

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. В.Н.КАРАЗІНА**

Ю.В.Александров

НЕБЕСНА МЕХАНІКА

**Посібник для студентів спеціальності
„Астрономія”**

Харків 2003

УДК

Александров Ю.В. Небесна механіка: Підручник. 2003. – 190 с.

Підручник містить основні розділи небесної механіки – задачу двох тіл і деякі її узагальнення, задачу багатьох тіл, основи теорії збуреного руху, задачу трьох тіл, елементи теорій руху Місяця та планет. Як ілюстрація загальних методів теорії збурень розглядається збурений рух супутника планети.

Призначений для студентів університетів із спеціальності «Астрономія», а також студентів і спеціалістів з механіки та космічних досліджень.

Табл. 5. Іл. 43. Бібліогр. 46 назв.

ВСТУП

Небесна механіка – розділ астрономії, що вивчає рух небесних тіл та їх систем. Відкриття І.Кеплером законів руху планет і формулювання Г.Галілеєм принципу відносності та закону інерції підвели науку до фундаментальної проблеми – встановити зв'язок між рухом матеріальних тіл і силами, що діють між ними, і пояснити на цій основі рух тіл Сонячної системи. Цю задачу і вирішив в її основі І.Ньютон [28]. Для цього йому знадобилося відкрити закон всесвітнього тяжіння, сформулювати основні закони класичної механіки і закласти основи диференціального та інтегрального обчислення. Таким чином, із самого початку історія небесної механіки стала найважливішою складовою становлення науки нового часу та її класичного зразка – теоретичної механіки. Це було зумовлене як практичним значенням проблеми (необхідністю розробки більш точних методів орієнтації в просторі і часі), так і відносною простотою задачі про рух небесних тіл (визначальна роль гравітації та практична відсутність дисипативних сил.).

Виняткова стимулююча роль небесної механіки у розвитку математики і точного природознавства збереглась і надалі. У XVIII ст. в роботах А.Клеро, Л.Ейлера, Ж.Лагранжа, П.Лапласа з теорії збуреного руху, насамперед з теорії руху Місяця у зв'язку з проблемою визначення довгот на морі, по суті було завершено створення основ теоретичної механіки і математичного аналізу. Особливу важливу роль у становленні власне науки про рух космічних тіл зіграла п'ятитомна праця П.Лапласа “Трактат з небесної механіки” [46], яка і дала назву тій науковій, а відтак і навчальній, дисципліні, про яку йдеться. В першій половині XIX ст. У.Гамільтон створив метод канонічних змінних, що став основним не лише в небесній і взагалі теоретичній механіці, а і в статистичній фізиці і квантовій механіці. На межі XIX і XX ст. в працях О.М.Ляпунова [25] та А.Пуанкаре [30,31] були закладені основи якісних методів в небесній механіці і механіці та математиці взагалі. Нині на цій основі виникли принципово нові наукові ідеї і методи вивчення нелінійних процесів, які об'єднуються в поняттях “синергетика”, “теорія самоорганізації”, “теорія катастроф”.

Зовнішніми віхами історії небесної механіки як теоретичної дисципліни було видання праць (нерідко багатотомних), що підбивали підсумки попереднього і відкривали перспективи подальшого її розвитку, а також відігравали значну роль в підготовці нових поколінь дослідників. Головні з цих праць наведені в Додатку 4. Цей перелік дозволяє знову згадати імена тих вчених, котрі внесли значний внесок в розвиток небесної механіки, та відтворює хронологічну канву її історії.

Об'єктами вивчення в небесній механіці є великі і малі планети Сонячної системи, їх супутники, комети та метеорні тіла, зірки як компоненти кратних систем, штучні небесні тіла. Всі ці об'єкти небесна механіка розглядає з точки

зору їх механічного руху, поступального насамперед. *Основною задачею небесної механіки* є вивчення руху скінченного числа матеріальних точок під дією сил взаємного тяжіння. Це так звана *задача багатьох тіл*. Фундаментальне значення саме цієї задачі пов'язане з відносною віддаленістю небесних тіл одне від одного, а також близькістю їх форми до сферичної, що дозволяє розглядати їх як матеріальні точки. Хоча в окремих випадках (наприклад, в теорії руху ШСЗ) доводиться враховувати і скінченні розміри та форму Землі, а також силу опору атмосфери.

