial sobre  $\mathbf{K}$ . Uno de los casos más interesantes de álgebras lo constituyen las álgebras asociativas.

**Definición 1.2** *Un álgebra  $A$  se dice que es asociativa si se verifica (además de las propiedades de álgebra):*

$$x(yz) = (xy)z, \quad x, y, z \in A \quad (1.3)$$

El álgebra  $M_n(\mathbf{K})$  estudiada anteriormente es un álgebra asociativa de dimensión finita. Otro ejemplo muy importante es el siguiente.

### Ejemplo 1.2

Sea  $M$  una variedad diferenciable real. El espacio vectorial de las funciones suaves sobre  $M$  con valores reales,  $\mathcal{F}(M) = C_{\mathbf{R}}^{\infty}(M)$  es un álgebra asociativa (de dimensión infinita).

**Definición 1.3** *Se dice que el álgebra  $A$  es abeliana (conmutativa) si  $xy = yx$  para todo par de elementos de  $A$ .*

El objeto principal de estas notas, las álgebras de Lie, se define así:

**Definición 1.4** *Sea  $\mathfrak{g}$  un espacio vectorial en el que hemos definido una operación:*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) &\longmapsto [x, y] \end{aligned} \quad (1.4)$$

que hace de  $\mathfrak{g}$  un álgebra y que además verifica:

1. *Antisimétrica:*  $[x, y] = -[y, x]$
2. *Jacobi:*  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Se dice entonces que  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie.

Como el cuerpo es de característica distinta de 2, la propiedad de antisimetría es equivalente a:

$$[x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g} \quad (1.5)$$

En efecto, esta propiedad (1.5), implica la antisimetría:

$$[x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0, \quad [x, y] + [y, x] = 0 \quad (1.6)$$

Un álgebra de Lie no puede ser asociativa (en general,  $[x, [y, z]] \neq [[x, y], z]$ ). La propiedad de Jacobi establece como difieren los dos términos en la desigualdad (su diferencia es igual a  $[[z, x], y]$ ).

Pero a partir de un álgebra asociativa siempre podemos definir un álgebra de Lie. Sea  $A$  un álgebra asociativa (como siempre sobre un cuerpo  $\mathbf{K}$ ). Definamos  $A_L$  como el álgebra que se obtiene utilizando el mismo espacio vectorial  $A$  como soporte de una nueva operación, definida como hicimos con las matrices de orden  $n$ :

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in A \quad (1.7)$$

$A_L$  es un álgebra de Lie. Es más, es posible demostrar (ver por ejemplo [5]) que toda álgebra de Lie es isomorfa (concepto a definir más tarde aunque su significado sea el natural en este caso) a una subálgebra de un álgebra de Lie de tipo  $A_L$  donde  $A$  es un álgebra asociativa.

Cuando en un álgebra  $A$  existe un elemento ( $I$ ) que verifica  $Ix = xI = x$  para todo elemento  $x$  del álgebra, se le llama elemento unidad y se dice que  $A$  es un álgebra con elemento unidad

(obviamente las álgebras de Lie no tienen elemento unidad,  $[x, x] = 0$  para todo elemento  $x$  del álgebra).

Las transformaciones lineales (endomorfismos de un espacio vectorial) constituyen una de las realizaciones más usadas de las álgebras. Porque, como se puede ver fácilmente, toda álgebra asociativa con elemento unidad es isomorfa a un álgebra de transformaciones lineales:

Sea  $A$  un álgebra asociativa con elemento unidad. Sea  $a$  un elemento de  $A$  y consideremos la transformación lineal en  $A$  asociada a  $a$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a} : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto xa \end{aligned} \quad (1.8)$$

Es ésta una transformación lineal (la acción por la derecha del álgebra sobre sí misma). Sea  $\mathcal{L}(A)$  el espacio de las transformaciones lineales de  $A$  considerada como un espacio vectorial. Entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow \mathcal{L}(A) \\ a &\longmapsto \tilde{a} \end{aligned} \quad (1.9)$$

es un homomorfismo inyectivo.

El espacio de endomorfismos de un espacio vectorial ( $\text{End}(V) \equiv \mathcal{L}(V)$ ) es un álgebra asociativa con la composición. Como hemos visto se puede transformar en un álgebra de Lie, usando el conmutador de dos endomorfismos. En el caso en que queramos resaltar la estructura de álgebra de Lie la llamaremos  $\mathfrak{gl}(V)$ .

Dada un álgebra,  $A$ , podemos elegir una base de la estructura de espacio vectorial:  $\{x_j, j \in J\}$ . La operación producto, dando lugar a otro elemento del álgebra, permite escribir este último como combinación lineal de los elementos de la base. Si los elementos que se multiplican están en la base señalada, los coeficientes de la combinación lineal se llaman las constantes de estructura del álgebra. En particular y para el caso que más nos interesa en estas notas, si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie, se tiene:

$$[x_i, x_k] = \sum_{j \in J} c_{ik}^j x_j \quad (1.10)$$

donde  $c_{ik}^j$  son las constantes de estructura del álgebra en la base dada.

En un álgebra de Lie de dimensión finita, estas constantes se transforman como un tensor con dos índices covariantes y uno contravariante cuando se hace un cambio de base:

Si la relación entre dos bases,  $\{x_i\}$ ,  $\{x'_k\}$  es:

$$x'_i = P_i^k x_k \quad (1.11)$$

las constantes de estructura satisfacen:

$$(c')_{ik}^j = P_i^a P_k^b (P^{-1})_d^j c_{ab}^d \quad (1.12)$$

Las constantes de estructura verifican las propiedades correspondientes a la antisimetría y la propiedad de Jacobi de la operación del álgebra de Lie:

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0 \quad (1.13)$$

$$c_{ij}^r c_{kr}^m + c_{jk}^r c_{ir}^m + c_{ki}^r c_{jr}^m = 0 \quad (1.14)$$

Como veremos, aunque las constantes de estructura dependen de la base escogida, sus propiedades permiten caracterizar, por ejemplo, de forma muy sencilla, las álgebras semisimples y en el caso real, las compactas.

## 1.2. Morfismos

Una vez conocidos los objetos fundamentales de la teoría, las álgebras asociativas y de Lie, pasamos ahora a establecer la definición y propiedades de los homomorfismos entre estos objetos.

**Definición 1.5** Sean  $A$  y  $A'$  dos álgebras sobre un cuerpo  $\mathbf{K}$ . Una aplicación  $f : A \rightarrow A'$  es un homomorfismo de álgebras si  $f$  es una aplicación lineal y se verifica:

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (1.15)$$

Si las álgebras son de Lie ( $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$ ), la relación a satisfacer es obviamente:

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)], \quad x, y \in \mathfrak{g} \quad (1.16)$$

La imagen y el núcleo de un homomorfismo tienen una estructura particular que definimos a continuación.

**Definición 1.6** Sea  $A$  un álgebra y  $A' \subset A$ .  $A'$  es una subálgebra de  $A$  si es un subespacio vectorial cerrado bajo la operación producto.

**Definición 1.7** Sea  $A$  un álgebra y  $J \subset A$ .  $J$  es un ideal por la izquierda de  $A$  si es un subespacio vectorial y

$$\forall x \in J, \forall y \in A, \quad xy \in J. \quad (1.17)$$

es decir,  $AJ \subset J$

Obviamente todo ideal es una subálgebra pero el inverso no es cierto.

De manera similar se define un ideal por la derecha ( $JA \subset J$ ) y un ideal bilátero (simultáneamente por la derecha e izquierda). En un álgebra de Lie solo hay una clase de ideales (biláteros, por la antisimetría del producto).

Dado un ideal bilátero  $J$  de un álgebra  $A$ , es posible construir el álgebra cociente:  $A/J$ , cuyos elementos son las clases  $x + J$ , donde  $x \in A$ . La estructura lineal es la propia de la teoría de espacios vectoriales. En cuanto al producto:

$$(x + J)(y + J) = xy + J, \quad x, y \in A \quad (1.18)$$

Si  $x', y' \in A$  están en las mismas clases que  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $(x' + J)(y' + J) = x'y' + J$  y la clase  $x'y' + J$  es la misma que la clase  $xy + J$ :

$$xy - x'y' = x(y - y') + (x - x')y' \in J \quad (1.19)$$

Nótese que es indispensable que  $J$  sea un ideal bilátero. La aplicación  $\pi$ :

$$\begin{array}{ccc} \pi : & A & \longrightarrow & A/J \\ & x & \longmapsto & x + J \end{array} \quad (1.20)$$

es un epimorfismo de álgebras.

La imagen de un álgebra mediante un homomorfismo es una subálgebra del álgebra final. El núcleo de un homomorfismo es un ideal del álgebra inicial:

$$f(xy) = f(x)f(y) = 0 \quad \text{si} \quad f(x) = 0 \quad \text{o} \quad f(y) = 0 \quad (1.21)$$

e incluso un ideal bilátero. Esta característica permite definir un álgebra cociente y los correspondientes teoremas de isomorfía:

$$\begin{array}{ccccc} A & & \xrightarrow{f} & & A' \\ \pi \downarrow & & & & \uparrow i \\ A/\ker f & & \xrightarrow{f'} & & \text{im } f \end{array} \quad (1.22)$$

donde  $f'(x + \ker f) = f(x)$ . La relación entre homomorfismos e ideales biláteros es muy importante en la teoría de representaciones. Nótese que en general no es posible construir un álgebra cociente utilizando una subálgebra.

### Ejemplo 1.3

Definamos  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  como el álgebra de las matrices  $2 \times 2$ , con coeficientes en  $\mathbf{K}$  y traza nula. Este conjunto es un espacio vectorial sobre  $\mathbf{K}$  de dimensión 3. Si elegimos una base con los elementos:

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

las relaciones de conmutación (con la operación definida en el ejemplo 1.1) son:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \quad (1.24)$$

y las constantes de estructura no nulas son en esta base  $\{h, e, f\}$ :

$$c_{12}^2 = 2, \quad c_{13}^3 = -2, \quad c_{23}^1 = 1 \quad (1.25)$$

Hemos construido un álgebra de Lie de dimensión 3 (nótese que la operación de conmutación no nos saca fuera del conjunto).

El subespacio vectorial generado por  $h$  es una subálgebra propia (la llamada subálgebra de Cartan del álgebra). También el que tiene como base  $\{h, e\}$  es una subálgebra (de Borel), no abeliana de dimensión 2. Sin embargo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  no posee ningún ideal propio (es decir, distinto de 0 y  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$ ).

Consideremos ahora el espacio vectorial de las matrices  $2 \times 2$  con coeficientes en  $\mathbf{K}$ ,  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$ . Toda matriz  $X$  de este espacio se puede escribir de la forma siguiente, descomposición que es única:

$$X = \frac{1}{2}I_2 \operatorname{tr} X + \left(X - \frac{1}{2}I_2 \operatorname{tr} X\right) \quad (1.26)$$

y, por lo tanto, el espacio  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$  es suma directa (como espacios vectoriales):

$$\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K}) = \mathbf{K}I_2 \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{K}) \quad (1.27)$$

Además,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  es una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$  (y un ideal). También  $\mathbf{K}I_2$  es un ideal (bilátero como en todas las álgebras de Lie), ya que la identidad conmuta con cualquier matriz. Otra propiedad importante es:

$$[\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K}), \mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})] \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbf{K}) \quad (1.28)$$

Con la operación de multiplicación usual de matrices,  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$  es un álgebra asociativa. Sin embargo,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  no lo es. El producto de dos matrices de traza cero no es necesariamente una matriz de traza cero. En este sentido,  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$  corresponde a un álgebra de tipo  $A_L$ , pero  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  es sólo una subálgebra de ésta.

### Ejemplo 1.4

El álgebra generada por los campos vectoriales:

$$\frac{d}{dx}, \quad x \frac{d}{dx}, \quad x^2 \frac{d}{dx} \quad (1.29)$$

actuando sobre funciones  $C^\infty(\mathbf{R})$  tiene las mismas relaciones de conmutación que  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ , con lo que podemos establecer un isomorfismo entre ambas álgebras. Diremos que estos campos representan al álgebra de una manera diferente a como lo hacían las matrices:

$$f \rightarrow -\frac{d}{dx}, \quad h \rightarrow x \frac{d}{dx}, \quad e \rightarrow 2x^2 \frac{d}{dx} \quad (1.30)$$

(ver por ejemplo en [6] otra forma de representar esta álgebra).

### 1.3. Grupos y álgebras de Lie

Aunque el tema no se va a desarrollar en esta notas, veamos cuál es el origen del conmutador desde el punto de vista de la teoría de grupos de Lie.

Sea  $G$  un subgrupo de  $GL(n, \mathbf{C})$ , el grupo general lineal en  $\mathbf{C}$  (es decir las matrices complejas  $n \times n$  con determinante distinto de cero). Una transformación infinitesimal se puede definir como:

$$\tau = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma_j - I_n}{\epsilon_j} \quad (1.31)$$

donde  $\{\epsilon_j\}$  es una sucesión de números reales positivos con límite cero, y  $\sigma_j$  es un conjunto de elementos del grupo  $G$ , cuyo límite cuando  $j \rightarrow \infty$  es la identidad. Supongamos que tenemos dos transformaciones infinitesimales y queremos hallar la transformación infinitesimal correspondiente al conmutador en el grupo de los elementos finitos correspondientes, es decir:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{1j} \sigma_{2j} \sigma_{1j}^{-1} \sigma_{2j}^{-1} - I_n}{\epsilon_{1j} \epsilon_{2j}} \quad (1.32)$$

con:

$$\tau_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{1j} - I_n}{\epsilon_{1j}}, \quad \tau_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{2j} - I_n}{\epsilon_{2j}} \quad (1.33)$$

Un sencillo cálculo permite mostrar:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{1j} \sigma_{2j} \sigma_{1j}^{-1} \sigma_{2j}^{-1} - I_n}{\epsilon_{1j} \epsilon_{2j}} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\sigma_{1j} \sigma_{2j} - \sigma_{2j} \sigma_{1j}) \sigma_{1j}^{-1} \sigma_{2j}^{-1}}{\epsilon_{1j} \epsilon_{2j}} = \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sigma_{1j} - I_n}{\epsilon_{1j}}, \frac{\sigma_{2j} - I_n}{\epsilon_{2j}} \right] \sigma_{1j}^{-1} \sigma_{2j}^{-1} &= \left[ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{1j} - I_n}{\epsilon_{1j}}, \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{2j} - I_n}{\epsilon_{2j}} \right] = [\tau_1, \tau_2] \end{aligned}$$

No seguiremos aquí con las relaciones entre las categorías de álgebras y grupos de Lie. Si el grupo de Lie se considera como una variedad en la que hay definida una operación de grupo que verifica unas ciertas propiedades topológicas, el álgebra de Lie correspondiente se puede identificar con el espacio tangente en la identidad del grupo (o con los campos invariantes a derecha o izquierda).

### 1.4. Operaciones con álgebras

**Definición 1.8** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Se define el centro de  $\mathfrak{g}$  como la subálgebra (abeliana) de  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\} \quad (1.34)$$

#### Ejemplo 1.5

El centro de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  es 0 (salvo riesgo de confusión, 0 es el ideal trivial  $\{0\}$  en el álgebra correspondiente), como se comprueba fácilmente:

$$\left[ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} bz - cy & 2ay - b(t - x) \\ c(x - t) - 2az & cy - bz \end{bmatrix} = 0 \quad (1.35)$$

y si  $t = -x$ :

$$\left. \begin{aligned} bz - cy &= 0 \\ ay - bx &= 0 \\ cx - az &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b = c = 0 \quad (1.36)$$

Sin embargo, el centro de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$  es  $\mathbf{K}I_2$ :

$$\left[ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} bz - cy & (a - d)y - b(t - x) \\ c(x - t) - z(a - d) & cy - bz \end{bmatrix} = 0 \quad (1.37)$$

y por tanto:

$$\left. \begin{aligned} bz - cy &= 0 \\ (a - d)y + b(t - x) &= 0 \\ c(x - t) + (d - a)z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = c = 0, d = a \quad (1.38)$$

En cada álgebra de Lie existen unas subálgebras con ciertas características que las hacen útiles en desarrollos posteriores. Veamos algunas de ellas.

**Definición 1.9** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie,  $\mathcal{S}$  un subconjunto de esta álgebra. Se llama centralizador de  $\mathcal{S}$  en  $\mathfrak{g}$  a la subálgebra:

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \{c \in \mathfrak{g} : [s, c] = 0, \forall s \in \mathcal{S}\} \quad (1.39)$$

$\mathcal{C}(\mathcal{S})$  es efectivamente una subálgebra (que no tiene por qué contener a  $\mathcal{S}$ ):

- Es claro que  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  es un subespacio vectorial.
- $c, c' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}), [s, [c, c']] = -[c, [c', s]] - [c', [s, c]] = 0, \forall s \in \mathcal{S}$

luego  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathcal{S} = \mathfrak{g}$ , el conjunto  $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  es el centralizador de  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 1.10** Sea  $W$  un subespacio de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . El normalizador de  $W$  en  $\mathfrak{g}$  es la siguiente subálgebra:

$$\mathcal{N}(W) = \{x \in \mathfrak{g} : [w, x] \in W, \forall w \in W\} \quad (1.40)$$

El conjunto  $\mathcal{N}(W)$  es una subálgebra:

- Es claro que  $\mathcal{N}(W)$  es un subespacio vectorial.
- $x, x' \in \mathcal{N}(W), [w, [x, x']] = -[x, [x', w]] - [x', [w, x]] \in W, \forall w \in W$ , luego  $[x, x'] \in \mathcal{N}(W)$

En el caso en que  $W$  sea una subálgebra, el normalizador es la mayor de las subálgebras que contienen a  $W$  como ideal.

A partir de una o varias álgebras de Lie es posible construir otras. Ya hemos introducido el concepto de álgebra cociente para un álgebra asociativa. Para un álgebra de Lie se define de la misma forma:

**Definición 1.11** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $\mathfrak{J}$  un ideal de  $\mathfrak{g}$ . Podemos definir el álgebra cociente,  $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$ , con el paréntesis siguiente:

$$[x + \mathfrak{J}, y + \mathfrak{J}] = [x, y] + \mathfrak{J}, x, y \in \mathfrak{g} \quad (1.41)$$

Es claro que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$  con la operación definida es un álgebra de Lie. Los teoremas de isomorfía permiten construir un diagrama conmutativo:

Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  dos álgebras de Lie y  $\mathfrak{J}$  un ideal de  $\mathfrak{g}$ . Podemos construir la proyección canónica:

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{J} \\ x & \mapsto & x + \mathfrak{J} \end{array} \quad (1.42)$$

Sea ahora  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  un homomorfismo de álgebras de Lie tal que  $\mathfrak{J} \subset \ker f$ . Entonces,  $f$  se factoriza a través de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$ , es decir, existe una única aplicación  $g : \mathfrak{g}/\mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{g}'$  que es un homomorfismo de álgebras de Lie, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{g}' \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{J} & & \end{array} \quad (1.43)$$

Como ya hemos visto, si  $\ker f = \mathfrak{J}$ ,  $g$  es inyectiva.

**Definición 1.12** Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos álgebras asociativas, y consideremos su suma como espacios vectoriales:

$$A_1 \oplus A_2 \quad (1.44)$$

En este conjunto introducimos un producto dado por:

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1y_1 + x_2y_2 \quad (1.45)$$

que convierte a  $A_1 \oplus A_2$  en un álgebra asociativa. Esta nueva álgebra,  $A$ , se llama el producto directo de las álgebras  $A_1$  y  $A_2$ :

$$A = A_1 \times A_2 \quad (1.46)$$

aunque a veces escribiremos el símbolo de suma directa.

Si se tiene una familia arbitraria de álgebras se puede establecer la misma definición. Evidentemente lo mismo se puede decir de álgebras de Lie, como veremos en el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 1.6

Consideremos el álgebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  y la suma directa:

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{K}) \quad (1.47)$$

Si  $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}$  son elementos de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$ , el conmutador de dos elementos de la suma directa,  $x+y, \tilde{x}+\tilde{y}$  es:

$$[x + y, \tilde{x} + \tilde{y}] = [x, \tilde{x}] + [y, \tilde{y}] \quad (1.48)$$

Si escribimos:

$$x + y \longrightarrow x \otimes I_2 + I_2 \otimes y \quad (1.49)$$

donde  $I_2$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ , la conmutación es:

$$\begin{aligned} [x \otimes I_2 + I_2 \otimes y, \tilde{x} \otimes I_2 + I_2 \otimes \tilde{y}] = \\ [x \otimes I_2, \tilde{x} \otimes I_2] + [x \otimes I_2, I_2 \otimes \tilde{x}] + [I_2 \otimes y, \tilde{x} \otimes I_2] + [I_2 \otimes y, I_2 \otimes \tilde{x}] = \\ [x, \tilde{x}] \otimes I_2 + I_2 \otimes [y, \tilde{y}] \end{aligned}$$

Más adelante volveremos sobre este producto tensorial. Nótese que si dos subálgebras de un álgebra de Lie son suma directa (como álgebras) su conmutador es cero.

Nota: Si construimos el producto tensorial de los espacios asociados a dos álgebras de Lie, el espacio vectorial resultante no tiene por qué ser un álgebra de Lie (ver [5], p.30, problema 23).

## 1.5. Algunos resultados en álgebra lineal

Las álgebras de Lie de endomorfismos son uno de los ejemplos más útiles en el desarrollo de la teoría de álgebras de Lie (además de las consecuencias del teorema de Ado). No solo eso, sino que sus propiedades se trasladan en muchas ocasiones a álgebras de Lie abstractas. Por ello aparecerá a menudo en estas notas y en esta sección estableceremos algunos resultados que serán útiles posteriormente (ver [5], descomposición de Fitting, sección II.4, y [4], descomposición de Jordan-Chevalley, página 17).

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita, definido sobre un cuerpo algebraicamente cerrado (esencialmente  $\mathbf{C}$ , aunque algunos de los resultados y definiciones pueden establecerse sobre cuerpos más generales).

**Definición 1.13** Se dice que un endomorfismo es semisimple si las raíces del polinomio mínimo son distintas (si suponemos que el cuerpo es algebraicamente cerrado, como hacemos aquí, esto equivale a decir que es diagonalizable).

Como es bien conocido (formas canónica de Jordan), todo endomorfismo puede escribirse en una base apropiada como una matriz en forma de cajas formadas por la suma de un múltiplo de la identidad y una matriz nilpotente. Se tiene también el siguiente resultado.

**Proposición 1.1** *Si  $V$  es un espacio de dimensión finita y  $X$  es un endomorfismo de  $V$ , existen dos únicos endomorfismos  $X_{\text{sim}}$ ,  $X_{\text{nil}}$  que conmutan, tales que*

$$X = X_{\text{sim}} + X_{\text{nil}} \quad (1.50)$$

donde  $X_{\text{sim}}$  es semisimple (la parte semisimple) y  $X_{\text{nil}}$  es nilpotente (la parte nilpotente).

Sea  $p(t)$  el polinomio característico de  $X$ ,

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_k)^{r_k} \quad (1.51)$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son los autovalores (distintos) de  $X$  (el cuerpo es algebraicamente cerrado) y  $r_1, \dots, r_k$  las multiplicidades (algebraicas). El espacio  $V$  es suma directa de los subespacios propios generalizados (invariantes bajo  $X$ , componentes primarias en la notación de [5], página 37):

$$V = \ker(X - \lambda_1 1_V)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \ker(X - \lambda_k 1_V)^{r_k} \quad (1.52)$$

Por las propiedades de la división de polinomios es posible<sup>1</sup> encontrar un polinomio  $q$ , de término constante cero y cuyo resto al dividirlo por  $(t - \lambda_i)^{r_i}$  sea  $\lambda_i$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Definimos ahora  $X_{\text{sim}} = q(X)$  y  $X_{\text{nil}} = X - X_{\text{sim}}$  y veamos que cumplen las propiedades exigidas. En primer lugar, al ser polinomios en  $X$ , conmutan entre si. Veamos como  $X_{\text{sim}}$  es semisimple. Es obvio que deja invariante cada uno de los subespacios  $V_i = \ker(X - \lambda_i 1_V)^{r_i}$ . En cada uno de ellos es diagonal, pues por construcción

$$q(t) = m_i(t)(t - \lambda_i)^{r_i} + \lambda_i, \quad q(t) - \lambda_i = m_i(t)(t - \lambda_i)^{r_i} \quad (1.53)$$

y por tanto,

$$X_{\text{sim}} - \lambda_i 1_{V_i} = q(X) - \lambda_i 1_{V_i} = m_i(X)(X - \lambda_i 1_{V_i})^{r_i} = 0 \text{ en } V_i \quad (1.54)$$

Es decir,  $X_{\text{sim}}$  es un múltiplo de la identidad en cada uno de los subespacios  $V_i$  y por tanto semisimple. Veamos ahora que  $X_{\text{nil}}$  es nilpotente. Como  $X_{\text{nil}} = X - X_{\text{sim}}$ , en cada uno de los subespacios  $V_i$ ,  $X_{\text{nil}} = X - \lambda_i 1_{V_i}$ , luego

$$X_{\text{nil}}^{r_i} = (X - \lambda_i 1_{V_i})^{r_i} = 0, \text{ en } V_i \quad (1.55)$$

y por tanto  $X_{\text{sim}}$  es nilpotente (basta elegir el exponente igual al mayor de los  $r_i$ ). Los operadores  $X_{\text{sim}}$  y  $X_{\text{nil}}$  están unívocamente definidos por  $X$ . Dados dos endomorfismos que conmutan entre si y con  $X$ ,  $X'_s$  semisimple y  $X'_n$  nilpotente, tales que  $X = X'_s + X'_n$ , se tiene que  $X_{\text{sim}} = X'_s$  y  $X_{\text{nil}} = X'_n$ . En efecto

$$X_{\text{nil}} - X'_n = X'_s - X_{\text{sim}} \quad (1.56)$$

Pero estos endomorfismos,  $X_{\text{sim}} - X'_s$  y  $X'_n - X_{\text{nil}}$  son, respectivamente, semisimples y nilpotentes (como suma de endomorfismos semisimples y nilpotentes que conmutan). El único endomorfismo que es nilpotente y semisimple es el 0, luego queda probada la unicidad.

Si  $X$  es un endomorfismo semisimple de una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$  entonces  $\text{ad}_X$  (definida por  $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$ , la representación adjunta como veremos más adelante) es también semisimple (basta encontrar una base en la que  $X$  es diagonal y usar adecuadamente la base canónica  $(E_{ij})$  del espacio de matrices correspondiente).

<sup>1</sup>Este resultado es esencialmente el teorema chino del resto: sean  $p_1, p_2, \dots, p_k$  enteros positivos, coprimos dos a dos,  $p = p_1 p_2 \cdots p_k$  y  $u_1, u_2, \dots, u_k$  enteros. Existe un único  $q$ , entero,  $0 \leq q < p$ , solución de las ecuaciones  $q \equiv u_i \pmod{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Cualquier otro entero que verifique estas ecuaciones es congruente con  $q$  módulo  $p$ .

**Proposición 1.2** *Dado un endomorfismo  $X$  se puede descomponer el espacio vectorial en suma directa de dos subespacios invariantes bajo  $X$  (descomposición de Fitting),*

$$V = V_{1X} \oplus V_{0X} \quad (1.57)$$

*y se tiene que  $X|_{V_{0X}}$  es nilpotente, mientras que  $X|_{V_{1X}}$  es un isomorfismo. La definición de estos subespacios es:*

$$V_{1X} = \bigcap_{i=1}^{\infty} X^i V, \quad V_{0X} = \{v \in V : \exists r \in \mathbf{N}, X^r v = 0\} \quad (1.58)$$

Veamos la demostración de la descomposición de Fitting. Dado  $X \in \text{End}(V)$  se tiene la cadena de subespacios invariantes bajo  $X$ :

$$V \supseteq XV \supseteq X^2V \supseteq \dots \quad (1.59)$$

La cadena se estabiliza a partir de un entero  $r$  (puede que en el vector 0) y definimos:

$$V_{1X} = X^r V, \quad X^{r-1}V \supsetneq X^r V = X^{r+1}V \quad (1.60)$$

Como hemos dicho se trata de un subespacio invariante bajo  $A$ . De manera similar se define el otro subespacio. Sea

$$W_k = \{v \in V : X^k v = 0\} \quad (1.61)$$

Está claro que  $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots$  por lo que existe un entero  $s$  tal que  $W_{s-1} \subsetneq W_s = W_{s+1} = \dots$ . Entonces,  $V_{\text{nil}} = W_s$ . Si  $c = \max\{r, s\}$  se tiene,

$$V_{1X} = X^c V, \quad V_{\text{nil}} = \{v \in V : X^c v = 0\} \quad (1.62)$$

dado  $v \in V$ , como  $X^{2c}V = X^c V$ , existe  $w \in V$  tal que  $X^c v = X^{2c}w$ , Descomponemos  $v$  en la forma:

$$v = (v - X^t w) + X^t w \quad (1.63)$$

El segundo vector está obviamente en  $V_{1X}$ . No es menos obvio que el primero está en  $V_{0X}$ . Vamos a probar que la suma es directa. Sea  $u \in V_{0X} \cap V_{1X}$ . Como  $w \in V_{1X}$ , se tiene  $w = X^t w'$ , para algún  $w' \in V$ . Como también está en  $V_{0X}$ ,  $X^t w = X^{2t} w' = 0$ . Por lo tanto,  $w' \in W_t = W_{2t}$ , luego  $X^t w' = 0$ , es decir  $w = 0$ .

Comprobemos que las propiedades son las deseadas. Es obvio por la definición que  $X$  es nilpotente cuando nos restringimos a  $V_{0X}$ . También es inmediato que  $X$  es sobreyectiva en  $V_{1X}$ , pues  $XV_{1X} = V_{1X}$  y los endomorfismos sobreyectivos son biyectivos.

Es fácil ver que  $V_{0X}$  es simplemente el espacio propio generalizado de autovalor 0 y por tanto su dimensión es la multiplicidad de 0 como raíz del polinomio característico de  $X$ .

## Capítulo 2

# Álgebras nilpotentes, resolubles y semisimples

Dependiendo de sus propiedades las álgebras de Lie se clasifican en diferentes clases. En esta sección estudiaremos algunas de las más importantes.

### 2.1. Álgebras nilpotentes

Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , definimos la serie descendente (ver en [5], p.29, la definición de serie ascendente) como una cadena de subálgebras construida de la forma siguiente:

$$C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, C^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, C^k(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^{k-1}(\mathfrak{g})], \dots \quad (2.1)$$

Todos los conjuntos  $C^k(\mathfrak{g})$  son ideales de  $\mathfrak{g}$  que verifican

$$C^1(\mathfrak{g}) \supset C^2(\mathfrak{g}) \supset \dots \supset C^k(\mathfrak{g}) \supset \dots \quad (2.2)$$

**Definición 2.1** Se dice que el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es nilpotente, si existe  $r \in \mathbf{N}$  tal que:

$$C^r(\mathfrak{g}) = 0 \quad (2.3)$$

Si  $r$  es el primer entero tal que  $C^r(\mathfrak{g}) = 0$ , se dice que  $r$  es el orden de nilpotencia.

**Ejemplo 2.1**

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbf{C} \right\} \quad (2.4)$$

es un álgebra de Lie. Es inmediato que:  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ , luego  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie nilpotente ( $C^2(\mathfrak{g}) = 0$ ). En este caso, las matrices del álgebra son nilpotentes (en el sentido de nilpotencia de matrices). Sin embargo no todas las álgebras de Lie nilpotentes son representadas por matrices nilpotentes.

**Ejemplo 2.2**

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, a \in \mathbf{C} \right\} \quad (2.5)$$

es un álgebra nilpotente. Tanto en este ejemplo como en el anterior, el álgebra es además abeliana, pero no todas las álgebras nilpotentes son abelianas (aunque todas las abelianas sean nilpotentes,

como se deduce de forma inmediata de la definición). Si un álgebra de Lie es nilpotente, también lo son sus subálgebras y su imagen mediante homomorfismos.

### Ejemplo 2.3

$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  no es un álgebra nilpotente:

$$[\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K}), \mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})] = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{K}) \quad (2.6)$$

luego:

$$C^k = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{K}), \quad \forall k \quad (2.7)$$

Sin embargo, si la característica del cuerpo  $\mathbf{K}$  fuera igual a 2, esta álgebra sería nilpotente (ver [4], p.14).

### Ejemplo 2.4

Álgebras de matrices triangulares:

$$\mathcal{N}_+(n, \mathbf{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.8)$$

(ceros en la diagonal y por debajo de ella) es un álgebra nilpotente pero no es abeliana si  $n \geq 2$ .

Las propiedades más importantes de las álgebras nilpotentes se describen en el siguiente teorema. Se define la transformación lineal  $\text{ad}_x$  (se dice que  $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $\mathfrak{g}$  a través de la representación adjunta, como veremos) para todo  $x \in \mathfrak{g}$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \text{ad}_x : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ y &\mapsto \text{ad}_x(y) = [x, y] \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Teorema 2.1 (Engel)** 1. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie:

$$\mathfrak{g} \text{ nilpotente} \Leftrightarrow \text{ad}_x \text{ nilpotente } \forall x \in \mathfrak{g} \quad (2.10)$$

2. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita,  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie, subálgebra del álgebra  $\mathfrak{gl}(V)$  (es decir,  $\mathcal{L}(V)$  con su estructura de álgebra de Lie), tal que los elementos de  $\mathfrak{g}$  son nilpotentes. Entonces:

- a)  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie nilpotente.
- b)  $\mathfrak{g}$  está contenida en un álgebra de tipo triangular (superior o inferior)

Probemos en primer lugar que si  $\mathfrak{g}$  es nilpotente, los endomorfismos  $\text{ad}_x$ ,  $x \in \mathfrak{g}$  son nilpotentes ( $x$  es ad-nilpotente). Esto es una consecuencia inmediata de la definición. En general, si el orden de nilpotencia es  $n$ , se tiene:

$$\text{ad}_{x_1} \text{ad}_{x_2} \cdots \text{ad}_{x_n} = 0, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g} \quad (2.11)$$

y en particular,

$$\text{ad}_x^n = 0 \quad (2.12)$$

Para demostrar la implicación en sentido contrario, probemos primeramente lo siguiente.

**Proposición 2.1** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita (no trivial),  $\mathfrak{g}$  una subálgebra del álgebra  $\mathfrak{gl}(V)$ , tal que sus elementos son nilpotentes. Entonces existe un vector no nulo  $v \in V$  tal que  $Xv = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ .

La demostración se puede hacer por inducción en la dimensión del álgebra. Si la dimensión es igual a 0, 1, el resultado es trivial. Supongamos que el resultado es correcto para álgebras de dimensión menor que  $r$  y sea  $\mathfrak{g}$  de dimensión  $r$ . Si  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$  (distinta de  $\mathfrak{g}$ ), los elementos  $\text{ad}_X$ ,  $X \in \mathfrak{h}$ , son endomorfismos nilpotentes de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ , pues a cada  $X \in \mathfrak{h}$  le podemos asociar los endomorfismos de traslación a derecha e izquierda:

$$\rho_X(Y) = YX, \quad \lambda_X(Y) = XY \quad (2.13)$$

que son nilpotentes (trivialmente al serlo  $X$ ,  $X^m = 0$  para algún entero  $m$ ). Pero

$$\text{ad}_X Y = \lambda_X(Y) - \rho_X(Y) \quad (2.14)$$

luego también es nilpotente pues conmutan).

Podemos construir el espacio cociente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  (que no es en general un álgebra de Lie) y definir  $\text{ad}_X$  sobre  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  (pues  $X \in \mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}$  es un álgebra):

$$\text{ad}_X(Y + \mathfrak{h}) = \text{ad}_X Y + \mathfrak{h} \quad (2.15)$$

Los endomorfismos  $\text{ad}_X$  son nilpotentes sobre  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  que es un álgebra de dimensión menor que  $r$ . De acuerdo con la hipótesis de inducción, existe un vector en  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ,  $Z + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$ , tal que

$$\text{ad}_X(Z + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \quad (2.16)$$

es decir, existe  $Z \in \mathfrak{g}$ ,  $Z \notin \mathfrak{h}$ , tal que

$$[X, Z] \in \mathfrak{h}, \quad \forall X \in \mathfrak{h} \quad (2.17)$$

Esto quiere decir que  $Z \in \mathcal{N}(\mathfrak{h})$ , el normalizador de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}$ . Además, la inclusión  $\mathfrak{h} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{h})$  es propia (pues  $Z \notin \mathfrak{h}$ ). Supongamos ahora que  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra maximal. Pero entonces el normalizador  $\mathcal{N}(\mathfrak{h})$  es igual a  $\mathfrak{g}$  (pues es una subálgebra y contiene propiamente a  $\mathfrak{h}$ ) y  $\mathfrak{h}$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ .

La dimensión de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  es igual a 1. Si fuera mayor que 1, tendría una subálgebra propia de dimensión 1, que corresponde a una subálgebra de  $\mathfrak{g}$  que contiene a  $\mathfrak{h}$  (y no es igual a ella). Pero como  $\mathfrak{h}$  es maximal, esta situación no puede darse, y por tanto  $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$ . Por tanto (suma directa como espacios vectoriales)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbf{K}Z, \quad Z \notin \mathfrak{h} \quad (2.18)$$

y al ser  $\dim \mathfrak{h} = r - 1$  aplicando la hipótesis de inducción, existe  $v \in V$  tal que  $\mathfrak{h}v = 0$  y por tanto el subespacio de  $V$ ,  $V' = \{v \in V : \mathfrak{h}v = 0\}$  es no trivial. Además, si  $X \in \mathfrak{g}$  y  $v \in V'$  entonces  $Xv \in V'$ , pues

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, \quad YXv = XYv + [Y, X]v = 0 \Rightarrow Xv \in V' \quad (2.19)$$

pues  $\mathfrak{h}$  es un ideal y por tanto  $[Y, X] \in \mathfrak{h}$ . Por tanto, si  $Z \in \mathfrak{g}$  y  $Z \notin \mathfrak{h}$ , se tiene un endomorfismo nilpotente actuando sobre el espacio  $V'$  de dimensión menor que  $r$ . Aplicando la hipótesis de inducción, existe  $w \in V'$  tal que  $Zw = 0$ . Como cualquier endomorfismo  $X$  de  $\mathfrak{g}$  se puede escribir como  $X = Y + \lambda Z$ ,  $X, Z \in \mathfrak{h}$ ,  $\lambda \in K$ ,  $Z \notin \mathfrak{h}$ , se tiene:

$$Xw = (Y + \lambda Z)w = Yw + \lambda Zw = 0 \quad (2.20)$$

lo que demuestra la proposición.

Veamos ahora como  $\text{ad}_x$  nilpotente  $\forall x \in \mathfrak{g}$  ( $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie arbitraria) implica que el álgebra  $\mathfrak{g}$  es nilpotente. Por la proposición anterior,  $\{\text{ad}_x : x \in \mathfrak{g}\}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  formada por endomorfismos de  $\mathfrak{g}$  nilpotentes. Por tanto, existe  $y \in \mathfrak{g}$  tal que:

$$\text{ad}_x y = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g} \quad (2.21)$$

es decir, el centro de  $\mathfrak{g}$  es no trivial. Construyendo el álgebra cociente  $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ , obtenemos un álgebra de menor dimensión formada por elementos ad-nilpotentes. Utilizando inducción en la dimensión

del álgebra se concluye que  $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  es nilpotente. Pero si el cociente de un álgebra sobre su centro es nilpotente, el álgebra es nilpotente. La demostración de este último hecho es como sigue. Al ser  $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  nilpotente, existe  $n$  tal que  $C^n(\mathfrak{g}/\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 0$ . Esto quiere decir que  $C^n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ . Pero entonces

$$C^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{g}, \mathcal{Z}(\mathfrak{g})] = 0 \quad (2.22)$$

luego  $\mathfrak{g}$  es nilpotente.

En cuanto a la segunda parte, ya hemos visto que si un endomorfismo  $X$  es nilpotente,  $\text{ad}_X$  también lo es. Y por el resultado de la primera parte,  $\mathfrak{g}$  es nilpotente. Veamos ahora que existe una torre de subespacios (es decir, una cadena de subespacios  $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ , de dimensiones  $\dim V_k = k$ ) de  $V$  que verifican  $XV_i \subset V_{i-1}$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . Como sabemos, existe  $v_1 \in V$  tal que  $Xv_1 = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . Sea  $V_1 = \text{lin}\{v_1\}$ . Claramente  $V_1 \subset V_0$ . Se puede definir  $X$  sobre el cociente  $V/V_1$  y es un endomorfismo nilpotente. Como la dimensión de  $V/V_1$  es menor que la de  $V$  se usa la hipótesis de inducción y se construye una cadena de subespacios con las propiedades adecuadas. Se pasa a una cadena en  $V$  usando la imagen inversa mediante la proyección canónica en el cociente.

---

Usando una base adaptada a la torre de subespacios, la forma de las matrices de los endomorfismos en esa base es triangular superior (estrictamente).

Los resultados sobre descomposición de endomorfismos (descomposición de Fitting y en subespacios propios generalizados) se verifican en las álgebras nilpotentes. Se tiene el siguiente resultado

**Proposición 2.2** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie nilpotente de endomorfismos de un espacio de dimensión finita. El espacio  $V$  se escribe como:*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \quad (2.23)$$

*Cada subespacio  $V_i$  es invariante bajo el álgebra  $\mathfrak{g}$  y el polinomio mínimo de todo  $X|_{V_i}$ , con  $X \in \mathfrak{g}$  es un factor irreducible elevado a una cierta potencia. Si el cuerpo es algebraicamente cerrado, la restricción de todo  $X$  a cada  $V_i$  es un múltiplo de la identidad más un endomorfismo nilpotente.*

El uso de los resultados presentados sobre álgebras nilpotentes y resultados clásicos en álgebra lineal (vistos en el capítulo 1), permiten llegar al teorema siguiente sobre pesos y subespacios invariantes (ver [5], sección II.4).

**Definición 2.2** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de endomorfismos de un espacio  $V$  de dimensión finita (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $\mathbf{K}$ ). Una forma lineal  $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{K}$  es un peso de  $V$  para  $\mathfrak{g}$  si existe  $v \in V$ , no nulo, tal que  $(X - \mu(X)1_V)^r v = 0$ , para algún  $r \in \mathbf{N}$  (que depende de  $v$  y de  $X$ ). Se llama espacio de peso  $\mu$  al conjunto de tales vectores (incluido el 0). Es un subespacio vectorial invariante bajo  $X$ .*

Este concepto de pesos se traslada a un álgebra de Lie cualquiera y a una representación de dimensión finita de manera obvia (ver Capítulo 6). Se tiene,

**Teorema 2.2** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie nilpotente de endomorfismos de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces,  $\mathfrak{g}$  tiene un número de pesos finito, los espacios peso son invariantes bajo  $\mathfrak{g}$  y  $V$  es la suma directa de estos subespacios. Solo existe una descomposición de  $V$  con las propiedades que tienen los espacios peso.*

## 2.2. Álgebras resolubles

El segundo tipo de álgebras de Lie que estudiaremos aquí es el de álgebras resolubles.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Se define la serie derivada de  $\mathfrak{g}$  como la cadena de ideales:

$$D^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, D^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, D^k(\mathfrak{g}) = [D^{k-1}(\mathfrak{g}), D^{k-1}(\mathfrak{g})], \dots \quad (2.24)$$

donde

$$D^1(\mathfrak{g}) \supset D^2(\mathfrak{g}) \supset \cdots \supset D^k(\mathfrak{g}) \supset \cdots \quad (2.25)$$

**Definición 2.3** *Se dice que un álgebra de Lie es resoluble si existe un entero  $k$  tal que*

$$D^k(\mathfrak{g}) = 0$$

De las definiciones se deduce que toda álgebra nilpotente es resoluble. Sin embargo hay álgebras resolubles que no son nilpotentes. Si un álgebra de Lie es resoluble, también lo son sus subálgebras y su imagen mediante homomorfismos. Además, si el cociente por un ideal resoluble es resoluble, el álgebra original también lo es. Finalmente, la suma de ideales resolubles es resoluble. Este último resultado es consecuencia del isomorfismo

$$(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)/\mathfrak{J}_2 \approx \mathfrak{J}_1/(\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2) \quad (2.26)$$

Como  $\mathfrak{J}_1$  es resoluble,  $\mathfrak{J}_1/(\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2)$  también lo es, y por lo tanto  $(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)/\mathfrak{J}_2$ . Al ser  $\mathfrak{J}_2$  resoluble,  $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$  es resoluble.

### Ejemplo 2.5

Álgebras cuasitriangulares.

$$\mathcal{T}_+(n, \mathbf{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.27)$$

es un álgebra resoluble pero no nilpotente. Por ejemplo, para  $n = 2$

$$\mathcal{T}_+(2, \mathbf{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right\} \quad (2.28)$$

$$C^k(\mathcal{T}_+(2, \mathbf{K})) = \mathcal{N}_+(2, \mathbf{K}), \quad \forall k, \quad (2.29)$$

pero:

$$D^3(\mathcal{T}_+(2, \mathbf{K})) = 0 \quad (2.30)$$

$\mathcal{T}_+(n, \mathbf{K})$  es un álgebra de Borel (maximal resoluble en  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{K})$ ).

Las anteriores definiciones de álgebras triangulares y cuasitriangulares se pueden dar sin referencia a una base explícita, usando sus propiedades en relación a las torres de subespacios.

La suma de ideales resolubles es un ideal resoluble. Por lo tanto toda álgebra de Lie posee un ideal maximal resoluble, que es único.

**Definición 2.4** *Se llama radical de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  a su ideal resoluble maximal.*

Las álgebras resolubles tienen propiedades similares a las nilpotentes.

**Teorema 2.3** *Sea  $V$  un espacio vectorial (no trivial, sobre  $\mathbf{C}$ , o en general un cuerpo algebraicamente cerrado)  $\mathfrak{g}$  una subálgebra resoluble de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Entonces, existe un vector  $v \in V$  que es autovector de todo  $x \in \mathfrak{g}$*

La demostración es similar al teorema de Engel, por inducción en la dimensión del álgebra. Si la dimensión es cero, es trivial. Como  $\mathfrak{g}$  es resoluble, el álgebra derivada  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  no es igual a  $\mathfrak{g}$ , y el álgebra cociente  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  es abeliana (obviamente,  $[X + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], Y + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = [X, Y] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ). Tomando un subespacio de dimensión 1, que es un ideal al ser  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , la imagen inversa mediante la proyección canónica es un ideal  $\mathfrak{J}$  de  $\mathfrak{g}$  de codimensión (la dimensión del correspondiente espacio

cociente) 1 en  $\mathfrak{g}$  que contiene a  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Este ideal es resoluble y no trivial si la dimensión del álgebra es mayor que 1 (en el caso en que  $\dim \mathfrak{g} = 1$  la demostración es inmediata).

Se puede aplicar la hipótesis de inducción. Es decir, existe  $w \in V$  que es un autovector de todo  $X \in \mathfrak{J}$ :

$$Xw = \mu(X)w, \quad \mu(X) \in \mathbf{C} \quad (2.31)$$

Se tiene que  $\mu : \mathfrak{J} \rightarrow \mathbf{C}$  es lineal y sea  $W$  el subespacio no trivial (propio) de  $V$  de los autovectores comunes:

$$W = \{w \in V : Xw = \mu(X)w, \forall X \in \mathfrak{J}\} \quad (2.32)$$

Lo que nos falta probar es que  $\mathfrak{g}$  deja invariante  $W$  (no solo  $\mathfrak{J}$ ). Supongamos que esto es cierto. El álgebra  $\mathfrak{g}$  se puede descomponer en suma de  $\mathfrak{J}$  y un subespacio de dimensión 1:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{J} + \mathbf{C}Y, \quad Y \in \mathfrak{g}, Y \notin \mathfrak{J} \quad (2.33)$$

Al ser  $\mathbf{C}$  algebraicamente cerrado,  $Y$  tiene al menos un autovector  $u \in W$ , con autovalor  $\mu_0$ . Entonces  $u$  es un autovector común a todos los elementos de  $\mathfrak{g}$  (pues está en  $w$ ). La forma  $\mu$  se extiende linealmente a todo  $\mathfrak{g}$ , con  $\mu(Y) = \mu_0$ .

Queda pues por demostrar que  $W$  es invariante bajo  $\mathfrak{g}$ , no solo bajo  $\mathfrak{J}$ . Es decir, si dado  $w \in W$  y  $X \in \mathfrak{g}$ , se tiene  $Xw \in W$ . Por la definición de  $W$ , lo que hay que verificar es

$$Y(Xw) = \lambda(Y)Xw, \quad Y \in \mathfrak{J} \quad (2.34)$$

Como

$$Y(Xw) = X(Yw) - [X, Y]w = \lambda(Y)Xw - \lambda([X, Y])w, \quad (2.35)$$

lo anterior es equivalente a  $\lambda([X, Y]) = 0$  ( $\mathfrak{J}$  es un ideal).

Los vectores  $w, Xw, \dots, X^{n-1}w$  son linealmente independientes para un cierto  $n$  (tal que  $X^n w$  depende de los anteriores). Construimos la cadena de subespacios:

$$W_k = \text{lin}\{w, Xw, \dots, X^{k-1}w\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

con  $W_0 = \{0\}$ ,  $\dim W_k = k$  y  $W_{n+i} = W_n$  cuando  $i = 0, 1, 2, \dots$ . El subespacio  $W_n$  es invariante bajo  $X$  que lleva  $W_i$  en  $W_{i+1}$ . Lo mismo ocurre con  $Y \in \mathfrak{J}$ , pues  $w$  es un autovector de  $Y$  ( $Yw = \lambda(Y)w$ ). En este espacio y en la base  $\{w, Xw, \dots, X^{n-1}w\}$ , el endomorfismo  $Y$  está representado por una matriz triangular superior:

$$Y(X^k w) = (XY - [X, Y])X^{k-1}w \quad (2.37)$$

Por inducción, para  $k = 0$ ,  $Yw = \lambda(Y)w$ . Supongamos que es cierto para  $i < k$ . Para  $k$ , en la expresión anterior (2.37), no hay problemas con el primer sumando usando la hipótesis de inducción, pues  $X^{k-1} \in W_{k-1}$ ,  $Y$  verifica la propiedad buscada y  $X$  lleva  $W_i$  en  $W_{i+1}$ . En cuanto al segundo, tampoco hay problemas pues  $[X, Y] \in \mathfrak{J}$ .

Al ser la matriz triangular, los autovalores están sobre la diagonal (todos los vectores de  $W_n$  son autovectores de  $Y$  con el mismo autovalor), luego

$$\text{tr}_{W_n} Y = n\lambda(Y) \quad (2.38)$$

Esta propiedad es cierta para todos los elementos de  $\mathfrak{J}$  en particular para  $[X, Y]$ . Como  $\text{tr}[X, Y] = 0$ , se tiene que  $\lambda([X, Y]) = 0$  como queríamos demostrar.

La principal consecuencia de este resultado es el teorema de Lie:

**Teorema 2.4 (Teorema de Lie)** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $\mathfrak{g}$  una subálgebra resoluble de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Entonces existe una base de  $V$  en la cual todos los endomorfismos de  $\mathfrak{g}$  se representan por matrices triangulares superiores.*

Es decir,  $\mathfrak{g}$  deja estable una torre de subespacios. La demostración del teorema se hace por inducción en la dimensión de  $V$  utilizando la proposición anterior.

En cuanto a la relación entre las álgebras resolubles y nilpotentes, se tiene que si  $\mathfrak{g}$  es resoluble, el álgebra derivada,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , es nilpotente. Esto es una consecuencia de que los elementos de  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  son ad-nilpotentes. Desde el punto de vista de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita, lo que se está diciendo es que el conmutador de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior estricta, es decir con ceros en la diagonal. La demostración de estos resultados se basa entonces en una representación por endomorfismos de las álgebras consideradas.

Veamos ahora el criterio de Cartan para las álgebras resolubles.

**Teorema 2.5 (Criterio de Cartan)** *Sea  $\mathfrak{g}$  una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$ ,  $V$  espacio vectorial de dimensión finita. Si  $\text{tr } xy = 0$  para todo  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $y \in \mathfrak{g}$ , entonces  $\mathfrak{g}$  es resoluble.*

La demostración se basa en un resultado previo sobre una caracterización de endomorfismos nilpotentes.

**Proposición 2.3** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $A$  y  $B$  dos subespacios de  $\mathfrak{gl}(V)$  tales que  $A \subset B$ . Sea  $M$  el conjunto de endomorfismos  $x$  de  $V$  que verifican  $[x, B] \subset A$ . Si un endomorfismo  $X \in M$  satisface  $\text{tr } XY = 0$  para todo  $Y \in M$  entonces  $x$  es nilpotente.*

Basta entonces probar que todos los endomorfismos en  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  son nilpotentes. Se aplica el resultado anterior considerando  $A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , y  $B = \mathfrak{g}$ . Si probamos que  $\text{tr } XY = 0$  para todo  $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $Y \in M = \{Z \in \mathfrak{g} : [Z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$ , el resultado anterior permite concluir con lo que queríamos. Nótese que el espacio  $M$  contiene en general que  $\mathfrak{g}$ . Pero

$$\text{tr}([X, Y]Z) = \text{tr}([X, [Y, Z]]) = 0 \quad (2.39)$$

con  $[Y, Z] \in M$ . El criterio de Cartan se extiende sin dificultad a un álgebra de Lie cualquiera (no necesariamente de endomorfismos).

**Teorema 2.6** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie tal que  $\text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y) = 0$  si  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $y \in \mathfrak{g}$ . Entonces  $\mathfrak{g}$  es resoluble.*

La demostración se basa en que el homomorfismo dado por  $\text{ad}$  tiene como núcleo el centro de  $\mathfrak{g}$  que es resoluble. Al ser la imagen resoluble por el criterio de Cartan, también  $\mathfrak{g}$  lo es.

## 2.3. Álgebras semisimples

Una clase de álgebras de Lie, que será la que estudiaremos en los próximos capítulos, es la de las álgebras semisimples.

**Definición 2.5** *Se dice que el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es semisimple si no tiene ideales abelianos propios y no es abeliana (lo que equivale a decir que el único ideal abeliano que tiene es el 0).*

Un álgebra de Lie es semisimple si y solo si su radical es 0. En efecto, si el radical es 0, el único ideal resoluble es 0. Como todo ideal abeliano es resoluble, no hay ideales abelianos salvo el 0 y por tanto el álgebra es semisimple. Si el álgebra es semisimple, no hay ideales abelianos. Tampoco puede haber ideales resolubles (distintos del 0), pues si un ideal es resoluble,  $D^k(\mathcal{J})$  es 0 para un primer  $k$  y por tanto  $D^{k-1}(\mathcal{J})$  es abeliano (y no trivial), lo que no es posible.

### Ejemplo 2.6

$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$  es un álgebra de Lie semisimple.

$\mathfrak{o}(4, \mathbf{C}) = \{X \in \mathbf{C}^{4 \times 4} : X + X^T = 0\}$  es un álgebra semisimple.

Sin embargo,  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$  no es un álgebra semisimple. Como hemos visto,  $\mathbf{K}I_2$  es un ideal de esta álgebra, que es abeliano y por lo tanto nilpotente y resoluble. El radical de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{K})$  debe contener este ideal luego no es 0. Como se puede comprobar fácilmente, el radical coincide con  $\mathbf{K}I_2$ .

**Definición 2.6** Se dice que el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es simple si:

1. no es abeliana
2. los únicos ideales son  $0$  y  $\mathfrak{g}$ .

**Ejemplo 2.7**

$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  es un álgebra simple.

$\mathfrak{o}(4, \mathbf{C})$  no es un álgebra simple. Tiene un ideal que es isomorfo a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . Más precisamente:

$$\mathfrak{o}(4, \mathbf{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$$

Introduciremos ahora la forma de Killing, que nos permitirá establecer un criterio para saber si un álgebra de Lie es semisimple.

**Definición 2.7** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita. Se define la forma de Killing como:

$$K(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y) \quad (2.40)$$

Obviamente es simétrica. Además verifica

$$K(x, [y, z]) = K(x, \text{ad}_y z) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_{[y, z]}) = \text{tr}(\text{ad}_x(\text{ad}_y \text{ad}_z - \text{ad}_z \text{ad}_y)) \quad (2.41)$$

$$= -\text{tr}((\text{ad}_y \text{ad}_x - \text{ad}_x \text{ad}_y) \text{ad}_z) = -\text{tr}(\text{ad}_{[y, x]} \text{ad}_z) = -K([y, x], z) \quad (2.42)$$

y es por tanto una forma bilineal invariante simétrica como veremos en el próximo capítulo.

Las propiedades de la forma de Killing permiten caracterizar a las álgebras semisimples.

**Proposición 2.4** Un álgebra de Lie es semisimple si y solo si su forma de Killing es no degenerada.

La demostración es como sigue. Supongamos que  $\mathfrak{g}$  es semisimple y probemos que  $K$  no es degenerada. El radical de  $K$ ,  $\mathfrak{g}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} : K(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$  es un ideal, como se demuestra fácilmente. Además, es resoluble, ya que  $\text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y) = 0$  si  $x, y \in \mathfrak{g}^\perp$  (usando el criterio de Cartan). Si  $\mathfrak{g}^\perp$  es no trivial, esto quiere decir que existen ideales abelianos no triviales, lo que no puede ocurrir al ser  $\mathfrak{g}$  semisimple. Por tanto  $\mathfrak{g}^\perp = 0$  y la forma es no degenerada. Veamos el resultado contrario. Supongamos que  $K$  es no degenerada, es decir que su radical es  $0$ . Probemos que todo ideal abeliano  $\mathfrak{J}$  de  $\mathfrak{g}$  está contenido en  $\text{rad } K$  (y por lo tanto es trivial). Sea  $x \in \mathfrak{J}$ ,  $y \in \mathfrak{g}$ , queremos probar que  $K(x, y) = 0$ . Pero al ser  $\mathfrak{J}$  abeliano,  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}] = 0$ . Como  $\text{ad}_x \text{ad}_y$  va de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{J}$ , se tiene que  $(\text{ad}_x \text{ad}_y)^2 = 0$ , con lo que  $\text{ad}_x \text{ad}_y$  es nilpotente y su traza es cero, luego  $K(x, y) = 0$

El ser semisimple es una propiedad que se conserva bajo extensiones de cuerpos. No podemos entrar aquí en los detalles de esta importante cuestión (ver [5] página 70).

El resultado más importante que nos queda por probar se refiere a la estructura de las álgebras semisimples. Veremos a continuación que toda álgebra semisimple es la suma directa de todos sus ideales (que obviamente no son abelianos). El resultado se puede establecer para álgebras asociativas (ver [5], página 71), pero nos limitaremos a las de Lie.

**Teorema 2.7** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita, semisimple. Entonces,  $\mathfrak{g}$  tiene un número finito de ideales simples,  $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_r$ , y se puede escribir como la suma directa de todos sus ideales simples:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{J}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{J}_r \quad (2.43)$$

La suma directa es como subespacios de  $\mathfrak{g}$ , pero al ser ideales, el conmutador  $[\mathfrak{J}_i, \mathfrak{J}_j]$  está contenido en la intersección  $\mathfrak{J}_i \cap \mathfrak{J}_j = 0$  y por lo tanto es una suma directa de subálgebras. Usaremos inducción en la dimensión de  $\mathfrak{g}$  y la caracterización de álgebras semisimples por las propiedades de sus formas de Killing. Si no hay ideales propios, el álgebra es simple. Sea  $\mathfrak{J}$  un ideal propio minimal. Su ortogonal, según  $K$ , es también un ideal y se tiene:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}^\perp \quad (2.44)$$

pues, usando el criterio de Cartan, la intersección  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^\perp$  es un ideal resoluble que debe ser 0. Como cualquier ideal de  $\mathfrak{J}$  lo es de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{J}$  es semisimple y al ser minimal es simple. Se tiene que  $\mathfrak{J}^\perp$  es semisiple y de dimensión menor que  $\mathfrak{g}$ . Aplicando la hipótesis de inducción se demuestra el teorema. Cualquier ideal simple está en la lista de los  $\mathfrak{J}_i$ . Efectivamente, sea  $\mathfrak{J}$  un ideal simple. El conmutador  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{g}]$  es un ideal contenido en  $\mathfrak{J}$ . Como  $\mathfrak{J}$  es simple es 0 o  $\mathfrak{J}$ . Pero el centro de  $\mathfrak{g}$  es cero, luego  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{J}$ . Si usamos la descomposición en suma directa de ideales, se tiene:

$$[\mathfrak{J}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_r] = \mathfrak{J} \quad (2.45)$$

por lo que existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_i] = \mathfrak{J}$  y  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_j] = 0$  para  $j \neq i$ . De  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_i] = \mathfrak{J}$  se deduce que  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}_i$  y como  $\mathfrak{J}_i$  es simple se tiene  $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_i$ .

Se puede comprobar fácilmente que la restricción de la forma de Killing a cada uno de los ideales es la forma de Killing del ideal. Todos los ideales de un álgebra semisimple son semisimples y suma directa de ideales simples del álgebra. Además, el álgebra derivada  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  coincide con  $\mathfrak{g}$  (se dice que  $\mathfrak{g}$  es perfecta).

Finalmente enunciaremos sin demostración un resultado debido a Levi sobre la estructura de un álgebra de Lie en relación a su radical.

**Teorema 2.8** *Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie y  $\mathfrak{r}$  su radical, se tiene:*

1.  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$  es un álgebra semisimple
2. (Teorema de Levi) Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de dimensión finita, con radical  $\mathfrak{r}$ , existe una subálgebra semisimple de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{s}$ , tal que:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r} \quad (2.46)$$

(como suma de espacios vectoriales).

Como consecuencia,  $\mathfrak{s} \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ . El álgebra  $\mathfrak{s}$  no es única. Sin embargo, existe un automorfismo que relaciona dos de estas álgebras,  $\exp \text{ad}_x$ , donde  $x$  es un elemento del nil-radical de  $\mathfrak{g}$  (es una consecuencia de un teorema debido a Malcev y Harish-Chandra, ver [5], página 92). El nil-radical de un álgebra de Lie (de dimensión finita) es un ideal nilpotente (que existe y es único) que contiene a todo ideal nilpotente del álgebra. Está contenido en el radical del álgebra.



## Capítulo 3

# Introducción a la teoría de representaciones

Aunque volveremos más adelante al estudio detallado de la teoría de representaciones de álgebras de Lie, introduciremos aquí unos conceptos elementales que necesitaremos en los próximos capítulos.

### 3.1. Derivaciones

**Definición 3.1** Sea  $A$  un álgebra sobre un cuerpo  $\mathbf{K}$ . Una aplicación lineal  $\delta : A \rightarrow A$  es una derivación si:

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) \quad (3.1)$$

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie, una derivación verifica:

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)] \quad (3.2)$$

La composición de derivaciones no es una derivación. Sin embargo el paréntesis de Lie (como conmutador en el álgebra asociativa de las aplicaciones lineales) sí es una derivación,

$$[\delta_1, \delta_2](xy) = [\delta_1, \delta_2](x)y + x[\delta_1, \delta_2](y) \quad (3.3)$$

por lo tanto, el conjunto de todas las derivaciones,  $\text{Der}(A)$ , (que es un subespacio vectorial del conjunto de los endomorfismos lineales del álgebra como espacio vectorial), es una subálgebra del álgebra de Lie asociada,  $\mathfrak{gl}(A)$ .

Dada un álgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$ , se dice que una derivación  $\delta$  es interna si existe un elemento del álgebra  $x$ , tal que se tiene:

$$\delta(y) = [x, y], \quad \forall y \in \mathfrak{g} \quad (3.4)$$

Es decir,  $\delta = \text{ad}_x$  en la notación introducida previamente. El conjunto de las derivaciones internas de  $\mathfrak{g}$  es un ideal de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ . En efecto, si  $\delta$  es una derivación y  $x \in \mathfrak{g}$  entonces  $[\delta, \text{ad}_x]$  es una derivación interna, pues:

$$[\delta, \text{ad}_x]y = \delta \text{ad}_x y - \text{ad}_x \delta y = \delta[x, y] - [x, \delta y] = [\delta x, y] = \text{ad}_{\delta x} y \quad (3.5)$$

**Proposición 3.1** Todas las derivaciones de un álgebra de Lie semisimple son internas.

Un álgebra semisimple tiene centro igual a 0, por lo que el homomorfismo  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{g}$  en su imagen,  $\text{ad } \mathfrak{g}$  (las derivaciones internas, un ideal en  $\text{Der } \mathfrak{g}$ ). Por tanto,

$$[\text{Der } \mathfrak{g}, \text{ad } \mathfrak{g}] \subset \text{ad } \mathfrak{g} \quad (3.6)$$

La forma de Killing de  $\text{ad } \mathfrak{g}$  es la restricción de la forma de Killing de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  a  $\text{ad } \mathfrak{g}$  y es no degenerada ( $\mathfrak{g}$  es semisimple y  $\mathfrak{g}$  y  $\text{ad } \mathfrak{g}$  son isomorfas). El ortogonal de  $\text{ad } \mathfrak{g}$  en  $\text{Der } \mathfrak{g}$  tiene intersección 0 con  $\text{ad } \mathfrak{g}$  (porque la restricción de la forma de Killing es no degenerada). Al ser  $\text{ad } \mathfrak{g}$  un ideal, su ortogonal también lo es, y al ser la intersección 0 el conmutador es también 0.

Sea  $\delta \in \text{Der } \mathfrak{g}$ , un elemento del ortogonal de  $\text{ad } \mathfrak{g}$ . Para todo  $x \in \mathfrak{g}$  se tiene

$$[\delta, \text{ad}_x] = 0 \quad (3.7)$$

luego  $\text{ad}_{\delta x} = 0$  y por tanto  $\delta x = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , luego  $\delta = 0$ . Es decir el ortogonal de  $\text{ad } \mathfrak{g}$  es 0 y se tiene  $\text{ad } \mathfrak{g} = \text{Der } \mathfrak{g}$ , toda derivación es interna.

Pero un álgebra nilpotente (por ejemplo) tiene al menos una derivación no interna (Ver [4], p.14 ejemplo 9 y [5] p.29, ejemplo 15).

## 3.2. Representaciones

Veamos como se define una representación lineal.

**Definición 3.2** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $V$  un espacio vectorial. Una representación de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  es un homomorfismo (de álgebras de Lie):  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , donde  $\mathfrak{gl}(V)$  son los endomorfismos de  $V$  con la estructura de álgebra de Lie asociada al conmutador.

Se tiene por tanto:

$$\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)], \quad x, y \in \mathfrak{g} \quad (3.8)$$

Las representaciones de un álgebra de Lie se pueden introducir de otra forma equivalente, como la acción de un álgebra de Lie en un espacio vectorial.

**Definición 3.3** Una acción de un álgebra de Lie en un espacio vectorial es un aplicación bilineal:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (x, v) &\rightarrow x \cdot v \end{aligned} \quad (3.9)$$

que verifica:

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) \quad (3.10)$$

En este caso, se dice que  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo con respecto a la acción dada.

Dada un acción tenemos una representación y viceversa. Sea  $\pi$  una representación en un espacio vectorial  $V$ . Definimos la siguiente acción en el espacio  $V$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (x, v) &\rightarrow \pi(x)v \end{aligned} \quad (3.11)$$

puesto que  $\pi(x)$  es un endomorfismo de  $V$ . Es inmediato probar que se verifican las propiedades de acción. De igual forma, dada una acción  $(\cdot)$ , se puede definir una representación:

$$\pi(x)v = x \cdot v \quad (3.12)$$

Es evidente que  $\pi(x)$  es un endomorfismo de  $V$  y por tanto,  $\pi$  es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Dado un módulo del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  (no especificaremos la acción cuando no sea necesario), es posible hablar de submódulos:

**Definición 3.4** Sea  $V$  un módulo del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Se dice que un subespacio vectorial de  $V$  es un submódulo si es un  $\mathfrak{g}$ -módulo (es decir, si la acción de  $\mathfrak{g}$  lo deja invariante).

**Definición 3.5** Se dice que un  $\mathfrak{g}$ -módulo es irreducible si no tiene submódulos propios.

De forma equivalente, si los endomorfismos de la representación asociada no tienen ningún subespacio invariante común.

**Definición 3.6** Se dice que una representación es fiel, si  $\ker \pi = 0$

Veamos un ejemplo de una representación que se usará con frecuencia en el futuro.

### Ejemplo 3.1

Repasemos la definición de representación adjunta. Como  $\mathfrak{g}$  tiene una estructura de espacio vectorial, podemos considerar a  $\mathfrak{g}$  como un  $\mathfrak{g}$ -módulo:

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\rightarrow \text{ad}_x \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde, como ya sabemos:

$$\begin{aligned} \text{ad}_x : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ y &\rightarrow \text{ad}_x y = [x, y] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Es fácil ver que se verifican las propiedades de  $\mathfrak{g}$ -módulo. En general,  $\text{ad}$  no es una representación fiel. Su núcleo, como ya hemos visto, es el centro del álgebra.

$$\ker(\text{ad}) = \{x \in \mathfrak{g} : \text{ad}_x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \quad (3.15)$$

### Ejemplo 3.2

Consideremos como ejemplo de la representación adjunta  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{K})$ . Es fácil ver que en la base considerada anteriormente  $\{h, e, f\}$ , las matrices que representan a estos elementos son:

$$\text{ad}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{ad}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ad}_f = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Dado que un  $\mathfrak{g}$ -módulo tiene una estructura de espacio vectorial, podemos introducir las siguientes operaciones con módulos.

**Definición 3.7** *Módulo cociente:*

Sea  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo y  $V'$  un submódulo de  $V$ . Entonces, el espacio cociente  $V/V'$  tiene estructura de  $\mathfrak{g}$ -módulo. La acción de  $\mathfrak{g}$  es:

$$x \cdot (v + V') = x \cdot v + V' \quad (3.17)$$

y está bien definida al ser  $V'$  invariante bajo  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 3.8** *Suma directa de  $\mathfrak{g}$ -módulos:*

Sean  $V_j$ ,  $j \in J$ ,  $\mathfrak{g}$ -módulos. Entonces  $\bigoplus_{j \in J} V_j$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo. Si  $\bigoplus v_j$  es un elemento del módulo suma, la acción de  $x \in \mathfrak{g}$  es:

$$x \cdot (\bigoplus v_j) = \bigoplus (x \cdot v_j) \quad (3.18)$$

donde  $\cdot$  es en cada caso, la acción correspondiente al módulo del que se trate.

Si consideramos las representaciones asociadas,  $\pi_j$ , la representación en el módulo suma se escribe como  $\bigoplus_{j \in J} \pi_j$ .

**Definición 3.9** *Productos tensoriales:*

Sean  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, n$   $\mathfrak{g}$ -módulos. El producto tensorial de estos módulos:  $\otimes_{j=1}^n V_j$  es un módulo de  $\mathfrak{g}$ , y la acción se define por:

$$x \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_{j=1}^n v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes (x \cdot v_j) \otimes \dots \otimes v_n \quad (3.19)$$

Desde el punto de vista de representaciones, se habla de la representación producto tensorial de  $\pi_j$ .

Dado un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$ , o la representación asociada  $\pi$ , se puede hablar de la representación contragradiante (dual) en el  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V^*$ , que verifica

$$(\pi^*(x)\omega)(v) = -\omega(\pi(x)), \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V, \omega \in V^* \quad (3.20)$$

Veamos que se cumplen las condiciones para que sea una representación:

$$\begin{aligned} ([\pi^*(x), \pi^*(y)]\omega)(v) &= (\pi^*(x)\pi^*(y)\omega)(v) - (\pi^*(y)\pi^*(x)\omega)(v) \\ &= -(\pi^*(y)\omega)(\pi(x)v) + (\pi^*(x)\omega)(\pi(y)v) \\ &= \omega(\pi(y)\pi(x)v) - \omega(\pi(x)\pi(y)v) = -\omega(\pi[x, y](v)) = \pi^*[x, y]\omega(v) \end{aligned}$$

Si se hace el producto tensorial de una representación y su contragradiante, usando el lenguaje de módulos, se tiene:

$$x \cdot (v \otimes \omega) = x \cdot v \otimes \omega + v \otimes x \cdot \omega \quad (3.21)$$

Pero, como es bien sabido,  $V \otimes V^* \approx \text{End}(V)$ . Dados  $v \in V$  y  $\omega \in V^*$ , se define  $f \in \text{End} V$  por  $f(u) = \omega(u)v$ . Sea  $\pi$  una representación en  $V$ ,  $\pi^*$  su representación contragradiante en  $V^*$ . Definimos una representación  $\pi_{\text{End}(V)}$  usando (3.21)

$$\begin{aligned} (\pi_{\text{End}(V)}(x)f_{v,\omega})(u) &= f_{\pi(x)v,\omega}(u) + f_{v,\pi^*(x)\omega}(u) = \omega(u)\pi(x)v + (\pi^*(x)\omega)(u)v \\ &= \omega(u)\pi(x)v - \omega(\pi(x)u)v = \pi(x)f_{v,\omega}(u) - f_{v,\omega}(\pi(x)u) \end{aligned}$$

y, para cualquier  $f \in \text{End} V$ ,

$$\pi_{\text{End}(V)}(x)f = \pi(x)f - f\pi(x) \quad (3.22)$$

Uno de los teoremas más útiles cuando se trabaja con representaciones es el lema de Schur:

**Teorema 3.1** *Sea  $\pi$  una representación irreducible de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  en un espacio vectorial  $V$ .*

1. *Todo endomorfismo de  $V$  invariante bajo la representación  $\pi$ , es trivial o un automorfismo.*

*Por invariante se entiende lo siguiente:*

$$f \in \mathfrak{gl}(V), f(\pi(x)v) = \pi(x)f(v), \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V \quad (3.23)$$

2. *Si  $\sigma$  es un endomorfismo de  $V$  que conmuta con  $\pi(x)$ , para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , entonces, si existe un autovector de  $\sigma$  en  $V$ ,  $\sigma$  es un escalar (un múltiplo de la identidad).*

Finalmente, para acabar este capítulo, introduciremos la noción de forma bilineal invariante.

**Definición 3.10** *Sea  $\pi$  una representación del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  en el espacio vectorial  $V$ . Una forma bilineal en  $V$  es invariante bajo  $\mathfrak{g}$  respecto la representación  $\pi$  si:*

$$(\pi(x)v, w) + (v, \pi(x)w) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v, w \in V \quad (3.24)$$

Se dice que una forma bilineal en  $\mathfrak{g}$  es invariante si lo es bajo la representación adjunta:

$$([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0, \quad x, y, z \in \mathfrak{g} \quad (3.25)$$

Obviamente, la forma de Killing es un caso especial de formas bilineales invariantes simétricas

### 3.3. Reducibilidad de representaciones

Como hemos dicho, una representación es reducible si existen subespacios del espacio de representación que son invariantes (es decir si el módulo correspondiente tiene submódulos). Pero si  $W$  es un subespacio invariante, su complementario puede ser invariante o no. En el caso de que lo sea, el espacio se escribe como la suma de dos subespacios invariantes. En general,

**Definición 3.11** *Se dice que un representación es completamente reducible si el espacio de representación es suma directa de subespacios invariantes irreducibles.*

No toda representación reducible es completamente reducible, pero para álgebras semisimples se tiene:

**Teorema 3.2 (Teorema de Weyl)** *Toda representación de dimensión finita de un álgebra semisimple es completamente reducible*

No incluiremos la demostración aquí (ver por ejemplo [4], página 28).



# Capítulo 4

## Álgebras envolventes

El álgebra envolvente (un objeto universal en la categoría de álgebras asociativas) constituye una herramienta indispensable en el estudio de las álgebras de Lie. Para describirla, definiremos primero lo que se entiende por álgebra tensorial.

### 4.1. Álgebra tensorial

Sea  $X = \{x_j\}_{j \in J}$  un conjunto de símbolos. Podemos construir monomios en los símbolos del conjunto  $X$ , simplemente por yuxtaposición:

$$x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n}$$

Si  $r$  símbolos consecutivos son iguales, se escribe:  $x_j x_j \dots x_j = x_j^r$ .

Sea  $M(X)$  el conjunto de monomios (incluido el monomio “vacío”, sin ningún símbolo). Si definimos en  $M(X)$  un producto, por yuxtaposición de monomios, este conjunto se convierte en un álgebra libre (no hay relaciones entre sus elementos). La estructura de espacio vectorial viene dada al considerar  $M(X)$  como una base. La llamaremos  $A(X)$ , y es un álgebra asociativa con elemento unidad. Es el *álgebra asociativa libre generada por  $X$* .

Esta álgebra es un objeto universal en la categoría de álgebras asociativas. En realidad, vamos a definir el álgebra asociativa libre como un objeto universal, y después veremos que el álgebra anteriormente estudiada es una representación explícita de un álgebra libre.

**Definición 4.1** *Sea  $X$  un conjunto no vacío. Un álgebra asociativa libre sobre  $X$  (y un cuerpo  $\mathbf{K}$ ) es un álgebra asociativa  $A$  con una aplicación  $i : X \rightarrow A$ , tal que, si  $A'$  es otra álgebra asociativa y  $f : X \rightarrow A'$  es una aplicación, existe un único homomorfismo de álgebras  $\tilde{f} : A \rightarrow A'$  que hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & A' \\ i \downarrow & \nearrow & \\ A & & \end{array} \quad (4.1)$$

De acuerdo con esta definición, el álgebra definida anteriormente es un álgebra libre sobre  $X$ , el conjunto de símbolos, y la aplicación  $i$  la inclusión.

Supongamos ahora que el conjunto de símbolos es una base de un espacio vectorial  $V: \{v_j\}_{j \in J}$ . En este caso, el álgebra asociativa libre se llama el álgebra tensorial sobre  $V$ :

$$T(V) = \left\{ \sum_{n \in \mathbf{N}} a_{j_1 j_2 \dots j_n} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_n} \right\}, \quad (4.2)$$

donde los coeficientes  $a_{j_1 j_2 \dots j_n}$  son elementos del cuerpo  $\mathbf{K}$  todos nulos salvo un número finito. El álgebra tensorial se puede poner como una suma directa:

$$T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} T^n(V) \quad (4.3)$$

donde  $T^n(V)$  es la envolvente lineal de los monomios de grado  $n$  (el grado de un monomio es el número de elementos que lo forman). Pero el álgebra así definida también se puede poner como:

$$T(V) = \mathbf{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots = \bigoplus_i T^i \quad (4.4)$$

con

$$T^n(V) = V \otimes V \otimes \dots \otimes V, \quad T^0 = \mathbf{K}, \quad T^1 = V \quad (4.5)$$

El álgebra  $T(V)$  no es un álgebra conmutativa. Pero, si consideramos el ideal:  $J = \text{lin}(v \otimes w - w \otimes v, v, w \in V)$ , el álgebra cociente  $T(V)/J$  es un álgebra conmutativa que se conoce como el álgebra simétrica de  $V$ :

$$S(V) = T(V)/J \quad (4.6)$$

Veamos ahora la definición de álgebra envolvente universal.

**Definición 4.2** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Un álgebra envolvente universal de  $\mathfrak{g}$  es un par  $(\mathcal{U}, \sigma)$ , donde  $\mathcal{U}$  es un álgebra asociativa y  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}$ , que verifica:

1.  $\sigma$  es un homomorfismo de álgebras de Lie entre  $\mathfrak{g}$  y  $\mathcal{U}_L$
2. Si  $A$  es un álgebra asociativa y  $f$  es un homomorfismo de álgebras de Lie,  $f : \mathfrak{g} \rightarrow A_L$ , entonces existe un único homomorfismo de álgebras:  $\tilde{f} : \mathcal{U} \rightarrow A$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & A \\ \sigma \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{U} & & \end{array} \quad (4.7)$$

Se demuestra que el álgebra envolvente de un álgebra de Lie existe y es única salvo isomorfismo. La construcción del álgebra envolvente se hace a partir del álgebra tensorial  $T(\mathfrak{g})$ , construyendo su cociente por el ideal bilátero  $\mathfrak{J}$ , generado por los elementos de la forma:  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$  con  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Entonces se tiene:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathfrak{J} \quad (4.8)$$

Se llama aplicación canónica,  $\sigma$ , de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  a la composición de las aplicaciones  $\mathfrak{g} \rightarrow T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . La proyección canónica  $\pi : T(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  verifica

$$\pi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \quad (4.9)$$

En particular, como  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in \mathfrak{J}$ , se tiene

$$\pi(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0 \quad (4.10)$$

es decir,

$$\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) = \sigma([x, y]) \quad (4.11)$$

Además, si el álgebra  $\mathfrak{g}$  es abeliana, el álgebra envolvente coincide con el álgebra simétrica

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) \quad (4.12)$$

## 4.2. El teorema PBW

Uno de los resultados más importantes sobre las álgebras envolventes es el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que permite construir una base en esta álgebra:

**Teorema 4.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt)** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie con base  $\{x_j\}_{j \in J}$ , donde  $J$  es un conjunto bien ordenado (es decir, todo subconjunto no vacío tiene primer elemento). Entonces, el conjunto de elementos del álgebra envolvente:*

$$\sigma(x_{j_1})\sigma(x_{j_2})\dots\sigma(x_{j_n}), \quad j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_n, \quad n \in \mathbf{Z}_{>0}$$

junto con el elemento unidad  $1 \in \mathbf{K}$ , es una base de  $\mathcal{U}$ .

Veamos cómo se demuestra esta resultado (para dimensión finita). Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $\mathfrak{g}$ , y  $\sigma(x_i) = y_i$  sus imágenes en  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Si  $I = (i_1, \dots, i_p)$  enteros comprendidos entre 1 y  $n$  se escribe  $y_I = y_{i_1} \cdots y_{i_p}$ , que es un elemento de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

Si  $\mathcal{U}_k = \pi(T^0 \oplus \cdots \oplus T^k)$ , las series crecientes de enteros  $I$ , con longitud menor o igual que  $k$  generan  $\mathcal{U}_k$  (es suficiente tomar las series crecientes. Si se tiene una que no lo es, se cambia el orden y eso genera elementos de orden inferior a  $k$ ).

Sea  $P = \mathbf{K}[z, \dots, z_n]$ ,  $P_r = \mathbf{K}_r[z_1, \dots, z_n]$  (polinomios de grado menor o igual que  $r$  en la indeterminadas  $z_i$ ). La demostración del teorema PBW se reduce a trasladar al espacio de polinomios la estructura del álgebra envolvente.

Se tiene el siguiente resultado (ver [1], página 70). Para cada entero  $p \geq 0$ , existe una aplicación lineal única  $f_p : \mathfrak{g} \otimes P_p \rightarrow P$  que verifica que la restricción de  $f_p$  a  $\mathfrak{g} \otimes P_{p-1}$  es  $f_{p-1}$  y las siguientes propiedades:

$$(A_p) : \quad f_p(x_i \otimes z_I) = z_i z_I, \quad i \leq I, \quad z_I \in P_p \quad (4.13)$$

$$(B_p) : \quad f_p(x_i \otimes z_I) - z_i z_I \in P_q, \quad z_I \in P_q, \quad q \leq p \quad (4.14)$$

$$(C_p) : \quad f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_J)) = f_p(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_J)) + f_p([x_i, x_j] \otimes z_J), \quad z_J \in P_{p-1} \quad (4.15)$$

La demostración de esta propiedades se hace por inducción en el grado  $p$ . Para  $p = 0$  se tiene:

$$(A_0) : \quad f_0(x_i \otimes 1) = z_i \quad (4.16)$$

que es la definición de  $f_0$ . La condición  $(B_0)$  se satisface trivialmente

$$(B_0) : \quad f_0(x_i \otimes \lambda) - \lambda z_i \in P_0 = \mathbf{K} \quad (4.17)$$

y  $(C_0)$  no tiene sentido. Supongamos que el resultado es cierto hasta  $f_{p-1}$ . Lo único que tenemos que probar es que podemos extender linealmente  $f_{p-1}$  a  $\mathfrak{g} \otimes P_p$  de forma única de manera que se cumplan las condiciones exigidas. Entonces  $f_p$  restringido a  $P_{p-1}$  es  $f_{p-1}$ .

Veamos como definir  $f_p(x_i \otimes z_I)$ , con  $I$  una serie de enteros entre 1 y  $n$ , con  $p$  elementos. Si  $i \leq I$ ,  $(A_p)$  fija la definición:

$$(A_p) : \quad f_p(x_i \otimes z_I) = z_i z_I, \quad i \leq I, \quad z_I \in P_p \quad (4.18)$$

Si  $i \not\leq I$ , existe un elemento de  $I$ ,  $j$ , que es menor que  $i$ : elegimos ese elemento de forma que todos los otros en  $I$  sean mayores o iguales a él. Sea  $I = (j, J)$ , con  $j < i$  y  $j \leq J$ . Aplicando  $f_{p-1}$  (pues  $J$  tiene  $p-1$  elementos) tenemos:

$$f_{p-1}(x_j \otimes z_J) = z_j z_J = z_I \quad (4.19)$$

Por lo tanto,

$$f_p(x_i \otimes z_I) = f_p(x_i \otimes f_{p-1}(x_j \otimes z_J)) \quad (4.20)$$

Como queremos que se cumpla  $(C_p)$ , podemos escribir

$$f_p(x_i \otimes z_I) = f_p(x_j \otimes f_{p-1}(x_i \otimes z_J)) + f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J) \quad (4.21)$$

La aplicación  $f_{p-1}$  verifica las tres propiedades, luego

$$f_{p-1}(x_i \otimes z_J) = z_i z_J + w \quad (4.22)$$

siendo  $w$  un elemento de grado  $p-1$  (en principio de grado menor o igual que  $p$ , pero es fácil ver que no puede ser igual a  $p$  al no ser  $i \leq I$ ) Sustituyendo, y aplicando la definición de  $f_p$  para el caso  $i \leq I$ , se tiene:

$$\begin{aligned} f_p(x_i \otimes z_I) &= f_p(x_j \otimes z_i z_J) + f_{p-1}(x_j \otimes w) + f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J) \\ &= z_j z_i z_J + f_{p-1}(x_j \otimes w) + f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J) \\ &= z_i z_I + f_{p-1}(x_j \otimes w) + f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J) \end{aligned}$$

En, resumen, usando  $(A_p)$  y  $(B_p)$  y la hip'otesis de inducción tenemos definida a  $f_p$  como una prolongación lineal de  $f_{p-1}$  que verifica  $(A_p)$  y  $(B_p)$  ( $z_I \in P_p$ ):

$$f_p(x_i \otimes z_I) = \begin{cases} z_i z_I, & i \leq I \\ z_i z_I + f_{p-1}(x_j \otimes w) + f_{p-1}([x_i, x_j] \otimes z_J), & i \not\leq I, I = (j, J), j < i, j \leq J \end{cases} \quad (4.23)$$

con  $w = f_{p-1}(x_i \otimes z_J) - z_i z_J$ . En lo que sigue usaremos siempre  $f_p$  aunque en ocasiones se debería escribir  $f_q$ , con  $q \leq p$ . Solo queda por comprobar que se verifica  $(C_p)$ . Esta propiedad se ha usado en el caso  $j < i, j \leq J$ . Además debido a la antisimetría del paréntesis de Lie, es inmediato que también es cierta cambiando los papeles de  $i$  y  $j$ , es decir, si  $i < j, i \leq J$ . El caso  $i = j$  es trivial. Solo nos queda demostrarla si  $i > J$  y  $j > J$ . Entonces  $i$  y  $j$  son mayores que algún elemento de  $J$ . Sea  $k$  el menor de ellos. Se tiene:

$$J = (k, K), k \leq K, i > k, j > k \quad (4.24)$$

Aplicando  $f_p$ , se tiene ( $z_J = z_k z_K$ ):

$$f_p(x_j \otimes z_J) = f_p(x_j \otimes f_p(x_k \otimes z_K)) = f_p(x_k \otimes f_p(x_j \otimes z_K)) + f_p([x_j, x_k] \otimes z_K) \quad (4.25)$$

y por la hipótesis de inducción,

$$f_p(x_j \otimes z_K) = z_j z_K + w, \quad w \in P_{p-2} \quad (4.26)$$

Teniendo en cuenta que

$$f_p(x_i \otimes f_p(x_k \otimes f_p(x_j \otimes z_K))) = f_p(x_i \otimes f_p(x_k \otimes z_j z_K)) + f_p(x_i \otimes f_p(x_k \otimes w)) \quad (4.27)$$

y que, de acuerdo con lo dicho anteriormente, se puede aplicar  $(C_p)$  a

1.  $f(x_i \otimes f_p(x_k \otimes z_j z_K))$ , pues  $k < j$  y  $k \leq K$  (además de  $k < i$ )
2.  $f_p(x_i \otimes f_p(x_k \otimes w))$ , usando la hipótesis de inducción, y el que  $w \in P_{p-2}$ ,

concluimos que la condición  $(C_p)$  se puede aplicar a  $f_p(x_i \otimes f_p(x_k \otimes f_p(x_j \otimes z_K)))$ . Debido a esto

$$\begin{aligned} f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_J)) &= f_p(x_i \otimes f_p(x_k \otimes f_p(x_j \otimes z_K))) + f_p(x_i \otimes f_p([x_j, x_k] \otimes z_K)) \\ &= f_p(x_k \otimes f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_K))) + f_p([x_i, x_k] \otimes f_p(x_j \otimes z_K)) \\ &\quad + f_p([x_j, x_k] \otimes f_p(x_i \otimes z_K)) + f_p([x_i, [x_j, x_k] \otimes z_K) \end{aligned}$$

Todo lo anterior se puede decir también intercambiando  $i$  por  $j$ . Por tanto

$$\begin{aligned}
& f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_J)) - f_p(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_J)) \\
&= f_p(x_k \otimes f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_K))) - f_p(x_k \otimes f_p(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_K))) \\
&+ f_p([x_i, [x_j, x_k] \otimes z_K) - f_p([x_j, [x_i, x_k] \otimes z_K) \\
&= f_p(x_k \otimes (f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_K)) - f_p(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_K)))) \\
&+ f_p([x_i, [x_j, x_k] - [x_j, [x_i, x_k]] \otimes z_K) \\
&= f_p(x_k \otimes f_p([x_i, x_j] \otimes z_K)) - f_p([x_k, [x_i, x_j] \otimes z_K) = f_p([x_i, x_j] \otimes f_p(x_k \otimes z_K))
\end{aligned}$$

Como

$$f_p(x_k \otimes z_K) = z_k z_K = z_J \quad (4.28)$$

por inducción, se tiene finalmente

$$f_p(x_i \otimes f_p(x_j \otimes z_J)) - f_p(x_j \otimes f_p(x_i \otimes z_J)) = f_p([x_i, x_j] \otimes z_J) \quad (4.29)$$

que es  $(C_p)$ .

Una vez construidas las aplicaciones  $f_p$ , volvamos a nuestro objetivo (la demostración del teorema PWB). En primer lugar probaremos que los monomios  $y_I$  para toda serie creciente  $I$  son una base de  $cu(\mathfrak{g})$ . De lo anterior, está claro que podemos definir

$$f : \mathfrak{g} \times P \rightarrow P, \quad f(x_i, z_I) = z_i z_I, \quad i \leq I \quad (4.30)$$

bilineal, tal que:

$$f(x_i, z_I) = z_i z_I, \quad i \leq I, \quad f(x_i, f(x_j, z_J)) = f(x_j, f(x_i, z_J)) + f([x_i, x_j], z_J), \quad \forall i, j, J \quad (4.31)$$

Esto nos da una representación del álgebra  $\mathfrak{g}$  en el espacio de polinomios  $P$ ,

$$\rho(x_i)z_I = f(x_i, z_I), \quad i \leq I \quad (4.32)$$

Debido al carácter universal del álgebra envolvente, podemos definir un homomorfismo

$$\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(P), \quad \varphi(y_i)z_I = z_i z_I, \quad i \leq I \quad (4.33)$$

Es fácil ver ahora que

$$\varphi(y_I)1 = z_I, \quad I = (i_1, \dots, i_p), i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \quad (4.34)$$

Como los monomios  $z_I$  son linealmente independientes, se deduce que los  $y_I$  también lo son. Está claro que también son un sistema de generadores (los monomios  $y_I$  donde  $I$  es de longitud menor o igual que  $p$  generan  $\mathcal{U}_p$ , aún restringiéndose a series crecientes, ver más atrás), luego se trata de una base.

Como consecuencia de este resultado, la aplicación canónica  $\sigma$  es inyectiva. El teorema PBW es ahora inmediato.

**Teorema 4.2** Si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una base de  $\mathfrak{g}$ , entonces, los monomios

$$\sigma(x_1)^{i_1} \cdots \sigma(x_n)^{i_n}, \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbf{N} \quad (4.35)$$

forman una base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

Como  $\sigma$  es inyectiva podemos identificar a  $\mathfrak{g}$  con un subespacio de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  y escribir  $x$  en vez de  $\sigma(x)$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .

Las álgebras envolventes de álgebras y subálgebras están relacionadas en la forma natural:

Sea  $\mathfrak{g}'$  una subálgebra de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , y sea  $\{x_j, y_k\}_{j \in J, k \in K}$  una base de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\{x_j\}_{j \in J}$  sea una base de  $\mathfrak{g}'$ , con  $J$  y  $K$  conjuntos bien ordenados. Entonces, la inyección  $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  se puede extender a una inyección:  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}') \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Además, si  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$  son álgebras de Lie, el álgebra envolvente de su producto directo,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_n$  es el producto tensorial de las álgebras envolventes:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_n)$$

Utilizando el carácter universal del álgebra envolvente se pueden extender las derivaciones del álgebra  $\mathfrak{g}$  a derivaciones del álgebra envolvente. Para ello basta considerar la extensión al álgebra tensorial  $T(\mathfrak{g})$  en la forma usual.

Veamos como se puede extender la acción de la representación adjunta del álgebra  $\mathfrak{g}$  al álgebra envolvente (utilizaremos un superíndice para indicar en qué álgebra estamos trabajando):

$$\text{ad}_x^{(\mathfrak{g})}(y) = [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

Sea  $\text{ad}^{(T)}$  la única extensión de esta aplicación al álgebra tensorial:

$$\text{ad}_x^{(T)}(y_1 \otimes \dots \otimes y_n) = \sum_{j=1}^n y_1 \otimes \dots \otimes [x, y_j] \otimes \dots \otimes y_n$$

Nótese que sobre los elementos de  $\mathfrak{g}$  se obtiene la acción inicial. Sobre los elementos de grado 2 la acción es:

$$\text{ad}_x^{(T)}(y_1 \otimes y_2) = [x, y_1] \otimes y_2 + y_1 \otimes [x, y_2]$$

que es básicamente la regla de Leibniz para las derivaciones.

Pasando al cociente obtenemos la acción sobre el álgebra envolvente:

$$\text{ad}_x^{(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))}(y_1 \dots y_n) = \sum_{j=1}^n y_1 \dots [x, y_j] \dots y_n \quad (4.36)$$

Esta última expresión no es más que el desarrollo de la fórmula usual:

$$\text{ad}_x^{(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))}(u) = xu - ux \quad (4.37)$$

cuando  $u = y_1 \dots y_n$ . En efecto:

$$\begin{aligned} xu &= xy_1 \dots y_n = y_1 xy_2 \dots y_n + [x, y_1] y_2 \dots y_n \\ &= \dots = y_1 \dots y_n x + \sum_{j=1}^n y_1 \dots [x, y_j] \dots y_n \end{aligned}$$

Puesto que hemos sido capaces de extender la acción de la representación adjunta a todo el álgebra envolvente, es obvio que  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo. Sin embargo no es ésta la única estructura de  $\mathfrak{g}$ -módulo que posee el álgebra envolvente. Estas son las dos estructuras importantes de  $\mathfrak{g}$ -módulo de este álgebra:

1. La representación adjunta de  $\mathfrak{g}$  extendida a  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ :

$$\text{ad}_x^{(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))}(y_1 \dots y_n) = \sum_{j=1}^n y_1 \dots [x, y_j] \dots y_n \quad (4.38)$$

2. La restricción a  $\mathfrak{g}$  de la estructura natural de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  cuando se considera a  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  como un álgebra asociativa:

$$x(y_1 \dots y_n) = xy_1 \dots y_n \quad (4.39)$$

# Capítulo 5

## Algunos complementos

La teoría de álgebras de Lie presenta muchos aspectos que no pueden ser tratados de una manera completa aquí. Nos limitaremos a esbozar algunos rudimentos y ejemplos interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones en Física.

### 5.1. Cohomología de álgebras de Lie

Veamos la definición y algunas aplicaciones a casos sencillos.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo (la acción se designará por  $\cdot$ ).

**Definición 5.1** Una  $k$ -cocadena de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  es una aplicación  $\varphi$ :

$$\varphi : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \longrightarrow V \quad (5.1)$$

que verifica:

1.  $\varphi$  es  $k$ -lineal
2.  $\varphi$  es antisimétrica

El conjunto de las cocadenas de orden  $m$ ,  $C^m(\mathfrak{g}, V)$ , es un espacio vectorial. En particular las cocadenas de orden cero son el espacio  $V$  y las cocadenas de orden 1 son las aplicaciones lineales de  $\mathfrak{g}$  en  $V$ :

$$C^0(\mathfrak{g}, V) = V, \quad C^1(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, V) \quad (5.2)$$

Entre las cocadenas de orden  $m$  y las de orden  $m + 1$  se puede definir un operador lineal de la forma siguiente:

**Definición 5.2** Se define el operador  $\delta$  como:

$$\delta : C^m(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{m+1}(\mathfrak{g}, V) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x_1, \dots, x_{m+1}) &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \varphi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}) + \\ &\sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^{m+1} (-1)^{i+j} \varphi([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{m+1}) \end{aligned}$$

La aplicación así definida es lineal. En los casos de orden más bajo su expresión es:

$$\delta : C^0(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^1(\mathfrak{g}, V) \quad (5.4)$$

$$\delta v(x) = x \cdot v, \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V \equiv C^0(\mathfrak{g}, V) \quad (5.5)$$

$$\delta : C^1(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^2(\mathfrak{g}, V) \quad (5.6)$$

$$\delta\varphi(x, y) = x \cdot \varphi(y) - y \cdot \varphi(x) - \varphi([x, y]), \quad x, y \in \mathfrak{g}, \varphi \in C^1(\mathfrak{g}, V) \quad (5.7)$$

La propiedad más importante de la aplicación  $\delta$  es:

$$\delta^2 = 0 \quad (5.8)$$

Su demostración es sencilla aunque un tanto penosa de escribir. La expresión detallada de esta relación es:

$$\dots \rightarrow C^{m-1}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta_{m-1}} C^m(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta_m} C^{m+1}(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \dots \quad (5.9)$$

entonces:

$$\delta_m \delta_{m-1} = 0 \Rightarrow \text{im } \delta_{m-1} \subset \ker \delta_m \quad (5.10)$$

De entre todas las posible cocadenas, hay dos tipos particularmente importantes: los cobordes y los cociclos.

**Definición 5.3** Sea  $\varphi$  una cocadena,  $\varphi \in C^m(\mathfrak{g}, V)$ . Se dice que  $\varphi$  es un cociclo si  $\delta\varphi = 0$

El conjunto de cociclos es un subespacio vectorial del conjunto de cocadenas:

$$\mathcal{Z}^m(\mathfrak{g}, V) = \ker \delta_m \subset C^m(\mathfrak{g}, V) \quad (5.11)$$

**Definición 5.4** Sea  $\varphi$  una cocadena,  $\varphi \in C^{m+1}(\mathfrak{g}, V)$ . Se dice que  $\varphi$  es un coborde si existe  $\psi \in C^m(\mathfrak{g}, V)$  tal que  $\varphi = \delta\psi$

El conjunto de cobordes es un subespacio vectorial del conjunto de cocadenas:

$$\mathcal{B}^m(\mathfrak{g}, V) = \text{im } \delta_{m-1} \subset C^m(\mathfrak{g}, V) \quad (5.12)$$

Pero la propiedad fundamental ( $\delta^2 = 0$ ) implica:

$$\mathcal{B}^m(\mathfrak{g}, V) \subset \mathcal{Z}^m(\mathfrak{g}, V) \quad (5.13)$$

Podemos por lo tanto construir el grupo cociente (considerando la estructura de grupo aditivo de estos espacios vectoriales):

**Definición 5.5** Se define el grupo de cohomología de orden  $m$  como el grupo cociente de cociclos sobre cobordes:

$$H^m(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{Z}^m(\mathfrak{g}, V) / \mathcal{B}^m(\mathfrak{g}, V) \quad (5.14)$$

Veamos en los casos elementales como son los cociclos y cobordes.

Un cociclo de orden cero es un elemento del espacio  $V$  que verifica:

$$x \cdot v = 0 \quad (5.15)$$

para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , luego se trata de un elemento invariante de la acción del álgebra sobre el espacio  $V$ . Nótese que invariante no quiere decir que bajo la acción del álgebra se obtiene el mismo elemento. No tiene sentido hablar de cobordes de orden cero. Se tiene:  $H^0(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{Z}^0(\mathfrak{g}, V)$

Un 1-cociclo es una aplicación lineal de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  que verifica:

$$\delta\varphi = 0 \Rightarrow \varphi([x, y]) = x \cdot \varphi(y) - y \cdot \varphi(x), \quad x, y \in \mathfrak{g} \quad (5.16)$$

En cuanto a los 1-cobordes, si  $\varphi \in \mathcal{B}^1(\mathfrak{g}, V)$ , existirá un elemento de  $\mathcal{Z}^1(\mathfrak{g}, V)$ , es decir un vector  $v$  de  $V$  tal que:

$$\varphi = \delta v \quad (5.17)$$

luego la acción de  $\varphi$  es:

$$\varphi(x) = \delta v(x) = x \cdot v \quad (5.18)$$

En ciertos casos esta expresiones se ven muy simplificadas. Por ejemplo, cuando se toma el cuerpo  $\mathbf{K}$ . La acción es entonces trivial:

$$x \cdot \lambda = 0, \quad x \in \mathfrak{g}, \lambda \in \mathbf{K} \quad (5.19)$$

La acción de la aplicación  $\delta$  es ahora:

$$\delta\varphi(x_1, \dots, x_{m+1}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^{m+1} (-1)^{i+j} \varphi([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{m+1}) \quad (5.20)$$

Todos los elementos de  $\mathbf{K}$  son invariantes, es decir cociclos, por lo tanto el grupo de cohomología de orden cero coincide con el cuerpo:

$$H^0(\mathfrak{g}, \mathbf{K}) = \mathbf{K} \quad (5.21)$$

En particular, las 1-cocadenas verifican:

$$\delta\varphi(x, y) = -\varphi([x, y]) \quad (5.22)$$

Si  $\varphi$  es un 1-cociclo,  $\delta\varphi = 0$ , lo que quiere decir:

$$\varphi([x, y]) = 0, \quad x, y \in \mathfrak{g} \quad (5.23)$$

Por tanto, si el álgebra es semisimple (lo que implica  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ ), los 1-cociclos son triviales y el primer grupo de cohomología es trivial ( $\{0\}$ ).

Finalmente, si  $\varphi$  es un 2-cociclo:

$$\delta\varphi(x, y, z) = -\varphi([x, y], z) + \varphi([x, z], y) - \varphi([y, z], x) = 0 \quad (5.24)$$

y por tanto, usando la antisimetría de  $\varphi$ :

$$\varphi([x, y], z) + \varphi([z, x], y) + \varphi([y, z], x) = 0 \quad (5.25)$$

que es la condición que debe cumplir una aplicación bilineal antisimétrica de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  en  $\mathbf{K}$  para ser un 2-cociclo.

Lo anterior es cierto aunque el espacio final no sea  $\mathbf{K}$ . Basta con que la acción sea trivial. Por ejemplo, si se trata de un álgebra abeliana.

Si el espacio  $V$  es igual al álgebra  $\mathfrak{g}$ , podemos usar como acción la representación adjunta. El operador  $\delta$  se escribe ahora:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x_1, \dots, x_{m+1}) &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} [x_i, \varphi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1})] + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^{m+1} (-1)^{i+j} \varphi([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{m+1}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\delta x(y) = \text{ad}_x(y) = [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g} \quad (5.26)$$

y para una 1-cocadena:

$$\delta\varphi(x, y) = [x, \varphi(y)] + [\varphi(x), y] - \varphi([x, y]) \quad (5.27)$$

y si  $\varphi$  es un 1-cociclo:

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)] \quad (5.28)$$

es decir,  $\varphi$  es una derivación. Si se trata de un 1-coborde, existe un elemento de  $\mathfrak{g}$ ,  $x$ , tal que:

$$\varphi(y) = \delta x(y) = [x, y] \quad (5.29)$$

Se puede demostrar que si el álgebra es de dimensión finita y semisimple entonces:

$$H^1(\mathfrak{g}, M) = H^2(\mathfrak{g}, M) = 0 \quad (5.30)$$

para todo  $\mathfrak{g}$ -módulo  $M$  de dimensión finita.

## 5.2. Graduaciones

Dado un  $\mathbf{K}$ -espacio vectorial,  $V$ , y un grupo aditivo,  $Q$ , una graduación de  $V$  por  $Q$  es una descomposición de  $V$  en suma directa de subespacios,  $V^\alpha$ , llamados subespacios graduados de grado  $\alpha$ :

$$\bigoplus_{\alpha \in Q} V^\alpha \quad (5.31)$$

Supongamos ahora que tenemos un álgebra  $A$ , y construimos la graduación de  $A$  como espacio vectorial con grupo aditivo  $Q$ . Se dice que tenemos una  $Q$ -graduación de álgebras si:

$$A^\alpha A^\beta \subset A^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in Q \quad (5.32)$$

Por ejemplo, las álgebras tensoriales y simétricas anteriormente estudiadas están graduadas por  $\mathbf{N}$ .

Es fácil ver que  $A^0$  es una subálgebra de  $A$ .

Los endomorfismos de un  $Q$ -espacio graduado pueden preservar, en cierto sentido, la graduación. Se dice que un endomorfismo del espacio graduado  $V$  es graduado de grado  $\lambda \in Q$  si:

$$f(V^\alpha) \subset V^{\alpha+\lambda}, \quad \forall \alpha \in Q \quad (5.33)$$

El conjunto de todos los endomorfismo graduados,  $\mathcal{L}^Q(V)$  es una suma:

$$\mathcal{L}^Q(V) = \bigoplus_{\lambda \in Q} \mathcal{L}^\lambda(V) \subset \mathcal{L}(V) \quad (5.34)$$

donde  $\mathcal{L}^\lambda(V)$  son los endomorfismo graduados de grado  $\lambda$ . Este conjunto es una  $Q$ -álgebra graduada.

Las graduaciones de álgebras son muy importantes como veremos en algunos ejemplos.

## 5.3. Extensiones centrales

Las extensiones centrales de álgebras de Lie aparecen frecuentemente en Física. Por ejemplo cuando se estudia el álgebra del grupo de Galileo o las álgebras de Kac-Moody.

Una sucesión exacta de álgebras de Lie es un conjunto de álgebras y homomorfismos:

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{g}_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} \mathfrak{g}_j \xrightarrow{f_j} \mathfrak{g}_{j+1} \rightarrow \cdots \quad (5.35)$$

tal que  $\text{im } f_{j-1} = \ker f_j$ .

Una extensión ( $\mathfrak{g}'$ ) de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , es una sucesión exacta corta de álgebras de Lie:

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{i} \mathfrak{g}' \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0 \quad (5.36)$$

y, por tanto,  $\ker i = \{0\}$  e  $\text{im } \pi = \mathfrak{g}$ .

**Definición 5.6** *Se dice que la extensión de álgebras de Lie (5.36) es central si  $\mathfrak{a}$  es un álgebra abeliana cuya imagen está contenida en el centro de  $\mathfrak{g}'$ .*

Como sucesión de espacios vectoriales y aplicaciones lineales, la sucesión está escindida, existe una aplicación lineal  $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  que es una sección, es decir:

$$\pi \circ \beta = \text{id}_{\mathfrak{g}} \quad (5.37)$$

Esto implica (como espacios vectoriales):

$$\mathfrak{g}' = \ker \pi \oplus \text{im } \beta \quad (5.38)$$

o, si se quiere utilizar la relación entre el núcleo de  $\pi$  y la imagen de  $i$  dada por la sucesión exacta:

$$\mathfrak{g}' = i(\mathfrak{a}) \oplus \beta(\mathfrak{g}) \quad (5.39)$$

Pero, en general,  $\beta$  no es un homomorfismo de álgebras de Lie. Es decir

$$\beta([x, y]) \neq [\beta(x), \beta(y)] \quad (5.40)$$

Podemos construir una aplicación bilineal igual a la diferencia entre estas dos expresiones:

$$\varphi(x, y) = [\beta(x), \beta(y)] - \beta([x, y]) \quad (5.41)$$

Es sencillo ver que  $\varphi$  es bilineal.

La aplicación  $\varphi$  cumple las siguientes propiedades:

1. La imagen de  $\varphi$  (que está en  $\mathfrak{g}'$ ), está contenida en la imagen de  $\mathfrak{a}$  mediante  $i$ : como  $\ker \pi = \text{im } i$ , basta probar que:

$$\pi \circ \varphi = 0 \quad (5.42)$$

pero esto es inmediato:

$$\pi(\varphi(x, y)) = \pi([\beta(x), \beta(y)] - \beta([x, y])) = [\pi \circ \beta(x), \pi \circ \beta(y)] - \pi \circ \beta([x, y]) \quad (5.43)$$

y como  $\beta$  es una sección,  $\pi \circ \beta = \text{id}_{\mathfrak{g}}$ . De donde se deduce inmediatamente el resultado (recuérdese que  $\pi$  es un homomorfismo de álgebras de Lie).

2. La aplicación  $\varphi$  es un 2-cociclo (con valores en  $i(\mathfrak{a})$  que un álgebra abeliana).

Es claro que es antisimétrica. Puesto que el espacio final es un álgebra, utilizamos la acción siguiente:

$$x \cdot h = [\beta(x), z], \quad x \in \mathfrak{a}, h \in i(\mathfrak{a}) \quad (5.44)$$

(el siguiente argumento muestra que se trata de un 2-cociclo aunque  $i(\mathfrak{a})$  no esté en el centro de  $\mathfrak{g}'$ ) La acción está bien definida y no depende de la elección de  $\beta$ . Si  $\beta'$  es otra sección, probemos que:

$$[\beta(x), h] = [\beta'(x), h], \quad x \in \mathfrak{a}, h \in i(\mathfrak{a}) \quad (5.45)$$

pero:

$$\pi(\beta(x) - \beta'(x)) = \quad (5.46)$$

por ser  $\beta, \beta'$  secciones. Por tanto,

$$\beta(x) - \beta'(x) \in \ker \pi = i(\mathfrak{a}) \quad (5.47)$$

Ahora bien, la imagen de  $\mathfrak{a}$  mediante  $i$  es abeliana (ya que  $\mathfrak{a}$  es abeliana y  $i$  un homomorfismo de álgebras), por tanto,

$$[\beta(x) - \beta'(x), h] = 0, \quad x \in \mathfrak{a}, h \in i(\mathfrak{a}) \quad (5.48)$$

Ahora solo nos queda demostrar que con esta acción  $\varphi$  es un 2-cociclo. La expresión que debe satisfacer es ( $x, y, z \in \mathfrak{a}$ ):

$$\begin{aligned} & [\beta(x), \varphi(y, z)] - [\beta(y), \varphi(x, z)] + [\beta(z), \varphi(x, y)] - \\ & \varphi([x, y], z) + \varphi([x, z], y) - \varphi([y, z], x) = 0 \end{aligned}$$

identidad que se comprueba sin más que sustituir  $\varphi$  por su definición en función de  $\beta$ .

Si, como estamos suponiendo, la imagen de  $\mathfrak{a}$  mediante  $i$  está contenida en el centro de  $\mathfrak{g}'$ , la acción anterior es trivial:

$$x \cdot h = [\beta(x), h] = 0, \quad x \in \mathfrak{g}, h \in i(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g}') \quad (5.49)$$

y la condición de cociclo es:

$$\varphi([x, y], z) + \varphi([y, z], x) + \varphi([z, x], y) = 0 \quad (5.50)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} & [\beta([x, y]), \beta(z)] + [\beta([y, z]), \beta(x)] + [\beta([z, x]), \beta(y)] - \\ & \beta([[x, y], z]) - \beta([[y, z], x]) - \beta([[z, x], y]) = \\ & [\beta([x, y]), \beta(z)] + [\beta([y, z]), \beta(x)] + [\beta([z, x]), \beta(y)] \end{aligned}$$

pues  $\beta$  es lineal y podemos aplicar la propiedad de Jacobi.

3. Veamos ahora que ocurre si cambiamos la sección  $\beta$  por otra  $\beta'$ .

Sea:

$$\alpha = \beta - \beta' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}' \quad (5.51)$$

Es claro que  $\alpha$  toma valores en  $i(\mathfrak{a})$ :

$$\pi \circ \alpha(x) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g} \quad (5.52)$$

Como  $\alpha$  es lineal, es una 1-cocadena:

$$\alpha \in C^1(\mathfrak{g}, i(\mathfrak{a})) \quad (5.53)$$

y podemos calcular  $\delta\alpha$ :

$$\delta\alpha(x, y) = -\alpha([x, y]) = -\beta([x, y]) + \beta'([x, y]) \quad (5.54)$$

Pero  $\varphi$  y  $\varphi'$  son 2-cociclos como acabamos de demostrar, y calculando su diferencia:

$$\varphi(x, y) - \varphi'(x, y) = [\beta(x), \beta(y)] - [\beta'(x), \beta'(y)] - (\beta - \beta')([x, y]) =$$

y usando  $\beta' = \beta - \alpha$ :

$$\begin{aligned} & = [\beta(x), \beta(y)] - [\beta(x) - \alpha(x), \beta(y) - \alpha(y)] - \alpha([x, y]) = \\ & [\beta(x), \alpha(y)] - [\beta(y), \alpha(x)] - [\alpha(x), \alpha(y)] - \alpha([x, y]) \end{aligned}$$

que es igual a:

$$= -\alpha([x, y]) \quad (5.55)$$

debido a que la imagen de  $\alpha$  está en el centro de  $\mathfrak{g}$ . Pero esto quiere decir que:

$$\delta\alpha = \varphi - \varphi' \quad (5.56)$$

es decir, si cambiamos la sección, la diferencia de los dos cociclos correspondientes es un coborde, están en la misma clase de cohomología.

Supongamos que el cociclo correspondiente a una sección  $\beta$  sea un coborde, es decir:

$$\varphi = \delta\gamma \quad (5.57)$$

entonces, la sección  $\beta$  se puede sustituir por otra que sea un homomorfismo de álgebras de Lie. Basta tomar:

$$\beta' = \beta - \gamma \quad (5.58)$$

En este caso:

$$\varphi' = \varphi - \delta\gamma = 0 \quad (5.59)$$

y por tanto  $\beta'$  es un homomorfismo de álgebras de Lie. En este caso se dice que la extensión es trivial, lo que quiere decir que  $\mathfrak{g}'$  es isomorfo a la suma directa de dos álgebras de Lie

En general, como  $\beta$  es lineal, se tiene la descomposición en suma de espacios vectoriales:

$$\mathfrak{g}' = \text{im } \beta \oplus \ker \pi \quad (5.60)$$

pero si  $\beta$  es un homomorfismo de álgebras de Lie,  $\text{im } \beta$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}'$  y por tanto se tiene:

$$\mathfrak{g}' = \beta(\mathfrak{a}) \oplus i(\mathfrak{a}) \quad (5.61)$$

o si se quiere:

$$\mathfrak{g}' \approx \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} \quad (5.62)$$

El conmutador en  $\mathfrak{g}'$  se puede escribir utilizando esta descomposición (en el caso general, como suma de subespacios vectoriales):

$$x \in \mathfrak{g}' \Rightarrow x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \ker \pi = i(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g}') \quad (5.63)$$

de donde:

$$[x, y] = [x_2, y_2] = [\beta(u_2), \beta(v_2)] = \beta([u_2, v_2]) + \varphi(u_2, v_2) \quad (5.64)$$

donde  $u_2, v_2 \in \mathfrak{g}$  y  $x_2 = \beta(u_2)$ ,  $y_2 = \beta(v_2)$ .

Se pueden definir morfismos entre dos extensiones centrales:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{a}_1 & \xrightarrow{i_1} & \mathfrak{g}'_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathfrak{g} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{a}_2 & \xrightarrow{i_2} & \mathfrak{g}'_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathfrak{g} \rightarrow 0 \end{array} \quad (5.65)$$

donde  $\phi$  y  $\phi_0$  son homomorfismos de álgebras y los diagramas son conmutativos.