Основою математичного апарату небесної механіки є теорія звичайних диференціальних рівнянь, до яких приводять другий закон Ньютона або формалізм Лагранжа. Важливу роль відіграють теорія степеневих рядів і рядів Фур'є, теорія спеціальних функцій, насамперед функцій Бесселя і Лежандра [1]. Все це зближує небесну механіку з математичною фізикою. Широко використовується векторне, а подекуди і матричне, обчислення. Природно, що при вивченні небесної механіки постійно доводиться користуватися методами і результатами теоретичної механіки (закони збереження, лагранжів і гамільтонів формалізми тощо).

В межах астрономії небесна механіка суттєво спирається на сферичну астрономію (системи астрономічних координат, редукції координат та елементів орбіт) і астрометрію. Результати останньої є тією емпіричною базою, на яку спирається небесна механіка, як теоретична дисципліна. У взаємодії цих двох розділів астрономії і вирішується насамперед проблема вивчення просторово-часової структури Всесвіту. В свою чергу методи і результати небесної механіки широко використовуються в астрофізиці і зоряній астрономії (визначення орбіт і мас зірок у подвійних системах, визначення мас планет та їх супутників, пошук позасонячних планет, небесно-механічні аспекти еволюції планетних і зоряних систем, проблеми зоряної динаміки тощо). В пограничній між небесною механікою та астрофізикою області лежить проблема обертального руху небесних тіл з урахуванням їх деформаційних властивостей і пов'язана з нею теорія фігур небесних тіл.

Внаслідок обернено квадратичної залежності сили тяжіння від відстані диференціальні рівняння небесної механіки є нелінійними і, взагалі кажучи, не інтегруються в скінченному вигляді. Однак велика різниця в масах небесних тіл (Сонце і планети, планета та її супутники) і близькість форми цих тіл до сферичної роблять широко придатною для опису їх руху (принаймні в першому наближенні) *задачу двох тіл*, яка є інтегрованою. В цій задачі вивчається рух однієї матеріальної точки в полі тяжіння (центральному ньютонівському полі) іншої матеріальної точки. Відповідний рух дістав назву *кеплерівського руху*. Але навіть малі відносно сили можуть з плином часу спричинити значне відхилення руху від початкового кеплерівського. Тому вельми значну частину небесної механіки становить вивчення руху, що відбувається під впливом центральної ньютонівської сили і додаткових сил, малих в порівнянні з нею. Цей рух має назву *збуреного*, оскільки тими чи іншими методами *теорії*

збурень досліджується відмінність цього руху від незбуреного кеплерівського руху. При цьому використовується насамперед метод варіації довільних сталих, який в астрономії дістав назву *методу оскулюючих орбіт*. Використовуються також метод малого параметру та інші наближені аналітичні методи. З огляду на неінтегровність рівнянь небесної механіки в ній широко застосовні *якісні методи* дослідження властивостей руху небесних тіл – його стійкості, періодичності, фінітності тощо.

Багатий теоретичними результатами і практичним застосуванням розділ небесної механіки складає *задача трьох тіл*. В останні часи зростання точності вимірювання часу, а відтак і відстаней радіотехнічними засобами з одного боку і потреби космонавтики з іншого, роблять необхідним урахування ефектів загальної теорії відносності, і тим самим спонукають до розвитку *релятивістської небесної механіки*. Ще в домашинні часи, а тим більше в епоху ЕОМ, в небесній механіці, особливо при розгляді руху конкретних тіл, широко застосовуються різні чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь, а деякі з них і виникли завдяки проблемам небесної механіки [7]. Розвивається також застосування обчислювальної техніки для виконання аналітичних дій в небесній механіці [18].