Veamos ahora algunas propiedades que aplicaremos en la próxima sección.

**Definición 5.7** *Se dice que un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es perfecta si*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \quad (5.66)$$

**Definición 5.8** Se dice que una extensión central:

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}' \rightarrow 0 \quad (5.67)$$

es un recubrimiento si  $\mathfrak{g}'$  es perfecta.

**Definición 5.9** Se dice que un recubrimiento es universal si para toda extensión central de  $\mathfrak{g}$  existe un único morfismo del recubrimiento a la extensión central.

Se puede demostrar que si el recubrimiento existe, es único (salvo isomorfismo). Sin embargo no tiene por qué existir. Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 5.1** El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  admite un recubridor universal si y solo si es perfecta.

Se podría pensar que es posible construir el recubridor universal del recubridor universal... Sin embargo para un álgebra de Lie perfecta, su recubridor universal es cerrado centralmente (es decir es su propio recubridor universal).

Como resumen, diremos que toda extensión central está asociada a un 2-cociclo, definido como el término que hace que la sección  $\beta$  no sea en general un homomorfismo de álgebras de Lie. Y a la inversa. Todo 2-cociclo genera una extensión central:

Sea  $\alpha : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$  un 2-cociclo ( $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{a}$  álgebras de Lie). Se define un espacio vectorial como suma de los espacios vectoriales asociados a  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{a}$ .

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} \quad (5.68)$$

y en él un paréntesis de Lie dado por:

$$[x + a, y + b] = [x, y] + \alpha(x, y) \quad (5.69)$$

Está bien definido debido a las propiedades de cociclo de  $\alpha$ . Entonces,  $\mathfrak{g}'$  es un álgebra de Lie y, si se definen la inclusión:  $i : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}'$  y la proyección  $\pi : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$  se tiene una extensión central.

## 5.4. El álgebra de Virasoro

El álgebra de Virasoro es un objeto fundamental en la teoría de álgebras de Lie de dimensión infinita. Daremos su definición y algunas propiedades fundamentales siguiendo a [8].

Sea  $\mathbf{K}$  un cuerpo y  $X$  un espacio vectorial de dimensión infinita construido tomando una base numerable  $\{L_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ :

$$X = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \mathbf{K}L_n \quad (5.70)$$

Definimos un paréntesis de Lie en  $X$  que lo convierte en un álgebra de Lie:

$$[L_n, L_m] = (m - n)L_{n+m}, \quad n, m \in \mathbf{Z} \quad (5.71)$$

Se llama a  $\{X, [\ ]\}$  el álgebra de Witt,  $\mathcal{W}$ . Es un álgebra perfecta,  $[\mathcal{W}, \mathcal{W}] = \mathcal{W}$  como se puede comprobar fácilmente.

El álgebra de Virasoro,  $\mathcal{V}$ , es una extensión central del álgebra de Witt:

$$\mathcal{V} = X \oplus \mathbf{K}c \quad (5.72)$$

una suma de espacios vectoriales, con el conmutador dado por:

$$\begin{cases} [L_n, L_m] &= (m - n)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}c \\ [L_n, c] &= 0 \end{cases} \quad (5.73)$$

Como el álgebra de Witt es perfecta, según hemos dicho en la sección anterior, admite un único recubridor universal:

$$\mathfrak{g}' = \mathcal{W} \oplus V \quad (5.74)$$

una suma de espacios vectoriales, con 2-cociclo  $\alpha$ .

El resultado fundamental es que el álgebra de Virasoro es el recubridor universal del álgebra de Witt. Veámoslo con cierto detalle.

La propiedad fundamental de los cociclos es:

$$\alpha(L_k, [L_m, L_n]) + \alpha(L_m, [L_n, L_k]) + \alpha(L_n, [L_k, L_m]) = 0 \quad (5.75)$$

Sustituyendo el paréntesis en  $\mathcal{W}$ , se tiene:

$$(n-m)\alpha(L_k, L_{m+n}) + (k-n)\alpha(L_m, L_{n+k}) + (m-k)\alpha(L_n, L_{k+m}) = 0 \quad (5.76)$$

Demos algunos valores particulares a  $k, m, n$ :

1. Si  $k = 0$ :

$$(n-m)\alpha(L_0, L_{m+n}) = (m+n)\alpha(L_m, L_n) \quad (5.77)$$

2. Si  $k + m + n = 0$ :

$$-(k+2m)\alpha(L_k, L_{-k}) + (2k+m)\alpha(L_m, L_{-m}) + (m-k)\alpha(L_{-k-m}, L_{k+m}) = 0 \quad (5.78)$$

y haciendo  $k = 1$ :

$$(m-1)\alpha(L_{m+1}, L_{-m-1}) = (m+2)\alpha(L_m, L_{-m}) - (2m+1)\alpha(L_1, L_{-1}) \quad (5.79)$$

Definimos ahora el paréntesis en la extensión  $\mathcal{W} \oplus V$  de la forma que vimos en la sección anterior. Primero para los elementos de  $\mathcal{W}$ :

$$[L_m, L_n]_* = [L_m, L_n] + \alpha(L_m, L_n) \quad (5.80)$$

En particular si  $m = 0$  se tiene:

$$[L_0, L_n]_* = nL_n + \alpha(L_0, L_n) \quad (5.81)$$

Se introduce un conjunto de elementos en la extensión  $\mathcal{W} \oplus V$  dados por la expresión anterior:

$$\tilde{L}_n = L_n + \frac{1}{n}\alpha(L_0, L_n), \quad n \neq 0 \quad (5.82)$$

y queremos calcular sus conmutadores (usando la expresión de la sección anterior):

$$[L_0, \tilde{L}_n]_* = [L_0, L_n + \frac{1}{n}\alpha(L_0, L_n)]_* = [L_0, L_n] + \alpha(L_0, L_n) = nL_n + \alpha(L_0, L_n) = n\tilde{L}_n \quad (5.83)$$

Si  $n, m \neq 0$ :

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]_* = [L_m + \frac{1}{m}\alpha(L_0, L_m), L_n + \frac{1}{n}\alpha(L_0, L_n)]_* = (n-m)L_{m+n} + \alpha(L_m, L_n) \quad (5.84)$$

cuando  $m+n \neq 0$  podemos usar una de las fórmulas halladas antes para el cociclo  $\alpha$ :

$$\alpha(L_m, L_n) = \frac{n-m}{n+m}\alpha(L_0, L_{m+n}) \quad (5.85)$$

de donde:

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]_* = (n - m)\tilde{L}_{m+n} \quad (5.86)$$

Ya solo nos queda calcular el conmutador  $*$  de  $\tilde{L}_n$  y  $\tilde{L}_{-n}$ . Primero definimos  $\tilde{L}_0$ :

$$\tilde{L}_0 = L_0 - \frac{1}{2}\alpha(L_1, L_{-1}) \quad (5.87)$$

y ahora:

$$[\tilde{L}_n, \tilde{L}_{-n}]_* = [L_n + \frac{1}{n}\alpha(L_0, L_n), L_{-n} - \frac{1}{n}\alpha(L_0, L_{-n})]_* = [L_n, L_{-n}] + \alpha(L_n, L_{-n}) = -2nL_0 + \alpha(L_n, L_{-n})$$

En general no sabemos cuanto vale  $\alpha(L_n, L_{-n})$ , pero si  $n = 1$ :

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_{-1}]_* = [L_1 + \alpha(L_0, L_1), L_{-1} - \alpha(L_0, L_{-1})]_* = [L_1, L_{-1}] + \alpha(L_1, L_{-1}) = -2L_0 + \alpha(L_1, L_{-1}) = -2\tilde{L}_0$$

Para calcular los demás, debemos hacer una nueva construcción de cociclos. El conjunto  $\{\tilde{L}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  genera un subespacio de la extensión central que estamos construyendo. Llamémosle  $\mathcal{W}'$ . La proyección  $\pi : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathcal{W}$ , con núcleo  $V$ , restringida a  $\mathcal{W}'$  es un isomorfismo de  $\mathcal{W}'$  en  $\mathcal{W}$ , como espacios vectoriales. Sea  $f$ :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{W}' \\ L_n &\mapsto \tilde{L}_n \end{aligned} \quad (5.88)$$

Como en general no es un homomorfismo de álgebras, no conserva el conmutador, pero la diferencia es un 2-cociclo, por las mismas razones que estudiamos en el caso de las extensiones centrales:

$$[f(L_n), f(L_m)]_* = f([L_n, L_m]) + \varphi(L_n, L_m) \quad (5.89)$$

donde  $\varphi$  es un 2-cociclo con valores en  $V$ . Por tanto:

$$[\tilde{L}_n, \tilde{L}_m]_* = (m - n)\tilde{L}_{n+m} + \varphi(L_n, L_m) \quad (5.90)$$

Ahora tenemos que calcular  $\varphi$ . Para ello empezamos con los casos que ya conocemos:

$$[\tilde{L}_n, \tilde{L}_m]_* = (m - n)\tilde{L}_{n+m}, \quad n + m \neq 0 \quad (5.91)$$

por tanto:

$$\varphi(L_n, L_m) = 0, \quad n + m \neq 0 \quad (5.92)$$

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_{-1}]_* = -2\tilde{L}_0 + \varphi(L_1, L_{-1}) \quad (5.93)$$

de donde:

$$\varphi(L_1, L_{-1}) = 0 \quad (5.94)$$

La aplicación  $\varphi$  es un 2-cociclo, luego cumple las mismas propiedades que  $\alpha$ , es decir:

$$(m - 1)\varphi(L_{m+1}, L_{-(m+1)}) = -(1 + 2m)\varphi(L_1, L_{-1}) + (m + 2)\varphi(L_m, L_{-m}) \quad (5.95)$$

es decir:

$$(m - 1)\varphi(L_{m+1}, L_{-(m+1)}) = (m + 2)\varphi(L_m, L_{-m}) \quad (5.96)$$

y por lo tanto tenemos una recursión para los valores de  $\varphi$ :

$$\varphi(L_3, L_{-3}) = 4\varphi(L_2, L_{-2}) \quad (5.97)$$

$$\varphi(L_4, L_{-4}) = \frac{5}{2}\varphi(L_3, L_{-3}) = 10\varphi(L_2, L_{-2}) \quad (5.98)$$

La regla general es:

$$\varphi(L_m, L_{-m}) = \frac{m+1}{m-2} \varphi(L_{m-1}, L_{-(m-1)}), \quad m > 2 \quad (5.99)$$

y la solución de esta ecuación en diferencias:

$$\varphi(L_m, L_{-m}) = \frac{(m+1)!}{6(m-2)!} \varphi(L_2, L_{-2}) = \frac{1}{6} m(m^2-1) \varphi(L_2, L_{-2}), \quad m > 2 \quad (5.100)$$

y llamando  $c = 2\beta(L_2, L_{-2})$ ,

$$\varphi(L_m, L_{-m}) = \frac{c}{12} m(m^2-1), \quad m > 2 \quad (5.101)$$

Tras todos estos cálculos, fiel muestra del ingenio de ciertas gentes, llegamos a la expresión final del conmutador en la extensión central del álgebra de Witt:

$$[\tilde{L}_n, \tilde{L}_m] = (m-n)\tilde{L}_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \quad (5.102)$$

Hemos construido un álgebra  $\mathcal{V} = \mathcal{W}' + \mathbf{K}c$ , que es una subálgebra de  $\mathfrak{g}' = \mathcal{W} \oplus V$  e isomorfa al álgebra de Virasoro. Pero,  $\mathfrak{g}'$  es un recubrimiento universal de  $\mathcal{W}$ , luego es perfecto. Además,  $\mathcal{W} \approx \mathcal{W}'$ , luego:

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = [\mathcal{W} \oplus V, \mathcal{W} \oplus V] = [\mathcal{V}, \mathcal{V}] = \mathcal{V} \quad (5.103)$$

pues el álgebra de Virasoro es perfecta.

## 5.5. El álgebra de Heisenberg

Supongamos un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y un subespacio unidimensional  $\mathfrak{c}$ , tal que:

$$\begin{cases} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] &= \mathfrak{c} \\ [\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] &= 0 \end{cases} \quad (5.104)$$

Podemos definir ahora una forma bilineal antisimétrica asociada al subespacio  $\mathfrak{c}$ :

$$[x, y] = \psi(x, y)c \quad (5.105)$$

donde  $c$  es una base de  $\mathfrak{c}$ .

Si  $\text{rad } \psi = \{x \in \mathfrak{g} : \psi(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$ , el subespacio  $\mathfrak{c}$  está contenido en el radical. Sea  $\tilde{\psi}$  la forma inducida en el espacio cociente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ .

**Definición 5.10** *Un álgebra de Heisenberg es un álgebra  $\mathfrak{g}$  con un espacio unidimensional  $\mathfrak{c}$  que verifica (5.104) y tal que  $\psi$  es no degenerada.*

### Ejemplo 5.1

Consideremos el álgebra de polinomios  $\mathfrak{s} = \mathbf{K}[x_j]_{j \in J}$ , en la que definimos los operadores:  $l(x_j)$ , multiplicación por  $x_j$ , y  $\partial/\partial x_j$ , derivada parcial con respecto a  $x_j$ , además del operador identidad, 1. Entonces,

$$\mathfrak{g} = \text{lin}\left\{l(x_j), \frac{\partial}{\partial x_j}, 1\right\} \quad (5.106)$$

es un álgebra de Heisenberg de dimensión,  $2 \text{ card } J + 1$ .

## 5.6. Casimires

En el álgebra envolvente de una álgebra de Lie existen ciertos operadores con unas propiedades que los hacen muy útiles en numerosas aplicaciones.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita, semisimple. Consideremos en  $\mathfrak{g}$  una forma bilineal invariante, simétrica y no degenerada,  $\beta$ . Dada una base de  $\mathfrak{g}$ ,  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , podemos construir otra base que sea dual respecto de la primera, con relación a la forma bilineal  $\beta$ ,  $\{y_1, \dots, y_n\}$ :

$$\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij} \quad (5.107)$$

Debido a esta propiedad de dualidad se tiene, si  $x \in \mathfrak{g}$ :

$$[x, x_i] = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad [x, y_i] = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j \quad (5.108)$$

y los coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  están relacionados por:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \sum_{n=1}^n a_{ij} \delta_{jk} = \sum_{n=1}^n a_{ij} \beta(x_j, y_k) = \beta\left(\sum_{n=1}^n (a_{ij} x_j), y_k\right) = \beta([x, x_i], y_k) = \\ &= -\beta(x_i, [x, y_k]) = -\beta\left(x_i, \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j\right) = -\sum_{j=1}^n b_{kj} \beta(x_i, y_j) = -b_{ki} \end{aligned}$$

Consideremos ahora un representación fiel del álgebra  $\mathfrak{g}$  en un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita:

$$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V) \quad (5.109)$$

y sea

$$\beta(x, y) = \text{tr}(\phi(x)\phi(y)) \quad (5.110)$$

una forma bilineal, invariante no degenerada. Consideremos el endomorfismo de  $V$  dado por:

$$\mathcal{C}_\phi(\beta) = \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i) \quad (5.111)$$

Entonces, el endomorfismo  $\mathcal{C}_\phi(\beta)$  conmuta con todos los  $\phi(x)$ . En efecto:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \mathcal{C}_\phi(\beta)] &= \sum_i [\phi(x), \phi(x_i)\phi(y_i)] = \sum_i [\phi(x), \phi(x_i)]\phi(y_i) + \sum_i \phi(x_i)[\phi(x), \phi(y_i)] = \\ &= \sum_i (a_{ij} + b_{ji})\phi(x_j)\phi(y_i) = 0 \end{aligned}$$

El operador  $\mathcal{C}_\phi(\beta)$  es un Casimir del álgebra. El valor de su traza es justamente la dimensión del álgebra. Si  $\phi$  es una representación irreducible, el lema de Schur asegura que se trata de un múltiplo de la identidad. El valor de esta constante es la dimensión del álgebra dividida por la dimensión de la representación.

# Capítulo 6

## Estructura de las álgebras de Lie semisimples

Discutiremos en este capítulo la clasificación de Cartan de las álgebras semisimples. Mientras no se especifique lo contrario,  $\mathbf{K}$  es un cuerpo algebraicamente cerrado (en estas notas  $\mathbf{C}$ )

### 6.1. Subálgebras de Cartan

El estudio de las álgebras semisimples se puede enfocar desde varios aspectos. Por ejemplo en [5], página 107, se usa el concepto de subálgebras semisimples “split”, porque se quiere extender los resultados a cuerpos no necesariamente cerrados. Una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  (ver más abajo) es “split” si las raíces características de los elementos  $\text{ad}_h$ , con  $h \in \mathfrak{h}$  están en el cuerpo base. Si éste es cerrado, una subálgebra de Cartan “split” es simplemente una subálgebra de Cartan. En [4], página 35, se hace uso de álgebras torales maximales, que son subálgebras maximales compuestas por elementos semisimples (ad-semisimples). Como se puede demostrar, en el caso de álgebras semisimples, las subálgebras maximales torales son las subálgebras de Cartan. Aquí usaremos las subálgebras de Cartan como elementos esenciales en la determinación de la estructura de las álgebras semisimples.

**Definición 6.1** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Se dice que  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  si

1. es nilpotente
2. es igual a su normalizador ( $\mathcal{N}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$ )

Como  $\mathfrak{h}$  es un álgebra nilpotente podemos aplicar los resultados que obtuvimos en los temas anteriores. En particular, el álgebra  $\text{ad}_{\mathfrak{h}} = \{\text{ad}_h : h \in \mathfrak{h}\}$  está formado por endomorfismos nilpotentes. Podemos descomponer el álgebra  $\mathfrak{g}$  (que es el espacio de representación para la representación adjunta) utilizando la descomposición de Fitting:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \tag{6.1}$$

donde

$$\mathfrak{g}_0 = \bigcap_{h \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h} \tag{6.2}$$

en suma directa de subespacios propios generalizados asociados a  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ . Sea  $\mathfrak{g}_\lambda$  el subespacio asociado al peso  $\lambda$ , es decir,

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} : (\text{ad}_h - \lambda(x)1_{\mathfrak{g}})^r x = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\} \tag{6.3}$$

para algún  $r \in \mathbf{N}$ .

Se tiene

**Proposición 6.1** Si  $\lambda, \mu$  son dos pesos, entonces

$$[\mathfrak{g}_\lambda^{\text{ad}_x}, \mathfrak{g}_\mu^{\text{ad}_x}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}^{\text{ad}_x} \quad (6.4)$$

En particular,  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_x}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$  y los elementos de  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_x}$  son ad-nilpotentes.

La demostración se basa en los resultados anteriores sobre pesos en el producto tensorial de representaciones

**Proposición 6.2** Sea  $\mathfrak{k}$  una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Sea  $x \in \mathfrak{k}$  tal que  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_x}$  sea minimal entre todas las subálgebras  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_z}$  con  $z \in \mathfrak{k}$ . Entonces, si  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_x}$  se tiene

$$\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_x} \subset \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_z}, \quad \forall z \in \mathfrak{k} \quad (6.5)$$

**Proposición 6.3** Sea  $\mathfrak{k}$  una subálgebra de  $\mathfrak{g}$  que contiene a  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_x}$  para algún  $x \in \mathfrak{g}$ . Entonces  $\mathfrak{k}$  es igual a su normalizador. En particular  $\text{ad}_0^{\text{ad}_x}$  es igual a su normalizador.

La demostración es como sigue. Si  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_x}$ , el endomorfismo  $\text{ad}_x$  actúa en  $\mathcal{N}(\mathfrak{k})/\mathfrak{k}$  y no tiene a 0 como autovalor. Además  $\text{ad}_x(\mathcal{N}) \subset \mathfrak{k}$ , luego  $\text{ad}_x$  actúa trivialmente en el cociente. Esto solo puede ser si el cociente es trivial, es decir, si  $\mathfrak{k} = \mathcal{N}(\mathfrak{k})$ .

Veamos algunas propiedades elementales de las subálgebras de Cartan.

**Proposición 6.4** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra nilpotente de  $\mathfrak{g}$ . Entonces,  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan si y solo si  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$  donde  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$  es la componente nula de la descomposición de Fitting de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\text{ad}_\mathfrak{h}$  (es decir el subespacio propio generalizado de autovalor 0 de  $\text{ad}_\mathfrak{h}$ ) (ver [4], página 80).

El subespacio propio generalizado de autovalor cero de  $\text{ad}_\mathfrak{h}$  es:

$$\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}} = \{x \in \mathfrak{g} : \exists r \in \mathbf{N}, \text{ad}_\mathfrak{h}^r x = 0, h \in \mathfrak{h}\} \quad (6.6)$$

Sea  $\mathfrak{h}$  una subálgebra nilpotente de  $\mathfrak{g}$ . Demostremos en primer lugar que  $\mathcal{N}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$ . Sea  $x \in \mathcal{N}(\mathfrak{h})$ , Entonces  $[h, x] \in \mathfrak{h}$ , por lo que, al ser  $\mathfrak{h}$  nilpotente (y por tanto  $\text{ad}_\mathfrak{h}$  nilpotente sobre  $\mathfrak{h}$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$ ) se tiene, para un  $k \in \mathbf{N}$  suficientemente grande,

$$\text{ad}_\mathfrak{h}^k [h, x] = \text{ad}_\mathfrak{h}^{k+1} x = 0 \quad (6.7)$$

luego  $x \in \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$ . Por lo tanto

$$\mathfrak{h} \subseteq \mathcal{N}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}} \quad (6.8)$$

Es decir, si  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$ , entonces  $\mathfrak{h} = \mathcal{N}(\mathfrak{h})$  y  $\mathfrak{h}$  es de Cartan. Veamos la implicación en sentido contrario.

Supongamos ahora que  $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$ . Se tiene que  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$  es invariante bajo  $\text{ad}_\mathfrak{h}$  (obviamente  $\mathfrak{h}$  también es invariante bajo  $\text{ad}_\mathfrak{h}$ ). Por lo tanto, construyendo el espacio cociente,  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ , podemos definir en él las aplicaciones correspondientes a  $\text{ad}_\mathfrak{h}$ ,  $\widetilde{\text{ad}}_\mathfrak{h}$

$$\widetilde{\text{ad}}_\mathfrak{h}(x + \mathfrak{h}) = \text{ad}_\mathfrak{h} x + \mathfrak{h}, \quad x \in \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}, h \in \mathfrak{h} \quad (6.9)$$

Estas aplicaciones son nilpotentes (por serlo  $\text{ad}_\mathfrak{h}$ ). Aplicando un resultado previo (proposición 2.1), existe un vector no nulo,  $x_0 + \mathfrak{h}$ , con  $x_0 \in \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_\mathfrak{h}}$ , pero  $x_0 \notin \mathfrak{h}$ , tal que

$$\widetilde{\text{ad}}_\mathfrak{h}(x_0 + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \quad h \in \mathfrak{h} \quad (6.10)$$

Pero en este caso,  $\text{ad}_h x_0 = [h, x_0] \in \mathfrak{h}$ , luego  $x_0 \in \mathcal{N}(\mathfrak{h})$ . Es decir,  $\mathfrak{h} \subsetneq \mathcal{N}(\mathfrak{h})$ . Lo que hemos probado es:

$$\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h} \Rightarrow \mathfrak{h} \subsetneq \mathcal{N}(\mathfrak{h}) \quad (6.11)$$

o, lo que eso mismo, si  $\mathfrak{h} = \mathcal{N}(\mathfrak{h})$ , entonces  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}$ , o sea, si  $\mathfrak{h}$  es de Cartan,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}$ . (ver [5], página 58)

En realidad, el espacio  $\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}$  es siempre una subálgebra si  $\mathfrak{h}$  es nilpotente (no es necesario que sea de Cartan), y si  $\mathfrak{g}_1^{\text{ad}_h}$  es el subespacio correspondiente a los autovalores no nulos (o, en general, el segundo espacio en la descomposición de Fitting) se tiene

$$[\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}, \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}] \subseteq \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}, \quad [\mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}, \mathfrak{g}_1^{\text{ad}_h}] \subseteq \mathfrak{g}_1^{\text{ad}_h} \quad (6.12)$$

La demostración es muy sencilla (ver [5], página 58).

La noción de elemento regular será muy importante en lo que sigue.

**Definición 6.2** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $h \in \mathfrak{g}$ . Se dice que  $h$  es regular si la dimensión del subespacio propio generalizado de autovalor 0 de  $\text{ad}_h$  es mínima.

Se llama rango<sup>1</sup> de  $\mathfrak{g}$  a la dimensión de  $\mathfrak{h}$ .

Los elementos regulares de un álgebra de Lie determinan una subálgebra de Cartan.

**Teorema 6.1** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita. Sea  $x \in \mathfrak{g}$  regular. El subespacio propio generalizado de autovalor 0 relativo a  $\text{ad}_x$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .

Dada una subálgebra de Cartan,  $\mathfrak{h}$ , el álgebra se puede descomponer en una suma directa de subespacios usando la representación adjunta para la subálgebra de Cartan (que es nilpotente) como hemos visto antes

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k} \quad (6.13)$$

Se tiene como sabemos,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \quad (6.14)$$

$\mathfrak{g}_0$  es una subálgebra igual a  $\mathfrak{h}$ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k} \quad (6.15)$$

Los espacios  $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$  se llaman espacios de raíces.

Como hemos dicho anteriormente, Teorema 6.1, existen subálgebras de Cartan (si el cuerpo  $\mathbf{K}$  fuera finito el resultado no es correcto). Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbf{K}$ . Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una base. Sea  $K(u)$  el cuerpo de funciones racionales en las indeterminadas  $u_1, \dots, u_n$  y  $\mathfrak{g}^{\mathbf{K}(u)}$  el álgebra de Lie sobre el cuerpo  $\mathbf{K}(u)$  (combinaciones lineales de los elementos de la base de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes en  $\mathbf{K}(u)$ ).

Consideremos  $x_u = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$  y la representación adjunta  $\text{ad}_{x_u}$ . El polinomio característico de este endomorfismo es:

$$\chi(t, u) = t^n + g_{n-1}(u)t^{n-1} + \cdots + g_0(u) \quad (6.16)$$

donde los coeficientes son polinomios en  $u$ . Como 0 es un autovalor del endomorfismo (pues  $x_u$  conmuta consigo mismo) se tiene que  $g_0(u) = g_1(u) = \cdots = g_{l-1}(u) = 0$ ,  $g_l(u) \neq 0$ . Esto implica que para cada  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}_x$  tiene como autovalor a 0, con multiplicidad al menos  $l$ . Si  $g_l(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ , el endomorfismo  $\text{ad}_{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}$  tiene el autovalor 0 con multiplicidad  $l$  y entonces  $\sum_{i=1}^n a_i x_i$  es regular. Está claro que  $l$  es el rango de  $\mathfrak{g}$ .

Se tiene el teorema (el Teorema 6.1 está contenido en éste)

<sup>1</sup>En [5] se llama rango al número  $n - \dim \mathfrak{g}_0^{\text{ad}_h}$ . Puesto que  $\text{ad}_h h = 0$ , el rango es estrictamente menor que la dimensión del álgebra. Si el álgebra es nilpotente el rango es cero, pues por el teorema de Engel, los endomorfismos  $\text{ad}_x$  son nilpotentes.

**Teorema 6.2** Sea  $\mathbf{K}$  un cuerpo (basta con que sea infinito),  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de rango  $l$  y  $x \in \mathfrak{g}$  un elemento regular. El polinomio característico de  $\text{ad}_x$  será:

$$\chi(t) = t^l \tilde{\chi}(t), \quad \chi(0) \neq 0 \quad (6.17)$$

Sea  $\mathfrak{g}_0 = \tilde{\chi}(\text{ad}_x)\mathfrak{g}$ ,  $\tilde{\mathfrak{g}} = (\text{ad}_x)^l \mathfrak{g}$ . Entonces:

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$  (como espacios vectoriales, se trata de la descomposición de Fitting)
2.  $\mathfrak{g}_0$  es una subálgebra de Cartan,  $\dim \mathfrak{g}_0 = l$
3.  $[\mathfrak{g}_0, \tilde{\mathfrak{g}}] = [x, \tilde{\mathfrak{g}}] = \tilde{\mathfrak{g}}$

Veamos la relación entre los espacios de raíces. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra nilpotente y  $V$  un módulo de  $\mathfrak{g}$ , con representación  $\pi$ . Supongamos (como ya hemos dicho) que el cuerpo  $\mathbf{K}$  es algebraicamente cerrado (o que los polinomios cracterísticos involucrados tienen todas sus raíces en el cuerpo). Consideremos la representación  $\pi$  restringida a  $\mathfrak{h}$ . Como sabemos (ver capítulo 2) el espacio  $V$  se descompone en suma de espacios de pesos, invariantes bajo  $\pi(\mathfrak{h})$ :

$$V = V_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_k} \quad (6.18)$$

Lo mismo se puede decir de  $\mathfrak{g}$  considerado como un módulo de  $\mathfrak{h}$  bajo la representación adjunta. Por tanto

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k} \quad (6.19)$$

Como hemos dicho, en este caso a los pesos se les llama raíces. Se tiene el siguiente resultado

**Proposición 6.5** En las condiciones anteriores, se verifica:

$$\mathfrak{g}_{\alpha} V_{\mu} \subseteq V_{\mu+\alpha} \quad (6.20)$$

si  $\mu + \alpha$  es un peso de  $V$  relativo a  $\mathfrak{g}$ . En caso contrario  $\mathfrak{g}_{\alpha} V_{\mu}$  es cero.

La idea de la demostración es considerar el producto tensorial de la representación adjunta y de  $\pi$ .

$$v \in \mathfrak{g}_{\alpha} V_{\mu}, \quad v = \sum_i \pi(x_{\alpha}^i) v_{\mu}^i, \quad x_{\alpha}^i \in \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad v_{\mu}^i \in V_{\mu} \quad (6.21)$$

Definimos la aplicación  $f$ ,

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{g}_{\alpha} \otimes V_{\mu} &\rightarrow \mathfrak{g}_{\alpha} V_{\mu} \\ x_{\alpha} \otimes v_{\mu} &\mapsto \pi(x_{\alpha}) v_{\mu} \end{aligned} \quad (6.22)$$

que es un homomorfismo de  $\mathfrak{h}$ -módulos. En efecto, la aplicación  $f$  es lineal por la definición. Además, si  $h \in \mathfrak{h}$ , tenemos

$$\text{ad}_h \otimes \pi(h)(x_{\alpha} \otimes v_{\mu}) = \text{ad}_h(x_{\alpha}) \otimes v_{\mu} + x_{\alpha} \otimes \pi(h)v_{\mu} \quad (6.23)$$

Haciendo actuar  $f$ :

$$f((\text{ad}_h \otimes \pi(h))(x_{\alpha} \otimes v_{\mu})) = \pi([h, x_{\alpha}])v_{\mu} + \pi(x_{\alpha})\pi(h)v_{\mu} = \pi(h)\pi(x_{\alpha})v_{\mu} \quad (6.24)$$

como  $f(x_{\alpha} \otimes v_{\mu}) = \pi(x_{\alpha})v_{\mu}$ , se tiene

$$\pi(h)(f(x_{\alpha} \otimes v_{\mu})) = \pi(h)\pi(x_{\alpha})v_{\mu} \quad (6.25)$$

que es el resultado anterior, luego  $f$  relaciona  $\pi$  con  $\text{ad} \otimes \pi$  como queríamos probar (es decir, es un homomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos). El peso de la representación producto tensorial es  $\alpha + \mu$ , luego el de su imagen mediante  $f$ ,  $\mathfrak{g}_{\alpha} V_{\mu}$ , es el mismo o el módulo es cero (consecuencia de la definición de módulos peso).

En el caso particular en que  $V_\mu$  sea un módulo de la representación adjunta tenemos que (admitiendo que  $\alpha = 0$  es una raíz y  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ , aunque en lo sucesivo no consideraremos a 0 como una raíz)

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ es una raíz} \\ = 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (6.26)$$

## 6.2. Álgebras semisimples: raíces

Recordemos las ideas esenciales sobre las álgebras semisimples (sobre un cuerpo infinito algebraicamente cerrado, esencialmente  $\mathbf{C}$ ). Como sabemos un álgebra semisimple es aquella que tiene radical (ideal soluble maximal) igual a 0. O bien, aquella que (siendo no abeliana) no tiene ideales abelianos no triviales. Un álgebra es simple si (siendo no abeliana) no tiene ideales no triviales. También sabemos que la forma de Killing ( $K$ ) es no degenerada si y solo si el álgebra es semisimple. Un álgebra semisimple se puede escribir como la suma directa (como álgebras) de álgebras simples que son todos los ideales del álgebra.

Dada una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ , una raíz es una forma lineal no nula del espacio vectorial  $\mathfrak{h}$ , tal que el subespacio

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{y \in \mathfrak{g} : \forall x \in \mathfrak{h}, \exists r \geq 1, (\text{ad}_x - \alpha(x))^r y = 0\} \quad (6.27)$$

es no trivial.

La descomposición en espacios de raíces es, como ya hemos dicho

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\gamma \quad (6.28)$$

Sea  $\mathfrak{h}^*$  el dual como espacio vectorial de  $\mathfrak{h}$  y  $\Delta$  el conjunto de raíces,

$$\Delta \subset \mathfrak{h}^*, \quad \tilde{\Delta} = \Delta \cup \{0\} \quad (6.29)$$

Veremos a continuación una serie de propiedades de las raíces que nos permitirán estudiar la estructura de las álgebras semisimples.

**Proposición 6.6** *Si  $\pm\alpha$  son raíces, entonces, si  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  y  $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  se tiene que*

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in \mathfrak{h} \quad (6.30)$$

Es una consecuencia de (6.26) (nótese que no se dice que si  $\alpha \in \Delta$  entonces  $-\alpha \in \Delta$ . Esto lo veremos más adelante).

**Proposición 6.7** *Si  $\alpha, \beta \in \tilde{\Delta}$  con  $\alpha + \beta \neq 0$ , entonces*

$$K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0 \quad (6.31)$$

Veamos primeramente que  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  es ortogonal (siempre según  $K$ ) a  $\mathfrak{g}_\alpha$ , para toda raíz  $\alpha \in \Delta$ . Como  $\alpha \neq 0$ , existe  $h' \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha(h') \neq 0$ . Sea  $h \in \mathfrak{h}$  y  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ . Probaremos que son ortogonales. Por definición de  $\mathfrak{g}_\alpha$  existe un entero  $r \geq 0$  tal que:

$$(\text{ad}_{h'} - \alpha(h'))^r e_\alpha = 0 \quad (6.32)$$

para todo  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ . Es decir,  $\text{ad}_{h'} - \alpha(h')$  es nilpotente y como  $\alpha(h') \neq 0$ , se tiene que  $\text{ad}_{h'}$  (restringida a  $\mathfrak{g}_\alpha$ ) es la suma de una transformación nilpotente, más un múltiplo (no cero) de la identidad. El único autovalor es  $\alpha(h)$ . La consecuencia inmediata es que  $\text{ad}_{h'}$  es un endomorfismo

no singular en  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Lo mismo ocurre con cualquiera de sus potencias, luego, para todo  $k$ , fijado  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  existe  $e_\alpha^k \in \mathfrak{g}_\alpha$  tal que

$$\text{ad}_{h'}^k e_\alpha^k = e_\alpha \quad (6.33)$$

Como la forma de Killing es invariante respecto a la representación adjunta

$$K(e_\alpha, h) = K(\text{ad}_{h'}^k e_\alpha^k, h) = \pm K(e_\alpha^k, \text{ad}_{h'}^k h) \quad (6.34)$$

El signo depende de  $k$  pero es irrelevante, pues  $\mathfrak{h}$  es nilpotente, y por tanto, eligiendo  $k$  suficientemente grande se tiene

$$K(e_\alpha, h) = 0 \quad (6.35)$$

como queríamos probar. Supongamos ahora que  $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ , con  $\alpha + \beta \neq 0$ . Entonces,

$$K(e_\alpha, e_\beta) = K(\text{ad}_{h'} e_\alpha^1, e_\beta) = K([h', e_\alpha^1], e_\beta) = K([h', [e_\alpha^1, e_\beta]]) \quad (6.36)$$

Puede ocurrir que  $\alpha + \beta$  sea una raíz (no cero). Entonces  $[e_\alpha^1, e_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  y por lo anterior  $K(e_\alpha, e_\beta) = 0$ . Si  $\alpha + \beta$  no es una raíz, entonces  $[e_\alpha^1, e_\beta] = 0$  y se tiene el mismo resultado.

**Proposición 6.8** *La restricción de la forma de Killing a la subálgebra de Cartan es no degenerada*

Si  $K|_{\mathfrak{h}}$  fuera degenerada, existiría  $h \in \mathfrak{h}$  tal que  $K(h, h') = 0$  para todo  $h' \in \mathfrak{h}$ . Pero como  $h$  es ortogonal a cualquier elemento de  $\mathfrak{g}_\alpha$ , para toda raíz  $\alpha$ , se tiene que  $K$  sería degenerada en  $\mathfrak{g}$  lo que no es posible al ser  $\mathfrak{g}$  semisimple.

Siendo  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan (en particular nilpotente), sabemos que en una base adecuada las matrices que representan  $\text{ad}_h$  son triangulares superiores. La traza de  $\text{ad}_h$  restringido a  $\mathfrak{g}_\alpha$  es  $\alpha(h) \dim \mathfrak{g}_\alpha$  (pues solo existe un autovalor,  $\alpha(h)$ , en esta restricción, por la definición de los espacios raíces). El producto de dos de estas matrices sigue siendo triangular y por tanto,

$$K(h, h') = \text{tr}(\text{ad}_h \text{ad}_{h'}) = \sum_{\alpha \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\alpha) \alpha(h) \alpha(h') \quad (6.37)$$

**Proposición 6.9** *Si  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan de un álgebra semisimple  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$  es abeliana*

Los elementos del álgebra  $\mathfrak{h}'$ , derivada de  $\mathfrak{h}$ , son anulados por cualquier raíz:  $\alpha(h') = 0$  si  $h' \in \mathfrak{h}'$ , pues, si  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ , no nulo, se tiene

$$\begin{aligned} [h', x] &= \alpha(h')x = [[h_1, h_2], x] = [h_1, [h_2, x]] + [[h_1, x], h_2] = \alpha(h_2)[h_1, x] + \alpha(h_1)[x, h_2] \\ &= \alpha(h_2)\alpha(h_1)x - \alpha(h_1)\alpha(h_2)x = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

luego

$$\alpha(h') = 0 \quad (6.39)$$

y las raíces se anulan sobre el álgebra derivada. Entonces, para todo  $h \in \mathfrak{h}$ ,

$$K(h, h') = 0 \quad (6.40)$$

Como la forma de Killing es no degenerada,  $h' = 0$  y  $\mathfrak{h}' = 0$  por lo que  $\mathfrak{h}$  es abeliana.

**Proposición 6.10** *El conjunto de raíces es un sistema de generadores del espacio dual  $\mathfrak{h}^*$*

---

Si no es así, existe  $h'$  tal que  $\alpha(h') = 0$  para todo  $\alpha$ . Lo que implica según hemos visto antes, que  $h' = 0$ . Luego el sistema de raíces es un sistema de generadores de  $\mathfrak{h}^*$ . Es decir, al menos hay  $l$  raíces independientes donde  $l$  es la dimensión de  $\mathfrak{h}$ .

---

**Proposición 6.11** *Si  $\alpha$  es una raíz, entonces  $-\alpha$  también lo es*

---

Si  $\alpha \in \Delta$  pero  $-\alpha$  no es una raíz, entonces  $\mathfrak{g}_\alpha$  es ortogonal a cualquier otro subespacio  $\mathfrak{g}_\beta$  (y también a  $\mathfrak{h}$ ). Luego la forma de Killing sería degenerada. Además  $\mathfrak{g}_\alpha$  y  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  son espacios duales respecto a la forma de Killing.

---

Como la forma de Killing es no degenerada en  $\mathfrak{h}$ , es posible definir un “producto interior” (una forma bilineal simétrica no degenerada) en  $\mathfrak{h}$  y en  $\mathfrak{h}^*$ . como hemos visto,

$$\langle h, h' \rangle = K(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}(\alpha)) \alpha(h) \alpha(h'), \quad h, h' \in \mathfrak{h} \quad (6.41)$$

Utilizando el teorema de Riesz-Fréchet, dado  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  existe un único  $h_\lambda \in \mathfrak{h}$  tal que

$$\lambda(h) = \langle h_\lambda, h \rangle, \quad h \in \mathfrak{h}^* \quad (6.42)$$

y por tanto

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \langle h_\lambda, h_\mu \rangle = \lambda(h_\mu) = \mu(h_\lambda) \quad (6.43)$$

**Proposición 6.12** *En la producto interior definido anteriormente en  $\mathfrak{h}^*$ , el producto de una raíz por sí misma es distinto de cero:*

$$\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0, \quad \alpha \in \Delta \quad (6.44)$$

La demostración se puede ver, por ejemplo, en [5].

---

**Proposición 6.13** *Si  $\alpha \in \Delta$*

$$\dim \mathfrak{g}(\alpha) = 1 \quad (6.45)$$

*Además, si  $\alpha \in \Delta$  y  $k\alpha \in \Delta$ , con  $k \in \mathbf{Z}$ , entonces  $k = \pm 1$ .*

---

Sea

$$\mathfrak{R}_\alpha = \mathbf{K}e_\alpha + \mathbf{K}h_\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_{-k\alpha} \quad (6.46)$$

donde si  $k\alpha \in \Delta$ ,  $\mathfrak{g}_{k\alpha}$  es el subespacio raíz correspondiente y en caso contrario es 0. El subespacio  $\mathfrak{R}_\alpha$  es invariante bajo  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ . Si restringimos  $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$  a  $\mathfrak{R}_\alpha$ , para  $h_\alpha$ ,  $\alpha(h_\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$ , se tiene

$$\text{tr ad}_{h_\alpha}^{\mathfrak{R}} = \langle \alpha, \alpha \rangle (1 - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} - 2 \dim \mathfrak{g}_{-2\alpha} - \dots - k \dim \mathfrak{g}_{-k\alpha} - \dots) \quad (6.47)$$

$\mathfrak{R}_\alpha$  es también invariante bajo  $\text{ad}_{e_\alpha}$  y  $\text{ad}_{e_{-\alpha}}$ . Entonces, como  $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ , se tiene

$$\text{ad}_{h_\alpha}^{\mathfrak{R}} = [\text{ad}_{e_\alpha}^{\mathfrak{R}}, \text{ad}_{e_{-\alpha}}^{\mathfrak{R}}] \quad (6.48)$$

y por lo tanto,  $\text{tr ad}_{h_\alpha}^{\mathfrak{R}} = 0$ . Como  $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$  se tiene que  $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$  y  $\dim \mathfrak{g}_{-k\alpha} = 0$ , para  $k = 2, 3, \dots$ . De forma similar se prueba para  $\alpha$ .

---

Para terminar de estudiar la estructura de las álgebras semisimples y los sistemas de raíces, necesitamos algunos conceptos relacionados con el sistema de pesos de una representación. En primer lugar, aunque volveremos a ello más adelante, estudiamos las representaciones de dimensión finita de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .

### 6.3. Representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$

Sea  $\{h, e, f\}$  un base de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  con las relaciones de conmutación

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h \quad (6.49)$$

y sea  $\pi$  una representación de dimensión finita en un espacio  $V$ . Sean  $H = \pi(h)$ ,  $E = \pi(e)$ ,  $F = \pi(f)$ . Los endomorfismos  $\{H, E, F\}$  verifican las mismas relaciones de conmutación anteriores. Sea  $j$  un autovalor de  $H$  y  $v \in V$  un autovector

$$Hv = jv \quad (6.50)$$

El vector  $Ev$  es también un autovector de  $H$  (si no es cero):

$$HEv = (EH + 2E)v = (j + 2)Ev \quad (6.51)$$

De esta manera obtenemos una sucesión de vectores en  $V$  linealmente independientes (porque corresponden a distintos autovalores de  $H$ ) y que necesariamente debe acabar, pues  $V$  es de dimensión finita. Es decir, existe  $p$  tal que

$$E^p v \neq 0, \quad E^{p+1} v = 0 \quad (6.52)$$

Sea  $v' = E^p v$ . Entonces,

$$Hv' = j'v', \quad Ev' = 0, \quad j' = j + 2p \quad (6.53)$$

Eliminemos la notación con primas: existe  $v \in V$  tal que

$$Hv = jv, \quad Ev = 0 \quad (6.54)$$

Aplicamos ahora el operador  $F$ . Tenemos una sucesión de autovectores  $v_0 = v, v_1 = Fv, \dots, v_q = F^m v$  que termina:  $F^{m+1} v = 0$ , con autovalores  $j, j - 2, \dots, j - 2m$

Consideremos el subespacio de  $V$ ,  $W_m$ , generado por los vectores:

$$\{v_0, v_1, \dots, v_m\} \quad (6.55)$$

Este espacio es invariante bajo  $H, E, F$  e irreducible. Veamos la acción de  $E$  (las de  $H$  y  $F$  son evidentes por construcción). Para el vector  $v_1$  se tiene

$$Ev_1 = EFv_0 = (FE + H)v = jv_0 \quad (6.56)$$

La expresión general es

$$Ev_k = (kj - k(k-1))v_{k-1} \quad (6.57)$$

Probémoslo por inducción. Para  $k = 1$  es correcta como se ha visto. Para  $k + 1$ , supuesta cierta para  $k$ , se tiene:

$$\begin{aligned} Ev_{k+1} &= EFv_k = (FE + H)v_k = F((kj - k(k-1))v_{k-1}) + (j - 2k)v_j \\ &= (kj - k(k-1))Fv_{k-1} + (j - 2k)v_k = (kj - k(k-1) + j - 2k)v_k \\ &= ((k+1)j - (k+1)k)v_k \end{aligned} \quad (6.58)$$

como queríamos probar. El espacio  $W_m$  es entonces invariante. La traza del operador  $H$  (siendo el conmutador de otros dos operadores) debe ser cero. Por tanto,

$$j + (j-2) + \dots + (j-2m) = j(m+1) - \frac{1}{2}2m(m+1) = j(m+1) - m(m+1) = 0 \quad (6.59)$$

luego

$$j = m \quad (6.60)$$

y  $j$  es un entero, así como el resto de los autovalores de  $H$ . Probemos finalmente que el subespacio  $W_j$  es irreducible. Si  $\tilde{W} \subset W_j$  es un subespacio que contiene a un vector de la forma  $w = c_i v_i + \cdots + c_j v_j$ , con  $c_i \neq 0$  y es invariante bajo  $H, E, F$  entonces contiene a todos los vectores  $x_i$  y es igual a  $W_j$ . En efecto, aplicando  $F$  un número suficiente de veces, se obtiene:

$$\frac{1}{c_i} F^{j-i} w = v_j \quad (6.61)$$

y por invariancia contiene a los demás.

Finalmente se tiene el siguiente resultado

**Proposición 6.14** *Para cada entero  $j = 0, 1, 2, \dots$  existe una única (salvo isomorfismo) representación irreducible de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  de dimensión  $j + 1$ , y la acción de los operadores  $\pi(h)$ ,  $\pi(e)$  y  $\pi(f)$  viene dada por las expresiones estudiadas anteriormente.*

Si  $\pm\alpha$  son las raíces de esta álgebra, tenemos

$$\alpha(h) = 2 \quad (6.62)$$

en la base elegida. Sea  $\Lambda$  el peso correspondiente al autovalor  $j$ :

$$\Lambda(h) = j \quad (6.63)$$

Como la dimensión de  $\mathfrak{h}^*$  es 1, se tiene

$$\Lambda = k\alpha, \quad \Lambda(h) = j = k\alpha(h) = 2k \quad (6.64)$$

es decir

$$\frac{2\langle \Lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2k = j \quad (6.65)$$

que es un entero no negativo.

## 6.4. Propiedades de las raíces de un álgebra semisimple

Sea  $(V, \pi)$  una representación de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  y  $\Lambda$  su sistema de pesos respecto a una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ ,  $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$  (un sistema finito). Si  $\alpha \in \Delta$ , el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$ , sea  $h_\alpha \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha(h) = \langle h, h_\alpha \rangle$ . Entonces, eligiendo  $e_{\pm\alpha}$  adecuadamente, se tiene

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha \quad (6.66)$$

El subespacio generado por  $\{h_\alpha, e_\alpha, e_{-\alpha}\}$  es una subálgebra tridimensional de  $\mathfrak{g}$ .

Las proposiciones que siguen a continuación se refieren a una representación arbitraria de dimensión finita. Las usaremos posteriormente aplicadas al caso de la representación adjunta.

**Proposición 6.15**  *$V$  es un módulo para  $\mathfrak{h}$ . Si  $V_\lambda$  es un  $\mathfrak{h}$ -módulo de peso  $\lambda$ , entonces*

$$h|_{V_\lambda} = \lambda(h)1_{V_\lambda} \quad (6.67)$$

La demostración se basa en que  $\pi(\mathfrak{h})$  es un álgebra de operadores semisimples que conmutan, por lo que se pueden diagonalizar simultáneamente.

**Proposición 6.16** *Consideremos el álgebra*

$$\mathfrak{g}^{(\alpha)} = \mathfrak{h} + \mathbf{K}e_\alpha + \mathbf{K}e_{-\alpha} \quad (6.68)$$

El espacio  $V$  es un módulo para  $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ . Si  $W$  es un  $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ -submódulo irreducible de  $V$ , podemos encontrar una base  $\{v_0, v_1, \dots, v_j\}$  tal que:

$$\pi(h)v_k = (\lambda - k\alpha)(h)v_k, \quad k = 0, 1, \dots, j \quad (6.69)$$

$$\pi(e_{-\alpha})v_k = v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, j-1, \quad \pi(e_{-\alpha})v_j = 0 \quad (6.70)$$

$$\pi(e_{\alpha})v_k = \frac{1}{2}k(j-k+1)\langle\alpha, \alpha\rangle v_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, j, \quad \pi(e_{\alpha})v_0 = 0 \quad (6.71)$$

$j$  es un peso que verifica

$$\frac{2\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = j \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \quad (6.72)$$

La demostración se basa en un uso adecuado de los resultados obtenidos para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .

**Proposición 6.17** Si  $v \in V$  es distinto de cero, tal que  $\pi(h)v = \lambda(h)v$ ,  $\pi(e_{\alpha})v = 0$ , entonces  $v$  genera un  $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ -módulo irreducible.

**Proposición 6.18** Sea  $\lambda$  un peso de la representación  $(V, \pi)$ . Consideremos el conjunto de pesos que tiene la forma  $\lambda + k\alpha$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Este conjunto está formado por:

$$\lambda - q\alpha, \lambda - (q-1)\alpha, \dots, \lambda + (p-1)\alpha, \lambda + p\alpha, \quad p, q \geq 0 \quad (6.73)$$

Se verifica

$$\frac{2\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = q - p \quad (6.74)$$

**Proposición 6.19** Sea  $v \in V$  distinto de cero, tal que

$$\pi(h)v = (\lambda + p\alpha)(h)v \quad (6.75)$$

Entonces  $v$  genera un  $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ -módulo irreducible. Los pesos del conjunto definido anteriormente son pesos de  $\mathfrak{h}$  en este submódulo. En particular, si  $\lambda$  es un peso, el vector definido por

$$\lambda' = \lambda - \frac{2\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha \quad (6.76)$$

es también un peso y las dimensiones de los espacios peso asociados a  $\lambda$  y  $\lambda'$  son iguales.

La serie de pesos

$$\lambda - q\alpha, \lambda - (q-1)\alpha, \dots, \lambda, \dots, \lambda + p\alpha \quad (6.77)$$

se llama una  $\alpha$ -serie.

Consecuencia inmediata de estos resultados es la proposición siguiente.

**Proposición 6.20** 1. Los números  $N_{\alpha, \beta}$  que aparecen en las relaciones de conmutación de los vectores raíces, son distintos de cero si  $\alpha + \beta$  es una raíz.

2. Si  $\alpha \in \Delta$  y  $k\alpha \in \Delta$ , con  $k \in \mathbf{K}$ , entonces  $k = \pm 1$ .

3. La  $\alpha$ -serie que contiene a una raíz  $\beta$ , contiene cuatro raíces como máximo, es decir

$$\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \quad (6.78)$$

Si  $\beta = \pm\alpha$ , la  $\alpha$ -serie solo contiene dos raíces:  $\pm\alpha$ . Sea  $\beta \neq \pm\alpha$  y supongamos que la  $\alpha$ -serie que pasa por  $\beta$  tiene cinco raíces que se pueden escribir como  $\beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha$  (cambiando de nombre a  $\beta$  si es preciso). Consideremos ahora la  $\beta$ -serie que contiene a  $\beta + 2\alpha$ . Si sumamos  $\beta, \beta + \beta + 2\alpha = 2(\beta + \alpha)$  luego no es raíz. Si restamos  $\beta, 2\alpha$  tampoco es raíz. Luego esa serie solo contiene un elemento  $\beta + 2\alpha$ . Entonces  $p = q = 0$  (en la notación usada anteriormente) con lo que

$$\langle \beta + 2\alpha, \beta \rangle = 0 \quad (6.79)$$

El mismo argumento se puede emplear con  $\beta - 2\alpha$  y por tanto

$$\langle \beta - 2\alpha, \beta \rangle = 0 \quad (6.80)$$

Pero esto lleva

$$\langle \beta, \beta \rangle = 0 \quad (6.81)$$

lo que no puede ser. Por lo tanto  $p + q + 1 \leq 4$  como máximo, es decir  $p + q \leq 3$ .

## 6.5. Sistemas fundamentales de raíces y $\Pi$ -sistemas

Los sistemas de raíces se pueden estudiar como un conjunto de vectores en un espacio euclidiano con determinadas propiedades. Por ello es necesario en lo que sigue distinguir diferentes situaciones sobre  $\mathbf{K}$  (que será siempre en estas notas  $\mathbf{C}$ ),  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$ . Así,  $\mathfrak{h}^*$  es el dual de  $\mathfrak{h}$  sobre  $\mathbf{K}$  y  $\mathfrak{h}_0^*$  es la envolvente lineal sobre  $\mathbf{Q}$  de  $\Delta$ , es decir, el dual de  $\mathfrak{h}_0 = \text{lin}_{\mathbf{Q}}\{h_\alpha\}$  con  $\alpha \in \Delta$ .

**Proposición 6.21** *Se tienen las siguientes propiedades*

1.  $\dim_{\mathbf{Q}} \mathfrak{h}_0^* = \dim_{\mathbf{K}} \mathfrak{h}^* = \text{rango } \mathfrak{g}$
2. *Todos los pesos están en  $\mathfrak{h}_0^*$*
3.  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{h}_0^*}$  *toma valores en  $\mathbf{Q}$  y es definida positiva.*

Para demostrar la primera parte basta probar que si  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  es una base de  $\mathfrak{h}^*$  (sobre  $\mathbf{K}$ ), cualquier raíz se puede escribir como una combinación de  $\alpha_i$  con coeficientes racionales. Como  $\beta = \sum_{i=1}^l c_i \alpha_i$  con  $c_i \in \mathbf{K}$ , tenemos:

$$\frac{2\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \sum_{j=1}^l \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} c_j \quad (6.82)$$

que es un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros. El determinante es distinto de cero al ser  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  no degenerada

$$\det \left( \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right) = \frac{2^l}{\prod_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \det (\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle) \neq 0 \quad (6.83)$$

Luego las constantes  $c_i$  son racionales.

El segundo enunciado es ahora inmediato. Cualquier peso  $\lambda$  verifica

$$\frac{2\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \in \mathbf{Z} \quad (6.84)$$

luego es una combinación de las raíces anteriores, con coeficientes racionales y está en  $\mathfrak{h}_0^*$ .

Veamos ahora la tercera propiedad. Si  $h, h' \in \mathfrak{h}$ , se tiene

$$\langle h, h' \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\alpha(h') \quad (6.85)$$

En el dual se tiene

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h_\lambda)\alpha(h_\mu) = \sum_{\alpha \in \Delta} \langle \alpha, \lambda \rangle \langle \alpha, \mu \rangle \quad (6.86)$$

En particular si  $\beta$  es una raíz

$$\langle \beta, \beta \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} \langle \alpha, \beta \rangle^2 \quad (6.87)$$

Si  $p_{\alpha\beta}$  y  $q_{\alpha\beta}$  son los extremos de la  $\beta$ -serie que pasa por  $\alpha$ , tenemos:

$$\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = q_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta} \quad (6.88)$$

y por lo tanto

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2} \langle \beta, \beta \rangle (q_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta}) \quad (6.89)$$

y sustituyendo en la expresión de  $\langle \beta, \beta \rangle$ :

$$\langle \beta, \beta \rangle = \frac{1}{4} \langle \beta, \beta \rangle^2 \sum_{\alpha \in \Delta} (q_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta})^2 \quad (6.90)$$

es decir,

$$\langle \beta, \beta \rangle = \frac{4}{\sum_{\alpha \in \Delta} (q_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta})^2} \quad (6.91)$$

que, obviamente, está en  $\mathbf{Q}$ . Se sigue que  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{Q}$ . Todos los productos de raíces son racionales. En cuanto a los pesos, puesto que son combinaciones racionales de raíces se tiene el mismo resultado. Finalmente en lo que se refiere a ser definido positivo, ocurre lo siguiente. Sea  $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ ,  $\lambda \neq 0$ .

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} \langle \alpha, \lambda \rangle^2 \quad (6.92)$$

el resultado es cero si y solo si  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$  para todo  $\alpha \in \Delta$  (porque son racionales), lo que no puede ocurrir al ser la forma no degenerada y generar  $\Delta$  todo  $\mathfrak{h}_0^*$ . Por tanto la forma es definida positiva y tenemos un producto escalar.

---

El siguiente concepto es el de raíz simple. Para definirlo daremos primero una relación de orden en el retículo de pesos ( $\Lambda$ ). Sea  $\{h_1, \dots, h_n\}$  una base de  $\mathfrak{h}_0$  (y por supuesto de  $\mathfrak{h}$ ). Dados dos pesos  $\lambda_1, \lambda_2$ , se dice que  $\lambda_1 > \lambda_2$  si existe  $k$  con  $0 \leq k \leq l-1$ , tal que

$$\lambda(h_1) = \lambda_2(h_1), \dots, \lambda(h_k) = \lambda_2(h_k), \lambda(h_{k+1}) > \lambda_2(h_{k+1}) \quad (6.93)$$

Si  $\lambda > 0$  se dice que es un peso positivo. La relación de orden es lineal en el retículo (sobre  $\mathbf{Q}$ ).

Este orden permite separar  $\Delta$  en dos conjuntos, las raíces positivas y las negativas:

$$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-, \quad \Delta^+ \cap \Delta^- = \emptyset \quad (6.94)$$

**Definición 6.3** Sea  $\alpha \in \Delta^+$ . Se dice que  $\alpha$  es una raíz simple si no puede escribirse como la suma de dos raíces positivas.

Como hemos dicho antes, los sistemas de raíces se interpretarán como ciertos conjuntos de vectores en un espacio euclidiano. Un sistema ortogonal en  $\mathfrak{h}_0^*$  lo es en el sentido usual respecto al producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Un sistema ortogonal es linealmente independiente y si es maximal es una base de  $\mathfrak{h}_0^*$ . Como necesitaremos utilizar raíces cuadradas, hay que pasar de  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ . El espacio  $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$  es la extensión de  $\mathfrak{h}_0^*$  cuando se extiende  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ . Se extiende también el producto escalar (nótese que en  $\mathfrak{h}_0^*$  el producto interior definido anteriormente es definido positivo), con lo que  $\mathfrak{h}_0^*$  es un subconjunto de  $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$  que es un espacio euclidiano.

**Proposición 6.22** Sean  $\alpha, \beta$  raíces simples distintas. Entonces

1.

$$\alpha - \beta \notin \Delta \quad (6.95)$$

2.

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0 \Rightarrow \widehat{\alpha\beta} \geq \frac{\pi}{2} \quad (6.96)$$

Veamos que  $\alpha - \beta$  no puede ser una raíz positiva. Si lo fuera, digamos  $\gamma$ , entonces  $\alpha - \beta = \gamma$  y  $\alpha = \beta + \gamma$  no sería simple. Por razones similares no puede ser una raíz negativa. Para demostrar la segunda parte, consideremos la  $\alpha$ -serie que pasa por  $\beta$ . Puesto que  $\alpha - \beta$  no es raíz, entonces  $q = 0$ . Como

$$\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = q - p = -p < 0 \quad (6.97)$$

y se sigue el resultado pues  $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ .

**Proposición 6.23** Sea  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  el conjunto de raíces simples correspondientes a un cierto orden fijado. Entonces:

1.  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  es una base de  $\mathfrak{h}_0^*$  (sobre  $\mathbf{Q}$ ).

2.  $\beta \in \Delta^+$ ,  $\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_l\alpha_l$ ,  $c_i \in \mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$ .

Demostraremos en primer lugar que son linealmente independientes. Supongamos que una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las demás, por ejemplo  $\alpha_1$ . Separamos esta combinación lineal en dos partes, la que lleva coeficientes positivos y la que los lleva negativo, con lo que

$$\alpha_1 = \beta - \gamma \quad (6.98)$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  son combinaciones lineales de raíces simples con coeficientes positivos. Cada raíz simple aparece en  $\beta$  o en  $\gamma$  o en ninguna de las dos (pero no en ambas). Por tanto, como todos los productos de raíces simples distintas son negativos o cero, se tiene

$$\langle \beta, \gamma \rangle \leq 0 \quad (6.99)$$

con que

$$\langle \alpha_1, \beta \rangle = \langle \beta - \gamma, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle - \langle \gamma, \beta \rangle > 0 \quad (6.100)$$

pero  $\langle \alpha_1, \beta \rangle \leq 0$  lo que es contradictorio con lo anterior. Las raíces simples son linealmente independientes.

Supongamos ahora que existe una raíz positiva (no simple)  $\beta$  tal que toda raíz positiva menor que ella se puede poner como combinación lineal con coeficientes no negativos de las raíces simples. Como  $\beta$  no es simple, existen dos raíces positivas cuya suma es  $\beta$ . Cada una de ellas es menor que  $\beta$  luego se pueden poner como suma de raíces simples con coeficientes no negativos, y por lo tanto  $\beta$ , que es su suma, también. Si  $\beta$  es negativa se reduce a este caso tomando  $-\beta$  que es positiva.

Es decir, las raíces positivas se obtienen como combinaciones de las raíces simples (que forman una base) con coeficientes enteros positivos (o cero). Los sistemas fundamentales (que coinciden con las raíces simples) se definen entonces de la forma siguiente.

**Definición 6.4** Sea  $\Pi \subset \Delta$ . Se dice que  $\Pi$  es un sistema fundamental de raíces si

1.  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  es una base de  $\mathfrak{h}_0^*$ .
2. Si  $\beta \in \Delta$ , entonces  $\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_l\alpha_l$  con  $c_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, l$  o bien  $c_i \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, l$ .

Es evidente que todo sistema de raíces simples es un sistema fundamental de raíces. Lo contrario es también cierto. Todo sistema fundamental es un sistema de raíces simples para un cierto orden (una elemento de  $\mathfrak{h}_0^*$  es positivo si escrito en la base del sistema fundamental elegido, el primer coeficiente no cero es positivo).

Un elemento básico en el estudio de las álgebras semisimples es la matriz de Cartan, que reúne toda la información necesaria para definir el álgebra. Definimos lo que es un  $\Pi$ -sistema en un espacio euclidiano, que será equivalente en  $\mathfrak{h}_0^*$  a un sistema fundamental (y a un sistema de raíces simples).

**Definición 6.5** Sea  $\mathbf{R}^l$  con el producto escalar usual. El conjunto de vectores de  $\mathbf{R}^l$ ,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  es un  $\Pi$ -sistema si

1.  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  son l.i.
2.  $c_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \in \mathbf{Z}$ ,  $c_{ij} \leq 0$ ,  $i \neq j$

La matriz  $c_{ij}$  se llama la **matriz de Cartan** del sistema.

Un sistema de raíces simples (o un sistema fundamental de raíces) de un álgebra semisimple es un  $\Pi$ -sistema (en  $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ ) y por lo tanto se le puede asociar una matriz de Cartan.

A partir de la matriz de Cartan uno puede construir el sistema completo de raíces. Además se tiene:

**Proposición 6.24** Sea  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un sistema fundamental de raíces de un álgebra semisimple  $\mathfrak{g}$ . Entonces  $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_l}, e_{-\alpha_1}, \dots, e_{-\alpha_l}$  generan (como álgebra)  $\mathfrak{g}$ .

Para poder clasificar los  $\Pi$ -sistemas es necesario introducir el concepto de sistemas no descomponibles

**Definición 6.6** Se dice que un  $\Pi$ -sistema es *indescomponible* si no se puede escribir como la unión de dos conjuntos no vacíos,  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , tales que si  $\alpha_1 \in \Pi_1$  y  $\alpha_2 \in \Pi_2$  entonces  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ .

Los sistemas indescomponibles están asociados a álgebras simples.

**Proposición 6.25** Sea  $\Pi$  un sistema fundamental de raíces de un álgebra  $\mathfrak{g}$ .

$$\Pi \text{ indescomponible} \Leftrightarrow \mathfrak{g} \text{ simple} \tag{6.101}$$

## 6.6. Clasificación de $\Pi$ -sistemas

En este momento uno puede olvidarse de las álgebras semisimples y estudiar sistemas de vectores (con ciertas propiedades) en un espacio euclidiano. Cuando hablemos ahora de raíces hay que entenderlas como vectores de  $\mathbf{R}^l$ .

**Definición 6.7** Sea  $\Delta \subset \mathbf{R}^l$  con el producto escalar usual. Se dice que  $\Delta$  es un sistema de raíces ( $\Delta$  es un sistema de generadores de  $\mathbf{R}^l$ ) si

1. 
$$\forall \alpha \in \Delta, \alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{R}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\} \tag{6.102}$$

2.

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \in \mathbf{Z}, \quad \alpha, \beta \in \Delta \tag{6.103}$$

$$\beta - k\alpha \in \Delta, \quad 0 \leq k \leq \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \tag{6.104}$$

Los sistemas que estamos estudiando son sistemas de raíces según esta definición. Veamos cuales son sus propiedades más importantes.

Diremos que dos  $\Pi$ -sistemas son equivalentes si sus matrices de Cartan coinciden. Sea  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un  $\Pi$ -sistema. Entonces

$$c_{ij}c_{ji} = \frac{4\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle} = 4\cos^2 \widehat{\alpha_i\alpha_j} \tag{6.105}$$

Como  $c_{ij}$  es un entero y el coseno está acotado, solo tenemos cuatro posibilidades (si  $i = j$ ,  $c_{ij} = 2$ ).

$$c_{ij}c_{ji} = 0, 1, 2, 3 \tag{6.106}$$

1.  $c_{ij}c_{ji} = 0$ . Entonces  $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 0$  y las raíces forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ , siendo  $c_{ij} = c_{ji} = 0$ .
2.  $c_{ij}c_{ji} = 1$ . La única posibilidad es  $c_{ij} = c_{ji} = -1$ . Las dos raíces tienen la misma longitud ( $\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle = \langle\alpha_j, \alpha_j\rangle$ ) y el ángulo que forman es  $\frac{\pi}{3}$ .
3.  $c_{ij}c_{ji} = 2$ . La única posibilidad es  $c_{ij} = -2$ ,  $c_{ji} = -1$ . Las raíces tienen distinta longitud ( $\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle = 2\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle$ ) y el ángulo que forman es  $\frac{3\pi}{4}$ .
4.  $c_{ij}c_{ji} = 3$ . De nuevo solo hay una única posibilidad:  $c_{ij} = -3$ ,  $c_{ji} = -1$ . Las raíces tienen distinta longitud ( $\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle = 3\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle$ ) y el ángulo que forman es  $\frac{5\pi}{6}$ .

Los diagramas de Dynkin-Coxeter son una forma de codificar la información contenida en la matriz de Cartan. Dado un  $\Pi$ -sistema consideramos un grafo que tiene tantos vértices como elementos tiene el  $\Pi$ -sistema y que están unidos por tantas líneas como el valor del número  $c_{ij}c_{ji}$ . Además una flecha se dirige al vértice que tiene la raíz de mayor longitud, en el caso en que sean de distinta longitud. Por tanto

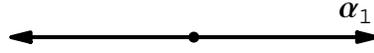


Dos vértices del diagrama  $\alpha, \beta$  están conectados si  $\langle\alpha, \beta\rangle \neq 0$ . Se dice que un subdiagrama  $D_1$  de un diagrama  $D$  es conexo si dados  $\alpha, \beta \in D_1$  existen elementos en  $D_1$ ,  $\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s = \beta$  tales que cada dos elementos consecutivos están conectados. Un diagrama es conexo si y solo si  $\Pi$  es indescomponible. Dos diagramas son equivalentes si y solo si los  $\Pi$ -sistemas correspondientes son equivalentes.

Veamos las propiedades de los diagramas de Dynkin y como se pueden usar para clasificar los  $\Pi$ -sistemas y como consecuencia las álgebras de Lie simples.

**Proposición 6.26** Sea  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un  $\Pi$ -sistema. El número de pares de vértices conectados entre sí es menor o igual que  $l - 1$ .

**Proposición 6.27** Sea  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un  $\Pi$ -sistema y  $D(\Pi)$  su diagrama de Dynkin correspondiente. Entonces

Figura 6.1: Raíces de  $A_1$ 

1.  $D(\Pi)$  no tiene ciclos, es decir, no existen  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} \in \Pi$  tales que

$$\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \rangle \neq 0, \quad \langle \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3} \rangle \neq 0, \quad \dots, \quad \langle \alpha_{i_k}, \alpha_{i_1} \rangle \neq 0 \quad (6.107)$$

2. Si  $D_1 \subset D(\Pi)$ , con  $D_1$  conexo, si  $\alpha \in D(\Pi)$ ,  $\alpha \notin D_1$ , entonces existe como máximo un elemento  $\beta \in D_1$  tal que  $\alpha$  y  $\beta$  están conectados.
3. Como máximo, en cada vértice hay tres segmentos.
4. Si  $\Pi$  es indescomponible y  $l \geq 3$ ,  $D(\Pi)$  no tiene ningún subconjunto de la clase 3.

Una cadena homogénea conecta vértices para los que  $c_{ij} = c_{ji}$ , es decir raíces de la misma longitud. Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 6.28** Sea  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_j\}$  un  $\Pi$ -sistema y  $C = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  una cadena homogénea. Entonces  $\Pi/C = \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_j\}$  con  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_k$  es también un  $\Pi$ -sistema y su diagrama de Dynkin se obtiene del de  $\Pi$ : entre elementos  $\beta_r, \beta_s$  como en  $\Pi$ . Entre  $\alpha$  y un elemento  $\beta_r$  como entre  $\beta_r$  y el único  $\alpha_t$  con el que  $\beta_r$  puede estar conectado.

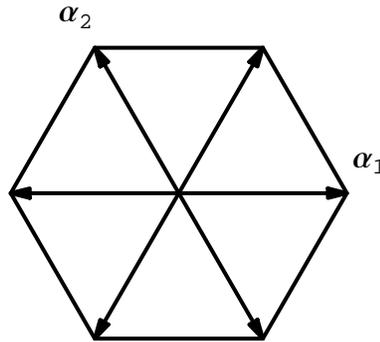
Como consecuencia de estas propiedades es ahora posible construir los únicos diagramas posibles que aparecen en la Tabla I. Hay cuatro series,  $A_l, B_l, C_l$  y  $D_l$ , las series clásicas, y cinco álgebras excepcionales,  $G_2, F_4, E_6, E_7$  y  $E_8$ . Los diagramas de Dynkin homogéneos corresponden a  $A_l, D_l, E_6, E_7$ , y  $E_8$ . Los otros tienen raíces de dos longitudes distintas. El único diagrama con tres segmentos que unen dos vértices es  $G_2$ . La serie  $A_l$  comienza en  $l = 1$ , la  $B_l$  en  $l = 2$ , la  $C_l$  en  $l = 3$  y la  $D_l$  en  $l = 4$  (como es fácil de ver, los casos suprimidos o bien son isomorfos a otros o no son simples). Veamos como son los  $\Pi$ -sistemas correspondientes.

1.  $A_l$ . En  $\mathbf{R}^{l+1}$ , si  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l+1}\}$  es una base ortonormal, las raíces simples son:

$$\{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_l = \epsilon_l - \epsilon_{l+1}\} \quad (6.108)$$

Los productos escalares de las raíces simples son:

$$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2, \quad \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = -1, \quad \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \quad j \neq i-1, i, i+1 \quad (6.109)$$

Figura 6.2: Raíces de  $A_2$

El conjunto de todas las raíces (tienen todas la misma longitud y hay  $l(l+1)$ ) es

$$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad i, j = 1, \dots, l, \quad i \neq j \quad (6.110)$$

Las raíces positivas son:

$$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad i \leq j \quad (6.111)$$

y su suma es,

$$\epsilon_i - \epsilon_j = \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k \quad (6.112)$$

$$\sum_{i < j} (\epsilon_i - \epsilon_j) = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k = \sum_{k=1}^l \alpha_k \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{l+1} 1 \right) = \sum_{k=1}^l k(l+1-k) \alpha_k \quad (6.113)$$

Por ejemplo, para  $l = 1$  solo hay una raíz simple, y el conjunto de todas las raíces aparece en la figura 6.1. La matriz de Cartan es simplemente 2. Para  $l = 2$ , tenemos dos raíces simples que forman un ángulo de  $5\pi/6$  y aparecen en la figura 6.2. La matriz de Cartan es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.114)$$

En general, para rango  $l$ , la matriz de Cartan es:

$$\mathcal{A}_l = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.115)$$

El determinante de la matriz de Cartan se puede calcular fácilmente y resulta ser:

$$\det \mathcal{A}_l = 2 \det \mathcal{A}_{l-1} - \det \mathcal{A}_{l-2} \quad (6.116)$$

Como  $\det \mathcal{A}_1 = 2$  y  $\det \mathcal{A}_2 = 3$ , se tiene:

$$\det \mathcal{A}_l = l + 1 \quad (6.117)$$

2.  $B_l, C_l, D_l$ . En  $\mathbf{R}^l$ , sea  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_l\}$  una base ortonormal. Las raíces simples son:

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{l-1} = \epsilon_{l-1} - \epsilon_l \quad (6.118)$$

La última raíz depende del álgebra

- a)  $B_l$ :  $\alpha_l = \epsilon_l$
- b)  $C_l$ :  $\alpha_l = 2\epsilon_l$
- c)  $D_l$ :  $\alpha_l = \epsilon_{l-1} + \epsilon_l$

En el caso  $B_l$ , todas las raíces ( $2l^2$ ) son

$$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \quad i \neq j, \quad \pm \epsilon_i \quad (6.119)$$

las raíces positivas son

$$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad i < j, \quad \epsilon_i \quad (6.120)$$



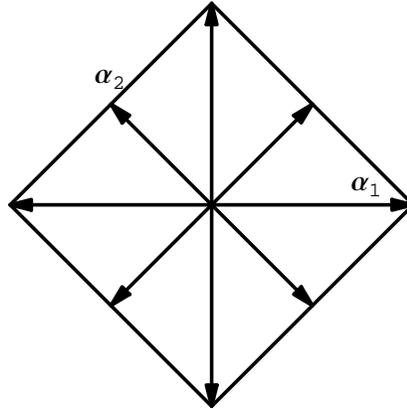


Figura 6.3: Raíces de  $B_2$

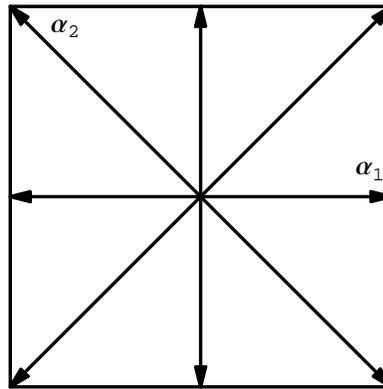


Figura 6.4: Raíces de  $C_2$

La matriz de Cartan es:

$$D_l = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 & \\ & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.131)$$

Su determinante es 2.

3.  $G_2$ . En  $\mathbf{R}^3$  las raíces simples son  $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ ,  $\alpha_2 = \epsilon_2 + \epsilon_3 - 2\epsilon_1$ . La primera raíz es larga y la segunda corta (la razón de longitudes es  $\sqrt{3}$ ) formando un ángulo de  $5\pi/6$ .

El sistema tiene 12 raíces:

$$\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), i < j \quad \pm(2\epsilon_i - \epsilon_j - \epsilon_k), i \neq j \neq k \neq i \quad (6.132)$$

y su diagrama aparece en la figura 6.5. La matriz de Cartan es

$$\mathcal{G}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.133)$$

4.  $F_4$ . El número de raíces es 48. En  $\mathbf{R}^4$  las raíces simples son:

$$\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_3 - \epsilon_4, \epsilon_4, \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \quad (6.134)$$

(dos largas y dos cortas) y su matriz de Cartan es

$$\mathcal{F}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.135)$$

5.  $E_6$ . Tiene 72 raíces, que se pueden representar en  $\mathbf{R}^6$ . Todas tienen la misma longitud. Su matriz de Cartan es:

$$\mathcal{E}_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.136)$$

6.  $E_7$ . Tiene 126 raíces, también realizables en  $\mathbf{R}^7$  y de la misma longitud. Su matriz de Cartan es

$$\mathcal{E}_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.137)$$

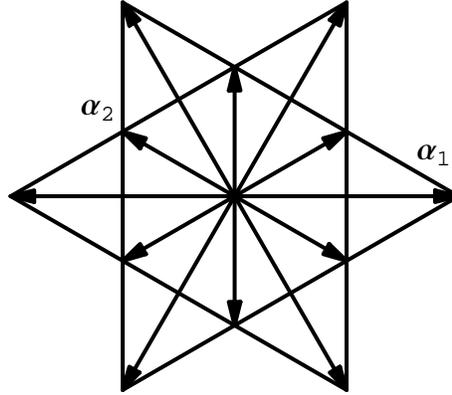
7.  $E_8$ . Las 240 raíces de  $E_8$  se pueden escribir en  $\mathbf{R}^8$  y son de la misma longitud. Su matriz de Cartan es

$$\mathcal{E}_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.138)$$

## 6.7. Clasificación de álgebras de Lie simples

Una vez analizados los posibles diagramas de raíces, la clasificación de álgebras de Lie simples es muy sencilla. Basta probar que dos álgebras de Lie son isomorfas si sus correspondientes  $\Pi$ -sistemas son equivalentes.

Para ello conviene fijarse primeramente en el siguiente resultado.

Figura 6.5: Raíces de  $G_2$ 

**Proposición 6.29** Sea  $\Pi$  un  $\Pi$ -sistema de un sistema de raíces  $\Delta$ . Si  $\beta \in \Delta^+$  pero  $\beta \notin \Pi$ , entonces existe  $\alpha \in \Pi$  y  $\gamma \in \Delta^+$  tal que  $\beta = \gamma + \alpha$ . La  $\alpha$ -serie que contiene a  $\beta$  está en  $\Delta^+$ .

Ahora extenderemos las equivalencias entre  $\Pi$ -sistemas a isomorfismos entre los duales (sobre  $\mathbf{Q}$ ) de las subálgebras de Cartan.

**Proposición 6.30** Sea  $\mathfrak{g}$  semisimple,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\Delta$  el correspondiente sistema de raíces,  $\Delta \subset \mathfrak{h}_0^*$ ,  $\Pi \subset \Delta$  un sistema fundamental. Sean  $\tilde{\mathfrak{g}}$ ,  $\tilde{\mathfrak{h}}$ ,  $\tilde{\Delta}$  y  $\tilde{\Pi}$  los elementos correspondientes de otra álgebra semisimple  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Si  $\Pi$  y  $\tilde{\Pi}$  son equivalentes, existe un isomorfismo lineal  $\varphi : \mathfrak{h}_0^* \rightarrow \tilde{\mathfrak{h}}_0^*$  tal que

$$\varphi(\Delta) = \tilde{\Delta}, \quad \langle \varphi(\lambda), \varphi(\mu) \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle, \quad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}_0^* \quad (6.139)$$

Una vez construido el isomorfismo entre los duales de las subálgebras de Cartan correspondientes se estudian las constantes  $N_{\alpha, \beta}$ .

**Proposición 6.31** Se verifican las siguientes relaciones:

1. Si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{h}_0^*$  y son distintas de cero, entonces, si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , se tiene que

$$N_{\alpha, \beta} = N_{\beta, \gamma} = N_{\gamma, \alpha} \quad (6.140)$$

2. Si  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Delta$  con  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ , siendo  $\alpha + \beta \neq 0$ ,  $\alpha + \gamma \neq 0$ ,  $\alpha + \delta \neq 0$  se tiene:

$$N_{\alpha, \beta} N_{\gamma, \delta} + N_{\beta, \gamma} N_{\alpha, \delta} + N_{\gamma, \alpha} N_{\beta, \delta} = 0 \quad (6.141)$$

3. Sean  $\alpha, \beta \in \Delta$  con  $\alpha + \beta \in \Delta$ . Si  $\beta + i\alpha$  es la  $\alpha$ -serie de raíces que contiene a  $\beta$ , se tiene ( $-j \leq i \leq k$ ):

$$M_{\alpha, \beta} = N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = \frac{1}{2}(j+1)k \langle \alpha, \alpha \rangle \quad (6.142)$$

4. Es posible escoger  $e_\alpha$  en cada  $\mathfrak{g}(\alpha)$  tales que

- a)  $B(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$
- b)  $N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \Delta$

Con todos estos resultados se demuestran las siguientes proposiciones:

**Proposición 6.32** Sea  $\mathfrak{g}$  semisimple y  $\Pi$  un sistema fundamental de raíces. Si  $\tilde{\mathfrak{g}}$  es semisimple y  $\tilde{\Pi}$  es un sistema fundamental de raíces de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  que es equivalente a  $\Pi$ , entonces  $\mathfrak{g}$  y  $\tilde{\mathfrak{g}}$  son isomorfas.

**Proposición 6.33** Sea  $\mathfrak{g}$  semisimple,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan,  $\Delta \subset \mathfrak{h}_0^*$  un sistema de raíces. Sea  $\varphi$  una transformación lineal con  $\varphi(\Delta) \subset \Delta$ . Si se define  $\theta \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$  tal que

$$\varphi(\lambda)(\theta(h)) = \lambda(h), \quad \forall h \in \mathfrak{h}, \lambda \in \mathfrak{h}_0^* \quad (6.143)$$

entonces  $\theta$  se puede extender a un automorfismo de  $\mathfrak{g}$ .

## 6.8. Álgebras de Lie simples clásicas

Sea  $\mathbf{K}$  un cuerpo algebraicamente cerrado (en estas notas  $\mathbf{C}$ ). Las álgebras de Lie clásicas que corresponden a las cuatro series  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se describen como álgebras de matrices de la forma que sigue a continuación.

### 6.8.1. $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbf{K})$ , $l \geq 1$

Se trata del espacio vectorial de las matrices  $(l+1) \times (l+1)$  de traza nula. Estas matrices actúan de forma irreducible en  $\mathbf{R}^{l+1}$  (es decir, no dejan ningún subespacio no trivial invariante). Con la estructura de álgebra de Lie dada por el conmutador de matrices, se tiene que una subálgebra de Cartan se puede elegir como:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} c_i E_{ii} : c_1 + \cdots + c_{l+1} = 0 \right\} \quad (6.144)$$

( $E_{ij}$  es la base usual del espacio de matrices y  $\epsilon_i$  la usual de  $\mathbf{R}^{l+1}$ ) es decir, el subespacio de matrices diagonales de traza nula. Si definimos los siguientes elementos en el dual  $\mathfrak{h}^*$ :

$$\varepsilon_i(E_{jj}) = \delta_{ij} \quad (6.145)$$

tenemos que

$$\text{ad}_{E_{ii}} E_{jk} = (\delta_{ij} - \delta_{ik}) E_{jk} \quad (6.146)$$

y por lo tanto un sistema de raíces es:

$$\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i \neq j\} \quad (6.147)$$

Un sistema fundamental es:

$$\Pi = \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} : i = 1, \dots, l\} \quad (6.148)$$

La forma de Killing es:

$$K(x, y) = 2(l+1) \text{tr}(xy) \quad (6.149)$$

y por lo tanto, los elementos del álgebra correspondientes a las raíces del sistema fundamental son:

$$h_{\alpha_i} = \frac{1}{2(l+1)} (E_{ii} - E_{i+1, i+1}) \quad (6.150)$$

y se tiene:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = K(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}) = 2(l+1) \text{tr}(h_{\alpha_i} h_{\alpha_j}) = \begin{cases} \frac{1}{l+1}, & i = j \\ -\frac{1}{2(l+1)}, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| \geq 2 \end{cases} \quad (6.151)$$

que nos proporciona el digrama de Dynkin de  $A_l$ .

Las otras series se pueden obtener como subálgebras de  $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbf{K})$ . Para verlo, consideremos una representación del álgebra  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})$  en el espacio de endomorfismos de este espacio vectorial, es decir, el espacio de operadores lineales  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K}))$ :

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{gl}(n\mathbf{K}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (6.152)$$

definido por

$$f(x)y = -x^t y - yx, \quad y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{K}) \quad (6.153)$$

Sea  $k \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})$  y definamos

$$L(k) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{K}) : f(x)k = 0\} = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{K}) : x^t k + kx = 0\} \quad (6.154)$$

El endomorfismo  $k$  se puede asociar a una forma bilineal en el espacio de matrices

$$k(u, v) = u^t k v \quad (6.155)$$

y por tanto:

$$L(k) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{K}) : k(xu, v) + k(u, xv) = 0\} \quad (6.156)$$

El conjunto  $L(k)$  es una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{K})$ . En particular si  $k = I_n$ , se tiene el álgebra ortogonal  $\mathfrak{o}(n, \mathbf{K})$ . Si

$$k = J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (6.157)$$

se tiene el álgebra simpléctica  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbf{K}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{K})$ .

Si  $k$  define una forma bilineal simétrica o antisimétrica no degenerada, entonces (si  $n \geq 3$ )  $L(k)$  actúa de forma irreducible en  $\mathbf{K}^n$ . En los casos  $\mathfrak{o}(n, \mathbf{K})$  y  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbf{K})$  se da esa circunstancia y, según un teorema de Cartan, es semisimple o suma directa de un ideal semisimple y el centro. Como los múltiplos de la identidad (que están en el centro) no forman parte del álgebra, son semisimples.

### 6.8.2. $\mathfrak{o}(2l+1, \mathbf{K})$

La dimensión de este álgebra es  $l(2l+1)$ . Utilizando como matriz  $k$ :

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix} \quad (6.158)$$

Entonces,  $\mathfrak{o}(2l+1, \mathbf{K}) = L(I_{2l+1}) = S^{-1}L(k)S$ , donde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}I_l & \frac{i}{\sqrt{2}}I_l \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}I_l & -\frac{i}{\sqrt{2}}I_l \end{pmatrix} \quad (6.159)$$

Los elementos de  $L(k)$  (que verifican  $x^t k + kx = 0$ ) son

$$x = \begin{pmatrix} 0 & a^t & b^t \\ -b & A & B \\ -a & C & -A^t \end{pmatrix}, \quad B = -B^t, \quad C = -C^t \quad (6.160)$$

La subálgebra de Cartan se puede tomar como:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & A & \\ & & -A^t \end{pmatrix} \right\}, \quad A \text{ diagonal} \quad (6.161)$$

y los vectores raíces son:

$$E_{\epsilon_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon_i^t \\ -\epsilon_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\epsilon_i} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_i^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.162)$$

$$E_{\epsilon_i + \epsilon_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{ij} - E_{ji} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\epsilon_i - \epsilon_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} - E_{ji} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.163)$$

$$E_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{ij}^t \end{pmatrix} \quad (6.164)$$

De esta forma

$$\text{ad}_{\epsilon_i} E_{\pm\epsilon_j} = \pm\delta_{ij} E_{\pm\epsilon_i}, \quad \text{ad}_{\epsilon_i} E_{\pm\epsilon_j \pm \epsilon_k} = (\pm\delta_{ij} \pm \delta_{ik}) E_{\pm\epsilon_j \pm \epsilon_k} \quad (6.165)$$

Un sistema de raíces es

$$\Delta = \{\pm\epsilon_i, \epsilon_i \pm \epsilon_j\} \quad (6.166)$$

Un sistema fundamental es:

$$\Pi = \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \alpha_{l-1} = \epsilon_{l-1} - \epsilon_l, \alpha_l = \epsilon_l\} \quad (6.167)$$

y la forma de Killing

$$K(x, y) = (2l - 1) \text{tr}(xy) \quad (6.168)$$

nos lleva a definir

$$h_{\alpha_i} = \frac{1}{2(2l-1)}(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}), \quad i < l, \quad h_{\alpha_l} = \frac{1}{2l(2l-1)}\epsilon_l \quad (6.169)$$

con lo que tenemos un álgebra de tipo  $B_l$ . Además:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2(2l-1)} & |i-j| = 1 \\ 0 & |i-j| \geq 2 \end{cases}, \quad \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2l-1} & i < l \\ \frac{1}{2(2l-1)} & i = l \end{cases} \quad (6.170)$$

### 6.8.3. $\mathfrak{sp}(2l, \mathbf{K})$

El álgebra simpléctica es el siguiente conjunto

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2l, \mathbf{K}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbf{K}) : x^t J_l + J_l x = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} : A, B, C \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbf{K}), B = B^t, C = C^t \right\} \end{aligned} \quad (6.171)$$

Se trata de una álgebra semisimple de dimensión  $l(2l+1)$ . Una subálgebra de Cartan es

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} : A \text{ diagonal} \right\} \quad (6.172)$$

Los vectores raíces son

$$E_{\epsilon_i + \epsilon_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} + E_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\epsilon_i - \epsilon_j} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ij} \end{pmatrix} \quad (6.173)$$

Como se tiene:

$$\text{ad}_{\epsilon_i} E_{\pm\epsilon_j \pm \epsilon_k} = (\pm\delta_{ij} \pm \delta_{ik}) E_{\pm\epsilon_j \pm \epsilon_k} \quad (6.174)$$

un sistema fundamental es:

$$\Pi = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \alpha_l = 2\varepsilon_l\} \quad (6.175)$$

La forma de Killing es:

$$K(x, y) = (2l + 2) \operatorname{tr}(xy) \quad (6.176)$$

y los elementos de la subálgebra de Cartan son:

$$h_{\alpha_i} = \frac{1}{4(l+1)}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}), \quad h_{\alpha_l} = \frac{2}{4(l+1)}\varepsilon_l \quad (6.177)$$

con productos:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} -\frac{1}{4(l+1)} & |i-j| = 1, i, j < l \\ 0 & |i-j| \geq 2 \\ -\frac{1}{2(l+1)} & i = l-1, j = l \end{cases}, \quad \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2(l+1)} & i < l \\ \frac{1}{l+1} & i = l \end{cases} \quad (6.178)$$

El álgebra simpléctica es un álgebra de Lie semisimple con un sistema fundamental de tipo  $C_l$ .

#### 6.8.4. $\mathfrak{o}(2l, \mathbf{K})$

La forma bilineal se puede escoger como:

$$k = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix} \quad (6.179)$$

siendo la matriz que la diagonaliza:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I_l & \frac{1}{\sqrt{2}}I_l \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I_l & \frac{1}{\sqrt{2}}I_l \end{pmatrix} \quad (6.180)$$

El álgebra correspondiente es

$$L(k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} : B + B^t = C + C^t = 0 \right\} \quad (6.181)$$

siendo la subálgebra de Cartan

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} : A \text{ diagonal} \right\} \quad (6.182)$$

La forma de Killing es:

$$K(x, y) = (2l - 2) \operatorname{tr}(xy) \quad (6.183)$$

lo que nos lleva a los siguientes elementos de la subálgebra de Cartan:

$$h_{\alpha_i} = \frac{1}{2(2l-2)}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}), \quad h_{\alpha_l} = \frac{1}{2(2l-2)}(\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \quad (6.184)$$

Finalmente los productos escalares son:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 0 & |i-j| \geq 2, i \neq l, j \neq l \\ -\frac{1}{2(2l-1)} & i = l-2, j = l \\ -\frac{1}{2(2l-2)} & |i-j| = 1, i \neq l, j \neq l \\ 0 & i \neq l-2, i \neq l, j = l \\ \frac{1}{2l-2} & i = j \end{cases} \quad (6.185)$$

Para  $l \geq 3$ , el álgebra  $\mathfrak{o}(2l, \mathbf{K})$  es simple y tiene un sistema fundamental de tipo  $D_l$ .

Además de estas álgebras existen 5 álgebras excepcionales, de rango 2 ( $G_2$ ), 4 ( $F_4$ ), 6 ( $E_6$ ), 7 ( $E_7$ ) y 8 ( $E_8$ ). Las dimensiones de estas álgebra son 14, 52, 78, 133 y 248 respectivamente. Su construcción no es tan sencilla como las de las álgebras clásicas y no la discutiremos aquí [13].



## Capítulo 7

# Automorfismos de álgebras de Lie semisimples

En este capítulo estudiaremos los automorfismos de las álgebras semisimples complejas y su relación con las simetrías de los diagramas de Dynkin correspondientes.

### 7.1. Reflexiones en el sistema de raíces

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja de rango  $l$ ,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan y  $\Delta$  el sistema de raíces asociado a  $\mathfrak{h}$ . Sea  $E$  el espacio real generado por  $\Delta$  (al que llamamos en el capítulo anterior  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ ). Dado  $\lambda \in E$ ,  $\lambda \neq 0$ , se define la reflexión asociada a  $\lambda$ ,  $s_\lambda : E \rightarrow E$  por

$$s_\lambda(\xi) = \xi - \frac{2\langle \xi, \lambda \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \lambda, \quad \xi \in E \quad (7.1)$$

que es otro elemento de  $E$ . Se trata de una reflexión respecto al hiperplano perpendicular a  $\lambda$ . Pero además, las reflexiones respecto a las raíces dejan invariante  $\Delta$ , el sistema de raíces:

$$s_\alpha(\beta) \in \Delta, \quad \alpha, \beta \in \Delta \quad (7.2)$$

pues si  $\alpha, \beta \in \Delta$ , se tiene

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \quad (7.3)$$

y sabemos que el segundo miembro de esta igualdad es una raíz.

Llamaremos base de Weyl a la siguiente base de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$ , con subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  y sistema de raíces  $\Delta$ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}e_\alpha \quad (7.4)$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0, \quad [h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha \quad (7.5)$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta}, \quad \alpha + \beta \in \Delta, \quad 0 \neq N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta} \quad (7.6)$$

### 7.2. El grupo de Weyl

Sea ahora  $E$  un espacio euclidiano de dimensión  $l$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar en  $E$ . Sea  $\Delta$  un sistema de raíces en  $E$ . Podemos construir el grupo ortogonal en  $E$ ,  $O(E)$ , que deja invariante el producto escalar. Llamaremos grupo de Weyl,  $\text{Ad}(\Delta)$ , del sistema  $\Delta$  al grupo generado por las reflexiones  $\{s_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ .

El grupo de Weyl no actúa de forma transitiva en el sistema de raíces  $\Delta$ , ya que al ser ortogonal conserva la longitud de las raíces. Además, dadas dos raíces simples, no existe ninguna transformación del grupo de Weyl que las relacione. En efecto, sean  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha$  una raíz simple. Entonces

$$\alpha' = s_\beta(\alpha) = \alpha - \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle}\beta \quad (7.7)$$

lo que implica

$$\langle\alpha, \alpha'\rangle = \langle\alpha, \alpha\rangle - \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle}\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{1}{\langle\beta, \beta\rangle}(\langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle - 2\langle\alpha, \beta\rangle^2) \quad (7.8)$$

Por la desigualdad de Schwarz:

$$\langle\alpha, \beta\rangle^2 \leq \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle \quad (7.9)$$

Pero si  $\alpha'$  raíz simple, en esa cadena no hay ninguna otra raíz simple en particular, si  $\alpha, \beta$  son raíces simples,  $\langle\alpha, \beta\rangle < 0$ , luego no existe ninguna raíz de ese tipo, en particular

$$\beta - \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha \quad (7.10)$$

no es una raíz y  $\alpha, \beta$  no están relacionados por una transformación de Weyl.

El grupo de Weyl deja invariante  $\Delta$  como hemos visto, pero puede haber otras transformaciones que dejen invariante  $\Delta$  y que no estén en el grupo de Weyl. Sea  $\text{Aut}(\Delta)$  el grupo de automorfismos (ortogonales) del sistema de raíces  $\Delta$ :

$$\text{Aut}(\Delta) = \{T \in O(E) : T(\Delta) = \Delta\} \quad (7.11)$$

Obviamente

$$\text{Aut}(\Delta) \supset \text{Ad}(\Delta) \quad (7.12)$$

Además el grupo de automorfismos es finito (pues es un subgrupo del grupo de permutaciones de  $\Delta$  que es finito). Y el grupo de Weyl es un subgrupo normal del grupo de automorfismos, pues es fácil probar:

$$Ts_\alpha T^{-1} = s_{T\alpha}, \quad T \in \text{Aut}(\Delta), \quad s_\alpha \in \text{Ad}(\Delta) \quad (7.13)$$

En efecto, sea  $\xi \in E$ . Entonces

$$Ts_\alpha T^{-1}(\xi) = T\left(T^{-1}\xi - \frac{2\langle T^{-1}\xi, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha\right) = \xi - \frac{2\langle\xi, T\alpha\rangle}{\langle T\alpha, T\alpha\rangle}T\alpha = s_{T\alpha}\xi \quad (7.14)$$

El grupo de Weyl permite separar el espacio  $E$  en componentes conexas. Sea

$$E' = E - \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha \quad (7.15)$$

es decir,  $E$  menos los hiperplanos perpendiculares a las raíces. Cada componente conexa de  $E'$  se llama una celda de Weyl. Los automorfismos de  $\Delta$  transforman unas celdas en otras, es decir:

**Proposición 7.1** 1. Si  $C$  es una celda de Weyl,  $T \in \text{Aut}(\Delta)$ , entonces  $TC$  es otra celda de Weyl.

2. Si  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  es un sistema fundamental de  $\Delta$ , entonces:

$$W(\Pi) = \{\xi \in E : \langle\alpha_i, \xi\rangle > 0, \quad i = 1, \dots, l\} \quad (7.16)$$

es una celda de Weyl (celda fundamental).

Las transformaciones ortogonales transforman hiperplanos en hiperplanos y por lo tanto una componente conexa en otra (o en ella misma). En cuanto a la segunda parte, el hiperplano perpendicular a la raíz  $\alpha_i$  divide al espacio  $E$  en dos regiones. Los vectores situados en una de ellas (en la que está  $\alpha_i$ ) verifican  $\langle \xi, \alpha_i \rangle > 0$ . La intersección de estas regiones (para cada raíz simple) es una celda de Weyl, pues su intersección con un hiperplano perpendicular a una raíz, simple o no, es vacía. Si no fuera así, existe  $\beta \in \Delta$  tal que en su hiperplano ortogonal hay un vector  $\chi$  que verifica:

$$\langle \chi, \alpha_i \rangle > 0, \quad \langle \beta, \chi \rangle = 0 \quad (7.17)$$

lo que no es posible.  $\beta$  es una combinación de raíces simples, con todos los coeficientes del mismo signo (o cero), por ejemplo:

$$\beta = \sum_{i=1}^l c_i \alpha_i, \quad c_i \geq 0 \quad (7.18)$$

Entonces

$$\langle \beta, \chi \rangle = c_i \sum_{i=1}^l \langle \alpha_i, \chi \rangle > 0 \quad (7.19)$$

Un sistema de raíces simples de  $\Delta$  permite determinar el grupo de Weyl de  $\Delta$ .

**Proposición 7.2** *Sea  $\Pi_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un sistema fundamental de  $\Delta$  y llamemos  $s_j = s_{\alpha_j}$ . Sea la celda fundamental del sistema  $\Delta$ ,  $W_0 = W(\Pi_0)$ . Se tiene*

1.  $\{s_i\}_{i=1, \dots, l}$  es un sistema de generadores del grupo de Weyl,  $\text{Ad}(\Delta)$ .
2. Si  $W$  es una celda de Weyl, existe  $s \in \text{Ad}(\Delta)$  tal que  $sW_0 = W$ .
3. Para todo  $s \in \text{Ad}(\Delta)$ ,  $s\Pi_0$  es un sistema fundamental y todos los sistemas fundamentales se obtienen de  $\Pi_0$  de esta forma.
4. Cualquier raíz de  $\Delta$  se obtiene de las raíces simples mediante una sucesión de reflexiones  $s_i$ .

Si  $\beta \in \Delta$ , se tiene

$$\beta = \sum_{i=1}^l c_i \alpha_i \quad (7.20)$$

$$s_\beta \xi = \xi - \frac{2\langle \xi, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \beta = \xi - \sum_{i,j=1}^l c_i c_j \frac{2\langle \xi, \alpha_i \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \alpha_j \quad (7.21)$$

Sea  $W$  una celda de Weyl. Veamos que existe  $s$  que transforma  $W$  en  $W_0$ . Sea  $\beta \in \Delta$  tal que el hiperplano ortogonal a  $\beta$  limita la celda  $W$ .

Consideremos un sistema fundamental,  $\Pi$ , de un sistema de raíces,  $\Delta$ , y sea  $\text{Aut}(\Pi)$  el grupo de transformaciones ortogonales que lo dejan invariante (los automorfismos de  $\Pi$ ).

**Proposición 7.3** *El grupo  $\text{Aut}(\Pi)$  es un subgrupo de  $\text{Aut}(\Delta)$  y se tiene:*

$$\text{Aut}(\Delta) = \text{Ad}(\Delta) \text{Aut}(\Pi) \quad (7.22)$$

es decir, los automorfismos de un sistema de raíces se corresponden con los automorfismos de un sistema fundamental cualquiera y los elementos del grupo de Weyl que mueven los sistemas fundamentales entre sí. No se trata, sin embargo, de un producto directo, pero sí semidirecto (los elementos del grupo de Weyl no dejan invariantes los sistemas fundamentales), pues la intersección de ambos grupos es la identidad:

$$\text{Ad}(\Delta) \cap \text{Aut}(\Pi) = 1 \quad (7.23)$$

### 7.3. Grupo de automorfismos de un álgebra de Lie semisimple compleja

Vamos ahora a relacionar los automorfismos del álgebra de Lie semisimple con los de su sistema de raíces. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , con un sistema de raíces  $\Delta$  y un conjunto de raíces simples  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ . Llamaremos  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  al grupo de los automorfismos de  $\mathfrak{g}$ ,  $N$  el subgrupo de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  que deja invariante a  $\mathfrak{h}$ ,  $N^0 = N \cap \text{Ad}(\mathfrak{g})$ , siendo  $\text{Ad}(\mathfrak{g})$  el grupo de automorfismos internos de  $\mathfrak{g}$ , es decir el grupo adjunto de  $\mathfrak{g}$ , generado por las derivaciones internas de  $\mathfrak{g}$  (que en el caso de ser  $\mathfrak{g}$  simple son todas las derivaciones):

$$\{\exp(\delta) : \delta \in \text{ad}(\mathfrak{g})\}, \quad \text{ad}(\mathfrak{g}) = \{\text{ad}_x : x \in \mathfrak{g}\} \quad (7.24)$$

El grupo  $N^0$  está formado por los automorfismos internos que dejan invariante a  $\mathfrak{h}$ .

**Proposición 7.4** *La relación entre estos grupos es:*

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Ad}(\mathfrak{g})N, \quad \text{Aut}(\mathfrak{g})/\text{Ad}(\mathfrak{g}) \approx N/N^0 \quad (7.25)$$

Efectivamente, si  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ ,  $\sigma\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , por lo que existe un automorfismo interno  $\tau \in \text{Ad}(\mathfrak{g})$  tal que  $\sigma\mathfrak{h} = \tau\mathfrak{h}$ . Entonces

$$\tau^{-1}\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \Rightarrow \tau^{-1}\sigma \in N \Rightarrow \sigma = \tau(\tau^{-1}\sigma)$$

La segunda parte es consecuencia de un resultado general sobre grupos cociente:

$$\text{Aut}(\mathfrak{g})/\text{Ad}(\mathfrak{g}) = (\text{Ad}(\mathfrak{g})N)/\text{Ad}(\mathfrak{g}) \approx N/(N \cap \text{Ad}(\mathfrak{g})) = N/N^0 \quad (7.26)$$

Para proseguir con el estudio de estos automorfismos es necesario considerar espacios reales. Sea como anteriormente  $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{R}h_{\alpha}$ ,  $E = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{R}\alpha$ . Si  $\sigma \in N$ , entonces  $\sigma\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ . Para cada  $\sigma \in N$  definimos una aplicación  $f(\sigma) \in GL(E)$  mediante

$$(f(\sigma)\xi)(h) = \xi(\sigma^{-1}(h)), \quad h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}, \xi \in E \quad (7.27)$$

$f$  es un homomorfismo sobreyectivo de  $N$  en  $\text{Aut}(\Delta)$ . Se tiene entonces

**Proposición 7.5**

$$\sigma h_{\lambda} = h_{f(\sigma)\lambda}, \quad \lambda \in E \quad (7.28)$$

$$\ker f = \exp(\text{ad } \mathfrak{h}) \quad (7.29)$$

Si llamamos  $s = f(\sigma) \in \text{Aut}(\Delta)$ , se tiene que

$$\xi(\sigma^{-1}h_{s\lambda}) = s(\xi)(h_{s\lambda}) = \langle s\xi, s\lambda \rangle = \langle \xi, \lambda \rangle = \xi(h_{\lambda}) \Rightarrow \sigma^{-1}h_{s\lambda} = h_{\lambda} \quad (7.30)$$

es decir, los automorfismos  $\sigma$  que dejan invariantes la subálgebra de Cartan transforman los elementos de ésta asociando a  $h_{\lambda}$  el elemento  $h_{s\lambda}$ , siendo  $s = f(\sigma)$ .

El homomorfismo  $f$  no es inyectivo. Los automorfismos que están en su núcleo son la identidad en  $\mathfrak{h}$  y además

$$\sigma(e_{\alpha}) = q(\alpha)e_{\alpha} \quad (7.31)$$

siendo  $q(\alpha)$  un coeficiente que verifica

$$q(\alpha + \beta) = q(\alpha)q(\beta) \quad (7.32)$$

por lo tanto, podemos escoger  $r_j \in \mathbf{C}$  tal que

$$q(\alpha_j) = \exp(r_j) \quad (7.33)$$

Si se elige  $h \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha_j(h_0) = r_j$ , de aquí se concluye que

$$\sigma = \exp(\text{ad } h_0) \quad (7.34)$$

es decir el núcleo de  $f$  es

$$\ker f = \exp(\text{ad } \mathfrak{h}) \quad (7.35)$$

El homomorfismo  $f$  es sobreyectivo, es decir  $f(N) = \text{Aut}(\Delta)$ . Además  $f(N^0) \subset \text{Aut}(\Delta)$ . Se puede probar también que el grupo de Weyl está contenido en  $f(N^0)$ , es decir las imágenes inversas mediante  $f$  de los elementos del grupo de Weyl están en  $N^0$  que eran los automorfismos internos que dejaban invariante la subálgebra de Cartan elegida.

**Proposición 7.6** Sea  $T \in \text{Aut}(\Delta)$ . Existe  $\tau \in N$  tal que  $f(\tau) = T$  y  $\mathfrak{g}(\tau, 1) \subset \mathfrak{h}$ .

El conjunto  $\mathfrak{g}(\tau, 1)$  se define en general como:

$$\mathfrak{g}(\sigma, c) = \{x \in \mathfrak{g} : (\sigma - cI)^n x = 0\}, \quad \sigma \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \quad (7.36)$$

con  $n = \dim \mathfrak{g}$  y si  $\sigma \in \text{Ad}(\mathfrak{g})$  tiene dimensión mayor o igual que el rango de  $\mathfrak{g}$ .

Pero es posible demostrar aún más:

**Proposición 7.7**

$$f(N^0) = \text{Ad}(\Delta), \quad \text{Ad}(\Delta) \cap \text{Aut}(\Pi) = 1 \quad (7.37)$$

es decir, los elementos del grupo de Weyl se obtienen de automorfismos internos que dejan la subálgebra de Cartan invariante, y viceversa, si un automorfismo interno deja la subálgebra de Cartan invariante, entonces da lugar a un elemento del grupo de Weyl. La principal consecuencia de este resultado es la siguiente relación entre estos grupos:

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) / \text{Ad}(\mathfrak{g}) \approx N / N^0 \approx \text{Aut}(\Delta) / \text{Ad}(\Delta) \approx \text{Aut}(\Pi) \quad (7.38)$$

Veamos a continuación como son estos grupos en cada una de las álgebras de Lie simples.

1.  $A_l$

En este caso, el grupo de simetrías del diagrama de Dynkin es  $\mathbf{Z}_2$ , como se ve directamente del diagrama (solo la identidad y el intercambio de raíces respecto del punto medio del diagrama lo deja invariante). Por tanto

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) / \text{Ad}(\mathfrak{g}) \approx \mathbf{Z}_2 \quad (7.39)$$

2.  $B_l, C_l$

Los diagramas de  $B_l$  y  $C_l$  no tienen simetrías, por tanto:

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Ad}(\mathfrak{g}) \quad (7.40)$$

es decir, todos los automorfismos son internos.

3.  $D_l$

Si  $l \neq 4$ , como en  $A_l$ , el grupo de simetrías del diagrama de Dynkin es  $\mathbf{Z}_2$  (la identidad y el intercambio de las dos últimas raíces simples). Luego

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) / \text{Ad}(\mathfrak{g}) \approx \mathbf{Z}_2 \quad (7.41)$$

Sin embargo, para  $l = 4$  tenemos un grupo de simetrías del diagrama de Dynkin que es  $S_3$  (el grupo de permutaciones en tres elementos).

4.  $G_2, F_4, E_7, E_8$ 

Los diagramas de estas álgebras no tienen simetrías y por tanto todos los automorfismos son internos.

5.  $E_6$ 

El diagrama de Dynkin tiene un grupo de simetrías que es  $\mathbf{Z}_2$ , y por tanto

$$\text{Aut}(\mathfrak{g})/\text{Ad}(\mathfrak{g}) \approx \mathbf{Z}_2 \quad (7.42)$$

# Capítulo 8

## Teoría de representaciones

La teoría de representaciones de álgebras de Lie es fundamental en el desarrollo de las aplicaciones. Se trata, como ya hemos visto, de establecer una correspondencia entre los elementos del álgebra y operadores que actúan en algún conjunto. Aunque no entraremos en muchos detalles, intentaremos dar una idea lo suficientemente amplia para que pueda ser aplicada en álgebras de Lie bastante generales.

### 8.1. Representaciones en álgebras de Lie triangulares

Toda álgebra de Lie simple admite una descomposición triangular, (la descomposición en espacios de raíces):

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}^\alpha \quad (8.1)$$

donde  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan y  $\alpha$  las raíces del álgebra relativas a  $\mathfrak{h}$ .

Sin embargo, no es necesario que  $\mathfrak{g}$  sea simple para tener este tipo de estructura (ni siquiera de dimensión finita). Por eso, haremos una introducción para álgebras con este tipo de descomposición (álgebras con descomposición triangular) y luego nos restringiremos a álgebras simples.

Las primeras nociones que necesitamos para desarrollar la teoría de representaciones son las de peso y vector peso.

**Definición 8.1** *Sea  $\mathfrak{h}$  un álgebra de Lie abeliana y  $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  una representación en un espacio vectorial  $V$  (no necesariamente de dimensión finita). Sea  $\omega \in \mathfrak{h}^*$  (el dual de  $\mathfrak{h}$  como espacio vectorial). Se dice que  $v$  es un vector peso de peso  $\omega$  (relativo a la representación  $\pi$ ) si:*

$$\pi(h)v = \omega(h)v, \quad \forall h \in \mathfrak{h} \quad (8.2)$$

El hecho de que  $\mathfrak{h}$  sea abeliana permite la existencia de estos vectores peso.

La representación  $\pi$  se puede extender al álgebra tensorial simétrica  $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$  (que en este caso coincide con el álgebra envolvente, ya que  $\mathfrak{h}$  es abeliana), y también el peso  $\omega$ :

$$\omega : \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{K} \quad (8.3)$$

con:

$$\omega(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \omega(x_1) \dots \omega(x_n) \quad (8.4)$$

con lo que:

$$\pi(u)v = \omega(u)v, \quad u \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}), v \in V \quad (8.5)$$

es decir, si  $u = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ :

$$\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)v = \prod_{i=1}^n \pi(x_i)v = \prod_{i=1}^n \omega(x_i)v \quad (8.6)$$

porque:

$$\pi(x_i)v = \omega(x_i)v, \quad i = 1 \dots n \quad (8.7)$$

Definamos ahora unos subespacios de  $V$  asociados a los pesos.

**Definición 8.2** *El conjunto, con  $\omega \in \mathfrak{h}^*$ :*

$$V^\omega = \{v \in V : \pi(h)v = \omega(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\} \quad (8.8)$$

es un subespacio vectorial de  $V$ . Se le llama el espacio de peso  $\omega$  y tiene una estructura de submódulo de  $\mathfrak{h}$ .

La suma de espacios de pesos es una suma directa:

$$\bigoplus_{\omega \in \mathfrak{h}^*} V^\omega \quad (8.9)$$

pero no tiene porque ser igual al espacio  $V$ .

**Definición 8.3** *Se dice que el espacio vectorial  $V$  admite una descomposición en espacios de pesos con respecto al álgebra abeliana  $\mathfrak{h}$  si:*

$$V = \bigoplus_{\omega \in \mathfrak{h}^*} V^\omega \quad (8.10)$$

Dado un elemento  $\omega$  de  $\mathfrak{h}^*$ , diremos que es un peso de  $\mathfrak{h}$  relativo a la representación  $\pi$  en  $\mathfrak{gl}(V)$  si el subespacio de pesos asociado es no trivial:  $V^\omega \neq \{0\}$ .

### Ejemplo 8.1

Consideremos en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  el álgebra abeliana generada por  $h, \mathfrak{h}$ , y la restricción de la representación adjunta de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  a  $\mathfrak{h}$ . El espacio  $V$  es ahora de dimensión 3, y los pesos  $\omega$  verifican:

$$\pi(h)v = \omega(h)v \quad (8.11)$$

pero:

$$\pi(h)v = [h, v] \quad (8.12)$$

luego:

$$\omega(h) = 0, 2, -2 \quad (8.13)$$

Los subespacios de pesos  $\omega$  son:

$$V^{(0)} = \text{lin}\{h\}, \quad V^{(2)} = \text{lin}\{e\}, \quad V^{(-2)} = \text{lin}\{f\} \quad (8.14)$$

y por lo tanto:

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = V^{(2)} \oplus V^{(0)} \oplus V^{(-2)} \quad (8.15)$$

es decir,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  admite una descomposición en espacios de pesos relativa a la representación adjunta y al álgebra  $\mathfrak{h}$ .

### Ejemplo 8.2

El álgebra de Virasoro.

$$\mathcal{V} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}L_n \oplus \mathbf{K}c \quad (8.16)$$

Sea  $\mathfrak{h} = \mathbf{K}L_0 \oplus \mathbf{K}c$  una subálgebra abeliana de  $\mathcal{V}$  y  $\pi$  la representación adjunta de  $\mathcal{V}$  como en el ejemplo anterior. Entonces  $\mathcal{V}$  es un  $\mathfrak{h}$ -módulo con la acción dada por esta representación. Sea  $\omega_n \in \mathfrak{h}^*$  definido por:

$$\begin{aligned}\omega_n(L_0) &= -n \\ \omega_n(c) &= 0\end{aligned}$$

Por definición de pesos y vectores peso:

$$\pi(L_0)v = \omega_n(L_0)v, \quad v \in \mathcal{V} \quad (8.17)$$

y se tiene:

$$\begin{aligned}[L_0, L_n] &= -nL_n \\ [c, L_n] &= 0\end{aligned}$$

y por tanto,  $L_n$  es un vector peso, con peso  $\omega_n$ . Además:

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{V}^n \quad (8.18)$$

donde cada uno de los subespacios peso es:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^n &= \mathbf{K}L_n, \quad n \neq 0 \\ \mathcal{V}^0 &= \mathbf{K}L_0 \oplus \mathbf{K}c = \mathfrak{h}\end{aligned}$$

es decir,  $\mathcal{V}$  admite una descomposición en espacios de pesos, relativa a la representación adjunta y al álgebra  $\mathfrak{h}$ .