Теоретичні і прикладні проблеми руху штучних небесних тіл (ШНТ) утворюють новий розділ небесної механіки – *астродинаміку* (або космодинаміку). Разом з тим астродинаміка є водночас важливою частиною теоретичної космонавтики, як комплексної науково-технічної дисципліни. Хоча фізичні основи руху природних і штучних небесних тіл однакові, в постановці задач астродинаміки є багато специфічного, так інакше ставиться задача визначення орбіт, є необхідність розв'язання задач в реальному масштабі часу, є задача пошуку оптимальних траєкторій та інше.

Поряд з терміном “небесна механіка” існує термін “теоретична астрономія”, що виник ще наприкінці XVII ст. Співвідношення між ними не має однозначного тлумачення. Московська школа небесної механіки (М.Д.Моїсеєв, Г.М.Дубошин та інші) до теоретичної астрономії відносять лише прикладні задачі обчислення ефемерид та визначення орбіт. Ленінградська ж школа (М.Ф.Субботін та інші) включає до теоретичної астрономії всі теоретичні та прикладні питання руху небесних тіл, тобто поняття “теоретична астрономія” трактується нею як більш широке, ніж термін “небесна механіка”.

З вищезробленого короткого огляду змісту небесної механіки випливає приблизно такий план курсу “Небесна механіка” для студентів спеціальності “Астрономія”:

1. Гравітаційні поля небесних тіл.
2. Рівняння задачі багатьох тіл та їх перші інтеграли.
3. Рівняння задачі двох тіл та їх розв'язок.
4. Дослідження кеплерівського руху.
5. Ряди еліптичного руху.
6. Обчислення ефемерид.

7. Визначення орбіт.
8. Основи теорії збуреного руху.
9. Стійкість руху в небесній механіці.
10. Задача трьох тіл.
11. Елементи релятивістської небесної механіки.

Теми 5 та 6 звичайно є предметом практичних занять або спецпрактикуму з небесної механіки і докладно в цьому підручнику не розглядаються. Наведені лише постановки задач та алгоритми їх розв'язку в Додатках 2 і 3. Вичерпно відповідний матеріал викладений в книзі М.Ф.Субботіна [37]. Теми 3 і 4 в другій главі розглянуті незалежно від матеріалу глави I, де розглядаються теми 1 і 2, з тим, щоб при бажанні можна було почати вивчення курсу з теми 3, щоб мати можливість раніше почати вивчення тем 5 та 6 на практичних заняттях. Основам теорії збуреного руху присвячена глава IV (теми 8 та 9). В главі V розглянутий рух супутника планети, як ілюстрація загальних методів теорії збуреного руху. Цей матеріал не є необхідним в основному курсі небесної механіки, але він може увійти до спецкурсів “Астродинаміка або “Основи космонавтики”. Глава VI містить основні результати щодо задачі трьох тіл (тема 10). Матеріал глави VII також виходить за рамки основного курсу небесної механіки. В ній зроблений вельми стислий огляд основних чисельних та аналітичних методів, які використовуються при побудові теорій руху окремих тіл Сонячної системи. Дещо докладніше, але теж конспективно розглянуті проблема розкладу збурюючої функції і пов'язане з цим поняття про власні елементи орбіти, а також основи теорії руху Місяця. Задачі, наведені наприкінці кожної глави, мають здебільшого теоретичний характер. Вони доповнюють основний матеріал підручника і можуть бути використані при проведенні практичних і семінарських занять, виконанні курсових робіт. Достатню кількість задач обчислювального характеру можна знайти в збірці задач [4]. Підручник може стати в нагоді також студентам спеціальності “Механіка” та інших спеціальностей, що так чи інакше стикаються з питаннями руху природних і штучних небесних тіл, студентам-фізикам педагогічного профілю при поглибленому вивченню ними астрономії.

Основними підручниками з небесної механіки були досі книги Г.М.Дубошина [15] та М.Ф.Субботіна [37]. Але їх недоліком є практично повне ігнорування векторного апарату, що значною мірою зумовлює великий обсяг цих праць. Більш коротким вступом до небесної механіки можуть бути перші глави книги [29]. Розгляд інших задач небесної механіки, крім задач двох та багатьох тіл та основ теорії збуреного руху, зроблений в книзі Г.М.Дубошина [16]. Основи небесної механіки та суміжних розділів астрономії містить праця Д.Брауера і Дж.Клеменса [9]. Математичний апарат небесної механіки розглянутий В.І.Арнольдом [3] і А.Уінтнером [39]. Досить повну інформацію з питань астродинаміки можна знайти в тритомній праці С.Херріка [40]. Посилання на додаткову літературу з окремих питань небесної механіки будуть зроблені у відповідних місцях підручника.

Питання, які входять до основного курсу небесної механіки, обов'язкового для кожного астронома-професіонала, розглядаються достатньо докладно. Але, щоб дати більш повне уявлення про зміст сучасної небесної механіки автор вважав за потрібне торкнутися і ряду питань, що виходять за вказані межі. Такі питання розглядаються лише на рівні постановки задачі або наведення основних результатів. Це стосується задач визначення орбіт ШНТ та компонентів орбіт в подвійних зоряних системах (гл. III), нелінійних методів дослідження стійкості руху в небесній механіці (гл. IV). Додатково є і глава VII, в якій зроблений стислий огляд методів побудови теорій окремих тіл Сонячної системи. Вказується і література, за якою студенти відповідної спеціалізації повинні докладно вивчати ці проблеми.

І на закінчення наведемо висловлювання А.Пуанкаре, який був не тільки визначним математиком, але вніс вклад і в астрономію, фізику та філософію науки, з його книги "Цінність науки":

"Уряди та парламенти повинні вважати астрономію однією з самих дорогих наук, найменший інструмент коштує сотні тисяч франків, невелика обсерваторія – мільйони, кожне затемнення веде до додаткових кредитів. І все це заради світил, котрі так далекі від нас, котрі цілком чужі нашій виборчим чварам..."

Можна було б, звичайно, розповісти їм про морське діло, значення якого визнається всіма і для якого потрібна астрономія. Але це означало б звертати увагу на менш важливий бік справи.

Астрономія корисна, тому що вона підносить нас над нами самими; вона корисна, тому що вона велична; вона корисна, тому що вона прекрасна. Вона показує нам, як нікчемна людина тілом і як велична вона духом, бо розум її в змозі осягнути сяючі безодні, де тіло її є лише темною точкою, в змозі насолоджуватися їх безмовною гармонією. Так приходимо ми до усвідомлення своєї могутності. Тут ніяка ціна не може бути занадто дорогою, тому що це усвідомлення робить нас сильнішими."

І далі він зазначає (маючи на увазі І.Кеплера і відкриті ним закони планетних рухів), що це саме "астрономія відкрила нам існування законів природи."

Краще, мабуть, про велике світоглядне значення астрономії, про її чільне місце в духовному житті людства і не скажеш. Хоча все ж не варто протиставляти цю загальнокультурну роль астрономії її прикладному значенню. Розв'язання найважливішої задачі орієнтації в просторі і часі – це те, що стимулює розвиток астрономії відтоді, як первісна людина спрямувала свій погляд у небо, і до нашої космічної епохи, коли створюються супутникові навігаційні системи. І у вирішенні обох завдань, що стоять перед астрономією (світоглядного і прикладного), наука з гордою назвою "небесна механіка" займає своє гідне місце.

Глава I. ОСНОВНА ЗАДАЧА НЕБЕСНОЇ МЕХАНІКИ

Основною силою, що визначає рух небесних тіл, є гравітація. Для того, щоб математично сформулювати задачу про рух цих тіл і з'ясувати межі того чи іншого наближення, необхідно спочатку розглянути засоби опису гравітаційних полів небесних тіл.

1.1. Гравітаційні поля небесних тіл.