Cuando se considera la representación adjunta como en los dos ejemplos anteriores, los pesos no nulos son las raíces.

Es fácil ver que si un módulo admite una descomposición en espacios de pesos, cualquier submódulo la admite también.

Estudiemos ahora el concepto de álgebras con descomposición triangular.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie,  $\mathfrak{h}$  una subálgebra abeliana de  $\mathfrak{g}$  y consideremos la representación adjunta de  $\mathfrak{h}$  actuando sobre el  $\mathfrak{h}$ -módulo  $\mathfrak{g}$ . Supongamos que  $\mathfrak{g}$  admite una descomposición en espacio de pesos:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}^\alpha \quad (8.19)$$

Esta descomposición es una graduación de  $\mathfrak{g}$ :

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta} \quad (8.20)$$

con grupo de graduación la  $\mathbf{Z}$ -envolvente de sus raíces. Considerando la acción adjunta extendida al álgebra envolvente,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  admite también una descomposición en espacios de pesos, con:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^\alpha \mathcal{U}(\mathfrak{g})^\beta \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\alpha+\beta} \quad (8.21)$$

es decir, es también un álgebra graduada.

**Definición 8.4** Una descomposición triangular de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  está formada por una subálgebra abeliana y dos subálgebras  $\mathfrak{n}_+$  y  $\mathfrak{n}_-$  tales que:

1.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \quad (8.22)$$

2.  $\mathfrak{n}_+ \neq \{0\}$  y admite una descomposición en espacios de pesos relativa a  $\mathfrak{h}$  y la representación adjunta. Los pesos  $\alpha$  están en un semigrupo  $Q_+ \subset \mathfrak{h}^*$  y  $0$  no está en  $Q_+$ .
3. Existe una anti-involución  $\sigma$ , (es decir un anti-automorfismo de orden 2) tal que:

$$\sigma(\mathfrak{n}_+) = \mathfrak{n}_-, \quad \sigma|_{\mathfrak{h}} = \text{id}|_{\mathfrak{h}} \quad (8.23)$$

Es decir, para tener una descomposición triangular necesitamos cuatro objetos:  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+, Q_+, \sigma)$ , con  $\mathfrak{n}_+, \mathfrak{h}$  subálgebras ( $\mathfrak{h}$  abeliana),  $Q_+$  semigrupo y  $\sigma$  una anti-involución con las propiedades anteriores.

Como  $0 \notin Q_+$ , se puede probar que  $\sigma(\mathfrak{n}_-) = \mathfrak{n}_+$ , y  $\mathfrak{n}_-$  admite una descomposición igual a la de  $\mathfrak{n}_+$ . Debido a esto,  $\mathfrak{g}$  admite una descomposición según  $\mathfrak{h}$  dada por ( $Q_- = -Q_+$ ):

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{g}^\alpha = \begin{cases} \mathfrak{n}_+^\alpha & \text{si } \alpha \in Q_+ \\ \mathfrak{n}_-^\alpha & \text{si } -\alpha \in Q_+ \\ \mathfrak{h} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

El retículo de raíces es:  $Q = \bigoplus_{j \in J} \mathbf{Z}\alpha_j$  y cada subespacio  $\mathfrak{g}^\alpha$  es el espacio de raíz  $\alpha$ .

Si existe un conjunto numerable de raíces linealmente independientes, tal que cualquier raíz del retículo positivo,  $Q_+$ , se puede poner como una combinación lineal de estas raíces con coeficientes números naturales, se dice que la descomposición es regular.

## 8.2. Módulos de peso máximo

Supongamos que  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie que admite una descomposición triangular. Sea  $\pi$  una representación de  $\mathfrak{g}$  en un módulo  $M$ .

**Definición 8.5** Sea  $v \in M$ . Se dice que  $v$  es un vector de peso máximo si:

1.  $v$  es un vector peso (para  $\mathfrak{h}$ , la subálgebra abeliana de la descomposición triangular).
2.  $\pi(x)v = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{n}_+$

Interpretados los operadores en  $\mathfrak{n}_+$  como operadores de creación, uno no puede ir más allá de  $v$ . Por eso se llama un vector de peso máximo.

Un vector de peso máximo,  $v$ , genera un submódulo de  $M$ :

$$\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))v = \{\pi(u)v : u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\} \quad (8.25)$$

que es el menor submódulo que contiene a  $v$ .

**Definición 8.6** Un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $M$  es un módulo de peso máximo si contiene un vector de peso máximo,  $v$ , que lo genera. El peso correspondiente a este vector se llama peso máximo del módulo  $M$ .

Para un vector de peso máximo se tiene:

$$M = \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-))v \quad (8.26)$$

debido a que  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)$  anula al vector y  $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$  lo deja igual (al ser un vector peso). Se trata de una consecuencia del teorema PWB.

**Proposición 8.1** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie que admite una descomposición triangular y  $M$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo de peso máximo, con peso máximo  $\lambda$  y vector de peso máximo  $v$ , se tiene:

1.  $M$  admite una descomposición en espacios de pesos, y los pesos son de la forma  $\lambda - \alpha$  con  $\alpha \in Q_+ \cup \{0\}$ . Además

$$M^\lambda = \mathbf{K}v, \quad M^{\lambda-\alpha} = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-^{-\alpha})v, \quad \alpha \in Q_+ \quad (8.27)$$

2.  $M$  está graduado según la descomposición anterior por  $\mathbf{Z}\lambda + Q$ . Los operadores en los espacios  $\mathfrak{g}^\alpha$  y  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^\alpha)$  son homogéneos de grado  $\alpha$
3. Si la descomposición de  $\mathfrak{g}$  es regular y los espacios  $\mathfrak{g}^\alpha$  son de dimensión finita, los espacios de pesos de  $M$  son de dimensión finita

Esta proposición implica que tanto el peso máximo  $\lambda$  como el subespacio unidimensional generado por un vector de peso máximo,  $\mathbf{K}v$ , son únicos.

### Ejemplo 8.3

Veamos en un ejemplo simple como se aplican estas ideas. Consideremos el álgebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  y una descomposición triangular:

$$\mathfrak{g} = \mathbf{C}e \oplus \mathbf{C}h \oplus \mathbf{C}f \quad (8.28)$$

donde  $\{e, h, f\}$  es la base estudiada en ejemplos anteriores. El retículo de raíces positivas es:  $Q_+ = \{\alpha\}$

Supongamos que tenemos un  $\mathfrak{g}$ -módulo de peso máximo  $m \in \mathbf{N}$ , y sea  $v$  un vector de peso máximo. Los restantes pesos del módulo son de la forma  $m - 2k$ ,  $k \in \mathbf{N}$  y la descomposición en espacios de pesos de  $M$  es ( $\mathfrak{n}_- = \mathbf{C}f$ ):

$$M^m = \mathbf{C}v, \quad M^{m-2k} = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)^{-2k}v = \mathbf{C}f^k v \quad (8.29)$$

puesto que  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$  es la envolvente lineal de las potencias de  $f$ .

## 8.3. Módulos de Verma

Los módulos de Verma son módulos universales para álgebras de Lie que admiten descomposiciones triangulares.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie que admite una descomposición triangular  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+, Q_+, \sigma)$ . Dado un peso  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  se construye un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $M(\lambda)$ , de peso más alto  $\lambda$ , cuya base está formada por vectores  $x_{j_k}^{n_k} \dots x_{j_1}^{n_1} v$ , donde  $x_j \in \mathfrak{n}_-$  (formando una base de  $\mathfrak{n}_-$  con un conjunto de índices  $J$  bien ordenado) y  $v$  es un vector de peso máximo.

**Definición 8.7** *Un módulo  $M(\lambda)$  de peso máximo  $\lambda$ , y vector de peso máximo  $v_+$ , es un módulo de Verma si, dado cualquier otro módulo  $M$ , de peso máximo  $\lambda$  y vector de peso máximo  $v'$ , existe un homomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos,  $\eta : M(\lambda) \rightarrow M$ , tal que  $\eta(v_+) = v'$ .*

Para estudiar la estructura de un módulo de Verma, veamos primero como el álgebra envolvente se puede descomponer en suma de dos subespacios, uno de ellos asociado al álgebra envolvente de  $\mathfrak{n}_-$ . Si  $\lambda$  es un peso de  $\mathfrak{g}$  relativo a la subálgebra abeliana  $\mathfrak{h}$ , se tiene:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \oplus (\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ + \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})(h - \lambda(h), 1)) \quad (8.30)$$

En efecto:

Si  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{K}$ , podemos extender su acción a toda el álgebra envolvente de  $\mathfrak{h}$  que coincide con su álgebra simétrica al ser abeliana:

$$\lambda : S(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{K} \quad (8.31)$$

El núcleo de esta aplicación es:

$$\sum_{h \in \mathfrak{h}} S(\mathfrak{h})(h - \lambda(h), 1) \quad (8.32)$$

de donde el álgebra simétrica de  $\mathfrak{h}$  se puede escribir como:

$$S(\mathfrak{h}) = \mathbf{K} \oplus \sum_{h \in \mathfrak{h}} S(\mathfrak{h})(h - \lambda(h), 1) \quad (8.33)$$

Consideremos ahora la subálgebra de  $\mathfrak{g}$  dada por:

$$\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_- \quad (8.34)$$

Su álgebra envolvente,  $\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$  es un  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ -módulo. Usando el teorema PBW, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &= \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h})(\mathbf{K} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)\mathfrak{n}_+) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ = \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)\mathbf{K} \oplus \sum_{h \in \mathfrak{h}} S(\mathfrak{h})(h - \lambda(h), 1) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ = \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \oplus \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)(h - \lambda(h), 1) \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ \end{aligned}$$

y usando la inclusión:

$$\mathfrak{n}_+(h - \lambda(h), 1) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ \quad (8.35)$$

que implica:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})(h - \lambda(h), 1) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)(h - \lambda(h), 1) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ \quad (8.36)$$

demostrando la igualdad.

Se tiene el siguiente resultado sobre la existencia de módulos de Verma.

**Proposición 8.2** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+, Q_+, \sigma)$  una descomposición triangular. Entonces  $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$  existe un módulo de Verma de  $\mathfrak{g}$ ,  $M(\lambda)$ , con peso máximo  $\lambda$ .*

Considerado como un  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo,  $M(\lambda)$  es isomorfo a  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ .

Para demostrarlo, consideremos la proyección dada por la descomposición en suma directa anterior:

$$p : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \quad (8.37)$$

con lo que  $\ker p$  es un ideal por la izquierda de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Definimos una acción de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  sobre  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ :

$$y \cdot u = p(yu), \quad y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \quad u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \quad (8.38)$$

Veamos que está bien definida. Sean  $y, y' \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , y  $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ . Entonces el elemento  $y \cdot u$  se puede descomponer siguiendo la suma directa:

$$y \cdot u + r, \quad p(r) = 0 \quad (8.39)$$

y se tiene:

$$y' \cdot (y \cdot u) = y' \cdot (p(yu)) = y' \cdot (yu - r) = p(y'(yu - r)) = p(y'yu) = (y'y) \cdot u \quad (8.40)$$

ya que  $y'r \in \ker p$ .

Si  $y = u' \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$  entonces  $u \cdot u' = p(uu') = u'u$  y por lo tanto  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$  es generado por 1 cuando se considera la acción de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ :

$$\begin{aligned} \text{si } y \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+) \quad & y \cdot 1 = p(y) = 0 \\ \text{si } h \in \mathfrak{h} \quad & h \cdot 1 = p(h) = p(\lambda(h), 1 + h - \lambda(h)) = \lambda(h) \end{aligned}$$

con lo que concluimos que  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$  es un módulo de peso más alto  $\lambda$  y vector más alto 1.

**Proposición 8.3** *Propiedades de los módulos de Verma.*

Sea  $M(\lambda)$  un módulo de Verma de peso más alto  $\lambda$ . Entonces:

1. Todo submódulo propio admite una descomposición en espacios de pesos relativa a  $\mathfrak{h}$  con pesos en  $\lambda - Q_-$ .
2.  $M(\lambda)$  tiene un único submódulo propio maximal  $N(\lambda)$
3. El módulo cociente  $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$  es irreducible y es el único módulo de peso más alto  $\lambda$ , irreducible de  $\mathfrak{g}$ .

## 8.4. El álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$

Aplicaremos en esta sección las técnicas anteriores a la descripción de los módulos de Verma y representaciones de dimensión finita de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .

El álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , matrices  $2 \times 2$  de traza nula con coeficientes complejos, admite una descomposición triangular de las estudiadas al principio de este capítulo. Explícitamente, si llamamos como hemos hecho antes:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

los subespacios generados por cada una de estas matrices,  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{n}_+$  y  $\mathfrak{n}_-$  respectivamente, son una descomposición triangular del álgebra:

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = \mathbf{C}f \oplus \mathbf{C}h \oplus \mathbf{C}e \quad (8.42)$$

El espacio  $\mathfrak{n}_+$  tiene dimensión 1, y admite una descomposición en espacios de pesos, relativa a la subálgebra abeliana  $\mathfrak{h}$ :

$$[h, e] = 2e \quad (8.43)$$

donde la raíz es  $\alpha$ , con:

$$\alpha(h) = 2 \quad (8.44)$$

El retículo de pesos es  $Q_+ = \mathbf{Z}_+\alpha$ , y la anti-involución es simplemente la transposición de matrices.

Supongamos ahora que  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  es un peso de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , y que  $v_+ \in M(\lambda)$  es un vector de peso máximo del módulo de Verma,  $M(\lambda)$  asociado a  $\lambda$ . La descomposición en espacios de pesos de este módulo será (al ser  $\mathfrak{n}_-$  de dimensión 1):

$$M^{\lambda - n\alpha} = \mathbf{C}f^n v_+, \quad n \in \mathbf{N} \quad (8.45)$$

y por lo tanto, si este módulo tiene submódulos, serán necesariamente de la forma:

$$\sum_{n \geq n_0} \mathbf{C}f^n v_+ \quad (8.46)$$

para algún número natural  $n_0$ , además del módulo trivial  $\{0\}$ .

Un módulo con esta forma tiene que verificar:

$$ef^{n_0} v_+ = 0 \quad (8.47)$$

pues si no fuera así, no sería invariante. Y a la inversa, si existe  $n_0 > 0$ , tal que se verifica la ecuación anterior, el vector  $f^{n_0} v_+$  es un vector de peso máximo, y el módulo que genera,

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})f^{n_0} v_+ = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)f^{n_0} v_+ \quad (8.48)$$

es un submódulo propio de  $M(\lambda)$ .

De entre estos submódulos habrá uno maximal, que será aquel para el que  $n_0$  sea el mínimo de todos los posibles.

Para demostrar el siguiente resultado, relativo a la estructura de los módulos de Verma de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , necesitaremos las siguientes igualdades:

$$hf^n v_+ = (a - 2n)f^n v_+ \quad (8.49)$$

$$ef^n v_+ = n(a - n + 1)f^{n-1} v_+ \quad (8.50)$$

donde  $a = \lambda(h)$ . La demostración se hace fácilmente por inducción. En efecto, usando las reglas de conmutación del álgebra:

$$[h, f] = -2f \implies hf v_+ = fhv_+ - 2fv_+ = (a - 2)fv_+ \quad (8.51)$$

Supongamos que el resultado es correcto para  $n$  y probémoslo para  $n + 1$ :

$$hf^{n+1} v_+ = hf(f^n v_+) = fh(f^n v_+) - 2f^{n+1} v_+ = (a - 2n)f^{n+1} v_+ - 2f^{n+1} v_+ = (a - 2(n+1))f^{n+1} v_+ \quad (8.52)$$

como queríamos probar. La segunda es igualmente sencilla:

$$[e, f] = h \implies ef v_+ = fev_+ + hv_+ = 2v_+ \quad (8.53)$$

por tanto,

$$ef^{n+1} v_+ = ef(f^n v_+) = fe(f^n v_+) + hf^n v_+ = n(a - n + 1)f^n v_+ + (a - 2n)f^n v_+ = (n+1)(a - n)f^n v_+ \quad (8.54)$$

El resultado fundamental sobre la irreducibilidad de los módulos de Verma de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  es el siguiente:

**Teorema 8.1** *Sea  $M(\lambda)$  un módulo de Verma de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  de peso máximo  $\lambda$ , y  $v_+$  un vector de peso máximo. Entonces:*

1.  $M(\lambda)$  es irreducible si y solo si  $\lambda(h) \notin \mathbf{N}$ .
2. Si  $\lambda(h) \in \mathbf{N}$ ,  $N(\lambda)$  es un módulo de Verma, con generador  $f^{\lambda(h)+1} v_+$  y peso más alto  $\lambda - (\lambda(h) + 1)\alpha$ . El módulo irreducible  $L(\lambda)$  es de dimensión finita  $\lambda(h) + 1$ , y es el único módulo cociente no trivial de  $M(\lambda)$ .

Daremos algunas ideas sobre la demostración de este teorema.

Sea  $a = \lambda(h)$ .  $M(\lambda)$  será irreducible si no tiene submódulos propios. Como hemos visto antes, los submódulos propios están asociados con los números naturales que verifican la ecuación:  $ef^{n_0} v_+ = 0$ . Pero hemos calculado cuanto vale esta expresión:

$$ef^{n_0} v_+ = n_0(a - n_0 + 1)f^{n_0-1} v_+ = 0 \quad (8.55)$$

que implica:

$$n_0(a - n_0 + 1) = 0 \quad (8.56)$$

Por lo tanto, como  $n_0 \in \mathbf{N}$ , se deduce que  $a \in \mathbf{N}$ . El módulo es irreducible si esto no es así. Si el módulo es reducible, es decir si  $a$  es un número natural, sólo tiene un submódulo propio, pues  $n_0$  queda unívocamente determinado por  $a$ . Luego solo existe un módulo  $N(\lambda)$ , que es generado por  $f^{n_0} v_+$ , donde  $n_0 = a + 1$ , y que, por supuesto, es maximal. Podemos calcular el peso (máximo) asociado a este vector:

$$hf^{a+1} v_+ = (a - 2(a + 1))f^{a+1} v_+ = -(a + 2)f^{a+1} v_+ \quad (8.57)$$

es decir  $N(\lambda)$  es un módulo de Verma con peso máximo:

$$N(\lambda) = M(\lambda - (a + 1)\alpha) \quad (8.58)$$

El cociente del módulo de Verma  $M(\lambda)$  por su submódulo maximal  $N(\lambda)$ , es un módulo irreducible  $L(\lambda)$  de dimensión finita, igual a  $a + 1$ .

La estructura de pesos es:

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & \text{Peso más alto de } M(\lambda), \lambda(h) = a \in \mathbb{N} \\ \downarrow & & \\ a - 2 & & \\ \downarrow & & \\ \vdots & & \\ \downarrow & & \\ -a & & \\ \downarrow & & \\ -a - 2 & \longrightarrow & \text{peso más alto del submódulo propio maximal } N(\lambda) \\ -a - 4 & & \\ \vdots & & \end{array}$$

y por tanto, al dividir  $M(\lambda)$  entre  $N(\lambda)$  obtenemos un módulo irreducible de dimensión finita igual a  $a + 1$ .

## 8.5. Representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Usando las reglas de conmutación de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  podemos escribir la forma explícita de las representaciones irreducibles de dimensión finita de esta álgebra. Para ello, elegimos como base del espacio vectorial, los vectores peso:

$$h|m\rangle = m|m\rangle, \quad m = a, a - 2, \dots, -a + 2, -a \quad (8.59)$$

Se supone que el espacio vectorial está dotado de un producto escalar, con respecto al cual, el operador que representa a  $h$  es autoadjunto, y los operadores que representan a  $e$  y  $f$  son adjuntos uno del otro. Debido a que los vectores de la base corresponden a distintos autovalores, forman una base ortogonal en el espacio, que supondremos normalizada.

El producto escalar de un vector  $f^n|a\rangle$  consigo mismo es:

$$\langle a|e^n f^n|a\rangle = |c_n|^2 \quad (8.60)$$

donde

$$f^n|a\rangle = c_n|a - 2n\rangle \quad (8.61)$$

pues los subespacios de pesos son unidimensionales, y los vectores de la base están normalizados. Calculamos una relación de recurrencia entre los  $c_n$ :

$$|c_{n+1}|^2 = \langle a|e^{n+1} f^{n+1}|a\rangle \quad (8.62)$$

y usando:

$$e f^{n+1}|a\rangle = (n + 1)(a - n) f^n|a\rangle \quad (8.63)$$

obtenemos:

$$|c_{n+1}|^2 = (n + 1)(a - n) \langle a|e^n f^n|a\rangle = |c_n|^2 (n + 1)(a - n) \quad (8.64)$$

El primer término de esta serie se calcula fácilmente:

$$f|a\rangle = c_1|a-2\rangle \quad (8.65)$$

$$\langle a|ef|a\rangle = a\langle a|a\rangle = a|c_1|^2 \quad (8.66)$$

De aquí se deduce toda la serie. Tomando  $c_1$  real positivo,

$$\begin{aligned} c_1 &= a \\ c_2 &= \sqrt{2a(a-1)} \\ &\dots \\ c_n &= \sqrt{n!a(a-1)\dots(a-n+1)} \end{aligned}$$

La acción del operador  $f$  se calcula ahora fácilmente:

$$f|a-2n\rangle = \frac{1}{c_n}f^{n+1}|a\rangle = \frac{c_{n+1}}{c_n}|a-2(n+1)\rangle \quad (8.67)$$

y el cociente de dos  $c_n$  consecutivos es:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left( \frac{(n+1)!a(a-1)\dots(a-n+1)(a-n)}{n!a(a-1)\dots(a-n+2)(a-n+1)} \right)^{1/2} \quad (8.68)$$

de donde:

$$f|a-2n\rangle = \sqrt{(n+1)(a-n)}|a-2(n+1)\rangle \quad (8.69)$$

La anterior expresión se suele escribir (poniendo  $a-2n=m$ ):

$$f|m\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(a-m+2)(a+m)}|m-2\rangle \quad (8.70)$$

El cálculo del otro operador es ahora muy sencillo:

$$ef^n|a\rangle = n(a-n+1)f^{n-1}|a\rangle \quad (8.71)$$

De los cálculos anteriores:

$$f^{n-1}|a\rangle = c_{n-1}|a-2(n-1)\rangle \quad (8.72)$$

y por lo tanto:

$$e|a-2n\rangle = \frac{c_{n-1}}{c_n}n(a-n+1)|a-2(n-1)\rangle \quad (8.73)$$

y usando el coeficiente calculado anteriormente:

$$e|a-2n\rangle = \sqrt{n(a-n+1)}|a-2(n-1)\rangle \quad (8.74)$$

o en la notación de  $m$ :

$$e|m\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(a-m)(a+m+2)}|m+2\rangle \quad (8.75)$$

expresión que junto con las de  $e$  y  $h$  nos dan la representación para cualquier número natural  $a$ .

## Capítulo 9

# Representaciones de álgebras de Lie semisimples

U

Las representaciones de dimensión finita de álgebras de Lie simples complejas son muy sencillas de estudiar. Todas ellas tienen un peso más alto y una estructura de órbitas según el grupo de Weyl correspondiente que permite su análisis de una forma sencilla.

### 9.1. Pesos fundamentales

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión  $n$  y rango  $l$ , y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan. Sea  $\Delta$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  y  $\Pi$  un sistema de raíces simples relativos a la subálgebra  $\mathfrak{h}$ :

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \quad (9.1)$$

La matriz de Cartan de  $\mathfrak{g}$  es:

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \quad (9.2)$$

y en la representación adjunta se tiene:

$$[h_i, e_j] = \alpha_j(h_i)e_j = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle e_j \quad (9.3)$$

Si se toma el sistema de raíces simples como base del sistema de raíces, las coordenadas de éstas serán:  $\alpha_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , pero como veremos a continuación, usaremos una base más conveniente. Para ello, supongamos que las coordenadas de las raíces simples son las filas de la matriz de Cartan correspondiente:

$$\alpha_i = (\langle \alpha_i, \alpha_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_i, \alpha_l \rangle), \quad i = 1, \dots, l \quad (9.4)$$

En la representación adjunta, los pesos son las raíces, y como ya sabemos, el retículo de raíces está contenido en el de pesos. Llamaremos pesos fundamentales a los de la base en la cual las raíces tienen las coordenadas anteriores:

$$\omega_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, l \quad (9.5)$$

es decir:

$$\omega_i(h_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, l \quad (9.6)$$

Nótese que esta definición de  $\omega$  como base dual de la base elegida en la subálgebra de Cartan implica que las coordenadas de las raíces simples son las filas de la matriz de Cartan:

$$\alpha_i(h_j) = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = a_{ij} = \sum_{k=1}^l \lambda_{ik} \omega_k(h_j) = \lambda_{ij} \quad (9.7)$$

Los números  $\lambda(h_i)$  son simplemente las coordenadas del peso  $\lambda$  en la base de pesos fundamentales.

El siguiente teorema caracteriza las representaciones de dimensión finita de las álgebras de Lie simples:

**Teorema 9.1** *Si  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo irreducible de dimensión finita, entonces, si  $\lambda$  es su peso máximo:*

$$\lambda(h_i) \in \mathbf{N}, \quad i = 1, \dots, l \quad (9.8)$$

Téngase en cuenta que los módulos irreducibles de dimensión finita de un álgebra de Lie semi-simple tienen un peso más alto. Basta considerar las subálgebras de tipo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  que se pueden construir sobre las raíces simples.

Se dice que un peso es dominante si  $\lambda(h_i)$  es un número entero positivo. El conjunto de los pesos enteros (es decir, aquellos para los que  $\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}$ ), es un retículo de  $\mathfrak{h}^*$ , que incluye al retículo de las raíces y por supuesto a los pesos dominantes. Los pesos dominantes caracterizan las órbitas del grupo de Weyl dentro de los pesos de una representación:

**Teorema 9.2** *Si  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  es un peso dominante, el  $\mathfrak{g}$ -módulo irreducible que lo tiene como peso más alto es de dimensión finita. Además los pesos son permutados por el grupo de Weyl (es decir, el grupo de Weyl deja invariante el sistema de pesos) y*

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma(\mu)} \quad (9.9)$$

donde  $\sigma$  es un elemento del grupo de Weyl y  $\mu$  un peso del sistema que genera  $\lambda$ .

Los pesos más altos son dominantes, pero en un sistema de pesos puede haber más de un peso dominante. Su importancia estriba en que el grupo de Weyl no actúa transitivamente en el sistema de pesos generado por un peso dominante  $\lambda$ . En cada órbita, todos los subespacios de pesos tienen la misma dimensión y sólo existe un peso dominante.

## 9.2. Construcción de los sistemas de pesos

Supongamos que  $\lambda$  es un peso dominante de un álgebra de Lie simple de rango  $l$ . Dada una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  sea  $\Pi$  el sistema de raíces simples correspondiente. Los pesos de esta representación se obtienen de  $\lambda$  restando combinaciones lineales de raíces simples, es decir, el retículo de raíces con coeficientes positivos:

$$\lambda - Q_+ \quad (9.10)$$

Equivalentemente, se desciende por el diagrama de pesos (o por el  $\mathfrak{g}$ -módulo asociado), aplicando los operadores de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ , es decir los productos de los operadores  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Como cada coordenada de  $\lambda$  está asociada a una raíz de  $\mathfrak{g}$ , el procedimiento es el siguiente:

Sea  $\lambda_k$  la coordenada  $k$ -ésima del peso  $\lambda$ . De acuerdo con la teoría de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , si  $\lambda_k > 0$ , este peso genera un multiplete de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  de dimensión  $\lambda_k + 1$ , asociado a la raíz  $\alpha_k$ . Podemos obtener

por tanto los siguientes pesos:

$$\begin{array}{c}
 \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_l) \\
 \downarrow \\
 \lambda - \alpha_k \\
 \downarrow \\
 \lambda - 2\alpha_k \\
 \downarrow \\
 \vdots \\
 \downarrow \\
 \lambda - \lambda_k \alpha_k = (\lambda'_1, \dots, -\lambda_k, \dots, \lambda'_l)
 \end{array} \tag{9.11}$$

pues la coordenada  $k$ -ésima de  $\alpha_k$  es necesariamente igual a 2. En el módulo  $V$  tenemos que, si  $v_+$  es el vector de peso más alto,  $f_k v_+$  tiene peso  $\lambda - \alpha_k$  etc.:

$$\{v_+, f_k v_+, f_k^2 v_+, \dots, f_k^{\lambda_k} v_+\} \tag{9.12}$$

forman una base para un representación de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  de dimensión  $\lambda_k + 1$  y peso más alto  $\lambda_k$ .

Si en el proceso aparecen en otras coordenadas, distintas de la  $k$ -ésima, números positivos, se pueden aplicar los operadores  $f_j$  con  $j \neq k$  y obtener nuevas cadenas que llevan a multipletes de otros  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .

#### Ejemplo 9.4

$A_2$ .

$A_2$  tiene dos representaciones fundamentales, no conjugadas (relacionadas sin embargo por un automorfismo externo). con pesos máximos:  $\omega_1 = (1, 0)$  y  $\omega_2 = (0, 1)$ . Ambas son de dimensión 3 (la representación 3, quark y  $\bar{3}$ , antiquark). Los diagramas de pesos correspondientes son:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 1\ 0 & & 0\ 1 \\
 \downarrow & \swarrow & & \searrow & \\
 1 & \bar{1}\ 1 & & & 1\ \bar{1} \\
 \downarrow & \searrow & & \swarrow & \\
 2 & & 0\ \bar{1} & & \bar{1}\ 0
 \end{array} \tag{9.13}$$

Los números de la primera columna representan los niveles en los que se encuentran los pesos. Una barra sobre un número es un signo menos. La descomposición de los módulos de estas dos representaciones en espacios de pesos es:

$$\begin{aligned}
 V_3 &= V_{10} \oplus V_{\bar{1}1} \oplus V_{0\bar{1}} \\
 \bar{V}_3 &= V_{01} \oplus V_{1\bar{1}} \oplus V_{\bar{1}0}
 \end{aligned}$$

y la dimensión de cada espacio de pesos es 1. Es inmediato construir una base adaptada a esta descomposición. Para la representación (01):

$$v_+, f_1 v_+, f_2 f_1 v_+ \tag{9.14}$$

donde  $e_i v_+ = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Podemos denotar a estos vectores por sus pesos y suponerlos normalizados:

$$|10\rangle, |\bar{1}1\rangle, |0\bar{1}\rangle \tag{9.15}$$

con lo que el cálculo de las matrices de la representación de  $A_2$  de peso máximo (1, 0) es en esta base:

$$h_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \bar{1} & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \bar{1} \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

Además,  $|\bar{1}1\rangle = kf_1|10\rangle$ , donde  $k$  es una constante de normalización que en este caso es 1 (ver como se calcula en el caso de  $A_1$ ). Por tanto:

$$\begin{aligned} f_1|10\rangle &= |\bar{1}1\rangle \\ f_2|\bar{1}1\rangle &= |0\bar{1}\rangle \end{aligned}$$

y se tiene:

$$f_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

calculándose de forma similar los demás elementos de la base.

En estos dos ejemplos sólo existe una órbita del grupo de Weyl. No hay más pesos dominantes que el más alto.

Veamos ahora los pesos de la representación adjunta de  $A_2$ . El peso más alto es  $(1, 1)$ , la dimensión es 8 y el diagrama es:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 1\ 1 \\ & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\ & & 1 & \bar{1}\ 2 & & 2\bar{1} \\ & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\ & & 2 & & 0\ 0 & \\ & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\ & & 3 & \bar{1}\ 2 & & 2\ \bar{1} \\ & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\ & & 4 & & \bar{1}\ \bar{1} & \end{array} \tag{9.18}$$

En este caso tenemos dos órbitas del grupo de Weyl. En la primera, a la que pertenece el peso más alto  $(1, 1)$ , todos los subespacios tienen dimensión 1. En la segunda, que solo tiene un peso, el  $(0, 0)$ , la dimensión es 2. Todos los pesos, salvo el  $(0, 0)$  corresponden a las raíces de  $A_2$ , y la dimensión del subespacio de peso  $(0, 0)$  es justamente el rango del álgebra. El peso más alto es la raíz máxima del álgebra:  $\alpha_1 + \alpha_2$ . La situación es la misma para todas las representaciones adjuntas de las álgebras simples. No es tan fácil buscar una base en este caso, aunque veremos posteriormente como hacerlo de una forma sistemática.

Veamos otro ejemplo: la representación de peso más alto  $(2, 0)$  (dimensión 6).

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 2\ 0 \\ & & \downarrow & & \swarrow \\ & & 1 & & 0\ 1 \\ & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\ & & 2 & \bar{2}\ 2 & & 1\ \bar{1} \\ & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\ & & 3 & & \bar{1}\ 0 & \\ & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\ & & 4 & & & 0\ \bar{2} \end{array} \tag{9.19}$$

Hay dos órbitas del grupo de Weyl:

1. La primera contiene los pesos:  $(2, 0)$ ,  $(\bar{2}2)$ ,  $(0, \bar{2})$
2. La segunda contiene los pesos:  $(0, 1)$ ,  $(1, \bar{1})$ ,  $(\bar{1}, 0)$  que es la representación estudiada en primer lugar.

Todos los subespacios tiene dimensión igual a 1 (es bastante sencillo ver que el subespacio de peso  $(0, 1)$  tiene dimensión 1, pues su único vector linealmente independiente es  $f_1|20\rangle$ ).

El último ejemplo es la representación de peso más alto  $(2, 1)$  (dimensión 15).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & & & 2\ 1 \\
 \downarrow & & & & & & \swarrow & \searrow \\
 1 & & & & & & 0\ 2 & & & & 3\ \bar{1} \\
 \downarrow & & & & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow \\
 2 & & & & & & \bar{2}\ 3 & & & & 1\ 0 & & \\
 \downarrow & & & & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow \\
 3 & & & & & & \bar{1}\ 1 & & & & 2\ \bar{2} & & \\
 \downarrow & & & & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow \\
 4 & & & & & & \bar{3}\ 2 & & & & 0\ \bar{1} & & \\
 \downarrow & & & & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow \\
 5 & & & & & & \bar{2}\ 1 & & & & 1\ \bar{3} & & \\
 \downarrow & & & & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow \\
 6 & & & & & & \bar{1}\ \bar{2} & & & & & & 
 \end{array} \tag{9.20}$$

### 9.3. Diagramas de pesos

Si elegimos en el espacio de pesos una base cartesiana, podemos dibujar, al igual que se hace con las raíces, los diagramas de pesos de representaciones de álgebras de Lie simples. Los diagramas son triviales para  $A_1$  (la única álgebra simple de rango 1) y no es fácil representarlos cuando el rango es mayor que tres. Nos limitaremos a unos ejemplos en rango 2, concretamente para  $A_2$ .

En una base cartesiana (ortonormal en  $\mathbf{R}^2$ ), las raíces vienen dadas por:

$$\alpha_1 = (2, 0), \quad \alpha_2 = (-1, \sqrt{3}) \tag{9.21}$$

pues tienen longitud 2 y forman un ángulo  $\pi/3$ . Como en la base de pesos fundamentales se tenía:

$$\alpha_1 = (2, -1), \quad \alpha_2 = (-1, 2) \tag{9.22}$$

no es difícil llegar a la conclusión de que los pesos fundamentales en la base de raíces simples son:

$$\omega_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \omega_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \tag{9.23}$$

y en la base cartesiana:

$$\omega_1 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \omega_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \tag{9.24}$$

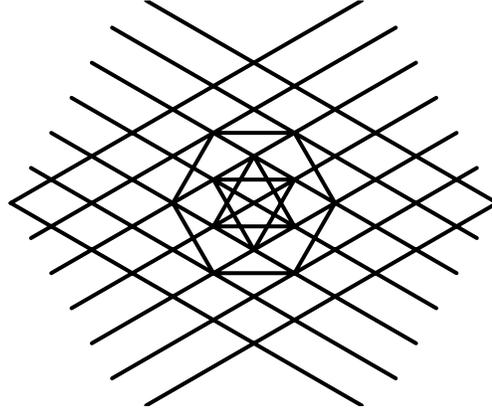
Por tanto, los pesos de algunas de las representaciones de  $A_2$  son en esta base:

$$(1, 0) \rightarrow \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \tag{9.25}$$

$$(0, 2) \rightarrow \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{9.26}$$

### 9.4. Acción del grupo de Weyl en los diagramas de pesos

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra semisimple y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan, a la que está asociado un sistema de raíces simples:  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  y un matriz de Cartan  $A$ .

Figura 9.1: Retículo de pesos de  $A_2$ 

El grupo de Weyl está generado por las reflexiones asociadas a las raíces simples, que en la base de pesos fundamentales pueden escribirse así:

$$r_i(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha_i \rangle \alpha_i, \quad i = 1, \dots, l \quad (9.27)$$

Es claro que podemos definir las mismas reflexiones sobre los pesos:

$$r_i(m) = \alpha - \langle m, \alpha_i \rangle \alpha_i. \quad \langle m, \alpha_i \rangle = \frac{2(m, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (9.28)$$

El peso  $m$  puede ponerse como combinación lineal de raíces simples o de pesos fundamentales:

$$m = \sum_{i=1}^l \tilde{m}_i \alpha_i = \sum_{i=1}^l m_i \omega_i \quad (9.29)$$

y por lo tanto,  $\langle m, \alpha_i \rangle$  es muy sencillo de calcular:

$$\langle m, \alpha_i \rangle = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \left( \sum_{j=1}^l \tilde{m}_j \frac{2\alpha_j, \alpha_i}{\alpha_i, \alpha_i} \right) = \sum_{j=1}^l \tilde{m}_j (\alpha_j, \alpha_i) = \sum_{j=1}^l \tilde{m}_j a_{ji} \quad (9.30)$$

pero:

$$m = \sum_{i=1}^l \tilde{m}_i \sum_{j=1}^l a_{ij} \omega_j \quad (9.31)$$

de donde se deduce:

$$m_i = \sum_{j=1}^l \tilde{m}_j a_{ji} \quad (9.32)$$

y por tanto la reflexión es:

$$r_i(m) = \alpha - m_i \alpha_i \quad (9.33)$$

De esta expresión se deduce fácilmente que cuando se aplica una reflexión  $r_i$  a un peso cuya  $i$ -ésima coordenada es el principio de un multiplete de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  se obtiene el peso correspondiente al final del multiplete. En  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  es obvio:

$$r(m) = m - \alpha(h)m = -m \quad (9.34)$$

pues  $\alpha(h) = 2$ .

Dada cualquier representación irreducible de dimensión finita de un álgebra de Lie simple, existe un elemento del grupo de Weyl que lleva el peso más alto en el más bajo. Se trata de una involución que tiene una cierta expresión en término de raíces simples, aunque ésta no sea única. Sin embargo, siempre se puede poner como el producto de un número mínimo de reflexiones simples, que es igual al número de raíces positivas del álgebra.

### Ejemplo 9.5

$A_1$ . En este caso la involución es simplemente la reflexión asociada a la única raíz simple del álgebra:

$$\begin{array}{ccc} m & & \\ \downarrow & r & \\ -m & & \end{array} \quad (9.35)$$

$A_2$ . La involución es el producto de tres reflexiones asociadas a las raíces simples del álgebra  $r_1, r_2$ :

$$\begin{array}{ccc} (m_1, m_2) & & \\ \downarrow & r_1 & \\ (-m_1, m_1 + m_2) & & \\ \downarrow & r_2 & \\ (m_2, -m_1 - m_2) & & \\ \downarrow & r_1 & \\ (-m_2, -m_1) & & \end{array} \quad (9.36)$$

y la involución es

$$\Omega = r_1 r_2 r_1 \quad (9.37)$$

Obviamente podemos empezar por  $r_2$  y obtener la involución:

$$\Omega = r_2 r_1 r_2 \quad (9.38)$$

No hay ninguna otra posibilidad de escribir la involución mediante el producto de tres reflexiones. Sin embargo, para rango superior la situación es más complicada.

### Ejemplo 9.6

$A_3$

$$\begin{array}{ccc} (m_1, m_2, m_3) & & \\ \downarrow & r_1 & \\ (-m_1, m_1 + m_2, m_3) & & \\ \downarrow & r_2 & \\ (m_2, -m_1 - m_2, m_1 + m_2 + m_3) & & \\ \downarrow & r_1 & \\ (-m_2, -m_1, m_1 + m_2 + m_3) & & \\ \downarrow & r_3 & \\ (-m_2, m_2 + m_3, -m_1 - m_2 - m_3) & & \\ \downarrow & r_2 & \\ (m_3, -m_2 - m_3, -m_1) & & \\ \downarrow & r_1 & \\ (-m_3, -m_2, -m_1) & & \end{array} \quad (9.39)$$

y la involución es

$$\Omega = r_1 r_2 r_3 r_1 r_2 r_1 \quad (9.40)$$

En general para  $A_n$  se puede elegir como descomposición de la involución la siguiente:

$$\Omega = r_1 r_2 \dots r_n r_1 \dots r_{n-1} \dots r_1 \dots r_2 r_1 \quad (9.41)$$

Veamos que ocurre en el caso de las álgebras  $B_n$ .

**Ejemplo 9.7**

$B_2$

La matriz de Cartan es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

y la involución es:

$$\begin{array}{ccc} (m_1, m_2) & & \\ \downarrow & r_1 & \\ (-m_1, 2m_1 + m_2) & & \\ \downarrow & r_2 & \\ (m_1 + m_2, -2m_1 - m_2) & & \\ \downarrow & r_1 & \\ (-m_1 - m_2, m_2) & & \\ \downarrow & r_2 & \\ (-m_1, -m_2) & & \end{array} \quad (9.43)$$

es decir:

$$\Omega = (r_2 r_1)^2 \quad (9.44)$$

No es difícil comprobar que en general, la involución para  $B_n$  puede escribirse como:

$$\Omega = (r_1 \dots r_n)^n \quad (9.45)$$

Como veremos más adelante estas expresiones son fundamentales en el cálculo de las bases de Verma de los espacios de representación. Similares expresiones pueden calcularse para las series  $C_n$  y  $D_n$  y para el álgebra excepcional  $G_2$ . Para las demás álgebras excepcionales, las expresiones de la involución determinadas hasta ahora no permiten el cálculo de las bases de Verma.

# Capítulo 10

## Bases en espacios de representación

La determinación de bases de los espacios de representación es de mucho interés en las aplicaciones. Veremos cómo calcular las multiplicidades de los pesos y la dimensión de las representaciones.

### 10.1. Fórmulas de multiplicidad

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Sea  $V(\lambda)$  y  $\mathfrak{g}$ -módulo de peso más alto  $\lambda$ . Si  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  es un peso de esta representación, se denomina multiplicidad de  $\mu$  a la dimensión del espacio de pesos asociado a  $\mu$ ,  $V(\lambda)_\mu$ . El cálculo de las multiplicidades es fundamental en la teoría de representaciones. Existen varias formas de hallarlas, pero nos limitaremos a exponer las ideas básicas de una de ellas, la fórmula de Freudenthal (para detalles ver[4]).

Dada un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V(\lambda)$ , sea  $\mu$  un peso. La multiplicidad  $m(\mu)$  verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta))m(\mu) = 2 \sum_{\alpha > 0} \sum_{k=1}^{\infty} m(\mu + k\alpha)(\mu + k\alpha, \alpha) \quad (10.1)$$

donde  $\delta$  es la semisuma de las raíces positivas y  $(\ , \ )$  es una forma bilineal en el espacio de pesos, que proviene por dualidad de la restricción de la forma de Killing a la subálgebra de Cartan.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de esta fórmula.

#### Ejemplo 10.1

Veamos en  $A_2$  algunos casos sencillos. En primer lugar, el producto escalar de las raíces simples se calcula fácilmente. Si normalizamos la forma bilineal por:

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = 2 \quad (10.2)$$

usando la matriz de Cartan del álgebra obtenemos:

$$(\alpha_1, \alpha_2) = -1 \quad (10.3)$$

Los productos escalares de los pesos fundamentales son también muy sencillos de calcular:

$$(\omega_1, \omega_1) = (\omega_2, \omega_2) = \frac{2}{3}, \quad (\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{3} \quad (10.4)$$

y la semisuma de raíces positivas es:

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)) = (1, 1) \quad (10.5)$$

Tomemos por ejemplo la representación adjunta, de peso más alto  $(1, 1)$ . Se tiene:

$$(\lambda + \delta, \lambda + \delta) = 8 \quad (10.6)$$

Si un peso  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  lo es de esta representación, la fórmula de Freudenthal es:

$$(8 - \|(\mu_1 + 1, \mu_2 + 1)\|^2)m(\mu) = 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} m(\mu + k\alpha_1)(\mu + k\alpha_1, \alpha_1) + \sum_{k=1}^{\infty} m(\mu + k\alpha_2)(\mu + k\alpha_2, \alpha_2) + \sum_{k=1}^{\infty} m(\mu + k\alpha_3)(\mu + k\alpha_3, \alpha_3)\right)$$

donde  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ . El peso más alto  $(1, 1)$  tiene multiplicidad 1, al igual que todos los de su órbita. Queremos hallar la multiplicidad del peso  $(0, 0)$ . Se tiene:

$$(8 - \|(1, 1)\|^2)m((0, 0)) = 2\|\alpha_1\|^2\left(\sum_{k=1}^{\infty} km(k\alpha_1) + \sum_{k=1}^{\infty} km(k\alpha_2) + \sum_{k=1}^{\infty} km(k\alpha_3)\right) \quad (10.7)$$

puesto que todas las raíces tiene la misma longitud:

$$\|\alpha_1\|^2 = 2 \quad (10.8)$$

y:

$$\|(1, 1)\|^2 = (1, 1) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (1, 1) = 2 \quad (10.9)$$

La ecuación que tenemos que resolver es:

$$6m((0, 0)) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} k(m(k\alpha_1) + m(k\alpha_2) + m(k\alpha_3)) \quad (10.10)$$

Pero esta suma solo da términos distintos de cero cuando  $k = 1$  (cuando no se tiene un peso, la multiplicidad es cero). Si  $k = 1$ , se obtienen tres pesos, correspondientes a  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ , de multiplicidad 1, luego:

$$6m((0, 0)) = 12 \quad (10.11)$$

y por tanto, la multiplicidad del peso  $(0, 0)$  es 2.

## 10.2. Bases de Verma

Como ya hemos visto, los vectores peso de los espacios de representación de las álgebras simples se pueden obtener a partir del peso más alto aplicando los operadores de descenso  $f_i$ . Cuando la multiplicidad de los espacios de pesos es 1, este procedimiento no presenta ningún problema. Puede haber muchas formas de llegar mediante estos operadores a un determinado espacio de pesos, pero todas ellas llevan a vectores que son proporcionales. Sin embargo, si la dimensión es mayor que uno, de entre todas esas maneras habrá que seleccionar las que proporcionen una base de ese subespacio y eso no siempre es sencillo. El procedimiento de Verma nos da una forma de escoger las bases en estos espacios de representación.

### Ejemplo 10.2

Consideramos nuevamente la representación adjunta de  $A_2$ . Si denotamos por  $|11\rangle$  un vector de norma 1 correspondiente al peso más alto, los otros vectores, que nos darán una base del módulo correspondiente son:

$$f_1|11\rangle, \quad f_2|11\rangle \quad (10.12)$$

$$f_2 f_1 |11\rangle, \quad f_1 f_2 |11\rangle \quad (10.13)$$

$$f_2 f_1 f_2 |11\rangle \approx f_2^2 f_1 |11\rangle, \quad f_1^2 f_2 |11\rangle \approx f_1 f_2 f_1 |11\rangle \quad (10.14)$$

$$f_1 f_2 f_1 f_2 |11\rangle \approx f_1 f_2^2 f_1 |11\rangle \approx f_2 f_1^2 f_2 |11\rangle \approx f_2 f_1 f_2 f_1 |11\rangle \quad (10.15)$$

En este caso no hay mayores problemas. Solo hay dos formas de llegar al subespacio de peso  $(0, 0)$ , que deben corresponder a los dos vectores linealmente independientes que se pueden encontrar en él. En general, los vectores obtenidos de esta forma no son ortogonales (salvo si corresponden a pesos diferentes).

Las bases de Verma para  $A_2$  se construyen aplicando los operadores:

$$f_1^{a_1} f_2^{a_2} f_1^{a_3} \quad (10.16)$$

al vector de peso más alto  $(m_1, m_2)$ , donde los exponentes  $a_1, a_2, a_3$ , verifican las desigualdades siguientes:

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq m_1 \\ 0 \leq a_2 \leq m_2 + a_1 \\ 0 \leq a_3 \leq \min(m_2, a_2) \end{cases} \quad (10.17)$$

### Ejemplo 10.3

Tomemos el caso anterior de la representación adjunta de  $A_2$ . No es difícil extraer de las desigualdades de Verma:

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq 1 \\ 0 \leq a_2 \leq 1 + a_1 \\ 0 \leq a_3 \leq \min(1, a_2) \end{cases} \quad (10.18)$$

la siguiente tabla:

$a_1$	$a_2$	$a_3$
0	0	0
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0
1	1	1
1	2	0
1	2	1

que nos da una base del espacio de representación, con dos vectores de peso  $(0, 0)$  linealmente independientes:

$$f_1 f_2 |11\rangle, \quad f_2 f_1 |11\rangle \quad (10.19)$$

La construcción de las bases de Verma descansa en la elección de una descomposición de la involución de grupo de Weyl que lleva el peso más alto en el más bajo y en unas reglas de cálculo sencillas, pero que, sin embargo, no aseguran que se pueda llegar a las desigualdades, dependiendo de manera vital de la elección de la descomposición citada. Veamos este cálculo en un ejemplo.

### Ejemplo 10.4

$A_4$

Como hemos visto antes, la involución se puede escribir como:

$$\Omega = r_1 r_2 r_3 r_4 r_1 r_2 r_3 r_1 r_2 r_1 \quad (10.20)$$

y por lo tanto los operadores son:

$$f_1^{a_{10}} f_2^{a_9} f_3^{a_8} f_4^{a_7} f_1^{a_6} f_2^{a_5} f_3^{a_4} f_1^{a_3} f_2^{a_2} f_1^{a_1} \quad (10.21)$$

Consideremos una representación de dimensión finita de peso  $\Lambda = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ .

La primera desigualdad es claramente:

$$0 \leq a_1 \leq m_1 \quad (10.22)$$

Para calcular la segunda seguimos la siguiente idea. Al restar  $a_1$  veces  $\alpha_1$ , la coordenada  $m_2$  se ve aumentada en  $a_1$  unidades, por tanto:

$$0 \leq a_2 \leq m_2 + a_1 \quad (10.23)$$

La tercera desigualdad no es tan fácil de calcular. De hecho, su explicación requiere conceptos más allá del alcance de este curso (ver [10]).

Veamos cuanto vale la acción de  $\Lambda - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2$  sobre  $h_1$ :

$$(\Lambda - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2)(h_1) = \Lambda(h_1) - a_1\alpha_1(h_1) - a_2\alpha_2(h_1) = m_1 - 2a_1 + a_2 \quad (10.24)$$

En esta fórmula sustituimos  $a_1$  por la siguiente expresión (uno de los pasos más misteriosos del procedimiento):

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2} (\text{máx}(a_1) + \text{mín}(a_1)) \quad (10.25)$$

Como tenemos dos desigualdades que acotan a  $a_1$  no es difícil calcular este valor. El máximo de  $a_1$  es  $m_1$ , pero su mínimo no es cero, pues  $a_1 \geq a_2 - m_2$ . Por tanto:

$$a_1 \geq \text{máx}(0, a_2 - m_2) \quad (10.26)$$

y podemos calcular:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2} (m_1 + \text{máx}(0, a_2 - m_2)) \quad (10.27)$$

Volvamos a la acción de  $\Lambda - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2$  sobre  $h_1$ :

$$m_1 - 2\bar{a}_1 + a_2 = m_1 - m_1 - \text{máx}(0, a_2 - m_2) + a_2 = a_2 + \text{mín}(0, m_2 - a_2) = \text{mín}(a_2, m_2) \quad (10.28)$$

y la acotación buscada para  $a_3$  es:

$$0 \leq a_3 \leq \text{mín}(a_2, m_2) \quad (10.29)$$

Las demás desigualdades no ofrecen otras dificultades que las técnicas. Por ejemplo la cuarta:

$$(\Lambda - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - a_3\alpha_1)(h_3) = m_3 + a_2 \quad (10.30)$$

Como no hay raíz  $\alpha_3$  no es preciso cambiar nada (o si se quiere, es la primera vez que aplicamos  $f_3$ ) y la desigualdad es:

$$0 \leq a_4 \leq m_3 + a_2 \quad (10.31)$$

Vayamos a por la quinta:

$$(\Lambda - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - a_3\alpha_1 - a_4\alpha_3)(h_2) = m_2 + a_1 - 2a_2 + a_3 + a_4 \quad (10.32)$$

expresión en la que hay que cambiar  $a_2$  por la media:

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{2} (\text{máx}(a_2) + \text{mín}(a_2)) \quad (10.33)$$

teniendo en cuenta las desigualdades que satisface  $a_2$ . De ellas deducimos:

$$a_2 \geq a_4 - m_3, \quad a_2 \geq 0, \quad a_2 \geq a_3 \quad (10.34)$$

y por tanto:

$$a_2 \geq \text{máx}(0, a_4 - m_3, a_3) \quad (10.35)$$

como por otra parte  $a_2 \leq a_1 + m_2$ , podemos escribir:

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{2} (a_1 + m_2 + \text{máx}(a_4 - m_3, a_3)) \quad (10.36)$$

y en la expresión que nos da la acotación, tenemos, al sustituir  $a_2$  por  $\bar{a}_2$ :

$$\begin{aligned} m_2 + a_2 - 2\bar{a}_2 + a_3 + a_4 &= m_2 + a_1 + a_3 + a_4 - a_1 - m_2 - \text{máx}(a_4 - m_3, a_3) \\ &= a_3 + a_4 + \text{mín}(m_3 - a_4, -a_3) \\ &= \text{mín}(m_3 + a_3, a_4) \end{aligned}$$

y la quinta desigualdad es:

$$0 \leq a_5 \leq \text{mín}(a_4, a_3 + m_3) \quad (10.37)$$

La sexta desigualdad se calcula de igual forma (de hecho se puede aprovechar información de los anteriores cálculos) y se obtiene:

$$0 \leq a_6 \leq \text{mín}(a_5, m_3) \quad (10.38)$$

La séptima es mucho más sencilla. Es la primera vez que aplicamos el operador  $f_4$  y por tanto:

$$0 \leq a_7 \leq m_4 + a_4 \quad (10.39)$$

La octava se calcula igual que las otras:

$$0 \leq a_8 \leq \text{mín}(a_7, m_4 + a_5) \quad (10.40)$$

mientras que la novena tiene una dificultad añadida, la necesidad de calcular dos medias. En efecto:

$$(\Lambda - (a_1 + a_3 + a_6)\alpha_1 - (a_2 + a_5)\alpha_2 - (a_4 + a_8)\alpha_3 - a_7\alpha_4)(h_2) = m_2 + a_1 + a_3 + a_6 - 2a_2 - 2a_5 + a_4 + a_8 \quad (10.41)$$

En esta expresión hay que sustituir  $a_2$  y  $a_5$  por sus medias respectivas, que se obtienen de las desigualdades precedentes:

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= \frac{1}{2}(a_1 + m_2 + \text{máx}(a_3, a_4 - m_3)) \\ \bar{a}_5 &= \frac{1}{2}(\text{mín}(a_4, a_3 + m_3) + \text{máx}(a_6, a_8 - m_4)) \end{aligned}$$

y al sustituir obtenemos:

$$0 \leq a_9 \leq \text{mín}(a_8, m_4 + a_6) \quad (10.42)$$

La décima y última no es peor que las demás:

$$0 \leq a_{10} \leq \text{mín}(a_9, m_4) \quad (10.43)$$

Es posible obtener estas expresiones para cualquier  $A_n$ .

Como ejemplo de aplicación en otras series, veamos el sencillo caso de  $B_2$ . Aquí, la expresión de los operadores es:

$$f_1^{a_4} f_2^{a_3} f_1^{a_2} f_2^{a_1} \quad (10.44)$$

y para un peso  $\Lambda = (m_1, m_2)$ , las dos primeras desigualdades son inmediatas:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1 \leq m_2 \\ 0 &\leq a_2 \leq m_1 + a_1 \end{aligned}$$

Para la tercera, empleamos el mismo procedimiento que usamos en  $A_4$ :

$$(\Lambda - a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)(h_2) = m_2 - 2a_1 + 2a_2 \tag{10.45}$$

sustituyendo  $a_1$  por la media:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2}(m_2 + \text{máx}(0, a_2 - m_1)) \tag{10.46}$$

obtenemos:

$$0 \leq a_3 \leq \text{mín}(2a_2, m_1 + a_2) \tag{10.47}$$

Para la cuarta, el procedimiento es el mismo:

$$(\Lambda - (a_1 + a_3)\alpha_2 - a_2\alpha_1)(h_2) = m_1 + a_1 - 2a_2 + a_3 \tag{10.48}$$

y sustituyendo  $a_2$  por la media:

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{2}(m_1 + a_1 + \text{máx}(\frac{1}{2}a_3, a_3 - m_1)) \tag{10.49}$$

deducimos que:

$$0 \leq a_4 \leq \text{mín}(m_1, \frac{1}{2}a_3) \tag{10.50}$$

Por ejemplo para dos representaciones sencillas de  $B_2$ :

**Ejemplo 10.5**

Representación:  $(1, 0)$ :

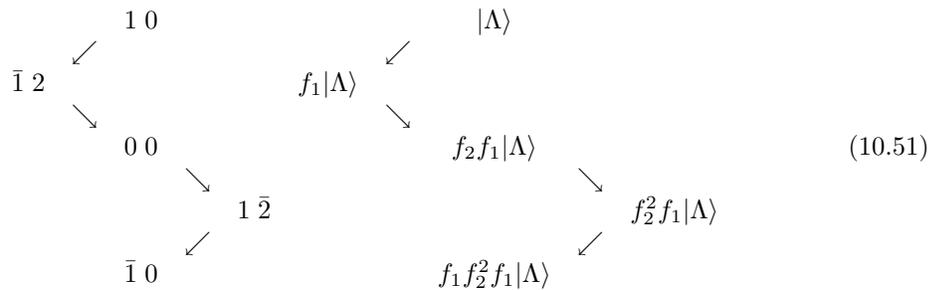
Las desigualdades son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ 0 &\leq a_2 \leq 1 \\ 0 &\leq a_3 \leq \text{mín}(2a_2, a_2 + 1) \\ 0 &\leq a_4 \leq \text{mín}(1, \frac{1}{2}a_3) \end{aligned}$$

y los exponentes:

$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	1	0
1	2	1	0

El diagrama de pesos y los correspondientes vectores son:



Representación:  $(0, 1)$ :  
 Ahora se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1 \leq 1 \\ 0 &\leq a_2 \leq a_1 \\ 0 &\leq a_3 \leq a_2 \\ a_4 &= 0 \end{aligned}$$

los exponentes:

$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1

El diagrama de pesos y los correspondientes vectores son:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0\ 1 & & |\Lambda\rangle \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 1\ \bar{1} & & & & f_2|\Lambda\rangle \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & \bar{1}\ 1 & & f_1f_2|\Lambda\rangle \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & f_2f_1f_2|\Lambda\rangle \\
 & & 0\ \bar{1} & & 
 \end{array} \tag{10.52}$$

### 10.3. Dimensiones de representaciones irreducibles

El cálculo de las dimensiones de las representaciones irreducibles de álgebras de Lie simples se basa en la fórmula de Weyl, que no demostraremos aquí:

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha > 0} \frac{(\Lambda + \delta, \alpha)}{(\delta, \alpha)} \tag{10.53}$$

donde  $\delta$  es la semisuma de las raíces positivas:

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha \tag{10.54}$$

Sin embargo, es posible obtener expresiones más explícitas utilizando bases de pesos fundamentales o cartesianas en el espacio de pesos.