1.1.1. Гравітаційне поле довільного тіла. Нехай ми маємо тіло T з густиною $\rho(\vec{r}')$ та масою M , положення якого в просторі задане в системі координат x, y, z (рис. 1.1). Оскільки сила тяжіння залежить тільки від координат тяжіючих тіл, тобто є потенціальною, то будемо шукати *гравітаційний потенціал* тіла T , маючи на увазі, що потенціал V визначається співвідношенням: сила $\vec{F} = \text{grad}V$, (тоді потенціальна енергія $U = -V$). Елемент тіла з масою dm' в об'ємі dv' створює в точці P з радіусом-вектором \vec{r} потенціал

$$dV = f \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1)$$

де f – гравітаційна стала.*

Перш ніж для отримання потенціалу всього тіла проінтегрувати (1.1) за об'ємом тіла T , перетворимо знаменник виразу (1.1) за допомогою теореми косинусів:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}. \quad (1.2)$$

Права частина (1.2) є *створюючою функцією* поліномів Лежандра від аргументу $\cos \psi$, де ψ – кут між радіусами-векторами \vec{r} та \vec{r}' . Це означає, що вираз (1.2) може бути представлений як ряд за степенями відношення r'/r , коефіцієнтами якого будуть поліноми Лежандра $P_n(\cos \psi)$, тобто

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi) \left(\frac{r'}{r}\right)^n. \quad (1.3)$$

Якщо тепер перейти до сферичних координат r, θ, λ (див. рис. 1.1), то для розділення змінних в коефіцієнтах ряду (1.3) можна скористатися *теоремою складання сферичних функцій*. Нагадаємо, що ця теорема має вигляд (якщо ввести позначення $t = \cos \theta$):

$$P_n(\cos \psi) = P_n(t)P_n(t') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t)P_n^m(t') \cos m(\lambda - \lambda'), \quad (1.4)$$

де *поліноми Лежандра*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (1.5)$$

*Таке незвичне для фізики позначення гравітаційної сталої ввів у небесну механіку Ф. Гаусс і воно нерідко вживане в ній.

а приєднані функції Лежандра

$$P_n^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} (P_n(t)). \quad (1.6)$$

З виразу (1.5) випливає, що $P_1(t) = t$. З огляду на це неважко переконатися, що при $n=1$ формула (1.4) дає формулу косинусів сферичної тригонометрії, тому теорему складання можна розглядати як певне узагальнення цієї формули.

Підставляючи тепер (1.4) в (1.3), а (1.3) в (1.1), одержимо після інтегрування потенціал всього тіла:

$$\begin{aligned} V = & \frac{f}{r} \left[P_n(t) \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') \left(\frac{r'}{r} \right)^n dv' + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \cos m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^{n'} dv' + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \sin m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^{n'} dv' \right]. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Помноживши і поділивши почленно ряд (1.7) на величини $a^n M$, де a – характерний лінійний розмір нашого тіла (екваторіальний радіус зірки чи планети), введемо такі позначення для безрозмірних коефіцієнтів :

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{a^n M} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') r'^n dv', \\ C_n^m &= \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' dv', \\ S_n^m &= \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' dv'. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тепер гравітаційний потенціал тіла в оточуючому його просторі є:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n P_n(t) \left(\frac{a}{r} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda) P_n^m(t) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right]. \quad (1.9)$$

Таким чином, ми одержали розклад гравітаційного потенціалу довільного тіла за *кульовими функціями* координат точки $P(\vec{r})$, тобто в ряди за степенями відстані r , функціями Лежандра за полярною відстанню θ і в ряд Фур'є за довготою λ . Зауважимо, що цей результат можна було б одержати, виходячи з того, що гравітаційний потенціал у вільному просторі задовольняє рівнянню Лапласа, а кульові функції якраз і є власними функціями оператора Лапласа.