Veamos unos casos sencillos.

#### Ejemplo 10.6

$A_1$ :

En este caso  $\delta = \alpha/2$ , y el peso máximo  $\lambda$  tiene una sola componente en la base de pesos fundamentales:  $\Lambda = (\lambda)$ . Por tanto, la fórmula de Weyl da:

$$\dim V(\Lambda) = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} (\Lambda + \frac{1}{2}\alpha, \alpha) = \frac{2(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} + 1 \tag{10.55}$$

Pero:

$$\lambda = \Lambda(h) = \frac{2(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad (10.56)$$

por lo que la dimensión es:

$$\dim V(\Lambda) = \lambda + 1 \quad (10.57)$$

$A_2$ :

La semisuma de raíces positivas (que son  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ) es ahora:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (10.58)$$

y las coordenadas del peso más alto  $\Lambda$  en la base de pesos fundamentales son  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Por tanto:

$$\dim V(\Lambda) = \frac{(\Lambda + \delta, \alpha_1)}{(\delta, \alpha_1)} \frac{(\Lambda + \delta, \alpha_2)}{(\delta, \alpha_2)} \frac{(\Lambda + \delta, \alpha_3)}{(\delta, \alpha_3)} \quad (10.59)$$

Todas las raíces tiene la misma longitud (llamémosla  $c$ ), y además, de la matriz de Cartan tenemos:

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -1 \quad (10.60)$$

de donde se tiene:

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = c, \quad (\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{c}{2} \quad (10.61)$$

De estas relaciones se obtiene:

$$(\delta, \alpha_1) = (\delta, \alpha_2) = \frac{c}{2}, \quad (\delta, \alpha_3) = c \quad (10.62)$$

y

$$(\Lambda + \delta, \alpha_1) = \frac{c}{2}(\lambda_1 + 1), \quad (\Lambda + \delta, \alpha_2) = \frac{c}{2}(\lambda_2 + 2), \quad (\Lambda + \delta, \alpha_3) = \frac{c}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + 2) \quad (10.63)$$

con lo que la dimensión de la representación es:

$$\dim V(\Lambda) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2) \quad (10.64)$$

Cambiamos ahora de serie y calculemos la dimensión de las representaciones de  $B_2$ :

Las raíces positivas son ahora:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 \quad (10.65)$$

y su semisuma es por tanto:

$$\delta = \frac{3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 \quad (10.66)$$

Si llamamos  $c$  a la longitud al cuadrado de la raíz más larga:

$$(\alpha_1, \alpha_1) = c, \quad (\alpha_2, \alpha_2) = \frac{c}{2}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{c}{2} \quad (10.67)$$

Sustituyendo en la fórmula de Weyl:

$$\dim V(\Lambda) = \frac{1}{6}(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(2\lambda_1 + \lambda_2 + 3)(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \quad (10.68)$$

Finalmente, calculemos la dimensión de las representaciones de la otra álgebra de rango 2,  $G_2$ .

Las raíces positivas son:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \alpha_1 + 3\alpha_2, \quad 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \quad (10.69)$$

y su semisuma es:

$$\delta = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \quad (10.70)$$

Si  $c$  es la longitud al cuadrado de la raíz más larga:

$$(\alpha_1, \alpha_1) = c, \quad (\alpha_2, \alpha_2) = \frac{c}{3}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{c}{3} \quad (10.71)$$

y después de algunos sencillos cálculos:

$$\dim V(\Lambda) = \frac{1}{120}(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(3\lambda_1 + \lambda_2 + 4)(3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)(2\lambda_1 + \lambda_2 + 3) \quad (10.72)$$

Estas formas se pueden dar para una serie completa. Veamos el caso de  $A_n$ . En este caso, las raíces positivas (en número de  $n(n+1)/2$ ) son:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (10.73)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n \quad (10.74)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n \quad (10.75)$$

$$\dots \quad (10.76)$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad (10.77)$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad (10.78)$$

y la semisuma es:

$$\delta = \frac{1}{2}(n\alpha_1 + 2(n-1)\alpha_2 + 3(n-2)\alpha_3 + \dots + (n-1)2\alpha_{n-1} + n\alpha_n) \quad (10.79)$$

En la base de pesos fundamentales:

$$\delta = (1, 1, \dots, 1) \quad (10.80)$$

que es un resultado general. Veamos su demostración. Si aplicamos una reflexión elemental a la semisuma de raíces positivas, el resultado es muy sencillo:

$$\sigma_i(\delta) = \delta - \langle \delta, \alpha_i \rangle \alpha_i = \delta - \alpha_i \quad (10.81)$$

pues la reflexión  $\sigma_i$  cambia entre sí las raíces positivas, excepto  $\alpha_i$  que cambia de signo:

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \alpha_j + \frac{1}{2} \alpha_i \quad (10.82)$$

Por tanto:

$$\langle \delta, \alpha_i \rangle = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.83)$$

y estas son las coordenadas de  $\delta$  en la base de pesos fundamentales.

Volvamos al caso de  $A_n$ . Las raíces son todas de la misma longitud, sea  $(\alpha_i, \alpha_i) = c$ . Por tanto:

$$(\delta, \alpha_i) = \frac{c}{2} \quad (10.84)$$

ya que:

$$(\alpha_i, \alpha_{i\pm 1}) = -\frac{c}{2} \quad (10.85)$$

y es cero en el resto de los casos en que  $i \neq j$ . Como hemos calculado  $\delta$  en función de las raíces simples, basta comprobar que:

$$-m(n - (m - 1)) + 2(m + 1)(n - m) - (m + 2)(n - (m + 1)) = 2 \quad (10.86)$$

Para cualquier otra raíz positiva que no sea una raíz simple, el producto es:

$$(\delta, \alpha) = \frac{kc}{2} \quad (10.87)$$

donde  $k$  es el número de raíces simples que aparecen en  $\alpha$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ , 1 para las raíces simples y  $n$  para la raíz más alta). El número de raíces positivas está distribuido de la forma siguiente:  $n$  raíces simples,  $n - 1$  raíces suma de dos raíces simples, etc. Es decir,  $n - (k - 1)$  raíces formadas por la suma de  $k$  raíces simples.

Calculemos en primer lugar el producto de los denominadores.

$$\prod_{\alpha > 0} (\delta, \alpha) = \left(\frac{c}{2}\right)^n \left(\frac{2c}{2}\right)^{(n-1)} \cdots \left(\frac{(n-1)c}{2}\right)^2 \left(\frac{nc}{2}\right) = \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n k^{n-k+1} \quad (10.88)$$

Sea ahora:  $\alpha = \alpha_q + \alpha_{q+1} + \cdots + \alpha_p$  con  $p - q + 1 = k$ , una raíz positiva y  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un peso máximo de  $A_n$ :

$$(\Lambda + \delta, \alpha) = (\Lambda, \alpha) + \frac{kc}{2} \quad (10.89)$$

Repitiendo lo ya hecho muchas veces, las coordenadas de  $\Lambda$  en la base de pesos fundamentales son:

$$\lambda_i = \frac{2(\Lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (10.90)$$

y por tanto:

$$(\Lambda, \alpha_i) = \frac{c}{2} \lambda_i \quad (10.91)$$

de donde:

$$(\Lambda, \alpha) = \frac{c}{2} (\lambda_q + \cdots + \lambda_p) \quad (10.92)$$

y finalmente:

$$(\Lambda + \delta, \alpha) = \frac{c}{2} (\lambda_q + \cdots + \lambda_p + k) \quad (10.93)$$

siempre con  $k = p - q + 1$ . Ya solo nos queda hacer el producto de los numeradores:

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha > 0} (\Lambda + \delta, \alpha) &= \left(\frac{c}{2}\right)^n (\lambda_1 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) \left(\frac{c}{2}\right)^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + 2) \cdots (\lambda_{n-1} + \lambda_n + 2) \cdots \times \\ &\quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} + n - 1)(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n + n - 1) \left(\frac{c}{2}\right) \times \\ &\quad (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + n) = \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\lambda_1 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) \cdots (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + n) \end{aligned}$$

y dividiendo este resultado por el denominador calculado anteriormente, obtenemos la fórmula general de la dimensión de una representación irreducible de  $A_n$ :

$$\dim V(\Lambda) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n k^{n-k+1}} (\lambda_1 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) (\lambda_1 + \lambda_2 + 2) \cdots (\lambda_{n-1} + \lambda_n + 2) \cdots (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} + n - 1) (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n + n - 1) (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + n) \quad (10.94)$$

# Capítulo 11

## Productos tensoriales de representaciones

Cuando se multiplican tensorialmente dos representaciones irreducibles es decir sus  $\mathfrak{g}$ -módulos asociados, el producto no es en general una representación irreducible. La descomposición en suma de representaciones irreducibles (un tema en el que no entraremos en estas notas, pero que es evidente que se puede hacer en dimensión finita) se llama la serie de Clebsch-Gordan correspondiente. Su cálculo es en general complicado, pero daremos una serie de reglas que lo facilitan y que permiten, al menos en casos sencillos, dar una respuesta rápida.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple y  $\Lambda_1, \Lambda_2$  pesos máximos de dos representaciones con  $\mathfrak{g}$ -módulos  $V_1$  y  $V_2$ . En el producto tensorial  $V_1 \otimes V_2$  actúa una representación de  $\mathfrak{g}$  que se llama producto tensorial de las representaciones en  $V_1$  y  $V_2$ . Concretamente la acción de un elemento de  $\mathfrak{g}$  en el espacio  $V_1 \otimes V_2$  es:

$$x \cdot (v_1 \otimes v_2) = (x \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \cdot v_2) \quad (11.1)$$

como ya hemos visto. De esta forma, los pesos de la representación producto tensorial son simplemente la suma de los pesos de las representaciones que aparecen en el producto. Concretamente, la suma de los pesos más altos  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  es justamente el peso máximo de una de las representaciones que aparecen en el producto (y obviamente, no hay otra representación en el producto con peso mayor que éste). En efecto, si  $|\Lambda_1\rangle$  y  $|\Lambda_2\rangle$  son los vectores asociados a estos pesos más altos, y  $h$  es un elemento del álgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , se tiene:

$$h(|\Lambda_1\rangle \otimes |\Lambda_2\rangle) = (h|\Lambda_1\rangle) \otimes |\Lambda_2\rangle + |\Lambda_1\rangle \otimes (h|\Lambda_2\rangle) = (\Lambda_1 + \Lambda_2)(h)(|\Lambda_1\rangle \otimes |\Lambda_2\rangle) \quad (11.2)$$

El problema es como calcular el resto de las representaciones irreducibles que forman la serie de Clebsch-Gordan. Para ello introduciremos los conceptos de congruencia e índices que nos ayudarán en este cálculo.

### 11.1. Clases de congruencia

Es bien sabido que en  $A_1$  existen dos clases de representaciones, las de peso par y peso impar (spin entero y semientero en la notación más usada en física). Se llaman clases de congruencia. Si se asigna el número 0 a la clase par y el 1 a la impar, se tiene el siguiente resultado:

En la serie de Clebsch-Gordan del producto tensorial de una representación de clase  $a$  por otra de clase  $b$  sólo aparecen representaciones de la clase  $a + b, \text{ mod}(2)$ .

En términos más usados en física, el producto de spins semienteros son spins enteros, el de spin entero por semientero es semientero y el producto de spins enteros es también entero.

Una situación similar aparece en  $A_2$ . Aquí hay tres clases de congruencia (trialidad en la nomenclatura física), denotadas por los números 0, 1, 2 (módulo 3). La representación  $(1, 0)$  es de clase 1, la  $(0, 1)$  de clase 2 y la  $(1, 1)$  de clase 0. La propiedad de los productos tensoriales dada para  $A_1$  se conserva aquí.

El número de clases de congruencia para las distintas álgebras de Lie simples viene dada en la siguiente tabla:

$A_n$	$n + 1$
$B_n$	2
$C_n$	2
$D_n$	4
$E_6$	3
$E_7$	2
$E_8$	1
$F_4$	1
$G_2$	1

El cálculo de la clase de congruencia a la que pertenece una representación dada es sencillo, aunque solo lo haremos aquí para las series  $A_n, B_n$ . Para la serie  $A_n$ , dado una representación de peso más alto  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , basta hallar el número:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n, \quad \text{mod } n + 1 \quad (11.3)$$

En  $B_n$  las clases de congruencia vienen dadas por  $\lambda_n, \text{ mod } 2$ . Para las demás el cálculo es igual de sencillo, aunque las fórmulas varían de unos casos a otros.

Las clases de congruencia se corresponden con los elementos del grupo  $P/Q$ , donde  $P$  es el retículo de pesos y  $Q$  el de raíces. Este es el número de elementos del centro del grupo correspondiente. El índice de  $Q$  en  $P$  es igual al número de clases de congruencia y coincide con el determinante de la matriz de Cartan.

Las clases de congruencia están relacionadas con la forma en que se expresan los pesos en función de las raíces simples. Por ejemplo, para  $A_2$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \\ \omega_2 &= \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 \end{aligned}$$

De esta forma, los pesos  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  se escriben como:

$$\Lambda = \frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{3}\alpha_1 + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3}\alpha_2 \quad (11.4)$$

con lo que los coeficientes de  $\Lambda$  en función de la base de raíces simples son múltiplos de tres (en cuyo caso los coeficientes son enteros), o bien conjugados a 1 o 2 módulo 3 (con más precisión, o bien son ambos múltiplos de 3, o si uno es conjugado a 1, el otro lo es a 2).

## 11.2. Índices de representaciones

Se define el índice de segundo orden de una representación irreducible  $\Lambda$ , de un álgebra simple,  $\mathfrak{g}$ , como:

$$I_\Lambda = \sum_{m \in \Omega(\Lambda)} m^2 \quad (11.5)$$

Para el cálculo del índice es más conveniente usar la siguiente expresión:

$$I_\Lambda = \frac{l}{n} N_\Lambda (K_\Lambda^2 - \delta^2) \quad (11.6)$$

donde  $l$  es el rango del álgebra y  $n$  su dimensión.  $N_\Lambda$  es la dimensión de la representación, y:

$$K_\Lambda = \Lambda + \delta \quad (11.7)$$

siendo  $\delta$  la semisuma de raíces positivas.

Como hemos visto, el sistema de pesos de la representación producto  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  es la suma de los sistemas de pesos de  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$ . Es posible demostrar que existe la siguiente relación entre los índices de las representaciones  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  y los de las representaciones que aparecen en la serie de Clebsch-Gordan:

$$I_{\Lambda_1 \otimes \Lambda_2} = (\dim \Lambda_1)I_{\Lambda_2} + (\dim \Lambda_2)I_{\Lambda_1} = \sum_{\Lambda} I_{\Lambda} \quad (11.8)$$

Esta expresión constituye una relación que ayuda al cálculo de las representaciones que aparecen en la serie de Clebsch-Gordan.

### 11.3. Cadenas minimales

Volvamos al problema de calcular la serie de Clebsch-Gordan:

$$\Lambda \otimes \Lambda' = \sum_{i=1}^N m(\Lambda_i) \Lambda_i \quad (11.9)$$

donde  $m(\Lambda_i)$  es el número de veces que la representación  $\Lambda_i$  aparece en la descomposición (la multiplicidad).

Como hemos dicho, el peso  $\Lambda + \Lambda'$  es un peso más alto de una de las representaciones que aparecen en la descomposición (el mayor de todos). También es fácil calcular el peso más alto más pequeño de todos los que aparecen en la descomposición (los conceptos de mayor y más pequeño se refieren al nivel en el que se encuentra este peso). Este peso es:  $\Lambda + \tilde{\Lambda}'$  donde  $\tilde{\Lambda}'$  es el peso más pequeño de la representación  $\Lambda'$ . En realidad, lo más que podemos asegurar, es que este peso se encuentra en esa representación que buscamos, pero una aplicación del grupo de Weyl nos llevará al peso más alto en el caso en que éste no lo sea.

El resto de las componentes de la serie se puede obtener de la forma siguiente:

$$\Lambda + \Lambda' - M(\alpha_i) \quad (11.10)$$

es el segundo peso, donde  $M(\alpha_i)$  es una cadena minimal que se construye de la forma siguiente. Se toma  $\Lambda$  (por ejemplo) y se buscan las raíces simples para las que  $(\Lambda, \alpha_i) \neq 0$  (para lo que basta ver qué componentes de  $\Lambda$  son distintas de cero). Sea  $\alpha_j$  una de ellas. Este es el primer elemento de la cadena. El segundo elemento es otra raíz  $\alpha_k$  tal que:  $(\alpha_j, \alpha_k) \neq 0$ . Finalmente llegaremos a una raíz simple  $\alpha_s$ , tal que:  $(\alpha_s, \Lambda') \neq 0$ .

Es decir una cadena minimal relaciona los dos pesos más altos a través de una serie de raíces que forman un camino en el diagrama de Dynkin.

Veamos unos ejemplos de aplicación de estos métodos.

#### Ejemplo 11.1

Consideremos en  $A_2$  las representaciones:

$$\Lambda = (1, 0), \quad \Lambda' = (0, 1) \quad (11.11)$$

ambas de dimensión 3. Por tanto la representación producto tensorial tiene dimensión 9. El peso mayor es la suma de  $\Lambda$  y  $\Lambda'$ , es decir  $(1, 1)$ . Como esta representación tiene dimensión 8, es obvio que solo hay otra representación, de dimensión 1, es decir  $(0, 0)$ :

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0) \quad (11.12)$$

**Ejemplo 11.2**

Sean ahora las representaciones de  $A_2$ :

$$\Lambda = \Lambda' = (1, 0) \quad (11.13)$$

La representación producto tiene también dimensión 9. Sin embargo el peso mayor es  $(2, 0)$  que corresponde a una representación de dimensión 6. Queda pues una dimensión igual a 3. Hay dos representaciones de dimensión 3 en  $A_2$  y no hay representaciones de dimensión 2 (aparte de que podría corresponder a tres veces la representación de peso  $(0, 0)$ , aunque este caso puede excluirse por otras razones). El peso más bajo de la representación  $(1, 0)$  es  $(0, -1)$ , y por tanto:

$$(1, 0) + (0, -1) = (1, -1) \quad (11.14)$$

Este peso no es dominante, pero una reflexión  $r_2$  lo lleva a uno que sí lo es:

$$r_2(1, -1) = (1, -1) + (-1, 2) = (0, 1) \quad (11.15)$$

que es una representación de dimensión 3. Así pues, no hay que buscar más. Por tanto:

$$(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1) \quad (11.16)$$

**Ejemplo 11.3**

Veamos un caso más complicado en  $C_3$ , con representaciones:

$$\Lambda = \Lambda' = (0, 0, 1) \quad (11.17)$$

que tiene dimensión 14. La dimensión de la representación producto es 196. El peso mayor es:  $(0, 0, 2)$ , que corresponde a una representación de dimensión 84. El peso menor sería:

$$(0, 0, 1) + (0, 0, -1) = (0, 0, 0) \quad (11.18)$$

pues el peso más pequeño de la representación  $(0, 0, 1)$  es  $(0, 0, -1)$ . Nos faltan  $196 - 84 - 1 = 111$ . Construyamos una cadena minimal. La raíz  $\alpha_3$  conecta  $\Lambda$  consigo mismo. Por tanto un peso es:

$$\Lambda + \Lambda' - \alpha_3 = (0, 0, 2) - (0, -2, 2) = (0, 2, 0) \quad (11.19)$$

que es una representación de dimensión 90. Solo nos queda 21. Pero las cadenas minimales se pueden también usar subiendo desde el peso más pequeño:

$$(0, 0, 0) + (0, -2, 2) = (0, -2, 2) \quad (11.20)$$

que no es un peso dominante. Pero podemos usar reflexiones para pasar al peso dominante:

$$r_2(0, -2, 2) = (0, -2, 2) + 2(-1, 2, -1) = (-2, 2, 0) \quad (11.21)$$

y otra vez:

$$r_1(-2, 2, 0) = (-2, 2, 0) + 2(2, -1, 0) = (2, 0, 0) \quad (11.22)$$

Este peso corresponde a una representación de dimensión 21, con lo que se acaba la descomposición:

$$(0, 0, 1) \otimes (0, 0, 1) = (0, 0, 2) \oplus (0, 2, 0) \oplus (2, 0, 0) \oplus (0, 0, 0) \quad (11.23)$$

**Ejemplo 11.4**

Volvamos a  $A_2$  y sea ahora el producto:

$$(1, 1) \otimes (1, 1) \quad (11.24)$$

La dimensión es  $8 \times 8 = 64$ . El peso mayor y el más pequeño son:

$$(1, 1) + (1, 1) = (2, 2), \quad (1, 1) + (-1, -1) = (0, 0) \quad (11.25)$$

Podemos encontrar dos cadenas minimales, una con  $\alpha_1$  y la otra con  $\alpha_2$ . Del peso mayor obtenemos:

$$(1, 1) + (1, 1) - (2, -1) = (0, 3), \quad (1, 1) + (1, 1) - (-1, 2) = (3, 0) \quad (11.26)$$

Partiendo del peso menor:

$$(0, 0) + (2, -1) = (2, -1), \quad (0, 0) - (-1, 2) = (-1, 2) \quad (11.27)$$

que no son pesos dominantes. Pero, aplicando una reflexión:

$$(2, -1) \xrightarrow{r_2} (1, 1), \quad (-1, 2) \xrightarrow{r_1} (1, 1) \quad (11.28)$$

es decir en los dos casos se obtiene la misma.

Si sumamos las dimensiones de todas las representaciones:

$$\begin{array}{r} (2, 2) \quad 27 \\ (3, 0) \quad 10 \\ (0, 3) \quad 10 \\ (1, 1) \quad 8 \\ (0, 0) \quad 1 \\ \hline 56 \end{array}$$

por lo que nos queda todavía 8. Se concluye, analizando por ejemplo las clases de congruencia (todas las representaciones en este caso están en la clase 0), que el único candidato es la representación  $(1, 1)$ . La serie de Clebsch-Gordan completa es:

$$(1, 1) \otimes (1, 1) = (2, 2) + (3, 0) + (0, 3) + 2(1, 1) + (0, 0) \quad (11.29)$$

Las dificultades no crecen en general con la dimensión de las representaciones sino con el número de ellas que aparecen en la descomposición. Veamos un ejemplo con dimensión alta pero sencillo de tratar.

### Ejemplo 11.5

En  $E_6$  consideremos el producto tensorial de las representaciones:

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1) \otimes (1, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (11.30)$$

La primera tiene dimensión 78 y la segunda 27, con lo que el producto es 2106.

El peso mayor es  $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$  que corresponde a una representación de dimensión 1728. El peso menor es:

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1) + (0, 0, 0, 0, -1, 0) = (0, 0, 0, 0, -1, 1) \quad (11.31)$$

(calculando el peso más bajo de la representación  $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ). No es un peso dominante, pero la siguiente cadena de reflexiones lo convierte en uno.

$$\begin{array}{l} r_5 : (0, 0, 0, 0, -1, 1) + (0, 0, 0, -1, 2, 0) = (0, 0, 0, -1, 1, 1) \\ r_4 : (0, 0, 0, -1, 1, 1) + (0, 0, -1, 2, -1, 0) = (0, 0, -1, 1, 0, 1) \\ r_3 : (0, 0, -1, 1, 0, 1) + (0, -1, 2, -1, 0, -1) = (0, -1, 1, 0, 0, 0) \\ r_2 : (0, -1, 1, 0, 0, 0) + (-1, 2, -1, 0, 0, 0) = (-1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ r_1 : (-1, 1, 0, 0, 0, 0) + (2, -1, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \end{array}$$

con lo que obtenemos un peso que corresponde a una representación de dimensión 27. Si hubiéramos calculado el peso más bajo de la otra representación, habríamos obtenido:

$$(0, 0, 0, 0, 0, -1) + (1, 0, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, -1) \quad (11.32)$$

Tampoco es un peso dominante, pero:

$$\begin{aligned} r_6 & : (1, 0, 0, 0, 0, -1) + (0, 0, -1, 0, 0, 2) = (1, 0, -1, 0, 0, 1) \\ r_3 & : (1, 0, -1, 0, 0, 1) + (0, -1, 2, -1, 0, -1) = (1, -1, 1, -1, 0, 0) \\ r_2 & : (1, -1, 1, -1, 0, 0) + (-1, 2, -1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, -1, 0, 0) \\ r_4 & : (0, 1, 0, -1, 0, 0) + (0, 0, -1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1, 1, -1, 0) \\ r_5 & : (0, 1, -1, 1, -1, 0) + (0, 0, 0, -1, 2, 0) = (0, 1, -1, 0, 1, 0) \\ r_3 & : (0, 1, -1, 0, 1, 0) + (0, -1, 2, -1, 0, -1) = (0, 0, 1, -1, 1, -1) \\ r_6 & : (0, 0, 1, -1, 1, -1) + (0, 0, -1, 0, 0, 2) = (0, 0, 0, -1, 1, 1) \\ r_4 & : (0, 0, 0, -1, 1, 1) + (0, 0, -1, 2, -1, 0) = (0, 0, -1, 1, 0, 1) \\ r_3 & : (0, 0, -1, 1, 0, 1) + (0, -1, 2, -1, 0, -1) = (0, -1, 1, 0, 0, 0) \\ r_2 & : (0, -1, 1, 0, 0, 0) + (-1, 2, -1, 0, 0, 0) = (-1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ r_1 & : (-1, 1, 0, 0, 0, 0) + (2, -1, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

que nos da el mismo resultado anterior, pero con mucho más esfuerzo.

Para calcular el resto de las representaciones tratemos de emplear alguna cadena minimal. Partiendo de  $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$  queremos llegar a  $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  siguiendo el diagrama de Dynkin. Claramente la única posibilidad es la cadena:

$$\alpha_6, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 \quad (11.33)$$

y por lo tanto el peso obtenido es:

$$\begin{aligned} & (1, 0, 0, 0, 0, 1) - (0, 0, -1, 0, 0, 2) - (0, -1, 2, -1, 0, -1) - (-1, 2, -1, 0, 0, 0) - (2, -1, 0, 0, 0, 0) \\ & = (0, 0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

que es un peso dominante y que corresponde a una representación de dimensión 351. Pero:

$$1728 + 351 + 27 = 2106 \quad (11.34)$$

luego hemos terminado. La serie de Clebsch-Gordan es:

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1) \otimes (1, 0, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, 1) \oplus (0, 0, 0, 1, 0, 0) \oplus (1, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (11.35)$$

Para acabar la descripción de estos métodos de cálculo, veamos como los índices de las representaciones que aparecen en los ejemplos verifican las relaciones explicadas anteriormente.

### Ejemplo 11.6

$A_2$

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0) \quad (11.36)$$

Rep.	Índice
(1,0)	3
(0,1)	3
(1,1)	18
(0,0)	0

El índice del producto tensorial es:

$$I_{(1,0)\otimes(0,1)} = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18 \quad (11.37)$$

y se tiene:

$$18 = 18 + 0 \quad (11.38)$$

### Ejemplo 11.7

$A_2$

$$(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1) \quad (11.39)$$

Rep.	Índice
(1,0)	3
(2,0)	15
(0,1)	3

El índice del producto tensorial es:

$$I_{(1,0)\otimes(1,0)} = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18 \quad (11.40)$$

y se tiene:

$$18 = 15 + 3 \quad (11.41)$$

### Ejemplo 11.8

$C_3$

$$(0, 0, 1) \otimes (0, 0, 1) = (2, 0) \oplus (0, 1) \quad (11.42)$$

Rep.	Índice
(0,0,1)	20
(0,0,2)	288
(0,2,0)	240
(2,0,0)	32
(0,0,0)	0

El índice del producto tensorial es:

$$I_{(0,0,1)\otimes(0,0,1)} = 14 \times 20 + 14 \times 20 = 560 \quad (11.43)$$

y se tiene:

$$560 = 288 + 240 + 32 + 0 \quad (11.44)$$

### Ejemplo 11.9

$A_2$

$$(1, 1) \otimes (1, 1) = (2, 2) \oplus (3, 0) \oplus (0, 3) \oplus 2(2, 2) \oplus (0, 0) \quad (11.45)$$

Rep.	Índice
(1,1)	18
(2,2)	162
(3,0)	45
(0,3)	3
(0,0)	0

El índice del producto tensorial es:

$$I_{(1,1)\otimes(1,1)} = 8 \times 18 + 8 \times 18 = 288 \quad (11.46)$$

y se tiene:

$$288 = 162 + 45 + 45 + 2 \times 18 + 0 \quad (11.47)$$

**Ejemplo 11.10**

$E_6$

$$(0, 0, 0, 0, 0, 1) \otimes (1, 0, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, 1) \oplus (0, 0, 0, 1, 0, 0) \oplus (1, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (11.48)$$

Rep.	Índice
(0,0,0,0,0,1)	72
(1,0,0,0,0,0)	18
(1,0,0,0,0,1)	2880
(0,0,0,1,0,0)	450

El índice del producto tensorial es:

$$I_{(0,0,0,0,0,1)\otimes(1,0,0,0,0,0)} = 78 \times 18 + 27 \times 72 = 3348 \quad (11.49)$$

y se tiene:

$$3348 = 2880 + 450 + 18 \quad (11.50)$$

# Capítulo 12

## Subálgebras de álgebras de Lie simples

La caracterización de las subálgebras maximales de una álgebra de Lie simple tiene muchas aplicaciones en física. Como ejemplo, considérese el modelo standard de la teoría de unificación en partículas elementales y la inclusión:

$$SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (12.1)$$

Los trabajos más importantes sobre este tema se deben a Morozov, Malcev, Karpelevitch y Dynkin. Antes de entrar en la descripción de estas subálgebras, veamos unos ejemplos sencillos.

### 12.1. Ejemplos de subálgebras

#### Ejemplo 12.1

Consideremos  $A_2$  y la representación fundamental  $(1, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b & c \\ d & -a_1 + a_2 & e \\ f & g & -a_2 \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

Es muy sencillo encontrar una subálgebra de  $A_2$  de tipo  $A_1$ . Basta hacer  $c = e = f = g = a_2 = 0$ :

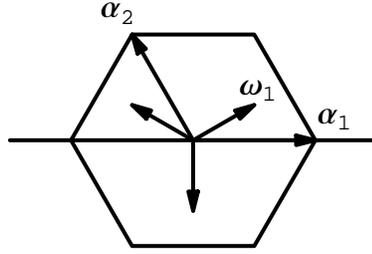
$$\begin{bmatrix} a_1 & b & 0 \\ d & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

Esta subálgebra es de tipo  $A_1$ , concretamente es una representación reducible de  $A_1$ :

$$(1, 0) \longrightarrow (1) \oplus (0) \quad (12.4)$$

Es una subálgebra que llamaremos regular: su raíz simple es una de las raíces de  $A_2$  ( $\beta = \alpha_1$ ). En el diagrama de raíces de la figura 12.1 se ve como los pesos de la representación  $(1, 0)$  de  $A_2$ , se proyectan sobre la recta horizontal que sería el diagrama de raíces de  $A_1$ . A saber,  $\omega_1$  se proyecta sobre el peso 1, mientras los otros dos lo hacen sobre  $-1$  y  $0$ :

$A_2$	$A_1$
$(1, 0)$	1
$(\bar{1}, 1)$	$\bar{1}$
$(0, \bar{1})$	0

Figura 12.1:  $A_1 \subset A_2$ 

La proyección del peso  $(1, 0)$  es  $\alpha_1/2$ , y como  $\beta = \alpha_1$ , el valor del peso es:

$$\frac{1}{2}\alpha_1(h_1) = \frac{1}{2}\beta(h_1) = 1 \quad (12.5)$$

Como veremos más adelante todas las representaciones de  $A_2$  se comportan de esta forma al pasar a  $A_1$ . Por ejemplo, para saber cual es la representación que tiene  $A_1$  cuando en  $A_2$  se considera la representación adjunta, basta proyectar otra vez sobre la recta horizontal:

$A_2$	$A_1$
$(1, 1)$	1
$(2, \bar{1})$	2
$(\bar{1}, 2)$	$\bar{1}$
$(0, 0)$	0
$(1, \bar{2})$	1
$(\bar{2}, 1)$	$\bar{2}$
$(1, 1)$	$\bar{1}$

es decir:

$$(1, 1) \longrightarrow (2) \oplus 2(1) \oplus (0) \quad (12.6)$$

El álgebra  $A_1$  así construida no es maximal en  $A_2$ . Podemos ampliarla hasta una subálgebra reductiva (suma directa de una subálgebra semisimple más el centro del álgebra) maximal:  $A_1 + u(1)$ , donde  $u(1)$  es un álgebra de dimensión 1. En términos de matrices:

$$\begin{bmatrix} a_1 + m & b & 0 \\ d & -a_1 + m & 0 \\ 0 & 0 & -2m \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

En este caso  $u(1)$  está generado por  $h_1 + 2h_2$ , que se puede ver que conmuta con todos los elementos de esta representación de  $A_1$ .

Se tiene:

$$(1, 0) \longrightarrow (1)(1) \oplus (0)(\bar{2}) \quad (12.8)$$

donde el primer paréntesis se refiere a  $A_1$  y el segundo a  $u(1)$ .

### Ejemplo 12.2

La construcción de una subálgebra  $A_1$  en  $A_2$  no es única. Podemos hacerlo de múltiples formas que darán resultados conjugados al anterior. Pero también podemos hacerlo de una forma totalmente inequivalente. Consideremos la siguiente subálgebra de  $A_2$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

Es evidente que se trata de un álgebra de tipo  $A_1$ . Pero en este caso es la representación irreducible (2) la que estamos viendo:

$$(1, 0) \longrightarrow (2) \quad (12.10)$$

Esta subálgebra será llamada singular, en contraposición a la anterior, la raíz simple de  $A_1$  no está en el sistema de raíces de  $A_2$ .

La proyección de los pesos es similar a la anterior, incluso podemos usar la misma figura, pero ahora las escalas son distintas y se tiene:

$A_2$	$A_1$
$(1, 0)$	2
$(\bar{1}, 1)$	2
$(0, \bar{1})$	0

La proyección es como antes, pero la raíz aquí es  $\beta = \alpha_1/2$  y por tanto:

$$\frac{1}{2}\alpha_1(h) = \beta(h) = 2 \quad (12.11)$$

Veamos esta diferencia entre subálgebras regulares y singulares con más detalle.

1. En el caso regular, si  $\mathfrak{h} = \{h_1, h_2\}$  es la subálgebra de Cartan de  $A_2$ , la subálgebra regular  $A_1$  está generada por  $\{h_1, e_1, f_1\}$  y su raíz simple es, como hemos dicho,  $\alpha_1$ . La subálgebra de Cartan de  $A_1$  está contenida en la subálgebra de Cartan de  $A_2$  y lo mismo ocurre con los sistemas de raíces. Entonces, si  $\omega$  es el peso más alto de la representación  $(1, 0)$  de  $A_2$ , tenemos:

$$\omega(h_1) = 1, \quad \omega(h_2) = 0 \quad (12.12)$$

es decir, la proyección es 1.

2. En el caso singular,  $A_1$  está generada linealmente por:

$$\{e_1 - f_1, e_2 - f_2, e_3 - f_3\} \quad (12.13)$$

y cualquiera de estos tres elementos se puede elegir como subálgebra de Cartan. Sin embargo, para hacer las comparaciones más sencillas, tomemos otra subálgebra  $A_1$  conjugada a ésta y con base:

$$\{2(h_1 + h_2), \sqrt{2}(e_1 + e_2), \sqrt{2}(f_1 + f_2)\} \quad (12.14)$$

donde las constantes aparecen para ajustar las relaciones de conmutación. En este caso también la subálgebra de Cartan de  $A_1$  está contenida en la subálgebra de Cartan de  $A_2$ , pero no ocurre así con el sistema de raíces. En efecto, la raíz de  $A_1$  es

$$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (12.15)$$

que no es una raíz de  $A_2$ . Así, si  $\omega$  es el peso más alto de la representación  $(1, 0)$  de  $A_2$ , se tiene:

$$\omega(h_1) = 1, \quad \omega(h_2) = 0 \quad (12.16)$$

y por tanto:

$$\omega(2(h_1 + h_2)) = 2 \quad (12.17)$$

como habíamos visto antes.

## 12.2. Subálgebras conjugadas

La clasificación de subálgebras de un álgebra dada se hace salvo conjugación por elementos del grupo de Lie correspondiente al álgebra. Por ejemplo, las dos subálgebras de tipo  $A_1$  que hemos visto anteriormente no son conjugadas por ningún elemento del grupo  $SL(3, \mathbf{C})$ . En este caso, eso es evidente de la reducción de la representación  $(1, 0)$  de  $A_2$ . Definamos de manera más concreta la cuestión de equivalencia.

**Definición 12.1** Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  dos álgebras de Lie. Se dice que el homomorfismo de álgebras de Lie:

$$f : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (12.18)$$

es una inclusión, si es inyectivo. Entonces:

$$f : \mathfrak{g}' \longrightarrow f(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{g} \quad (12.19)$$

es un isomorfismo, y se dice que  $\mathfrak{g}'$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$  (aunque estrictamente hablando, es  $f(\mathfrak{g}')$  la que es subálgebra de  $\mathfrak{g}$ ).

**Definición 12.2** Dos inclusiones son equivalentes si están relacionadas por un automorfismo interno de  $\mathfrak{g}$ ,  $\sigma$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}' & \xrightarrow{f_1} & \mathfrak{g} \\ & \searrow & \downarrow \sigma \\ & & \mathfrak{g} \end{array} \quad (12.20)$$

$$f_2 = \sigma \circ f_1 \quad (12.21)$$

**Definición 12.3** Dos inclusiones son linealmente equivalentes si para toda representación  $\varphi$  de  $\mathfrak{g}$ , las representaciones de  $\mathfrak{g}'$ ,  $\varphi \circ f_1$  y  $\varphi \circ f_2$  son equivalentes:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}' & \xrightarrow{f_1} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \text{End}(V) \\ & \searrow & & & \downarrow \sigma \\ & & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \text{End}(V) \end{array} \quad (12.22)$$

$$\varphi \circ f_2 = \sigma(\varphi \circ f_1) \quad (12.23)$$

donde  $\sigma$  es un automorfismo de  $\text{End}(V)$  y  $V$  es el espacio de representación de  $\varphi$ .

Si dos inclusiones son equivalentes, también son linealmente equivalentes. Sin embargo el inverso no es cierto. Como la equivalencia lineal es en general más sencilla de establecer que la equivalencia, vamos a estudiar en que condiciones la lineal implica la otra.

Supongamos que  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  son semisimples y que existe una inclusión de  $\mathfrak{g}'$  en  $\mathfrak{g}$ . Se tiene el siguiente resultado entre dos subálgebras de Cartan de estas álgebras:

**Teorema 12.1** Si  $f : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$  es una inclusión, y  $\mathfrak{h}'$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}'$ , existe una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$ , tal que:

$$f(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{h} \quad (12.24)$$

Como consecuencia se tiene una reducción del problema a las subálgebras de Cartan:

**Teorema 12.2** Si  $f_1$  y  $f_2$  son dos inclusiones linealmente equivalentes  $\Leftrightarrow$  sus restricciones a una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}'$  son equivalentes.

Este resultado supone una simplificación mayor del problema. No hace falta estudiar todas las representaciones para decidir sobre la equivalencia lineal. Como veremos, basta estudiar una o dos representaciones, dependiendo de los casos. Veamos sucintamente la demostración de este resultado.

1. Condición suficiente  $\Leftarrow$ 

Sea:

$$f_1|_{\mathfrak{h}'} \approx f_2|_{\mathfrak{h}'} \quad (12.25)$$

donde  $\mathfrak{h}'$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}'$ . Como las subálgebras de Cartan son conjugadas, cambiando  $\mathfrak{h}'$  por una adecuada (que llamaremos igual), podemos tener:

$$f_1|_{\mathfrak{h}'} = f_2|_{\mathfrak{h}'} \quad (12.26)$$

Por el teorema anterior, existe una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$  tal que:

$$f_1(\mathfrak{h}') = f_2(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{h} \quad (12.27)$$

Sea ahora  $\varphi$  una representación lineal de  $\mathfrak{g}$  y  $\Lambda$  su sistema de pesos (en relación a  $\mathfrak{h}$ ). Entonces,  $\varphi \circ f_1$  es una representación de  $\mathfrak{g}'$  y su sistema de pesos relativo a  $\mathfrak{h}'$  es la imagen de  $\Lambda$  por la aplicación  $(f_1|_{\mathfrak{h}'})^*$ . En efecto:

$$f_1|_{\mathfrak{h}'} : \mathfrak{h}' \longrightarrow \mathfrak{h} \quad (12.28)$$

si  $h' \in \mathfrak{h}'$  y por tanto,  $f_1(h') \in \mathfrak{h}$ , de donde:

$$\varphi(f_1(h'))v = \lambda(f_1(h'))v \quad (12.29)$$

donde  $v$  es un vector del espacio de representación de  $\varphi$  y  $\lambda$  es un peso. La aplicación:

$$(f_1|_{\mathfrak{h}'})^* : \mathfrak{h}^* \longrightarrow (\mathfrak{h}')^* \quad (12.30)$$

verifica:

$$(f_1|_{\mathfrak{h}'})^*(\omega)(h') = \omega(f_1(h')) \quad (12.31)$$

y por consiguiente:

$$(\varphi \circ f_1)(h')v = (f_1|_{\mathfrak{h}'})^*(\omega)(h')v \quad (12.32)$$

con lo que, efectivamente, la representación  $\varphi \circ f_1$  tiene como pesos a  $(f_1|_{\mathfrak{h}'})^*(\omega)$ . Lo mismo podíamos haber hecho con  $f_2$  de donde concluimos que los pesos de estas dos representaciones son idénticos y ambas representaciones son equivalentes.

2. Condición necesaria  $\Rightarrow$ 

Sean ahora  $f_1, f_2 : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$  dos homomorfismos de álgebras de Lie. Supongamos que las imágenes de una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}'$ ,  $\mathfrak{h}'$ , mediante estos dos homomorfismos, están contenidas en una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$  (lo que se puede siempre conseguir).

Introducimos una estructura de orden total, ( $>$ ), en el retículo de raíces de  $\mathfrak{g}'$  relativo a  $\mathfrak{h}'$  (compatible con la estructura de espacio vectorial si se considera el retículo sobre los racionales). En el retículo de raíces de  $\mathfrak{g}$  asociado a  $\mathfrak{h}$  consideramos otros dos órdenes,  $>_i$ ,  $i = 1, 2$ , tales que:

$$x, y \in \mathfrak{h}^*, f_i(x) > f_i(y) \Rightarrow x >_i y, i = 1, 2 \quad (12.33)$$

Cambiando adecuadamente los homomorfismos por otros equivalentes, podemos conseguir que los sistemas de raíces simples en  $\mathfrak{h}^*$ , asociados a ambos coincidan (II). Definamos un nuevo orden:  $x \gg y$  si  $x - y$  es una combinación lineal con coeficientes no negativos de raíces simples de II. Como consecuencia,  $x >_1 y$ ,  $x >_2 y$ , pues definen el mismo sistema de raíces simples II.

Una vez introducidos estos órdenes y este sistema de raíces simples, consideremos una representación lineal  $\varphi$  de  $\mathfrak{g}$  con sistema de pesos  $\Lambda$ . Si  $\lambda \in \Lambda$ , se dice que  $\lambda$  es especial (en relación al sistema II si:

$$\forall \lambda' \in \Lambda, \lambda \gg \lambda' \text{ o } \lambda' \gg \lambda \quad (12.34)$$

Por lo que hemos visto antes, los pesos especiales ocupan el mismo lugar en las relaciones de orden  $>_i$ , de lo que se deduce que si las representaciones  $\varphi \circ f_1$  y  $\varphi \circ f_2$  son equivalentes, entonces:

$$f_1^*(\lambda) = f_2^*(\lambda) \quad (12.35)$$

para los pesos especiales. Pero los pesos fundamentales son siempre especiales y generan  $\mathfrak{h}$ , con lo que, si dos inclusiones son linealmente equivalentes, las aplicaciones  $f_1^*$  y  $f_2^*$  son iguales, es decir las restricciones de  $f_1$  y  $f_2$  a  $\mathfrak{h}$  son iguales.

Como resumen, se tiene lo siguiente:

Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  álgebras de Lie semisimples. Si  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  son representaciones de  $\mathfrak{g}$  tal que sus pesos especiales generan  $\mathfrak{h}^*$  linealmente, entonces, dos inclusiones  $f_1, f_2$  de  $\mathfrak{g}'$  en  $\mathfrak{g}$  son linealmente equivalentes si y solo si:

$$\varphi_i \circ f_1 \approx \varphi_i \circ f_2, \quad i = 1, \dots, m \quad (12.36)$$

Es decir basta estudiar la equivalencia lineal en esas representaciones. Lo que haremos a continuación es estudiar cuáles y cuántas representaciones necesitamos para cada una de las álgebras de Lie simples.

### 12.3. Pesos especiales

Veamos cuáles son los pesos especiales que necesitamos para construir la equivalencia lineal.

#### 1. $A_n$

Consideremos el primer peso fundamental,  $\omega_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . La representación tiene dimensión  $n + 1$  y el diagrama de pesos es:

$$\begin{array}{c} (1, 0, \dots, 0) \\ \downarrow \alpha_1 \\ (\bar{1}, 1, 0, \dots, 0) \\ \downarrow \alpha_2 \\ \vdots \\ \downarrow \alpha_{n-1} \\ (0, \dots, 0, \bar{1}, 1) \\ \downarrow \alpha_n \\ (0, \dots, 0, \bar{1}) \end{array} \quad (12.37)$$

por tanto los pesos son:

$$\omega_1, \omega_1 - \alpha_1, \omega_1 - (\alpha_1 + \alpha_2), \dots, \omega_1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \quad (12.38)$$

y es claro que la diferencia entre cada dos de ellos es una suma de raíces simples con signo global más o menos, por lo tanto todos son especiales. Tenemos  $n$  pesos especiales linealmente independientes, por lo que con esta representación basta para estudiar la equivalencia lineal.

#### 2. $B_n$

El primer peso fundamental es como antes  $\omega_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . La representación tiene dimen-

sión  $2n + 1$  y el diagrama de pesos es:

$$\begin{array}{c}
(1, 0, \dots, 0) \\
\downarrow \alpha_1 \\
(\bar{1}, 1, 0, \dots, 0) \\
\downarrow \alpha_2 \\
\vdots \\
\downarrow \alpha_{n-2} \\
(0, \dots, 0, \bar{1}, 1, 0) \\
\downarrow \alpha_{n-1} \\
(0, \dots, 0, \bar{1}, 2) \\
\downarrow \alpha_n \\
(0, \dots, 0) \\
\downarrow \alpha_n \\
(0, \dots, 0, 1, \bar{2}) \\
\downarrow \alpha_{n-1} \\
(0, \dots, 0, 1, \bar{1}, 0) \\
\downarrow \alpha_{n-2} \\
\vdots \\
\downarrow \alpha_1 \\
(\bar{1}, 0, \dots, 0)
\end{array} \tag{12.39}$$

Es fácil ver que los  $n$  primeros pesos son especiales y linealmente independientes; como antes, nos basta esta representación.

### 3. $C_n$

Es un caso similar al anterior. El primer peso fundamental es  $\omega_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . La representación tiene dimensión  $2n$  y el diagrama de pesos es:

$$\begin{array}{c}
(1, 0, \dots, 0) \\
\downarrow \alpha_1 \\
(\bar{1}, 1, 0, \dots, 0) \\
\downarrow \alpha_2 \\
\vdots \\
\downarrow \alpha_{n-2} \\
(0, \dots, 0, \bar{1}, 1, 0) \\
\downarrow \alpha_{n-1} \\
(0, \dots, 0, \bar{1}, 1) \\
\downarrow \alpha_n \\
(0, \dots, 1, \bar{1}) \\
\downarrow \alpha_{n-1} \\
(0, \dots, 0, 1, \bar{1}, 0) \\
\downarrow \alpha_{n-2} \\
\vdots \\
\downarrow \alpha_1 \\
(\bar{1}, 0, \dots, 0)
\end{array} \tag{12.40}$$

También aquí los  $n$  primeros pesos son especiales y linealmente independientes. Basta esta representación para estudiar la equivalencia lineal.

### 4. $E_6$

Aunque ahora las representaciones son más complicadas que en los casos anteriores, sólo una de ellas es necesaria. El primer peso fundamental es  $\omega_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ . La representación tiene dimensión 27. El diagrama de pesos es:

$$\begin{array}{c}
 (1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
 \downarrow \alpha_1 \\
 (\bar{1}, 1, 0, 0, 0, 0) \\
 \downarrow \alpha_2 \\
 (0, \bar{1}, 1, 0, 0, 0) \\
 \downarrow \alpha_3 \\
 (0, 0, \bar{1}, 1, 0, 1) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \vdots \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 (0, \bar{1}, 1, 0, 0, \bar{1}) \\
 \downarrow \alpha_3 \\
 (0, 0, \bar{1}, 1, 0, 0) \\
 \downarrow \alpha_4 \\
 (0, 0, 0, 1, \bar{1}, 0) \\
 \downarrow \alpha_5 \\
 (0, 0, 0, 0, \bar{1}, 0)
 \end{array} \tag{12.41}$$

Los 4 primeros y los 4 últimos pesos son especiales y entre ellos hay seis linealmente independientes. Con esta representación podemos estudiar la equivalencia lineal.

### 5. $G_2$

También en esta caso nos basta con una. El peso de la representación de dimensión menor es  $\omega_1 = (0, 1)$ . La representación tiene dimensión 7 y diagrama de pesos:

$$\begin{array}{c}
 (0, 1) \\
 \searrow \alpha_2 \\
 (1, \bar{1}) \\
 \swarrow \alpha_1 \\
 (\bar{1}, 2) \\
 \searrow \alpha_2 \\
 (0, 0) \\
 \searrow \alpha_2 \quad (1, \bar{2}) \\
 \swarrow \alpha_1 \\
 (\bar{1}, 1) \\
 \searrow \alpha_2 \\
 (0, \bar{1})
 \end{array} \tag{12.42}$$

Todos los pesos son especiales y los dos primeros linealmente independientes. Basta esta representación.

### 6. $F_4$

Sólo hace falta una representación. La representación de dimensión más baja es  $\omega_1 = (0, 0, 0, 1)$ .

La representación tiene dimensión 26:

$$\begin{array}{c}
 (0, 0, 0, 1) \\
 \downarrow \alpha_4 \\
 (0, 0, 1, \bar{1}) \\
 \downarrow \alpha_3 \\
 (0, 1, \bar{1}, 0) \\
 \downarrow \alpha_2 \\
 (1, \bar{1}, 1, 0) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \vdots \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 (\bar{1}, 1, \bar{1}, 0) \\
 \downarrow \alpha_2 \\
 (0, \bar{1}, 1, 0) \\
 \downarrow \alpha_3 \\
 (0, 0, \bar{1}, 1) \\
 \downarrow \alpha_4 \\
 (0, 0, 0, \bar{1})
 \end{array} \tag{12.43}$$

Los cuatro primeros pesos son especiales y linealmente independientes. Basta esta representación.

Pero aquí se acaba esta característica de necesitar una sola representación para determinar la equivalencia lineal. En los demás casos son necesarias dos representaciones.

7.  $D_n$

Veamos un ejemplo para comprobar que no hay cinco pesos especiales linealmente independientes dentro de una representación. Consideremos la representación de peso más alto:  $(1, 0, 0, 0)$  en  $D_5$ . La dimensión es 10 y el diagrama de pesos:

$$\begin{array}{c}
 (1, 0, 0, 0, 0) \\
 \downarrow \\
 (\bar{1}, 1, 0, 0, 0) \\
 \downarrow \\
 (0, \bar{1}, 1, 0, 0) \\
 \downarrow \\
 (0, 0, \bar{1}, 1, 1) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 (0, 0, 0, \bar{1}, 1) \quad (0, 0, 0, 1, \bar{1}) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 (0, 0, 1, \bar{1}, \bar{1}) \\
 \downarrow \\
 (0, 1, \bar{1}, 0, 0) \\
 \downarrow \\
 (1, \bar{1}, 0, 0, 0) \\
 \downarrow \\
 (\bar{1}, 0, 0, 0, 0)
 \end{array} \tag{12.44}$$

Los cuatro primeros pesos y los cuatro últimos son especiales pero entre ellos no hay cinco linealmente independientes. Necesitamos otra representación para encontrar un quinto peso especial que sea linealmente independiente con los cuatro primeros de ésta. Se puede tomar la representación de peso más alto  $(0, 0, 0, 1, 0)$ . Un análisis similar daría el mismo resultado

para  $E_7$  y  $E_8$ ; hacen falta dos representaciones para conseguir 7 pesos especiales linealmente independientes en el caso de  $E_7$  y 8 en el caso de  $E_8$ .

## 12.4. Resultados generales

En la siguiente tabla se dan las representaciones que hay que estudiar para poder asegurar la equivalencia lineal para todas las álgebras de Lie simples.

$A_n$	$(1, 0, \dots, 0)$
$B_n$	$(1, 0, \dots, 0)$
$C_n$	$(1, 0, \dots, 0)$
$E_6$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)$
$F_4$	$(0, 0, 0, 1)$
$G_2$	$(0, 1)$
$D_n$	$(1, 0, \dots, 0)$
	$(0, \dots, 0, 1, 0)$
$E_7$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
	$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$E_8$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$

Finalmente, como hemos dicho anteriormente, la equivalencia lineal no implica en general la equivalencia de inclusiones. Sin embargo, los casos excepcionales son bien pocos. El resultado general es el siguiente:

**Teorema 12.3** Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  dos álgebras de Lie semisimples y  $f_1, f_2 : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$  dos inclusiones. Se tiene:

1. Si  $\mathfrak{g} = A_n$ , la equivalencia lineal implica la equivalencia de inclusiones.
2. Si  $\mathfrak{g} = B_n, C_n, D_n$ , se tiene el siguiente resultado. Sea  $\varphi$  la representación de menor dimensión de  $\mathfrak{g}$ . Entonces:

$$\varphi \circ f_1 \approx \varphi \circ f_2 \Rightarrow \exists \sigma, \quad \text{automorfismo de } \mathfrak{g}, \text{ tal que } f_2 = \sigma \circ f_1 \quad (12.45)$$

De este resultado se concluye:

- a) Si  $\mathfrak{g} = B_n, C_n$ , la equivalencia lineal implica la equivalencia de inclusiones.
- b) Si  $\mathfrak{g} = D_n$ , el resultado anterior no es correcto, debido a la existencia de automorfismos externos en  $D_n$ .
3. Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra excepcional, la equivalencia lineal implica la equivalencia de inclusiones excepto en un caso, cuando  $\mathfrak{g} = E_6$  y  $\mathfrak{g}' = A_2$  o  $\mathfrak{g}' = G_2$ .

# Capítulo 13

## Subálgebras regulares

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple sobre  $\mathbf{C}$ . Sea  $\mathfrak{g}'$  una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . La primera distinción que vamos a hacer es entre subálgebras regulares (R-subálgebras) y no regulares (singulares, S-subálgebras).

### 13.1. Definición y propiedades

**Definición 13.1** *Se dice que  $\mathfrak{g}'$  es una subálgebra regular de  $\mathfrak{g}$  si se puede encontrar una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$  y con ella un sistema de raíces  $(\Delta)$ , de forma que  $\mathfrak{g}'$  se genera por un subespacio de  $\mathfrak{h}$  y algunos de los  $e_\alpha$ , donde  $\alpha$  pertenece al sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$ .*

Como  $\mathfrak{g}'$  es una subálgebra se tienen las siguientes propiedades:

1.

$$\alpha, \beta \in \Delta', \alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha + \beta \in \Delta' \quad (13.1)$$

donde  $\Delta'$  es el subconjunto de  $\Delta$  tal que  $\alpha \in \Delta'$  si  $e_\alpha \in \mathfrak{g}'$ . No es verdad que  $\Delta'$  sea un sistema de raíces de una álgebra semisimple en general.

La demostración es muy simple: si  $\alpha, \beta \in \Delta'$  está claro que ambas están en  $\Delta$ . Si la suma está también en  $\Delta$ , el conmutador:

$$[e_\alpha, e_\beta] = e_{\alpha+\beta} \quad (13.2)$$

debe estar en  $\mathfrak{g}'$  (pues es una subálgebra), luego la suma está en  $\Delta'$ .

2. Si  $\alpha \in \Delta'$  y  $-\alpha \in \Delta'$ , entonces  $h_\alpha \in \mathfrak{g}'$ . Pues:

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha \quad (13.3)$$

La propiedad se puede establecer también como:

$$\Delta' \cap (-\Delta') \subset (\mathfrak{h}')^* \quad (13.4)$$

Estas dos propiedades caracterizan los subconjuntos de  $\Delta$  que dan lugar a subálgebras regulares de  $\mathfrak{g}$ .

Como ya hemos dicho, las subálgebras regulares no son necesariamente semisimples. La condición de que sí lo sean aparece en la siguiente proposición:

**Proposición 13.1** *Sea  $\mathfrak{g}'$  una subálgebra regular de  $\mathfrak{g}$ .*

$$\mathfrak{g}' \text{ es semisimple} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -\Delta' \\ \mathfrak{h}' \text{ es generada linealmente por } \Delta' \end{cases} \quad (13.5)$$

Veamos unos ejemplos de estas subálgebras.

### Ejemplo 13.1

Una base de  $A_2$  es:  $\{h_1, h_2, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$  y el sistema de raíces es:

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\} \quad (13.6)$$

Si escogemos  $\Delta' = \{\alpha_1\}$ ,  $\mathfrak{g}' = \text{lin}\{e_1\}$  es una subálgebra regular de  $A_2$ , que no es semisimple.

Si  $\Delta' = \{\alpha_1, -\alpha_1\}$ ,  $\mathfrak{g}' = \text{lin}\{h_1, e_1, f_1\}$  es una subálgebra regular semisimple de  $A_2$ , a saber,  $A_1$ .

### Ejemplo 13.2

El conjunto  $\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  no genera una subálgebra regular, pues  $\alpha_1 + \alpha_2$  debería estar en  $\Delta'$  también. Sea

$$\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\} \quad (13.7)$$

El álgebra correspondiente (que no es semisimple) está generado por  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . La subálgebra que además incluye a la subálgebra de Cartan de  $A_2$ , es decir la que tiene como base:

$$\{h_1, h_2, e_1, e_2, e_3\} \quad (13.8)$$

es una subálgebra maximal resoluble de  $A_2$ . Se llama la subálgebra de Borel de  $A_2$ . Cualquier subálgebra que contenga a ésta se llama un álgebra parabólica, por ejemplo, escogiendo  $\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1\}$  y el álgebra con base:

$$\{h_1, h_2, e_1, e_2, e_3, f_1\} \quad (13.9)$$

Esta subálgebra es además maximal

En la representación natural de  $A_2$ , con matrices  $3 \times 3$  de traza nula, la subálgebra de Borel,  $\mathfrak{b}$ , es:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b & c \\ 0 & -a_1 + a_2 & d \\ 0 & 0 & -a_2 \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

Si consideramos la base canónica de  $\mathbf{C}^3$ ,  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , podemos dar una cadena de subespacios:

$$V_1 = \text{lin}\{u_1\}, \quad V_2 = \text{lin}\{u_1, u_2\}, \quad V_3 = \text{lin}\{u_1, u_2, u_3\} \quad (13.11)$$

se tiene:

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \quad (13.12)$$

y además:

$$\mathfrak{b}(V_i) \subset V_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.13)$$

situación que caracteriza a las subálgebras parabólicas.

Los elementos de la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  siempre se pueden añadir sin problemas a una subálgebra regular  $\mathfrak{g}'$ . Por tanto si  $\mathfrak{g}'$  es maximal  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$ , aunque  $\mathfrak{g}'$  pueda no ser semisimple y por tanto  $\mathfrak{h}'$  no será una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}'$ . Por eso  $\mathfrak{b}$  es maximal (entre las resolubles. Si se añaden otros elementos a  $\mathfrak{b}$ , se obtiene otras subálgebras que ya no son resolubles).

## 13.2. Subálgebras regulares maximales no semisimples

En primer lugar veremos como son los conjuntos de raíces  $\Delta'$  de las subálgebras regulares maximales.

**Proposición 13.2** Sea  $\mathfrak{g}'$  una subálgebra regular maximal no semisimple de  $\mathfrak{g}$ , con subconjunto de raíces  $\Delta'$ . Entonces:

$$\Delta' \cup (-\Delta') = \Delta \quad (13.14)$$

Recuérdese que para una subálgebra semisimple,  $\Delta' = (-\Delta')$ . Con esta proposición, podemos demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 13.1** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple,  $\Pi$  un sistema de raíces simples. Toda subálgebra regular maximal no semisimple de  $\mathfrak{g}$  es conjugada a una subálgebra de la forma  $\mathfrak{g}(\Pi_\alpha)$ .

donde  $\Pi_\alpha$  es un subconjunto del sistema de raíces simples de  $\mathfrak{g}$ ,  $\Pi$ , que se obtiene eliminando la raíz simple  $\alpha$  de  $\Pi$ . El álgebra  $\mathfrak{g}(\Pi')$  se obtiene de  $\mathfrak{g}$  considerando la subálgebra de Cartan y los vectores raíces correspondientes a raíces en  $\Delta(\Pi')$ , donde:

$$\Delta(\Pi') = \Delta_+ \cup \left( - \sum_{\alpha_i \in \Pi'} k_i \alpha_i, k_i > 0 \right) \quad (13.15)$$

es decir  $\Delta(\Pi')$  está formado por las raíces positivas y aquellas negativas que se obtienen de las raíces simples que hay en  $\Pi'$  (por supuesto con coeficientes enteros negativos).

### Ejemplo 13.3

Consideremos de nuevo  $A_2$ . Seleccionemos el subconjunto de raíces simples:

$$\Pi_{\alpha_2} = \{\alpha_1\} \quad (13.16)$$

Entonces

$$\Delta(\Pi_{\alpha_2}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1\} \quad (13.17)$$

En la representación matricial anterior, tenemos un álgebra regular maximal no semisimple, con representación:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b & c \\ d & -a_1 + a_2 & e \\ 0 & 0 & -a_2 \end{bmatrix} \quad (13.18)$$

Si eliminamos  $\alpha_1$  del conjunto de raíces simples, la subálgebra es:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b & c \\ 0 & -a_1 + a_2 & e \\ 0 & g & -a_2 \end{bmatrix} \quad (13.19)$$

## 13.3. Subálgebras regulares maximales reductivas

Las álgebras reductivas son suma de un álgebra semisimple y su centro. Su clasificación se basa en un resultado de Borel y Siebenthal.

Si  $\mathfrak{g}'$  es una subálgebra semisimple de  $\mathfrak{g}$ , su álgebra de Cartan es una subálgebra de un álgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .

Dado un subconjunto  $\Delta'$  del conjunto de raíces  $\Delta$  de  $\mathfrak{g}$ , podemos definir:

$$\Delta(\Delta') = \left\{ \alpha \in \Delta : \alpha = \sum_{\alpha_i \in \Delta'} k_i \alpha_i, k_i \in \mathbf{Z} \right\} \subset \Delta \quad (13.20)$$

Entonces:

$$\Delta' \subset \Delta(\Delta') \subset \Delta \quad (13.21)$$

Si  $\Delta'$  contiene a las raíces simples, entonces  $\Delta(\Delta') = \Delta$ .

Está claro que si  $\mathfrak{g}'$  es una subálgebra semisimple, su sistema de raíces simples  $\Pi'$  está contenido en el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$ . Entonces:

$$\Delta' = \Delta(\Pi') \quad (13.22)$$

Y viceversa. Si  $\Pi'$  es un sistema de raíces linealmente independientes en  $\Delta$ , tales que

$$\alpha, \beta \in \Pi' \Rightarrow \alpha - \beta \notin \Delta \quad (13.23)$$

entonces podemos construir un álgebra semisimple (que llamaremos  $\mathfrak{g}^s(\Pi')$ ), tomando como sistema de raíces  $\Delta' = \Delta(\Pi')$ . La subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}'$  está contenida en  $\mathfrak{h}$  y se corresponde con  $\Pi'$ , mientras los vectores raíces son aquellos que provienen de las raíces en  $\Delta'$ .

#### Ejemplo 13.4

$A_2$ .

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\} \quad (13.24)$$

Tomemos  $\Pi' = \{\alpha_1 + \alpha_2\}$ . Entonces:

$$\Delta(\Pi') = \{\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\} \quad (13.25)$$

La subálgebra de Cartan es  $\mathfrak{h}' = \{h_1 + h_2\}$  y los otros elementos de la subálgebra son  $e_{\alpha_1 + \alpha_2}, e_{-\alpha_1 - \alpha_2}$ . Se trata de una subálgebra semisimple de tipo  $A_1$ .

#### Ejemplo 13.5

Consideremos en  $A_2$  el siguiente sistema de raíces:

$$\Pi' = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\} \quad (13.26)$$

Se trata de dos raíces linealmente independientes. Es evidente que:

$$\Delta(\Pi') = \Delta \quad (13.27)$$

luego la supuesta subálgebra semisimple que buscamos, asociada a  $\Pi'$ , es todo  $A_2$ . Sin embargo,  $\Pi'$  no es un sistema de raíces simples. Lo que falla aquí es que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2 = \alpha_1 \quad (13.28)$$

que es una raíz de  $\Delta$ .

Definamos estos subconjuntos de  $\Delta$  que dan lugar a subálgebras regulares semisimples.

**Definición 13.2** Sea  $\Pi' \subset \Delta$ . Se dice que  $\Pi'$  es un *P-sistema* si las raíces en  $\Pi'$  son linealmente independientes y la diferencia de dos raíces en  $\Pi'$  no está en  $\Delta$ .

El teorema fundamental sobre las subálgebras regulares es el siguiente:

**Teorema 13.2** Toda subálgebra regular semisimple de un álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$ , es conjugada a alguna subálgebra  $\mathfrak{g}^s(\Pi')$ , donde  $\Pi'$  es un *P-sistema*. Dos subálgebras son conjugadas si existe algún elemento del grupo de Weyl que lleva un *P-sistema* en el otro.

El grupo de Weyl se puede considerar aquí como el inducido en  $\mathfrak{h}$  por los automorfismos internos de  $\mathfrak{g}$  que dejan invariante a  $\mathfrak{h}$ .

Debido a este teorema, el problema de encontrar y clasificar las subálgebras regulares semisimples de un álgebra de Lie semisimple se reduce al cálculo de los *P-sistemas*.

### 13.4. Determinación de los P-sistemas de un álgebra semi-simple

La primera cuestión a tener en cuenta es que basta encontrar los P-sistemas que tienen un número de raíces igual al rango del álgebra. Los demás estarán contenidos en éstos. Los P-sistemas de este tipo se obtienen a partir de los llamados diagramas de Dynkin extendidos, que se deducen del diagrama de Dynkin añadiendo la raíz minimal de  $\mathfrak{g}$  (la opuesta de la maximal). Las raíces maximales son:

Álgebra	$-\alpha_0$
$A_n$	$\sum_{i=1}^n \alpha_i$
$B_n$	$\alpha_1 + 2 \sum_{i=2}^n \alpha_i$
$C_n$	$2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i + \alpha_n$
$D_n$	$\alpha_1 + 2 \sum_{i=2}^{n-2} \alpha_i + \alpha_{n-1} + \alpha_n$
$E_6$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6$
$E_7$	$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + 2\alpha_7$
$E_8$	$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$
$F_4$	$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$
$G_2$	$2\alpha_1 + 3\alpha_2$

Los diagramas correspondientes aparecen en la Tabla 2 con las coordenadas de la raíz  $\alpha_0$  (marcas).

Todos los P-sistemas se obtienen mediante operaciones elementales, que consisten en extender el diagrama de Dynkin del álgebra que se está estudiando y eliminar una raíz cualquiera. El diagrama que se obtiene es un diagrama de Dynkin de un álgebra semisimple que es una subálgebra regular del álgebra inicial. En el caso de que el álgebra de partida sea semisimple no simple, el diagrama de Dynkin consta de varias componentes no conexas. En este caso hay que extender una de ellas y aplicar el procedimiento anterior, para luego hacer lo mismo con el resto.

Las subálgebras reductivas maximales se obtienen de acuerdo con el siguiente teorema:

**Teorema 13.3 (Borel-Siebenthal)** *Las subálgebras reductivas maximales se obtienen a partir de los diagramas de Dynkin extendidos por el siguiente procedimiento:*

1. Se borra un nodo cuya marca sea un número primo. De esta forma se obtienen subálgebras semisimples correspondientes al diagrama de Dynkin que resulta de esta operación elemental.
2. Se borran dos nodos cuyas marcas sean iguales a 1. El diagrama que se obtiene corresponde a la parte semisimple de un álgebra maximal reductiva cuyo centro es  $u(1)$ .

Es decir, en lo que respecta a las semisimples, si  $\Pi$  es un sistema de raíces simples de  $\mathfrak{g}$ , toda subálgebra maximal semisimple de  $\mathfrak{g}$  es conjugada a una de la forma  $\mathfrak{g}^s(\Pi')$  donde  $\Pi'$  es un P-sistema de longitud  $n$  (el rango de  $\mathfrak{g}$ ), obtenido de  $\Pi$  por una sola operación elemental.

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Si  $\Pi'$  es un P-sistema que se obtiene de  $\Pi$  por una sola operación elemental, y si  $\mathfrak{g}^s(\Pi') \neq \mathfrak{g}$ , entonces  $\mathfrak{g}^s(\Pi')$  es una subálgebra semisimple maximal excepto en los casos siguientes:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^s(\Pi')$
$F_4$	$A_1 + A_3$
$E_7$	$A_1 + A_3 + A_3$
$E_8$	$A_1 + A_7, A_1 + A_2 + A_5, A_3 + D_5$

que son los correspondientes a las marcas que no son números primos, un resultado no considerado por Dynkin en su trabajo.

Veamos dos sencillos ejemplos:

**Ejemplo 13.6**

El álgebra  $A_2$  no tiene subálgebras regulares semisimples maximales. Al considerar el diagrama de Dynkin extendido (ver Tabla 2), si quitamos cualquier raíz, obtenemos nuevamente  $A_2$ .

**Ejemplo 13.7**

El álgebra  $C_2$  tiene una sola subálgebra regular maximal semisimple. Al eliminar la raíz central del diagrama extendido obtenemos el diagrama de  $A_1 + A_1$ . Desde un punto de vista más geométrico esto equivale a decir que el álgebra del grupo ortogonal en el espacio de cinco dimensiones ( $B_2 \approx C_2$ ) tiene una subálgebra regular maximal semisimple que es justamente la del grupo de rotaciones en el espacio de cuatro dimensiones.

## 13.5. Cálculo de las subálgebras reductivas maximales de las álgebras de Lie simples

En lo que sigue, determinaremos de forma explícita todas las subálgebras reductivas maximales de las álgebras de Lie simples usando el teorema de Borel-Siebenthal.

**13.5.1.  $A_n$** 

El primer procedimiento del teorema anterior no proporciona ninguna subálgebra distinta de  $A_n$ :  $A_n$  no tiene subálgebras regulares semisimples maximales.

El segundo proporciona  $n/2$  clases si  $n$  es par y  $(n+1)/2$  si es impar:

$$A_k + A_{n-k-1} + u(1) \quad (13.29)$$

que es una subálgebra maximal reductiva (la parte semisimple es una subálgebra regular, pero no es maximal). El ejemplo más famoso en teoría de partículas es probablemente la inclusión:

$$A_4 \supset A_2 + A_1 + u(1) \quad (13.30)$$

Nótese que en esta caso hay otra clase:

$$A_4 \supset A_3 + u(1) \quad (13.31)$$

**13.5.2.  $B_n$** 

Primer procedimiento: Si eliminamos la tercera raíz, se obtiene:

$$B_n \supset A_1 + A_1 + B_{n-2} \quad (13.32)$$

y eliminando la cuarta:

$$B_n \supset A_3 + B_{n-3} \quad (13.33)$$

Si eliminamos cualquiera de las otras (que no sean las dos primeras, que llevan trivialmente a  $B_n$ ) se obtiene:

$$B_n \supset D_k + B_{n-k}, \quad k = 4, \dots, n-1 \quad (13.34)$$

Como  $A_1 + A_1 \approx D_2$  y  $A_3 \approx D_3$ , concluimos que todas las subálgebras regulares semisimples maximales de  $B_n$  son:

$$B_n \supset D_k + B_{n-k}, \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (13.35)$$

o también:

$$o(2n+1) \supset o(2k) + o(2(n-k)+1), \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (13.36)$$

Si ahora usamos el segundo procedimiento, solo obtenemos una clase, pues solo hay dos marcas iguales a 1:

$$B_n \supset B_{n-1} + u(1) \quad (13.37)$$

es la única subálgebra maximal reductiva.

**13.5.3.**  $C_n$ 

Primer procedimiento: si eliminamos una raíz, se obtienen las  $n/2$  o  $(n-1)2$  clases de subálgebras maximales regulares semisimples de  $C_n$  (dependiendo de la paridad de  $n$ ):

$$C_n \supset C_k + C_{n-k} \quad (13.38)$$

que podrían escribirse como:

$$sp(2n) \supset sp(2k) + sp(2(n-k)) \quad (13.39)$$

Con el segundo procedimiento, solo obtenemos una clase:

$$C_n \supset A_{n-1} + u(1) \quad (13.40)$$

única subálgebra maximal reductiva.

**13.5.4.**  $D_n$ 

Primer procedimiento: si eliminamos una raíz, se obtienen  $n/2$  o  $(n-1)2$  clases de subálgebras maximales regulares semisimples de  $D_n$  (dependiendo de la paridad de  $n$ ):

$$D_n \supset D_k + D_{n-k} \quad (13.41)$$

que en términos más geométricos podría escribirse como:

$$o(2n) \supset o(2k) + o(2(n-k)) \quad (13.42)$$

Con el segundo, obtenemos dos clases de álgebras reductivas maximales:

$$D_n \supset A_{n-1} + u(1) \quad (13.43)$$

$$D_n \supset D_{n-1} + u(1) \quad (13.44)$$

Todos estos resultados y los correspondientes a las álgebras excepcionales aparecen en la siguiente tabla:

Álgebra simple	Semisimple	Reductiva
$A_n$		$A_k + A_{n-k-1} + u(1)$
$B_n$	$D_k + B_{n-k}$	$B_{n-1} + u(1)$
$C_n$	$C_k + C_{n-k}$	$A_{n-1} + u(1)$
$D_n$	$D_k + D_{n-k}$	$A_{n-1} + u(1)$
		$D_{n-1} + u(1)$
$E_6$	$A_5 + A_1$	$D_5 + u(1)$
	$A_2 + A_2 + A_2$	
$E_7$	$A_7$	$E_6 + u(1)$
	$D_6 + A_1$	
	$A_5 + A_2$	
$E_8$	$D_8$	
	$A_8$	
	$E_7 + A_1$	
	$E_6 + A_2$	
	$A_4 + A_4$	
$F_4$	$B_4$	
	$A_2 + A_2$	
	$C_3 + A_1$	
$G_2$	$A_2$	
	$A_1 + A_1$	



# Capítulo 14

## Subálgebras singulares de álgebras de Lie simples

Si  $\mathfrak{g}'$  es un álgebra semisimple y  $\varphi$  una representación lineal de  $\mathfrak{g}'$ , entonces  $\varphi(\mathfrak{g}')$  es una subálgebra de  $\mathfrak{sl}(n)$ , donde  $n$  es la dimensión de  $\varphi$ . El problema es saber si es maximal o no. Si la representación admite una forma bilineal invariante,  $\varphi(\mathfrak{g}')$  no será maximal en  $\mathfrak{sl}(n)$  sino en alguna de las subálgebras con forma bilineal,  $so(p)$  o  $sp(q)$ . El trabajo de Dynkin consiste en determinar cuándo la representación admite esa forma bilineal y si es maximal o no

### 14.1. Definiciones

**Definición 14.1** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple. Se dice que una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}'$ , es una *S-subálgebra (singular)*, si  $\mathfrak{g}'$  no está contenida en ninguna subálgebra regular propia de  $\mathfrak{g}$ .

Así como en las subálgebras regulares hemos encontrado subálgebras maximales semisimples y no semisimples, en este caso la situación es más sencilla:

**Teorema 14.1** Toda subálgebra singular de un álgebra de Lie simple es semisimple

También, en el caso de las subálgebras regulares el rango de la subálgebra era igual al del álgebra. Sin embargo, para las S-subálgebras el rango es estrictamente menor.

La clasificación de subálgebras singulares se basa en un estudio de las representaciones y formas bilineales invariantes. La propiedad fundamental que caracterizará a estas subálgebras es la siguiente:

**Definición 14.2** Sea  $\mathfrak{g}'$  un álgebra de Lie semisimple y  $\varphi$  una representación de  $\mathfrak{g}'$  (actuando en un espacio vectorial  $V$ ). Se dice que el par  $(\mathfrak{g}', \varphi)$  verifica la propiedad *P*, si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

1.  $\varphi(\mathfrak{g}')$  es una subálgebra maximal de  $\mathfrak{sl}(V)$ .
2.  $\varphi(\mathfrak{g}')$  es una subálgebra maximal de  $\mathfrak{gl}(V)$  y deja invariante una forma bilineal simétrica o antisimétrica:

$$(\varphi(x)u, v) + (u, \varphi(x)v) = 0, \quad \forall u, v \in V, x \in \mathfrak{g}' \quad (14.1)$$

Téngase en cuenta cómo es el estudio de la subálgebra lo que da aquí la información (en el caso de las regulares partíamos del álgebra).

Entonces

1. Excepto en casos excepcionales, toda representación irreducible de un álgebra de Lie *simple* tiene la propiedad P.
2. Si  $\varphi$  es una representación irreducible y  $\mathfrak{g}'$  es *semisimple no simple*, el par  $(\mathfrak{g}', \varphi)$  es uno de los siguientes:

$$a) \quad A_n + A_m, \quad n \geq m \geq 1 \quad (14.2)$$

$$b) \quad so(p) + so(q), \quad p \geq q \geq 3, p, q \neq 4 \quad (14.3)$$

$$c) \quad so(p) + C_n, \quad p \geq 3, n \geq 1 \quad (14.4)$$

$$d) \quad C_n + C_m, \quad n \geq m \geq 1 \quad (14.5)$$

y en cada caso,  $\varphi$  es la suma de representaciones fundamentales.

3. Si  $\varphi$  es una representación reducible de un álgebra semisimple  $\mathfrak{g}'$  que satisface la propiedad P, entonces el par  $(\mathfrak{g}', \varphi)$  es uno de los siguientes:

$$a) \quad C_n + C_m, \quad n \geq m \geq 1 \quad (14.6)$$

$$\varphi = (1, 0, \dots, 0)(0, \dots, 0) \oplus (0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.7)$$

$$b) \quad so(p) + so(q), \quad p \geq q \geq 3 \quad (14.8)$$

$$\varphi = (1, 0, \dots, 0)(0, \dots, 0) \oplus (0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.9)$$

$$c) \quad so(p), \quad p \geq 3 \quad (14.10)$$

$$\varphi = (1, 0, \dots, 0)(0, \dots, 0) \quad (14.11)$$

El problema es, una vez conocidos los pares  $(\mathfrak{g}', \varphi)$ , estudiar en qué álgebra simple  $\mathfrak{g}$  es maximal singular  $\mathfrak{g}'$ .

## 14.2. Formas bilineales invariantes

**Definición 14.3** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple. Se dice que dos representaciones de  $\mathfrak{g}$ ,  $(\varphi_1, V_1)$  y  $(\varphi_2, V_2)$ , son *contragredientes* si existe un homomorfismo

$$f : V_1 \longrightarrow V_2^* \quad (14.12)$$

tal que:

$$f(v_1)(\varphi_2(x)v_2) = f(\varphi_1(x)v_1)(v_2), \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \quad (14.13)$$

Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es la dualidad entre  $V_2$  y  $V_2^*$ , la condición de contragredientes se puede escribir como:

$$\langle f(v_1), \varphi_2(x)v_2 \rangle = \langle f(\varphi_1(x)v_1), v_2 \rangle \quad (14.14)$$

y si los espacios de representación son los mismos y  $f$  es la identidad:

$$\langle v_1, \varphi_2(x)v_2 \rangle = \langle \varphi_1(x)v_1, v_2 \rangle \quad (14.15)$$

También en este último caso es posible definir el concepto de autocontragradiante para una representación  $\varphi$  de un álgebra  $\mathfrak{g}$ :

$$\langle v_1, \varphi(x)v_2 \rangle = \langle \varphi(x)v_1, v_2 \rangle \quad (14.16)$$

en este caso, la dualidad entre el espacio y su dual se puede relacionar con una forma bilineal no degenerada, que debido a esta propiedad es invariante.

Las representaciones que tienen asociada una forma bilineal invariante no degenerada se clasifican según la paridad de esa forma:

**Definición 14.4** Una representación se llama ortogonal si existe una forma no degenerada invariante en el espacio de representación que es simétrica.

Se llama simpléctica si es antisimétrica.

El carácter de una representación (ortogonal, simpléctica o no existencia de forma invariante) se puede calcular con una sencilla fórmula:

**Teorema 14.2** 1. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple de los siguientes tipos:

$$A_1, B_n, C_n, D_{2n}, E_7, E_8, F_4, G_2 \quad (14.17)$$

Entonces, toda representación tiene una forma bilineal invariante no degenerada. Su característica (ortogonal o simpléctica) se calcula de la forma siguiente. Sea  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  el peso máximo de la representación. Si:

$$\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \quad (14.18)$$

es par, la representación es ortogonal. Si es impar, la representación es simpléctica. Las constantes  $k_i$  dependen del álgebra que se estudia y sus valores vienen dados en la tabla siguiente.

$A_1$	$1, \dots, 1$
$B_n$	$2n, 2(2n-1), \dots, (n-1)(n+2), \frac{1}{2}n(n+1)$
$C_n$	$2n-1, 2(2n-2), \dots, (n-1)(n+1), n^2$
$D_{2n}$	$2n-2, 2(2n-3), \dots, (n-2)(n+1), \frac{1}{2}n(n-1), \frac{1}{2}n(n-1)$
$E_7$	$34, 66, 96, 75, 52, 27, 49$
$E_8$	$92, 182, 270, 120, 118, 114, 58, 136$
$F_4$	$22, 42, 30, 16$
$G_2$	$10, 6$

2. Si  $\mathfrak{g} = A_n, n > 1, E_6, D_{2n+1}$ , debido a la existencia de un automorfismo externo, las coordenadas del peso más alto deben estar colocadas simétricamente en el diagrama para que exista una forma bilineal invariante no degenerada (es decir el peso más alto no cambia al aplicar el automorfismo externo. Nótese que, sin embargo, también  $D_{2n}$  tiene un automorfismo externo y no hay que imponer esta condición). En caso de que sí exista, su carácter se calcula como en el apartado anterior.

Una representación irreducible no puede ser a la vez ortogonal y simpléctica. Si una representación es ortogonal y simpléctica simultáneamente, es la suma de representaciones contragredientes. De hecho, si una representación es autocontragradiante, es ortogonal, simpléctica o ambas a la vez.

En el caso en que  $\mathfrak{g}$  es semisimple pero no simple, es decir, es la suma de álgebras simples, el carácter de la representación  $\varphi$  se calcula a partir del carácter de las representaciones  $\varphi$  de cada una de las álgebras que aparecen en la suma. Para que  $\varphi$  sea ortogonal (o simpléctica), es necesario

y suficiente que cada  $\varphi$  sea ortogonal o simpléctica y el número de representaciones simplécticas sea par (o impar).

Estos resultados permiten calcular de forma explícita los tres casos de pares que verifican la propiedad P y el álgebra que contiene a  $\mathfrak{g}'$  como subálgebra singular maximal.

1. Sea  $\mathfrak{g}'$  simple,  $\varphi$  representación irreducible de  $\mathfrak{g}'$  de dimensión  $n$ . Entonces:

a) Si  $\varphi$  es ortogonal:

$$\mathfrak{g}' \subset B_{(n-1)/2}, (n \text{ impar}) \quad (14.19)$$

$$\mathfrak{g}' \subset D_{n/2}, (n \text{ par}) \quad (14.20)$$

b) Si  $\varphi$  es simpléctica ( $n$  es necesariamente par):

$$\mathfrak{g}' \subset C_{n/2} \quad (14.21)$$

El álgebra  $\mathfrak{g}'$  está siempre contenida en una subálgebra  $A_{n-1}$ . Sin embargo, cuando existe una forma bilineal invariante, no es, en general, maximal. Sólo cuando se tiene  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ , de acuerdo con los dos apartados anteriores, se concluye que  $\mathfrak{g}'$  es maximal en  $A_{n-1}$  (siempre que no se esté en las excepciones que aparecen a continuación).

c) Si  $\varphi$  no tiene formas bilineales invariantes:

$$\mathfrak{g}' \subset A_{n-1} \quad (14.22)$$

Todas estas inclusiones son maximales excepto en cuatro series y catorce casos aislados:

Álgebra $\supset$ Subálgebra	Regla de ramificación
$A_{(n-1)(n+2)/2} \supset A_n$	$(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0, \dots, 0), n \geq 4$
$A_{n(n+3)} \supset A_n$	$(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (2, 1, 0, \dots, 0), n \geq 2$
$D_{2n+2} \supset B_{2n+1}$	$(0, 0, \dots, 0, k) \rightarrow (0, \dots, 0, k), n \geq 1, k \geq 1$
$B_3 \supset G_2$	$(k, 0, 0) \rightarrow (0, k), k \geq 2$
$G_2 \supset A_1$	$(0, 1) \rightarrow 6$
$C_{10} \supset A_5$	$(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 1, 0)$
$D_8 \supset B_4$	$(0, \dots, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 1)$
$C_7 \supset C_3$	$(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 2, 0)$
	$(0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 2, 0)$
$A_{15} \supset D_5$	$(0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1, 0)$
$C_{16} \supset D_6$	$(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 1, 0)$
$A_{26} \supset E_6$	$(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0)$
	$(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 1)$
$C_{28} \supset E_7$	$(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$(0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
	$(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
	$(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$

2. En el segundo caso, los pares subálgebra-álgebra y las representaciones correspondientes son los siguientes:

a)

$$A_n + A_m \subset A_{(n+1)(m+1)-1}, \quad n \geq m \geq 1 \quad (14.23)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.24)$$

$$b) \quad so(p) + so(q) \subset so(pq), \quad p \geq q \geq 3, p, q \neq 4 \quad (14.25)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.26)$$

$$c) \quad so(p) + C_m \subset C_{pm}, \quad p \geq 3, p, m \geq 1 \quad (14.27)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.28)$$

$$d) \quad C_n + C_m \subset D_{2nm}, \quad n \geq m \geq 1 \quad (14.29)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.30)$$

3. En el tercer y último caso, no tenemos en general una subálgebra singular.

$$a) \quad C_n + C_m \subset C_{n+m} \quad (14.31)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, \dots, 0)(0, \dots, 0) + (0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.32)$$

es una subálgebra semisimple regular maximal.

$$b) \quad so(p) + so(q) \subset so(p+q), \quad p \geq q \geq 3 \quad (14.33)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, \dots, 0)(0, \dots, 0) + (0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0) \quad (14.34)$$

es también una subálgebra semisimple regular maximal, excepto:

$$B_n + B_m \subset D_{n+m+1}, \quad n \geq m \geq 1 \quad (14.35)$$

que es maximal singular con una inclusión irreducible (aparte de la reducible dada antes):

$$(0, \dots, 0, 1) \rightarrow (0, \dots, 0, 1)(0, \dots, 0, 1) \quad (14.36)$$

$$c) \quad so(p) \subset so(p+1), \quad p \geq 3 \quad (14.37)$$

$$(1, 0, \dots, 0) \rightarrow (1, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0) \quad (14.38)$$

es también una subálgebra semisimple regular maximal, excepto:

$$B_n \subset D_{n+1}, \quad n \geq 2 \quad (14.39)$$

$$(0, \dots, 0, k) \rightarrow (0, \dots, 0, k), \quad k \geq 1 \quad (14.40)$$

es maximal singular con una inclusión irreducible.

Estudiemos algunos ejemplos sencillos.

#### Ejemplo 14.1

Sea  $\mathfrak{g}' = C_3$  y consideremos la representación  $\varphi$  de peso más alto  $(0, 1, 0)$ , con dimensión 14. La representación es ortogonal. No se trata de ningún caso excepcional, por tanto:  $C_3$  es una subálgebra singular maximal de  $D_7$  y se tiene la reducción de representaciones:

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \longrightarrow (0, 1, 0) \quad (14.41)$$

#### Ejemplo 14.2

Sea  $\mathfrak{g}' = B_4$  y la representación de peso máximo  $(1, 0, 0, 0)$ , de dimensión 9, que es ortogonal. Se obtiene nuevamente  $B_4$ , y por lo tanto, es maximal en  $A_8$ , con la reducción:

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \longrightarrow (1, 0, 0, 0) \quad (14.42)$$

### Ejemplo 14.3

Sea  $\mathfrak{g}' = G_2$  y la representación de peso máximo  $(0, 2)$ , de dimensión 27, que es ortogonal. Se obtiene  $B_{13}$ , pero éste es un caso excepcional, y  $G_2$  es maximal en  $B_3$ , con la reducción:

$$(2, 0, 0) \longrightarrow (0, 2) \quad (14.43)$$

mientras que  $B_3$  es una subálgebra maximal en  $B_{13}$ , con la reducción:

$$(1, 0, \dots, 0) \longrightarrow (2, 0, 0) \quad (14.44)$$

## 14.3. Matrices de Proyección

Para acabar el estudio de las subálgebras de álgebras de Lie simples, describiremos aquí el método de la matriz de proyección, que permite conocer el sistema de pesos de las representaciones de la subálgebra que se obtienen al reducir una representación del álgebra. La idea es utilizar el dual de la inclusión que es una aplicación entre los espacios de pesos del álgebra y la subálgebra.

Sea  $f : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$  una inclusión de álgebras de Lie semisimples. Como sabemos, existen subálgebras de Cartan,  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}'$  tales que  $f(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}'$ . Restringiendo  $f$  a  $\mathfrak{h}'$  tenemos una aplicación lineal entre espacios vectoriales:

$$\hat{f} : \mathfrak{h}' \longrightarrow \mathfrak{h} \quad (14.45)$$

y podemos construir la aplicación dual:

$$f^* : \mathfrak{h}^* \longrightarrow (\mathfrak{h}')^* \quad (14.46)$$

dada por:

$$f^*(\alpha)(h') = \alpha(\hat{f}(h')) \quad (14.47)$$

Los sistemas de pesos de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}'$  se relacionan a través de  $f^*$ .

**Teorema 14.3** *Sea  $\varphi$  una representación de  $\mathfrak{g}$ . Entonces  $\varphi \circ f$  es una representación de  $\mathfrak{g}'$ . Si  $\Omega$  es el sistema de pesos de  $\varphi$ ,  $f^*(\Omega)$  es el sistema de pesos de  $\varphi \circ f$ .*

Los órdenes introducidos en los sistemas de pesos permiten la construcción de la matriz de proyección.

**Definición 14.5** *Se dice que dos órdenes  $>$  y  $>'$  introducidos en  $\Omega$  y  $\Omega'$ , respectivamente, son consistentes con la inclusión, si:*

$$\lambda_1 > \lambda_2 \implies f(\lambda_1) > f(\lambda_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega \quad (14.48)$$

Los órdenes en el sistema de pesos se establecen por niveles y dentro de cada nivel usando el orden lexicográfico. Si los órdenes no fueran consistentes, es posible hacer que lo sean cambiando adecuadamente la inclusión con algún elemento del grupo de Weyl.

La matriz de proyección de un par  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}'$ , con inclusión  $f$  es simplemente la expresión de la aplicación  $f^*$  en una cierta base. Su construcción se basa en el análisis de una o dos reducciones (dependiendo de los casos) de las representaciones de  $\mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{g}'$ . Es decir, para construirla es necesario saber como se reduce alguna representación, pero una vez calculada nos dice como lo hacen todas, al darnos el sistema de pesos en la subálgebra.

Veamos en algunos casos sencillos como construir las matrices de proyección.

#### Ejemplo 14.4

Sea  $\mathfrak{g} = B_3$  y  $\mathfrak{g}' = A_3$ . El álgebra  $A_3$  es una subálgebra maximal regular de  $B_3$ . Sabemos como se reduce la representación fundamental:

$$(100) \longrightarrow (010) \oplus (000) \quad (14.49)$$

Ordenemos los pesos de estas representaciones por niveles:

$$\begin{array}{r} 6 \quad (100) \\ 4 \quad (\bar{1}10) \quad (010) \\ 2 \quad (0\bar{1}2) \quad (\bar{1}\bar{1}1) \\ 0 \quad (000) \quad (\bar{1}01), (10\bar{1}), (000) \\ \bar{2} \quad (01\bar{2}) \quad (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \\ \bar{4} \quad (\bar{1}\bar{1}0) \quad (0\bar{1}0) \\ \bar{6} \quad (\bar{1}00) \end{array} \quad (14.50)$$

Como ya hemos visto antes, al hablar de pesos especiales, solo necesitamos los tres primeros pesos para tener una base:

$$(100), \quad (\bar{1}10), \quad (0\bar{1}2) \quad (14.51)$$

que se proyectan en los pesos:

$$(010), \quad (\bar{1}\bar{1}1), \quad (10\bar{1}) \quad (14.52)$$

con lo que la matriz de proyección es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.53)$$

Esta matriz nos da la reducción de cualquier representación de  $B_3$ . Por ejemplo, consideremos la representación spinorial de  $B_3$ ,  $(0, 0, 1)$  de dimensión 8. Sus pesos y las proyecciones son:

$$\begin{array}{r} (001) \quad (100) \\ (01\bar{1}) \quad (001) \\ (\bar{1}\bar{1}1) \quad (01\bar{1}) \\ (10\bar{1}) \quad (\bar{1}01) \quad (\bar{1}\bar{1}0) \quad (1\bar{1}0) \\ (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \quad (0\bar{1}\bar{1}) \\ (0\bar{1}\bar{1}) \quad (00\bar{1}) \\ (00\bar{1}) \quad (\bar{1}00) \end{array}$$

y reuniendo los pesos de  $A_3$  concluimos que la reducción de la representación spinorial es:

$$(001) \longrightarrow (100) \oplus (001) \quad (14.54)$$

#### Ejemplo 14.5

$G_2 \subset B_3 \subset D_4$  es una cadena de subálgebras maximales singulares. Veamos la primera inclusión. La regla de ramificación para la representación fundamental de  $B_3$  es simplemente:

$$(100) \longrightarrow (01) \quad (14.55)$$

y los pesos (que ocupan cada uno un nivel) son:

$$\begin{array}{lll}
6 & (100) & (01) \\
4 & (\bar{1}10) & (\bar{1}\bar{1}) \\
2 & (0\bar{1}2) & (\bar{1}\bar{2}) \\
0 & (000) & (00) \\
\bar{2} & (01\bar{2}) & (1\bar{2}) \\
\bar{4} & (\bar{1}\bar{1}0) & (\bar{1}\bar{1}) \\
\bar{6} & (\bar{1}00) & (0\bar{1})
\end{array} \tag{14.56}$$

con lo que resulta fácil calcular la matriz de proyección a partir de los tres primeros:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14.57}$$

De aquí deducimos la regla de ramificación para las representaciones  $(k00)$  de  $B_3$ :

$$(k00) \longrightarrow (0k) \oplus \dots \tag{14.58}$$

pues sabemos el primer peso más alto, pero tendríamos que estudiarlos todos. Sin embargo, de un análisis de las dimensiones:

$$\dim_{B_3}(00k) = \frac{1}{6}(k+1) = \dim_{G_2}(0k) \tag{14.59}$$

y por tanto la regla de ramificación es sólo:

$$(k00) \longrightarrow (0k) \tag{14.60}$$

De acuerdo con esto,  $G_2(0k)$  debería estar contenido como subálgebra maximal en algún  $B_n$  de rango adecuado. Pero éste es justamente uno de los casos excepcionales de Dynkin.

La segunda inclusión es  $B_3 \subset D_4$ . Sabemos que:

$$(1000) \longrightarrow (100) \oplus (000) \tag{14.61}$$

Sólo hay tres pesos especiales en la representación  $(1000)$  de  $D_4$ . La asignación que hacemos es:

$$\begin{array}{lll}
6 & (1000) & (100) \\
4 & (\bar{1}100) & (\bar{1}\bar{1}0) \\
2 & (0\bar{1}11) & (0\bar{1}\bar{2})
\end{array} \tag{14.62}$$

Necesitamos otra regla de ramificación:

$$6 \quad (0001) \quad (001) \tag{14.63}$$

y de aquí se deduce que la matriz de proyección es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14.64}$$

# Capítulo 15

## Álgebras de Kac-Moody

En esta y las siguientes lecciones estudiamos la estructura de las álgebras de Kac-Moody, como una introducción a las álgebras de Lie de dimensión infinita. Aunque la mayor parte del curso está dedicada a las álgebras de dimensión finita, los métodos utilizados en el caso particular de álgebras afines son muy similares a los de dimensión finita por lo que los introducimos aquí.

### 15.1. Matrices de Cartan generalizadas

La construcción que vamos a hacer de las álgebras de Kac-Moody está basada en la noción de matriz de Cartan generalizada.

**Definición 15.1** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con coeficientes enteros. Se dice que  $A$  es una matriz de Cartan generalizada si se satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $a_{ii} = 2, i = 1, \dots, n$
2.  $a_{ij}, i \neq j$  son enteros no positivos
3.  $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$

Una representación de  $A$  es un triplete:  $\{\mathfrak{h}, \Pi, \hat{\Pi}\}$ , tal que:

1.  $\mathfrak{h}$  es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.
2.  $\hat{\Pi} = \{\hat{\alpha}_i, i = 1, \dots, n\}$  es un conjunto de  $n$  elementos linealmente independientes (co-raíces) de  $\mathfrak{h}$ .
3.  $\Pi = \{\alpha_i, i = 1, \dots, n\}$  es un conjunto de  $n$  elementos linealmente independientes (raíces) del dual de  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{h}^*$ , que están en dualidad con  $\hat{\Pi}$  a través de la matriz  $A$ :

$$\langle \hat{\alpha}_i, \alpha_j \rangle = a_{ij}, i, j = 1, \dots, n \quad (15.1)$$

Es posible demostrar que existe una realización minimal, con  $\dim \mathfrak{h} = 2n - l$ , con  $l$  el rango de  $A$  (también se puede probar que  $\dim \mathfrak{h} \geq 2n - l$ ).

#### Ejemplo 15.1

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

El rango de esta matriz es 2, con lo que una representación minimal de esta matriz viene dada por un espacio vectorial de dimensión 2,  $\mathfrak{h}$ , un conjunto de dos elementos linealmente independientes

en este espacio, y un conjunto de dos elementos linealmente independientes en el dual satisfaciendo las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\alpha}_1, \alpha_1 \rangle &= \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_2 \rangle = 2 \\ \langle \hat{\alpha}_1, \alpha_2 \rangle &= \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_1 \rangle = -1\end{aligned}$$

### Ejemplo 15.2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

El rango de esta matriz es 2, y tenemos la misma situación que en el ejemplo 1, pero las relaciones entre raíces y co-raíces son:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\alpha}_1, \alpha_1 \rangle &= \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_2 \rangle = 2 \\ \langle \hat{\alpha}_1, \alpha_2 \rangle &= -1, \quad \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_1 \rangle = -3\end{aligned}$$

### Ejemplo 15.3

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (15.4)$$

El rango de esta matriz es 1. Una representación minimal viene dada por un espacio vectorial de dimensión 3,  $\mathfrak{h}$ , 2 elementos linealmente independientes y dos elementos en el dual satisfaciendo las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\alpha}_1, \alpha_1 \rangle &= \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_2 \rangle = 2 \\ \langle \hat{\alpha}_1, \alpha_2 \rangle &= \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_1 \rangle = -2\end{aligned}$$

### Ejemplo 15.4

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (15.5)$$

El rango es 1, con lo que estamos en las mismas condiciones que en el ejemplo anterior, pero las relaciones entre raíces y co-raíces son:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\alpha}_1, \alpha_1 \rangle &= \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_2 \rangle = 2 \\ \langle \hat{\alpha}_1, \alpha_2 \rangle &= -4, \quad \langle \hat{\alpha}_2, \alpha_1 \rangle = -1\end{aligned}$$

Podemos completar el conjunto  $\hat{\Pi}$  a una base de  $\mathfrak{h}$  con un tercer elemento,  $d$ , que tendrá un papel especial en lo que sigue.

El espacio  $\mathfrak{h}$  se puede descomponer en suma directa de dos subespacios, uno generado por  $\hat{\Pi}$  y el otro un subespacio complementario (de dimensión  $n-l$  si estamos utilizando una representación minimal).

Si  $\{\mathfrak{h}, \Pi, \hat{\Pi}\}$  es una representación minimal para la matriz  $A$ , entonces  $\{\mathfrak{h}^*, \hat{\Pi}, \Pi\}$  es una representación minimal para la matriz  $A^t$ . Este hecho tendrá una cierta utilidad cuando estemos trabajando con raíces de distinta longitud.

## 15.2. El álgebra $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$

Definiremos un álgebra de Lie,  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ , de la forma siguiente:

**Definición 15.2** *Dada una matriz de Cartan generalizada,  $A$ , y una representación minimal, consideramos el álgebra generada por los elementos en  $\mathcal{H}$  y un conjunto de  $2n$  elementos,  $\{e_i, f_i, i = 1, \dots, n\}$  que satisfacen las siguientes relaciones:*

$$[h, h'] = 0, \quad h, h' \in \mathfrak{h} \quad (15.6)$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \hat{\alpha}_i, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (15.7)$$

$$[h, e_i] = \langle h, \alpha_i \rangle e_i, \quad [h, f_i] = -\langle h, \alpha_i \rangle f_i, \quad h \in \mathfrak{h}, \quad i = 1, \dots, n \quad (15.8)$$

El espacio  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra abeliana de  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ . La subálgebra  $\mathfrak{n}_+$  está generada libremente por  $\{e_i\}$ , y  $\mathfrak{n}_-$  por  $\{f_i\}$ . El álgebra total es la suma directa de estos tres subespacios.

Existe un automorfismo de álgebras ( $e_i \rightarrow -f_i, f_i \rightarrow -e_i$  y  $h_i \rightarrow -h_i$ ) que transforma  $\mathfrak{n}_+$  en  $\mathfrak{n}_-$  y deja  $\mathfrak{h}$  invariante.

Podemos introducir, usando  $\mathfrak{h}$ , una graduación de raíces en  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  de la forma usual. El álgebra se descompone:

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = (\oplus_{\alpha \in Q, \alpha \neq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus (\oplus_{\alpha \in Q, \alpha \neq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha}) \quad (15.9)$$

$Q$  es el retículo de raíces:  $Q = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z} \alpha_i$  y

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}(A) : [h, x] = \alpha(h)x, \forall h \in \tilde{\mathfrak{g}}_0\}. \quad (15.10)$$

Finalmente,  $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{h}$ .

Existe un ideal maximal,  $\mathfrak{r}$  con una intersección no trivial con  $\mathfrak{h}$ . Este ideal es la suma directa de dos ideales, en  $\mathfrak{n}_+$  y  $\mathfrak{n}_-$  respectivamente.

## 15.3. El álgebra $\mathfrak{g}(A)$

Consideremos el cociente de  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  por el ideal  $\mathfrak{r}$ . Por las características de este ideal, el subespacio  $\mathfrak{h}$  se conserva al hacer el cociente y lo mismo ocurre con los elementos  $e_i$  y  $f_i$ . Es decir, están en clases diferentes. Los llamaremos con los mismos símbolos. La propiedad más importante de la nueva álgebra,  $\mathfrak{g}(A)$ , es que no hay ningún ideal propio que corte de forma no trivial al subespacio  $\mathfrak{h}$ .

El álgebra está graduada por el espacio de raíces:

$$\mathfrak{g}(A) = \oplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{g}_{\alpha} = \tilde{\mathfrak{g}}(A)_{\alpha} / \mathfrak{r}_{\alpha}, \quad \mathfrak{r}_{\alpha} = \mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \quad (15.11)$$

Se puede construir una involución, como antes (la involución de Chevalley). El conjunto de todas las raíces,  $\Delta$ , está formado por los elementos  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  tales que  $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$ . Se definen las raíces positivas de la manera usual.

El álgebra derivada de  $\mathfrak{g}(A)$  es:

$$\mathfrak{g}'(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}_+ \quad (15.12)$$

donde  $\mathfrak{h}'$  está generado por las co-raíces del álgebra:

$$\mathfrak{h}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{C} \hat{\alpha}_i \quad (15.13)$$

En un álgebra definida por una matriz  $A$ , podemos construir otras graduaciones además de la de las raíces. En particular, podemos hacer lo siguiente.

Sea  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  un conjunto de enteros, y definamos el grado de los elementos  $e_i, f_i, h \in \mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}(A)$  como  $\deg e_i = s_i, \deg f_i = -s_i, \deg h = 0$ . Los subespacios graduados son:

$$\mathfrak{g}_j(s) = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (15.14)$$

y  $\alpha$  son las raíces tales que  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$  cuando  $\sum_{i=1}^n k_i s_i = j$ . Si  $s = (1, \dots, 1)$  la graduación se llama principal y los vectores raíces se clasifican por sus alturas (niveles, la suma  $\sum_{i=1}^n k_i$ ). El subespacio de grado 0 es la subálgebra de Cartan, grado 1 es la envolvente lineal de los vectores  $e_i$  y grado  $-1$  es la envolvente lineal de los vectores  $f_i$ .

El álgebra  $\mathfrak{g}(A)$  y su álgebra derivada pueden tener un centro no trivial. Se puede demostrar que el centro corta de manera trivial a  $\mathfrak{n}_-$  y  $\mathfrak{n}_+$ , y que, por lo tanto, debe estar contenido en  $\mathfrak{h}$ . Se define por:

$$\mathcal{Z}(A) = \{h \in \mathfrak{h} : \langle h, \alpha_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n\} \quad (15.15)$$

El álgebra  $\mathfrak{g}(A)$  no es simple en general. Sin embargo, si está asociada a una matriz de Cartan generalizada indescomponible (en el sentido usual) y  $\det A \neq 0$  entonces el álgebra es simple.

## 15.4. Clasificación de matrices de Cartan generalizadas

Consideremos una matriz de Cartan generalizada indescomponible,  $A$ . Podemos establecer la siguiente clasificación (utilizando un orden en el espacio en el que actúa  $A$ ):

1.  $A$  es de tipo finito si existe  $u > 0$  tal que  $Au > 0$ .
2.  $A$  es de tipo afín si existe  $u > 0$  tal que  $Au = 0$ .
3.  $A$  es de tipo indefinido si existe  $u > 0$  tal que  $Au < 0$ .

Los casos más interesantes desde nuestro punto de vista son el primero y el segundo. Se pueden caracterizar (para una matriz de Cartan generalizada indescomponible) como sigue:

1.  $A$  es de tipo finito si y sólo si todos sus menores principales son positivos.
2.  $A$  es de tipo afín si y sólo si todos sus menores principales propios son positivos y el determinante es cero.

En el segundo caso, el co-rango de  $A$  es 1, y el vector nulo (el asociado al autovalor cero) es único salvo factor constante.

Las matrices de Cartan generalizadas (que supondremos indescomponibles) no son en general simétricas. Sin embargo, en los casos finito y afín son simetrizables en el sentido siguiente.

**Teorema 15.1** *Dada  $A$ , existe una matriz simétrica  $B$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $A = DB$ . Si*

$$D = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (15.16)$$

*entonces  $a_{ij} = \epsilon_i b_{ij}$  (sin sumar), y  $b_{ij} = b_{ji}$ . Los elementos en  $D$  se pueden escoger racionales y positivos. La matriz  $D$  se define salvo un factor constante.*

La clasificación completa de las matrices de Cartan generalizadas de tipo finito fue dada por Killing y Cartan como ya sabemos. La clasificación de álgebras afines fue dada por Kac y Moody. Todas ellas se pueden describir por un diagrama de Dynkin (véase Tablas 1,2).

El orden de las raíces en los diagramas finitos es el de Dynkin. Los números asociados a los nodos en los diagramas afines son las coordenadas del vector nulo de la matriz  $A$ . Como siempre,

el número de líneas entre los nodos  $i$  e  $i + 1$  es igual a  $\max\{|a_{ij}|, |a_{ji}|\}$ , y la flecha apunta hacia el nodo  $i$  si  $|a_{ij}| > |a_{ji}|$ . Los diagramas en el caso afín no torcido son los diagramas de Dynkin extendidos. En los casos afines torcidos los diagramas están relacionados con una subálgebra del álgebra afín que es de tipo finito. El caso  $A_3^{(2)}$  debe ser sustituido por  $D_3^{(2)}$  en el caso afín torcido (2).

## 15.5. Forma bilineal invariante

No es posible, en general, definir una forma de Killing para un álgebra afín. Pero podemos introducir una forma bilineal simétrica invariante que tiene muchas de las propiedades de la forma de Killing en el caso finito. Recordemos que una forma bilineal simétrica invariante satisface:

$$([x, y], z) = (x, [y, z]), \quad x, y, z \in \mathfrak{g}(A) \quad (15.17)$$

Se puede demostrar que si una matriz de Cartan generalizada es simetrizable, existe una forma bilineal simétrica invariante no degenerada. La restricción a la subálgebra de Cartan es no degenerada y los subespacios de raíces están agrupados de dos en dos, en el siguiente sentido:

$$x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta \begin{cases} \alpha + \beta = 0, (x, y) \neq 0 \\ \alpha + \beta \neq 0, (x, y) = 0 \end{cases} \quad (15.18)$$

Las matrices  $D$  y  $B$  están relacionadas con esta forma invariante: si  $\{\hat{\alpha}_i\}$  es el conjunto de co-raíces, la forma bilineal invariante satisface:

$$(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j) = \epsilon_i b_{ij} \epsilon_j = a_{ij} \epsilon_j \quad (15.19)$$

$$(h, \hat{\alpha}_i) = \langle h, \alpha_i \rangle \epsilon_i, \quad h \in \mathcal{H} \quad (15.20)$$

$$(h'_1, h''_2) = 0, \quad h''_1, h''_2 \in \mathfrak{h}'' \quad (15.21)$$

donde:  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$ ,  $\mathfrak{h}'$  está generado por las co-raíces, y  $\mathfrak{h}''$  es un subespacio complementario.

Al ser la forma bilineal no degenerada, podemos definir un isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  y su dual  $\mathfrak{h}^*$ . Llamémosle  $\nu$ . Entonces:

$$\nu: \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \rightarrow & \mathfrak{h}^* \\ h & \mapsto & \nu(h) \end{array} \quad (15.22)$$

tal que:

$$\langle h, \nu(h') \rangle = (h, h'), \quad h, h' \in \mathfrak{h} \quad (15.23)$$

Podemos usar este isomorfismo para introducir una forma bilineal en  $\mathfrak{h}^*$  que es también no degenerada:

$$(\lambda, \mu) = (\nu^{-1}(\lambda), \nu^{-1}(\mu)), \quad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^* \quad (15.24)$$

Usando la expresión para la forma invariante en  $\mathfrak{h}$ :

$$\nu(\hat{\alpha}_i) = \epsilon_i \alpha_i \quad (15.25)$$

y:

$$(\alpha_i, \alpha_j) = b_{ij} \quad (15.26)$$

En general no obtenemos el mismo valor para el producto de dos raíces y sus correspondientes co-raíces. En su lugar, tenemos:

$$(\alpha_i, \alpha_i)(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_i) = 4 \quad (15.27)$$

usando  $a_{ii} = 2$ . Nótese también las siguientes fórmulas útiles:

$$\alpha_i = \frac{2\nu(\hat{\alpha}_i)}{(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_i)}, \quad \hat{\alpha}_i = \frac{2\nu^{-1}(\alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (15.28)$$

Con respecto a los vectores raíces se puede establecer el siguiente resultado:

$$[x, y] = (x, y)\nu^{-1}(\alpha), \quad x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad (15.29)$$

para cualquier raíz positiva  $\alpha$ . Esta fórmula es una consecuencia de la invariancia de la forma bilineal:

$$([x, y], h) = k(\nu^{-1}(\alpha), h), \quad (x, [y, h]) = \langle h, \alpha \rangle(x, y) = (h, \nu^{-1}(\alpha))(x, y) \quad (15.30)$$

y  $k = (x, y)$ .

Los elementos de la matriz de Cartan generalizada se pueden poner en términos de la forma bilineal invariante. Usando  $A = DB$ ,

$$a_{ij} = \epsilon_i b_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (15.31)$$

con:

$$(\alpha_i, \alpha_i) > 0, \quad (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0, \quad i \neq j \quad (15.32)$$

Cuando  $A$  es una matriz de Cartan generalizada de tipo afín,  $\det A = 0$  y  $\text{co-rango } A = 1$ . Sea  $l + 1 = \text{orden } A$ . La subálgebra de Cartan es la suma de dos espacios complementarios. Uno de ellos está generado por las co-raíces (dimensión =  $l$ ) y el otro tiene dimensión 1. Las coordenadas del vector nulo son:

$$(a_0, a_1, \dots, a_l) \quad (15.33)$$

donde podemos escoger  $a_0 = 1$  (excepto en el caso  $A_{2l}^{(2)}$ ,  $a_0 = 2$ ). En el caso afín de tipo 1, corresponden a las coordenadas de la raíz más alta del álgebra finita correspondiente. Si consideramos la matriz transpuesta, podemos calcular las coordenadas del vector nulo:

$$(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_l) \quad (15.34)$$

Entonces,  $\delta^t = (a_0, a_1, \dots, a_l)$  y  $\hat{\delta}^t = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_l)$ , satisfacen:  $A\delta = 0$ ,  $A^t\hat{\delta} = 0$ . La matriz  $A$  es simetrizable y podemos escoger la matriz diagonal  $D$  como:

$$D = \begin{bmatrix} a_0\hat{a}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_l\hat{a}_l \end{bmatrix} \quad (15.35)$$

Como hemos visto antes, el centro del álgebra  $\mathfrak{g}(A)$  está contenido en la subálgebra de Cartan. Podemos calcularlo explícitamente para un álgebra afín. En este caso el centro tiene dimensión 1 y uno de sus elementos (el elemento central canónico) está dado por:

$$c = \sum_{i=0}^l \hat{a}_i \hat{\alpha}_i \quad (15.36)$$

porque, si  $c$  está en el centro debe satisfacer:

$$\langle c, \alpha_j \rangle = \sum_{i=0}^l \hat{a}_i \langle \hat{\alpha}_i, \alpha_j \rangle = \sum_{i=0}^l \hat{a}_i a_{ij} = 0 \quad (15.37)$$

debido a la definición de  $\hat{a}_i$ .

Es un elemento de la subálgebra de Cartan y está contenido en  $\mathfrak{h}'$ , el subespacio generado por las co-raíces. Podemos definir una raíz, combinación lineal de raíces simples, usando las coordenadas  $a_i$ , que dan el vector nulo de  $A$ :

$$\delta = \sum_{i=0}^l a_i \alpha_i \quad (15.38)$$

Para encontrar una base de la subálgebra de Cartan necesitamos otro elemento (dimensión =  $l + 2$ , orden =  $l + 1$ , rango =  $l$ ) para añadir a las  $l + 1$  co-raíces independientes. Sea  $d$ , que satisface:

$$\langle d, \alpha_0 \rangle = 1, \quad \langle d, \alpha_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (15.39)$$

Este elemento está definido de forma única por estas relaciones salvo un factor, y, junto con las  $l + 1$  co-raíces forma una base de la subálgebra de Cartan. Se le llama un elemento de escala.

Podemos definir una forma bilineal simétrica invariante canónica en  $\mathfrak{g}(A)$  satisfaciendo las siguientes relaciones en la subálgebra de Cartan:

$$(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j) = a_j \hat{a}_j^{-1} a_{ij} \quad (15.40)$$

$$(d, \hat{\alpha}_0) = a_0 \quad (15.41)$$

$$(d, \hat{\alpha}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (15.42)$$

$$(d, d) = 0 \quad (15.43)$$

El elemento central canónico satisface:

$$(c, \hat{\alpha}_i) = 0, \quad i = 0, \dots, l, \quad (c, d) = a_0, \quad (c, c) = 0 \quad (15.44)$$

En el espacio dual podemos definir un elemento (dual a  $d$ ) del modo siguiente:

$$\langle \hat{\alpha}_0, \Lambda_0 \rangle = 1, \quad \langle \hat{\alpha}_i, \Lambda_0 \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad \langle d, \Lambda_0 \rangle = 1 \quad (15.45)$$

Este elemento forma una base de  $\mathfrak{h}^*$  junto con las raíces simples. Se puede inducir una forma bilineal en el espacio dual. Las relaciones que siguen se pueden deducir fácilmente de las anteriores:

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \hat{a}_i \hat{a}_i^{-1} a_{ij} \quad (15.46)$$

$$(\Lambda_0, \alpha_0) = a_0^{-1} \quad (15.47)$$

$$(\Lambda_0, \alpha_i) = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (15.48)$$

$$(\Lambda_0, \Lambda_0) = 0 \quad (15.49)$$

El elemento  $\delta$  (dual a  $c$ ) satisface:

$$(\delta, \alpha_i) = 0, \quad i = 0, \dots, l, \quad (\delta, \Lambda_0) = 1, \quad (\delta, \delta) = 0 \quad (15.50)$$

Finalmente, el isomorfismo entre la subálgebra de Cartan y su dual se puede escribir, usando la forma canónica normalizada, como:

$$\nu(\hat{\alpha}_i) = \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \hat{a}_i^{-1} a_i \alpha_i \quad (15.51)$$



## Capítulo 16

# Representación de álgebras de Lie afines

En esta sección construiremos una representación explícita de álgebras de Lie afines. Consideraremos separadamente los casos girados y no girados, aunque se puede hacer un estudio unificado.

### 16.1. Álgebras afines no giradas

La matriz de Cartan generalizada asociada a un álgebra afín no girada, corresponde a una matriz de Cartan extendida de un álgebra finita. Es decir, sea  $X_l$  un álgebra de Lie simple,  $X_l = \mathfrak{g}(\dot{A})$ , y  $\dot{A}$  su matriz de Cartan. Sea  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  un sistema de raíces simples y  $\theta = \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i$ , la raíz más alta (siempre una raíz larga). Es fácil demostrar que  $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^l \hat{a}_i \alpha_i$  es la raíz más alta entre las cortas del álgebra dual, con matriz de Cartan  $\dot{A}^t$ . Podemos construir una matriz de Cartan generalizada considerando el conjunto  $\{\alpha_0 = \theta, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ . Esta matriz corresponde a  $X_l^{(1)}$ . La matriz tiene orden  $l + 1$  y la primera fila y columna son:

$$a_{00} = 2, \quad a_{0i} = -\sum_{j=1}^l \hat{a}_j a_{ji}, \quad a_{i0} = -\sum_{j=1}^l a_j a_{ij} \quad (16.1)$$

Es claro que a partir de cada  $X_l^{(1)}$  podemos construir un álgebra finita, eliminando la primera fila y columna de la matriz de Cartan.

Buscamos una representación de las álgebras de Lie afines de tipo (1) basada en las correspondientes álgebras finitas.

Sea  $\dot{\mathfrak{g}}$  un álgebra de Lie finita de tipo  $X_l$ ,  $X = A, B, C, D, E, F, G$ . Sea  $\dot{A}$  su matriz de Cartan. Hemos visto como se construye la matriz de Cartan generalizada,  $A$ , asociada a un álgebra afín no girada correspondiente a  $\dot{\mathfrak{g}}$ .

Construiremos ahora un álgebra de lazos, series formales en  $t$  y  $t^{-1}$  con coeficientes en el álgebra  $\dot{\mathfrak{g}}$ .

$$L(\dot{\mathfrak{g}}) = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes \dot{\mathfrak{g}} \quad (16.2)$$

Las relaciones de conmutación son:

$$[t^n x, t^m y] = t^{n+m} [x, y], \quad n, m \in \mathbf{Z}, \quad x, y \in \dot{\mathfrak{g}} \quad (16.3)$$

La forma bilineal invariante no degenerada que existe en  $\dot{\mathfrak{g}}$  se extiende a esta nueva álgebra:

$$(t^n x, t^m y) = \delta_{n+m, 0} (x, y) \quad (16.4)$$

Ahora construimos una extensión central de esta álgebra. Para ello consideramos la siguiente aplicación en  $L(\dot{\mathfrak{g}})$ :

$$d(t^n x) = nt^n x, \quad n \in Z, \quad x \in \dot{\mathfrak{g}} \quad (16.5)$$

La aplicación  $d$  es una derivación en  $L(\dot{\mathfrak{g}})$ . Usando  $d$  construimos un 2-cociclo,  $\psi$  en nuestra álgebra:

$$\begin{aligned} \psi : L(\dot{\mathfrak{g}}) \times L(\dot{\mathfrak{g}}) &\rightarrow \mathbf{C} \\ (a, b) &\mapsto \psi(a, b) = (da, b) \end{aligned} \quad (16.6)$$

donde se ha usado la forma bilineal dada anteriormente. En particular:

$$\psi(t^n x, t^m y) = n\delta_{n+m,0}(x, y) \quad (16.7)$$

Esta aplicación es un 2-cociclo. Es sencillo probar que:

$$\psi(t^m y, t^n x) = m\delta_{m+n,0}(y, x) = -n\delta_{n+m,0}(x, y) = -\psi(t^n x, t^m y) \quad (16.8)$$

$$\psi([t^n x, t^m y], t^s z) + \psi([t^s z, t^n x], t^m y) + \psi([t^m y, t^s z], t^n x) = 0 \quad (16.9)$$

La extensión central se define por:

$$\tilde{L}(\dot{\mathfrak{g}}) = L(\dot{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbf{C}c \quad (16.10)$$

y el nuevo conmutador es:

$$[t^n x + \lambda c, t^m y + \mu c] = t^{n+m}[x, y] + n\delta_{n+m,0}(x, y)c, \quad n, m \in Z, \quad x, y \in \dot{\mathfrak{g}}, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{C} \quad (16.11)$$

Finalmente añadimos la derivación  $d$ :

$$\hat{L}(\dot{\mathfrak{g}}) = \tilde{L}(\dot{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbf{C}d = L(\dot{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}d \quad (16.12)$$

y el conmutador:

$$\begin{aligned} [t^n x + \lambda_1 c + \lambda_2 d, t^m y + \mu_1 c + \mu_2 d] = \\ t^{n+m}[x, y] + n\delta_{n+m,0}(x, y)c + \lambda_2 m t^m y - \mu_2 n t^n x, \\ n, m \in Z, \quad x, y \in \dot{\mathfrak{g}}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C} \end{aligned} \quad (16.13)$$

Es un álgebra de Lie con un centro unidimensional generado por  $c$ . Probaremos que es isomorfa al álgebra de Lie afín no girada  $X_l^{(1)}$ , donde  $X_l = \dot{\mathfrak{g}}$ .

Escogemos una subálgebra de Cartan  $\dot{\mathfrak{h}}$  en  $\dot{\mathfrak{g}}$ , un sistema de raíces simples  $\{\alpha_i, i = 1, \dots, l\}$  y sus correspondientes co-raíces,  $\{\hat{\alpha}_i, i = 1, \dots, l\}$ , dadas por el isomorfismo  $\nu$  construido sobre la forma bilineal invariante. Escogemos vectores en cada uno de los espacios correspondientes a las raíces simples, tal que  $[e_i, f_i] = \hat{\alpha}_i$ ,  $e_i \in \dot{\mathfrak{g}}_{\alpha_i}$ ,  $f_i \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\alpha_i}$ . Sea  $\theta$  la raíz más alta, y escojamos  $e_\theta \in \dot{\mathfrak{g}}_\theta$ ,  $f_\theta \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\theta}$  con la misma condición:  $[e_\theta, f_\theta] = \hat{\theta}$ ,  $\hat{\theta} = 2\nu^{-1}(\theta)/(\theta, \theta)$ .

El álgebra  $\dot{\mathfrak{g}}$  se identifica con  $1 \otimes \dot{\mathfrak{g}}$  y en particular, la subálgebra de Cartan  $\dot{\mathfrak{h}}$  se identifica con la subálgebra  $1 \otimes \dot{\mathfrak{h}}$ . Definimos:

$$\mathfrak{h} = \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}d \quad (16.14)$$

Es una subálgebra abeliana de dimensión  $l + 2$ ; es una subálgebra de Cartan de  $\hat{L}(\dot{\mathfrak{g}})$ . En su espacio dual construimos un elemento,  $\delta$ , satisfaciendo:

$$\langle h, \delta \rangle = 0, \quad h \in \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbf{C}c, \quad \langle d, \delta \rangle = 1 \quad (16.15)$$

Los otros elementos del álgebra de Lie afín (generadores de Chevalley) (hemos establecido previamente:  $e_i = 1 \otimes e_i$ ,  $f_i = 1 \otimes f_i$ ,  $\hat{\alpha}_i = 1 \otimes \hat{\alpha}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ) son:

$$e_0 = tf_\theta, \quad f_0 = t^{-1}e_\theta \quad (16.16)$$

Entonces:

$$[\hat{\alpha}_i, e_j] = a_{ij}e_j, \quad [\hat{\alpha}_i, f_j] = -a_{ij}f_j, \quad i = 1, \dots, l \quad (16.17)$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}\hat{\alpha}_i, \quad i, j = 1, \dots, l \quad (16.18)$$

$$[\hat{\alpha}_i, e_0] = [\hat{\alpha}_i, tf_\theta] = -t\langle \hat{\alpha}_i, \sum_{j=1}^l a_j\alpha_j \rangle f_\theta = -t \sum_{j=1}^l a_{ij}a_j f_\theta = a_{i0}(tf_\theta) = a_{i0}e_0 \quad (16.19)$$

$$[\hat{\alpha}_i, f_0] = [\hat{\alpha}_i, t^{-1}e_\theta] = t^{-1}\langle \hat{\alpha}_i, \sum_{j=1}^l a_j\alpha_j \rangle e_\theta = t^{-1} \sum_{j=1}^l a_{ij}a_j e_\theta = -a_{i0}(t^{-1}e_\theta) = -a_{i0}f_0 \quad (16.20)$$

$$[e_0, f_0] = [f_\theta, e_\theta] + (f_\theta, e_\theta)c = -\hat{\theta} + \frac{2}{(\theta, \theta)}c \quad (16.21)$$

Esta última relación se obtiene usando:

$$[e_\theta, f_\theta] = \hat{\theta} = (e_\theta, f_\theta)\nu^{-1}(\theta) \quad (16.22)$$

y

$$\hat{\theta} = \frac{2\nu^{-1}(\theta)}{(\theta, \theta)} \quad (16.23)$$

lo que implica:

$$(e_\theta, f_\theta) = \frac{2}{(\theta, \theta)} \quad (16.24)$$

Las otras relaciones se pueden probar fácilmente. Definamos el último elemento de la base de co-raíces,  $\hat{\alpha}_0$  como:

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{2}{(\theta, \theta)}c - \hat{\theta} \quad (16.25)$$

y el último de la base de raíces:

$$\alpha_0 = \delta - \theta \quad (16.26)$$

La última relación que hay que comprobar es:

$$[\hat{\alpha}_0, e_0] = -[\hat{\theta}, tf_\theta] = \langle \hat{\theta}, \theta \rangle e_0 = 2e_0 \quad (16.27)$$

El sistema de raíces de  $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}})$  es:

$$\Delta = \{\alpha + n\delta : \alpha \in \dot{\Delta}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n\delta : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \quad (16.28)$$

y la descomposición del espacio de raíces es:

$$\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus L(\hat{\mathfrak{g}})_\alpha) \quad (16.29)$$

con:

$$L(\hat{\mathfrak{g}})_{\alpha+n\delta} = t^n \otimes \dot{\mathfrak{g}}_\alpha, \quad L(\hat{\mathfrak{g}})_{n\delta} = t^n \otimes \dot{\mathfrak{h}} \quad (16.30)$$

Los conjuntos  $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ ,  $\hat{\Pi} = \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_l\}$  y  $\mathfrak{h}$  son una representación minimal de la matriz generalizada de Cartan  $A$ . Se puede probar que el álgebra  $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}})$  es isomorfa al álgebra afín dada por la matriz de Cartan generalizada  $A$ .

Podemos escoger una forma bilineal invariante, por ejemplo, normalizando el producto:

$$(\theta, \theta) = 2 \quad (16.31)$$

lo que quiere decir que hemos escogido la longitud de las raíces largas igual a  $\sqrt{2}$ . Entonces  $(c, d) = a_0 = 1$  (en el caso no girado,  $a_0 = 1$ ) que es la forma invariante canónica que encontramos en la sección anterior.

En este caso  $c$  es el elemento central canónico:

$$c = \frac{2}{(\theta, \theta)}(\hat{\alpha}_0 + \hat{\theta}) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\theta} = \hat{\alpha}_0 + \frac{2\nu^{-1}(\theta)}{(\theta, \theta)} = \hat{\alpha}_0 + \nu^{-1}(\theta) = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^l a_i \nu^{-1}(\alpha_i) \quad (16.32)$$

Pero en esta forma canónica,  $\nu^{-1}(\alpha_i) = a_i^{-1} \hat{a}_i \hat{\alpha}_i$  y siempre  $\hat{a}_0 = 1$ , entonces:

$$c = \sum_{i=0}^l \hat{a}_i \hat{\alpha}_i \quad (16.33)$$

## 16.2. Ejemplo de álgebras de Lie afines no giradas

Veremos algunos ejemplos desarrollados para explicar la teoría introducida en la sección anterior.

### Ejemplo 16.1

Consideremos el ejemplo más simple de un álgebra de Lie afín no girada:  $A_1^{(1)}$ . La matriz de Cartan del álgebra de Lie finita correspondiente es:

$$\hat{A} = 2 \quad (16.34)$$

y la raíz simple es  $\alpha_1$ , con  $\langle \hat{a}_1, \alpha_1 \rangle = 2$ . (Sólo hay una raíz simple y la subálgebra de Cartan tiene dimensión =1). Sean  $e_1$  y  $f_1$  los vectores raíces que verifican:

$$[e_1, f_1] = \hat{\alpha}_1 \quad (16.35)$$

La raíz más alta es  $\theta = \alpha_1$ , y la matriz de Cartan extendida es, usando  $a_1 = \hat{a}_1 = 1$  (porque  $\hat{\theta} = \hat{\alpha}_1$ ),  $a_{00} = 2$ ,  $a_{01} = -\hat{a}_1 a_{11}$ ,  $a_{10} = -a_1 a_{11}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (16.36)$$

correspondiente a  $A_1^{(1)}$ . Los generadores de Chevalley  $e_0, f_0$  son:

$$e_0 = t f_1, \quad f_0 = t^{-1} e_1, \quad \hat{\alpha}_0 = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} c - \hat{\alpha}_1 \quad (16.37)$$

el elemento central  $c$  es:

$$c = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha) (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1) \quad (16.38)$$

y si escogemos  $(\theta, \theta) = (\alpha, \alpha) = 2$  obtenemos el elemento central canónico. Usando la representación fundamental para  $A_1$ ,  $sl(2, \mathbf{C})$ , tenemos:

$$\hat{\alpha}_0 = c - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (16.39)$$

$$e_0 = t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.40)$$

$$f_0 = t^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.41)$$

También podemos obtener el elemento de escala  $d$  actuando como:

$$d(e_0) = e_0, \quad d(f_0) = -f_0, \quad d(e_1) = 0, \quad d(f_1) = 0 \quad (16.42)$$

Si la forma bilineal invariante se escoge como antes,  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_1) = 2$  y por tanto  $(e_1, f_1) = 1$ .

### Ejemplo 16.2

El segundo ejemplo es  $C_2^{(1)}$ . El álgebra finita  $C_2$  tiene rango 2 y dimensión 10. La matriz de Cartan es:

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (16.43)$$

y la raíz más alta es  $\theta = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2$  son las raíces simples. Las coordenadas  $a_i$  son:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1 \quad (16.44)$$

De forma similar,  $\hat{\theta}$  viene dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{2\nu^{-1}(\theta)}{(\theta, \theta)} = \frac{2\nu^{-1}(2\alpha_1)}{2(\alpha_1, \alpha_1)} + \frac{2\nu^{-1}(\alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \quad (16.45)$$

y,

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = 1 \quad (16.46)$$

La matriz de Cartan generalizada es:

$$a_{01} = -(\hat{a}_1 a_{11} + \hat{a}_2 a_{21}) = -1 \quad (16.47)$$

$$a_{02} = -(\hat{a}_1 a_{12} + \hat{a}_2 a_{22}) = 0 \quad (16.48)$$

$$a_{10} = -(a_1 a_{11} + a_2 a_{12}) = -2 \quad (16.49)$$

$$a_{20} = -(a_1 a_{21} + a_2 a_{22}) = 0 \quad (16.50)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (16.51)$$

Los generadores  $e_0, f_0$  son:

$$e_0 = t f_\theta, \quad f_0 = t^{-1} e_\theta \quad (16.52)$$

donde  $[e_\theta, f_\theta] = \hat{\theta} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$ .

De aquí se deduce:

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{2}{(\theta, \theta)} c - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 \quad (16.53)$$

y:

$$c = \frac{1}{2}(\theta, \theta) (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \quad (16.54)$$

Si escogemos la normalización  $(\theta, \theta) = (\alpha_2, \alpha_2) = 2$ , encontramos el elemento central canónico:

$$c = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \quad (16.55)$$

Se tiene que:  $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 1$  y este es el vector nulo de la matriz  $A^\dagger$  (la suma de las filas es cero).

Si usamos la representación matricial  $4 \times 4$  de  $C_2$ :

$$\hat{\alpha}_0 = c - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (16.56)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.57)$$

$$e_0 = t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.58)$$

$$f_0 = t^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.59)$$

# Capítulo 17

## Álgebras afines giradas

Las álgebras de Lie afines giradas están asociadas con automorfismos de las álgebras de Lie finitas. Como ya hemos dicho en otros apartados, éstos están relacionados con las simetrías del diagrama de Dynkin. Es fácil comprobar que sólo para las álgebras de Lie simples de tipos:  $A_l$ ,  $D_l$ ,  $E_6$  existen simetrías no triviales de orden 2 ( $A_l$ ,  $D_l$ ,  $E_6$ ) o 3 ( $D_4$ ). Obtendremos los tipos  $X_l^{(2)}$  y  $X_l^{(3)}$  de álgebras de Lie afines giradas

En este caso, las raíces del álgebra de Lie finita de partida no son en general raíces del álgebra afín. Por eso vamos a cambiar la notación.

### 17.1. Automorfismos de orden finito

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie finita de tipo  $X_N$ , y  $\mu$  un automorfismo de orden  $k$  del diagrama de Dynkin de  $X_N$ . Sea  $\mathfrak{h}'$  la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\alpha'_i, \hat{\alpha}'_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  las raíces correspondientes y co-raíces. Hemos definido también los vectores raíces  $e'_i, f'_i$ , satisfaciendo  $[e'_i, f'_i] = \hat{\alpha}'_i$ . El automorfismo de raíces  $\mu$  genera un automorfismo  $\sigma$  del álgebra de Lie, dado (por ejemplo) por:

$$\sigma(\hat{\alpha}'_i) = \hat{\alpha}'_{\mu(i)}, \quad \sigma(e'_i) = e'_{\mu(i)}, \quad \sigma(f'_i) = f'_{\mu(i)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (17.1)$$

Como el orden del automorfismo  $\sigma$  es finito (1, 2 o 3), podemos construir una graduación del álgebra de Lie finita, considerando los autoespacios de  $\sigma$ .

$$\mathfrak{g} = \bigotimes_{j=0}^{k-1} \mathfrak{g}_{\bar{j}} \quad (17.2)$$

donde  $\mathfrak{g}_{\bar{j}} = \{x \in \mathfrak{g} : \sigma(x) = e^{2\pi j/k} x\}$ . Ésta es una graduación del álgebra de Lie:

$$[\mathfrak{g}_{\bar{i}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}}] \subset \mathfrak{g}_{\bar{i}+\bar{j}} \quad (17.3)$$

La graduación tiene uno, dos o tres subespacios dependiendo del orden de  $\mu$ . En cualquier caso  $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Se puede demostrar que esta subálgebra es una subálgebra simple. A continuación describiremos estas subálgebras.

Si consideramos la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}'$ , el automorfismo  $\sigma$  dejará parte de esta subálgebra invariante. Llamemos  $\mathfrak{h}_0$  a esta parte fija. Es una subálgebra abeliana de  $\mathfrak{g}$ , y de  $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ . En concreto será la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ . Usaremos el orden establecido en los diagramas de Dynkin de las álgebras finitas.

Los siguientes operadores generan el álgebra  $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$  en cada caso:

1.  $\mathfrak{g} = A_{2l}$ ,  $k = 2$ ,  $\mu(i) = 2l - i + 1$ ,  $i = 1, \dots, 2l$

$$H_i = \hat{\alpha}'_{l-i} + \hat{\alpha}'_{l+i+1}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad H_0 = 2(\hat{\alpha}'_l + \hat{\alpha}'_{l+1}) \quad (17.4)$$

$$E_i = e'_{l-i} + e'_{l+i+1}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad E_0 = \sqrt{2}(e'_l + e'_{l+1}) \quad (17.5)$$

$$F_i = f'_{l-i} + f'_{l+i+1}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad F_0 = \sqrt{2}(f'_l + f'_{l+1}) \quad (17.6)$$

2.  $\mathfrak{g} = A_{2l-1}$ ,  $k = 2$ ,  $\mu(i) = 2l - i$ ,  $i = 1, \dots, 2l - 1$

$$H_i = \hat{\alpha}'_i + \hat{\alpha}'_{2l-i}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad H_0 = \hat{\alpha}'_l \quad (17.7)$$

$$E_i = e'_i + e'_{2l-i}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad E_l = e'_l \quad (17.8)$$

$$F_i = f'_i + f'_{2l-i}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad F_l = f'_l \quad (17.9)$$

3.  $\mathfrak{g} = D_{l+1}$ ,  $k = 2$ ,  $\mu(i) = i$ ,  $i = 1, \dots, l-1$ ,  $\mu(l) = l+1$ ,  $\mu(l+1) = l$

$$H_i = \hat{\alpha}'_i, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad H_l = \hat{\alpha}'_l + \hat{\alpha}'_{l+1} \quad (17.10)$$

$$E_i = e'_i, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad E_l = e'_l + e'_{l+1} \quad (17.11)$$

$$F_i = f'_i, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad F_l = f'_l + f'_{l+1} \quad (17.12)$$

4.  $\mathfrak{g} = E_6$ ,  $k = 2$ ,  $\mu(1) = 5$ ,  $\mu(2) = 4$ ,  $\mu(3) = 3$ ,  $\mu(6) = 6$

$$H_1 = \hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_5, \quad H_2 = \hat{\alpha}'_2 + \hat{\alpha}'_4, \quad H_3 = \hat{\alpha}'_3, \quad H_4 = \hat{\alpha}'_6 \quad (17.13)$$

$$E_1 = e'_1 + e'_5, \quad E_2 = e'_2 + e'_4, \quad E_3 = e'_3, \quad E_4 = e'_6 \quad (17.14)$$

$$F_1 = f'_1 + f'_5, \quad F_2 = f'_2 + f'_4, \quad F_3 = f'_3, \quad F_4 = f'_6 \quad (17.15)$$

5.  $\mathfrak{g} = D_4$ ,  $k = 3$ ,  $\mu(1) = 4$ ,  $\mu(2) = 2$ ,  $\mu(3) = 1$ ,  $\mu(4) = 3$

$$H_1 = \hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_3 + \hat{\alpha}'_4, \quad H_2 = \hat{\alpha}'_2 \quad (17.16)$$

$$E_1 = e'_1 + e'_3 + e'_4, \quad E_2 = e'_2 \quad (17.17)$$

$$F_1 = f'_1 + f'_3 + f'_4, \quad F_2 = f'_2 \quad (17.18)$$

Los subíndices para estos operadores son siempre  $i = 1, \dots, l$ , excepto en el caso  $A_{2l}$ :  $i = 0, \dots, l-1$ . Las fórmulas anteriores son una simple consecuencia del automorfismo del diagrama.

Calculemos ahora las raíces del álgebra  $\mathfrak{g}_0$ :

1.  $A_{2l}$

$$[H_0, E_0] = 2\sqrt{2} [\hat{\alpha}'_l + \hat{\alpha}'_{l+1}, e'_l + e'_{l+1}] = 2\sqrt{2}(2e'_l - e'_{l+1} - e'_l + 2e'_{l+1}) = 2E_0 \quad (17.19)$$

$$[H_1, E_0] = \sqrt{2}[\hat{\alpha}'_{l-1} + \hat{\alpha}'_{l+2}, e'_l + e'_{l+1}] = -\sqrt{2}(e'_l + e'_{l+1}) = -E_0 \quad (17.20)$$

$$[H_i, E_0] = \sqrt{2}[\hat{\alpha}'_{l-i} + \hat{\alpha}'_{l+i+1}, e'_l + e'_{l+1}] = 0, \quad i = 2, \dots, l-1 \quad (17.21)$$

Si llamamos a las raíces asociadas a  $E_0$  en  $\mathfrak{g}_0$ ,  $\alpha_0$ , entonces:

$$\langle H_0, \alpha_0 \rangle = 2, \quad \langle H_1, \alpha_0 \rangle = -1, \quad \langle H_i, \alpha_0 \rangle = 0, \quad i = 2, \dots, l \quad (17.22)$$

o:

$$\langle 2(\hat{\alpha}'_l + \hat{\alpha}'_{l+1}), \alpha_0 \rangle = 2, \quad \langle \hat{\alpha}'_{l-1} + \hat{\alpha}'_{l+2}, \alpha_0 \rangle = -1 \quad (17.23)$$

$$\langle \hat{\alpha}'_{l-i} + \hat{\alpha}'_{l+i+1}, \alpha_0 \rangle = 0, \quad i = 2, \dots, l-1 \quad (17.24)$$

es decir:

$$\alpha_0 = \alpha'_l|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_{l+1}|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.25)$$

Se puede comprobar que esto es correcto para cualquier  $i = 1, \dots, l-1$ :

$$\alpha_i = \alpha'_{l-i}|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_{l+i+1}|_{\mathfrak{h}_0}, \quad i = 0, \dots, l-1 \quad (17.26)$$

y se obtiene similares resultados en los demás casos.

2.  $A_{2l-1}$ 

$$\alpha_i = \alpha'_i|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_{2l-i}|_{\mathfrak{h}_0}, \quad i = 1, \dots, l \quad (17.27)$$

3.  $D_{l+1}$ 

$$\alpha_i = \alpha'_i|_{\mathfrak{h}_0}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad \alpha_l = \alpha'_l|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_{l+1}|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.28)$$

4.  $E_6$ 

$$\alpha_1 = \alpha'_1|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_5|_{\mathfrak{h}_0}, \quad \alpha_2 = \alpha'_2|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_4|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.29)$$

$$\alpha_3 = \alpha'_3|_{\mathfrak{h}_0}, \quad \alpha_4 = \alpha'_6|_{\mathcal{H}_0} \quad (17.30)$$

5.  $D_4, k = 3$ 

$$\alpha_1 = \alpha'_1|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_3|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_4|_{\mathfrak{h}_0}, \quad \alpha_2 = \alpha'_2|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.31)$$

Los siguientes resultados serán enunciados sin demostración.

**Teorema 17.1** *El álgebra  $\mathfrak{g}_0$  actúa sobre los otros subespacios de la graduación de una forma irreducible. Concretamente, en el caso  $k = 3$ , las representaciones en  $\mathfrak{g}_1$  y  $\mathfrak{g}_2$  son equivalentes. Estas representaciones tienen un peso más alto  $\theta_0$  en el  $\mathfrak{g}_0$ -módulo  $\mathfrak{g}_1$ . Se pueden calcular las matrices de Cartan de las álgebras  $\mathfrak{g}_0$ . Los resultados aparecen en la Tabla 3.*

Los números de la última columna son los coeficientes del peso más alto  $\theta_0$ , (referido a la base de raíces simples, no a la de pesos fundamentales). El caso  $A_2^{(2)}$  tiene como subálgebra  $\mathfrak{g}_0$  el álgebra  $A_1$  que es isomorfa a  $B_1$ . La raíz simple se puede llamar  $\alpha_1$  y el coeficiente es 2 (es decir, el peso más alto es  $\theta_0 = 2\alpha_1$ ). Nótese el orden de las raíces en los diagramas.

La forma bilineal invariante en el álgebra  $\mathfrak{g}$  induce una forma bilineal invariante en la subálgebra  $\mathfrak{g}_0$ , que no es la que la subálgebra tiene de forma natural. Está claro que son proporcionales (porque esencialmente es única). Si escogemos en el álgebra  $\mathfrak{g}$  una forma invariante tal que  $(\alpha, \alpha) = 2k$  (todas las raíces tienen la misma longitud en  $\mathfrak{g}$ ), podemos probar que la forma invariante inducida en  $\mathfrak{g}_0$ :

$$(\theta_0, \theta_0)_0 = 2a_0 \quad (17.32)$$

( $a_0 = 2$  en todos los casos excepto en  $A_{2l}$ ,  $a_0 = 1$ ).

Con más detalle, en  $\mathfrak{g}$ ,

$$\hat{\alpha}'_i = \frac{2\nu'^{-1}(\alpha'_i)}{(\alpha'_i, \alpha'_i)} \quad (17.33)$$

y esto lleva a:

$$\nu'^{-1}(\hat{\alpha}'_i) = \frac{1}{k} \alpha'_i \quad (17.34)$$

En  $\mathfrak{g}_0$  tenemos otro isomorfismo  $\nu$  entre  $\mathfrak{h}_0$  y su dual, verificando:

$$\nu(h) = \nu'(h)|_{\mathfrak{h}_0}, \quad \forall h \in \mathfrak{h}_0 \quad (17.35)$$

porque, si tenemos un elemento de  $\mathfrak{h}_0$ , está también contenido en  $\mathfrak{h}'$  y su imagen bajo  $\nu'$  es una forma en  $\mathfrak{h}'$ . Pero  $\mathfrak{h}_0$  es un subespacio de  $\mathfrak{h}'$ , entonces, la restricción de esta forma a  $\mathfrak{h}_0$  es una forma en este espacio, que coincide con la imagen del elemento de  $\mathfrak{h}_0$  bajo  $\nu$  como se puede probar fácilmente.

Tomemos por ejemplo el primer caso,  $\mathfrak{g} = A_{2l}$ , y calculemos la imagen de los elementos en  $\mathfrak{h}_0$ :

$$\nu(H_0) = 2\nu'(\hat{\alpha}'_l + \hat{\alpha}'_{l+1})|_{\mathfrak{h}_0} = (\alpha'_l + \alpha'_{l+1})|_{\mathfrak{h}_0} = 2\alpha_0 \quad (17.36)$$

$$\nu(H_i) = 2\nu'(\hat{\alpha}'_{l-i} + \hat{\alpha}'_{l+i+1})|_{\mathfrak{h}_0} = \frac{1}{2}(\alpha'_{l-i} + \alpha'_{l+i+1})|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha_i \quad (17.37)$$

Ahora podemos calcular la acción de la forma bilineal invariante:

$$(\alpha_0, \alpha_0)_0 = \langle \nu^{-1}(\alpha_0), \alpha_0 \rangle = \frac{1}{2} \langle H_0, \alpha_0 \rangle = 1 \quad (17.38)$$

y los demás productos de forma similar. Usando la expresión de  $\theta_0$  como una combinación lineal de raíces simples podemos demostrar que  $(\theta_0, \theta_0)_0 = 4$ .

Las raíces en  $\mathfrak{g}_0$  están normalizadas de la manera usual. Todas las raíces largas tienen longitud al cuadrado igual a 2, y la corta ( $\alpha_0$ ) tiene longitud 1. Todos estos resultados pueden ser probados de un modo similar

Un resultado útil es el siguiente. Como hemos dicho, el álgebra  $\mathfrak{g}_0$  actúa en  $\mathfrak{g}_1$  de forma irreducible. Pero se puede demostrar también, que todos los pesos tienen multiplicidad igual a 1, excepto posiblemente el peso 0. Es decir:

$$\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{\omega \in \Omega_{\theta_0}} \mathfrak{g}_{1,\omega} \quad (17.39)$$

y  $\dim \mathfrak{g}_{1,\omega} = 1$  excepto si el peso es cero. Más aún, si escogemos un vector peso con peso  $\omega$  y otro con peso  $-\omega$ , el conmutador es proporcional a  $\nu^{-1}(\omega)$ . Todos estos pesos y vectores peso son raíces y combinaciones de vectores raíces de la primera álgebra  $\mathfrak{g}$ . Es muy sencillo demostrar esto último.

$$(h, [x, y]) = ([h, x], y) = (\langle h, \omega \rangle x, y) = \langle h, \omega \rangle (x, y) = (h, \nu^{-1}(\omega)(x, y)) \quad (17.40)$$

y esto es cierto para cualquier  $h \in \mathfrak{h}_0$ . Entonces obtenemos:

$$[x, y] = (x, y)\nu^{-1}(\omega), \quad x \in \mathfrak{g}_{1,\omega}, y \in \mathfrak{g}_{1,-\omega} \quad (17.41)$$

Si  $x$  y  $y$  no son cero,  $(x, y) \neq 0$ . Si  $k = 3$  todo esto es cierto cambiando simultáneamente  $\bar{1}$  y  $-\bar{1}$ .

Escogemos ahora el resto de los generadores para construir el álgebra de Lie afín girada. Recuerdese que hicimos lo mismo en el caso no girado, aunque aún no hemos fijado aquí el álgebra isomorfa a la parte de grado cero ( $t^0$ ).

Debido a las diferentes elecciones de la numeración de raíces, sea  $\epsilon = 0$  para todos los caso excepto para  $A_{2l}$ , donde  $\epsilon = l$ .

Pongamos  $E_\epsilon \in \mathfrak{g}_{1,-\theta_0}$  y  $F_\epsilon \in \mathfrak{g}_{1,\theta_0}$ . Entonces, como hemos visto antes:

$$[E_\epsilon, F_\epsilon] = -(E_\epsilon, F_\epsilon)\nu^{-1}(\theta_0) \quad (17.42)$$

El signo menos viene del orden diferente que hemos escogido en el conmutador. Definamos:

$$H_\epsilon = -\nu^{-1}(\theta_0) \quad (17.43)$$

Si tomamos  $E_\epsilon$  y  $F_\epsilon$  tal que  $(E_\epsilon, F_\epsilon) = 1$ :

$$[E_\epsilon, F_\epsilon] = H_\epsilon \quad (17.44)$$

Volvamos a la construcción explícita del álgebra de Lie girada. Consideramos de nuevo el álgebra de lazos construida sobre el álgebra finita  $\mathfrak{g}$ :

$$L(\mathfrak{g}) = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g} \quad (17.45)$$

Tenemos un automorfismo en  $\mathfrak{g}$  asociado a una simetría del diagrama de Dynkin. Extendemos este automorfismo al álgebra de lazos:

$$\sigma(t^n x) = e^{-2n\pi i/k} \sigma(x), \quad n \in \mathbf{Z}, x \in \mathfrak{g} \quad (17.46)$$

Si construimos el álgebra de Lie no girada (como hicimos en la sección precedente):

$$\hat{L}(\mathfrak{g}) = L(\mathfrak{g}) \oplus \mathbf{C}c_0 \oplus \mathbf{C}d_0 \quad (17.47)$$

podemos extender el automorfismo a un automorfismo  $\hat{\sigma}$  del álgebra completa, poniendo:

$$\hat{\sigma}(c_0) = c_0, \quad \hat{\sigma}(d_0) = d_0 \quad (17.48)$$

y  $\hat{\sigma} = \sigma$  en el álgebra de lazos.

Podemos usar el automorfismo  $\sigma$  para construir una graduación de los puntos fijos del álgebra de lazos,  $L(\mathfrak{g}, \sigma) = \{a \in L(\mathfrak{g}) : \sigma(a) = a\}$ :

$$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} t^n \otimes \mathfrak{g}_{\bar{n}} \quad (17.49)$$

porque si  $x \in \mathfrak{g}_{\bar{n}}$ , entonces  $\sigma(x) = e^{2\pi i n/k} x$  y el elemento  $t^n x$  es invariante bajo  $\sigma$ . Podemos también construir una graduación para los puntos fijos (bajo  $\hat{\sigma}$ )  $\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$  en el álgebra  $\hat{L}(\mathfrak{g})$ :

$$\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma) = L(\mathfrak{g}, \sigma) \oplus \mathbf{C}c_0 \oplus \mathbf{C}d_0 \quad (17.50)$$

poniendo el grado de  $c_0$  y  $d_0$  igual a cero. En este caso, el subespacio de grado cero es:

$$\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma)_0 = 1 \otimes \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathbf{C}c_0 \oplus \mathbf{C}d_0 \quad (17.51)$$

y los otros subespacios son:

$$\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma)_n = t^n \otimes \mathfrak{g}_{\bar{n}}. \quad (17.52)$$

Es esta álgebra, el conjunto de puntos fijos en el álgebra de Lie no girada, la que forma el álgebra de Lie girada.

El resultado final es que, si consideramos un álgebra de Lie finita de tipo  $A_l$ ,  $D_l$ ,  $E_6$ , y un automorfismo del diagrama de Dynkin, obtenemos un álgebra de Lie afín girada que está representada por los puntos fijos en la correspondiente álgebra de Lie afín no girada, tal y como hemos descrito antes.

La subálgebra de Cartan del álgebra  $\hat{L}(\mathfrak{g})$  viene dada por la parte de grado cero:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbf{C}c_0 \oplus \mathbf{C}d_0 \quad (17.53)$$

Esta subálgebra tiene dimensión  $l + 2$ , (donde  $l$  es el número que aparece en  $A_{2l}^{(2)}$ ,  $A_{2l-1}^{(2)}$ ,  $D_{l+1}^{(2)}$ , 4 en el caso  $E_6^{(2)}$  y 2 en el caso  $D_4^{(2)}$ ). Si  $\lambda$  es una forma lineal en  $\mathfrak{h}_0$ , se puede extender a  $\mathfrak{h}$  por  $\langle c_0, \lambda \rangle = \langle d_0, \lambda \rangle = 0$ . Podemos definir  $\delta$  (que será el dual del elemento central) como:

$$\langle h, \delta \rangle = 0, \quad h \in \mathfrak{h}_0, \quad \langle c_0, \delta \rangle = 0, \quad \langle d_0, \delta \rangle = 1 \quad (17.54)$$

Introducimos los operadores formando la base de Chevalley de un modo similar a como lo hicimos en el caso no girado:

$$e_\epsilon = tE_\epsilon, \quad f_\epsilon = t^{-1}F_\epsilon, \quad e_i = E_i, \quad f_i = F_i \quad (17.55)$$

Comprobamos las relaciones de conmutación:

$$[e_i, f_i] = \hat{\alpha}_i, \quad i = 0(\text{or } 1), \dots, l-1(\text{or } l) \quad (17.56)$$

$$[e_\epsilon, f_\epsilon] = [E_\epsilon, F_\epsilon] + (E_\epsilon, F_\epsilon)c_0 = H_\epsilon + c_0 \quad (17.57)$$

y las demás:  $[e_i, f_j] = 0$ ,  $[e_\epsilon, f_i] = 0$ ,  $[e_i, f_\epsilon] = 0$

Siguiendo las mismas líneas que en el caso no girado, pongamos:

$$\hat{\alpha}_\epsilon = c_0 + H_\epsilon \quad (17.58)$$

$$\hat{\alpha}_i = H_i \quad (17.59)$$

$$\alpha_\epsilon = \delta - \theta_0 \quad (17.60)$$

y tenemos el conjunto de co-raíces y el conjunto de raíces del álgebra afín girada. El conjunto de raíces es:

$$\begin{aligned} \Delta = & \{ \alpha + n\delta : \alpha \in \Omega_{\bar{s}} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n \equiv s \pmod{k}, s = 0, 1, \dots, k \} \cup \\ & \{ n\delta : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \} \end{aligned} \quad (17.61)$$

y la descomposición del espacio de raíces es:

$$\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma) = \mathcal{H} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta} L(\mathfrak{g}, \sigma)_\alpha) \quad (17.62)$$

con:

$$L(\mathfrak{g}, \sigma)_{\alpha+n\delta} = t^n \otimes \mathfrak{g}_{\bar{n}, \alpha}, \quad L(\mathfrak{g}, \sigma)_{n\delta} = t^n \otimes \mathfrak{g}_{\bar{n}, 0} \quad (17.63)$$

Si la forma bilineal invariante en  $\mathfrak{g}$  está normalizada de tal forma que la longitud al cuadrado de una raíz larga (en el caso girado todas las raíces tienen la misma longitud) es igual a  $2k$  ( $k$  es el orden del automorfismo), entonces (usando la forma bilineal invariante en  $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ ):

$$(\theta_0, \theta_0)_0 = 2a_0 \quad (17.64)$$

En este caso, tenemos una forma bilineal invariante en  $\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$  que coincide con la forma bilineal canónica en  $\mathfrak{g}$ . El elemento  $c_0$  definido arriba es el elemento central canónico.

## 17.2. Ejemplos

Veremos en esta sección algunos ejemplos de álgebras de Lie afines giradas, estudiando con detalle la representación explicada en la sección anterior.

### Ejemplo 17.1

El ejemplo más sencillo de un álgebra de Lie afín girada es  $A_2^{(2)}$ . El automorfismo del diagrama de Dynkin de  $A_2$  (en la base de Chevalley:  $\hat{\alpha}'_1, \hat{\alpha}'_2, e'_1, e'_2, f'_1, f'_2$ , raíces simples:  $\alpha'_1, \alpha'_2$ ) es:

$$\mu(1) = 2, \quad \mu(2) = 1 \quad (17.65)$$

y el automorfismo inducido en  $A_2$  es:

$$\sigma(\hat{\alpha}'_1) = \hat{\alpha}'_2, \quad \sigma(e'_1) = e'_2, \quad \sigma(f'_1) = f'_2 \quad (17.66)$$

Ahora calculamos los puntos fijos de  $A_2$  bajo este automorfismo ( $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = A_1$ ):

$$H_0 = 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2), \quad E_0 = \sqrt{2}(e'_1 + e'_2), \quad F_0 = \sqrt{2}(f'_1 + f'_2) \quad (17.67)$$

y la descomposición del espacio de pesos  $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ , generada por:

$$\hat{\alpha}'_1 - \hat{\alpha}'_2, \quad e'_1 - e'_2, \quad f'_1 - f'_2, \quad e'_3, \quad f'_3 \quad (17.68)$$

donde:  $e'_3 = [e'_1, e'_2]$ ,  $f'_3 = -[f'_1, f'_2]$

Es fácil comprobar que:

$$[H_0, \hat{\alpha}'_1 - \hat{\alpha}'_2] = 0 \quad (17.69)$$

$$[H_0, e'_1 - e'_2] = 2(e'_1 - e'_2), \quad [H_0, f'_1 - f'_2] = -2(f'_1 - f'_2) \quad (17.70)$$

$$[H_0, e'_3] = 4e'_3, \quad [H_0, f'_3] = -4f'_3 \quad (17.71)$$

y el peso más alto es  $\theta_0 = 2\alpha_0$ , donde:

$$\alpha_0 = \alpha'_1|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_2|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.72)$$

y los vectores peso asociados a  $\theta_0$  y  $-\theta_0$  son  $e'_3$  y  $f'_3$  respectivamente.

Escogemos la forma bilineal en  $A_2$  para que  $(\alpha', \alpha') = 4$ , entonces  $(\theta_0, \theta_0)_0 = 4$ , porque  $a_0 = 2$ . Con más detalle:

$$(\theta_0, \theta_0)_0 = 4(\alpha_0, \alpha_0)_0 = 4 \quad (17.73)$$

pues  $\nu(H_0) = 2\alpha_0$  y  $(\alpha_0, \alpha_0) = \langle \alpha_0, H_0/2 \rangle = 1$ .

Si  $(\alpha'_1, \alpha'_1) = (\alpha'_2, \alpha'_2) = 4$ , por una relación general que hemos demostrado en las secciones anteriores,  $(\hat{\alpha}'_1, \hat{\alpha}'_1) = (\hat{\alpha}'_2, \hat{\alpha}'_2) = 1$ , y comparando con la forma de Killing para  $A_2$  (o simplemente, usando el carácter invariante de la forma bilineal), encontramos:

$$(e'_i, f'_i) = 1/2, \quad i = 1, 2, 3, \quad e'_3 = [e'_1, e'_2], \quad f'_3 = -[f'_1, f'_2] \quad (17.74)$$

Si queremos normalizar el vector del peso más alto en la representación de  $A_1$  tomamos:

$$E_1 = \sqrt{2}f'_3, \quad F_1 = \sqrt{2}e'_3, \quad (E_1, F_1) = 1 \quad (17.75)$$

y el conmutador es:

$$[E_1, F_1] = -2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2) = -H_0 \quad (17.76)$$

con lo que  $H_{\theta_0} = -H_0$ .

El álgebra de Lie afín girada se escribe como sigue:

$$A_2^{(2)} \sim \hat{L}(A_2, \sigma) = (\oplus_{n \in \mathbb{Z}} (t^{2n} \otimes A_1)) \oplus \mathbf{C}c_0 \oplus \mathbf{C}d_0 \oplus (\oplus_{n \in \mathbb{Z}} t^{2n-1} \otimes g_1) \quad (17.77)$$

y los generadores de Chevalley son:

$$e_0 = 1 \otimes E_0 = 1 \otimes \sqrt{2}(e'_1 + e'_2), \quad f_0 = 1 \otimes F_0 = 1 \otimes \sqrt{2}(f'_1 + f'_2) \quad (17.78)$$

$$e_1 = \sqrt{2}t \otimes E_1 = \sqrt{2}t \otimes f'_3, \quad f_1 = \sqrt{2}t \otimes F_1 = \sqrt{2}t \otimes e'_3 \quad (17.79)$$

$$\hat{\alpha}_1 = c - 1 \otimes H_0 = c - 1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2), \quad \hat{\alpha}_0 = 1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2) \quad (17.80)$$

Comprobemos las relaciones de conmutación entre los operadores de Chevalley:

$$[\hat{\alpha}_0, e_0] = [1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2), 1 \otimes \sqrt{2}(e'_1 + e'_2)] = 2(1 \otimes \sqrt{2}(e'_1 + e'_2)) = 2e_0 \quad (17.81)$$

$$[\hat{\alpha}_1, e_0] = [c - 1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2), 1 \otimes \sqrt{2}(e'_1 + e'_2)] = -2(1 \otimes \sqrt{2}(e'_1 + e'_2)) = -2e_0 \quad (17.82)$$

$$[\hat{\alpha}_0, e_1] = [1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2), t \otimes \sqrt{2}f'_3] = -2(t \otimes \sqrt{2}f'_3) = -2e_1 \quad (17.83)$$

$$[\hat{\alpha}_1, e_1] = [c - 1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2), t \otimes \sqrt{2}f'_3] = 2(t \otimes \sqrt{2}f'_3) = 2e_1 \quad (17.84)$$

$$[e_0, f_0] = [1 \otimes \sqrt{2}(e'_1 + e'_2), 1 \otimes \sqrt{2}(f'_1 + f'_2)] = 1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2) = 1 \otimes H_0 = \alpha_0 \quad (17.85)$$

$$[e_1, f_1] = [t \otimes \sqrt{2}f'_3, t^{-1} \otimes \sqrt{2}e'_3] = 1 \otimes 2[f'_3, e'_3] + (e_1, f_1)c = \quad (17.86)$$

$$-1 \otimes 2(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2) + (E_1, F_1)c = -1 \otimes H_0 + c = \hat{\alpha}_1 \quad (17.87)$$

El elemento central canónico es:

$$c = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \quad (17.88)$$

**Ejemplo 17.2**

Nuestro último ejemplo es  $A_5^{(2)}$ . El automorfismo del diagrama de Dynkin es:

$$\mu(1) = 5, \mu(2) = 4, \mu(3) = 3 \quad (17.89)$$

y en el álgebra:

$$\sigma(\hat{\alpha}'_1) = \hat{\alpha}'_5, \sigma(\hat{\alpha}'_2) = \hat{\alpha}'_4, \sigma(\hat{\alpha}'_3) = \hat{\alpha}'_3 \quad (17.90)$$

y los otros generadores se transforman de un modo similar. Los puntos fijos bajo este automorfismo son:

$$\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_5, \hat{\alpha}'_2 + \hat{\alpha}'_4, \hat{\alpha}'_3 \quad (17.91)$$

$$e'_1 + e'_5, e'_2 + e'_4, e'_3, f'_1 + f'_5, f'_2 + f'_4, f'_3 \quad (17.92)$$

$$e'_6 - e'_9, e'_7 - e'_8, e'_{10} + e'_{12}, e'_{11}, e'_{13} - e'_{14}, e'_{15} \quad (17.93)$$

$$f'_6 - f'_9, f'_7 - f'_8, f'_{10} + f'_{12}, f'_{11}, f'_{13} - f'_{14}, f'_{15} \quad (17.94)$$

y la descomposición del espacio de pesos en el subespacio  $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ :

$$e'_{13} + e'_{14} \quad (17.95)$$

$$e'_{10} - e'_{12} \quad (17.96)$$

$$e'_7 + e'_8 \quad e'_6 + e'_9 \quad (17.97)$$

$$e'_2 - e'_4 \quad e'_1 - e'_5 \quad (17.98)$$

$$\hat{\alpha}'_1 - \hat{\alpha}'_5 \quad \hat{\alpha}'_2 - \hat{\alpha}'_4 \quad (17.99)$$

$$f'_1 - f'_5 \quad f'_2 - f'_4 \quad (17.100)$$

$$f'_6 + f'_9 \quad f'_7 + f'_8 \quad (17.101)$$

$$f'_{10} - f'_{12} \quad (17.102)$$

$$f'_{13} + f'_{14} \quad (17.103)$$

que están escritos por niveles (el peso más alto es  $(0, 1, 0)$  en la base de pesos fundamentales). El peso más alto es  $\theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$  donde:

$$\alpha_1 = \alpha'_1|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_5|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.104)$$

$$\alpha_2 = \alpha'_2|_{\mathfrak{h}_0} = \alpha'_4|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.105)$$

$$\alpha_3 = \alpha'_3|_{\mathfrak{h}_0} \quad (17.106)$$

El vector de peso más alto es  $e'_{13} + e'_{14} = F_0$  y el más bajo  $f'_{13} + f'_{14} = E_0$ . La normalización de la forma bilineal es tal que:  $(\alpha'_i, \alpha'_i) = 4$ , y entonces,  $(E_0, F_0) = 1$ .

El conmutador de estos vectores es:

$$[E_0, F_0] = -(\hat{\alpha}'_1 + 2\hat{\alpha}'_2 + 2\hat{\alpha}'_3 + 2\hat{\alpha}'_4 + \hat{\alpha}'_5) = -H_1 - 2H_2 - 2H_3 \quad (17.107)$$

donde

$$H_1 = \hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_5, H_2 = \hat{\alpha}'_2 + \hat{\alpha}'_4, H_3 = \hat{\alpha}'_3 \quad (17.108)$$

Los generadores de Chevalley para el álgebra afín girada son:

$$\hat{\alpha}_0 = c - (\hat{\alpha}_1 + 2\hat{\alpha}_2 + 2\hat{\alpha}_3) \quad (17.109)$$

$$\hat{\alpha}_1 = 1 \otimes (\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_5), \hat{\alpha}_2 = 1 \otimes (\hat{\alpha}'_2 + \hat{\alpha}'_4), \hat{\alpha}_3 = 1 \otimes \hat{\alpha}'_3 \quad (17.110)$$

$$e_0 = t \otimes (f'_{13} + f'_{14}), f_0 = t^{-1} \otimes (e'_{13} + e'_{14}) \quad (17.111)$$

$$e_1 = 1 \otimes (e'_1 + e'_5), f_1 = 1 \otimes (f'_1 + f'_5) \quad (17.112)$$

$$e_2 = 1 \otimes (e'_2 + e'_4), f_2 = 1 \otimes (f'_2 + f'_4) \quad (17.113)$$

$$e_3 = 1 \otimes e'_3, f_3 = 1 \otimes f'_3 \quad (17.114)$$

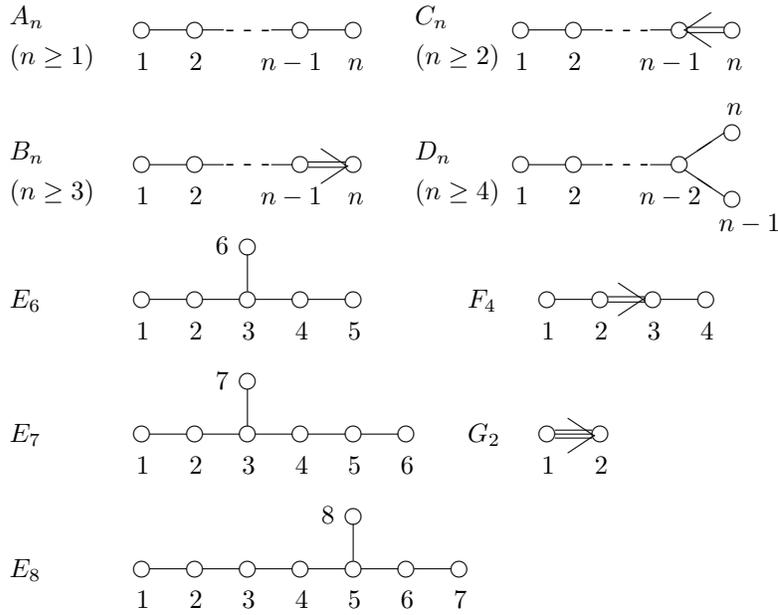
La matriz de Cartan generalizada es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (17.115)$$

y el elemento central canónico es:

$$c = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 + 2\hat{\alpha}_2 + 2\hat{\alpha}_3 \quad (17.116)$$

Tabla 1. Diagramas de Dynkin de álgebras de Lie simples



**Tabla 2. Diagramas de Dynkin afines**

Tipo I		Tipo II	
$A_1^{(1)}$		$A_2^{(2)}$	
$A_n^{(1)}$ ( $n \geq 2$ )		$A_{2n}^{(2)}$ ( $n \geq 2$ )	
$B_n^{(1)}$ ( $n \geq 3$ )		$A_{2n-1}^{(2)}$ ( $n \geq 3$ )	
$C_n^{(1)}$ ( $n \geq 2$ )		$D_{n+1}^{(2)}$ ( $n \geq 2$ )	
$D_n^{(1)}$ ( $n \geq 4$ )		$E_6^{(2)}$	
$E_6^{(1)}$		<b>Tipo III</b>	
$E_7^{(1)}$			
$E_8^{(1)}$			
$F_4^{(1)}$		$D_4^{(3)}$	
$G_2^{(1)}$			

Tabla 3. Pesos más altos en  $\mathcal{G}_1$

Álgebra	Orden	$\mathcal{G}_0$	Peso más alto en $\mathcal{G}_1$
$A_{2n}, n \geq 1$	2	$B_n$	
$A_{2n-1}, n \geq 2$	2	$C_n$	
$D_{n+1}, n \geq 2$	2	$B_n$	
$E_6$	2	$F_4$	
$D_4$	3	$G_2$	

# Bibliografía

- [1] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*. Gauthier Villars, Paris, 1975.
- [2] M. Goto, F.D. Grosshans, *Semisimple Lie Algebras*. Dekker, New York, 1978.
- [3] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [4] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, New York, 1972.
- [5] N. Jacobson, *Lie Algebras*. Dover, New York, 1962.
- [6] D. Juriev, *Algebraic structures of the quantum projective  $[sl(2, \mathbf{C})]$ -invariant field theory: the commutative version of Elie Cartan's exterior differential calculus*. J. Math. Phys. **33**, 3112, (1992).
- [7] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge Univ. Press, 1985.
- [8] R.V. Moody, A. Pianzola, *Lie Algebras with Triangular Decomposition*. Can. Math. Soc., Wiley, Toronto, 1994.
- [9] A.L. Onishchik, *Lectures on semisimple Lie algebras and their representations*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. EMS, 2004.
- [10] Sai-Ping Li, R.V. Moody, M. Nicolescu, J. Patera, *Verma bases for representations of classical simple Lie algebras*. J. Math. Phys. **27**, 668, (1986).
- [11] J.P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*. Benjamin, New York, 1965.
- [12] B.N. Shapukov, *Grupos y álgebras de Lie*. URSS, Moscú, 2001.
- [13] J. Tits, *Les groupes de Lie exceptionnels et leur interpretation géométrique*. Bull. Soc. Math. Bel. **8**, 48, (1956).
- [14] Wan Zhe-Xian, *Lie algebras*. Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [15] Wan Zhe-Xian, *Introduction to Kac-Moody algebra*. World Scientific, 1988.
- [16] H. Zassenhaus, *The theory of groups*. Dover, 1999.