Коефіцієнти ряду (1.9) є мультипольними моментами густини тіла. Коефіцієнти J_n , що визначають члени ряду, які не залежать від довготи λ і обертаються на 0 тільки на паралелях, мають назву *зональних*. Коефіцієнти C_n^m і S_n^m визначають гармоніки, що не залежать від полярної відстані θ і обертаються на 0 тільки на меридіанах. Вони мають назву *секторіальних*. Нарешті, коефіцієнти C_n^m і S_n^m при $m < n$ обертаються на 0 на криволінійних трапеціях, що утворюються дугами відповідних паралелей та меридіанів (або тесерах), тому

вони мають назву *тесеральних* коефіцієнтів. З'ясуємо фізичний зміст перших коефіцієнтів ряду (1.9). Враховуючи відомі формули переходу від сферичних координат до прямокутних, одержимо, що при $n=1$:

$$J_1 = \frac{z_c}{a}, \quad C_1^1 = \frac{x_c}{a}, \quad S_1^1 = \frac{y_c}{a}, \quad (1.10)$$

де x_c , y_c та z_c – координати центру мас тіла T . Таким чином, коефіцієнти ряду при $n=1$ дорівнюють безрозмірним координатам центру мас тіла і можуть бути обернені на 0, якщо сумістити початок координатної системи з центром мас тіла, гравітаційний потенціал якого ми відшукуємо. Перш ніж перейти до випадку $n=2$, нагадаємо, що моменти другого порядку від густини тіла утворюють *тензор інерції* цього тіла

$$I = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

де *осьові моменти інерції*

$$\begin{aligned} A &= \int_{(T)} \rho(\vec{r}') (y'^2 + z'^2) dv', \\ B &= \int_{(T)} \rho(\vec{r}') (x'^2 + z'^2) dv', \\ C &= \int_{(T)} \rho(\vec{r}') (x'^2 + y'^2) dv' \end{aligned} \quad (1.12)$$

та *відцентрові моменти інерції*

$$\begin{aligned} D &= - \int_{(T)} \rho(\vec{r}') x' y' dv', \\ E &= - \int_{(T)} \rho(\vec{r}') x' z' dv', \\ F &= - \int_{(T)} \rho(\vec{r}') y' z' dv' \end{aligned} \quad (1.13)$$

Використовуючи формули (1.12) та (1.13) і знову-таки формули, які зв'язують прямокутні і сферичні координати, після певних перетворень одержимо, що

$$J_2 = \frac{A+B-2C}{2a^2M}, \quad C_2^1 = \frac{E}{a^2M}, \quad C_2^2 = \frac{B-A}{4a^2M}, \quad S_2^1 = \frac{F}{a^2M}, \quad S_2^2 = \frac{D}{2a^2M}. \quad (1.14)$$

Згадаємо нарешті, що завжди можна обрати такі напрямки координатних осей (такі осі мають назву *головних осей інерції* даного тіла), відносно яких тензор інерції набуває діагонального вигляду. При цьому обернуться на 0 і коефіцієнти C_2^1 , S_2^1 та S_2^2 .

1.1.2. Гравітаційні поля зірок і планет. Розглянемо деякі часткові випадки розподілу густини в гравітуючому тілі.

1. Нехай розподіл мас підкоряється сферичній симетрії, тобто $\rho(\vec{r}') = \rho(r')$. Тоді в силу ортогональності функцій Лежандра та тригонометричних функцій всі коефіцієнти ряду (1.9) дорівнюють 0, окрім $J_0 = 1$, і потенціал

$$V = \frac{fM}{r}, \quad (1.15)$$

тобто в цьому випадку гравітаційне поле тіла збігається з полем точкової маси M , що знаходиться в центрі мас тіла. Цей факт був відомий ще І. Ньютону, хоча доводив він його по-іншому.

2. Такий же результат можна одержати, якщо розглядати гравітаційне поле на досить великому віддаленні від нашого тіла, при значеннях r , настільки великих в порівнянні з розміром a , щоб можна було знехтувати членами порядку $(a/r)^2$ і вище.

3. Тіло має осьову симетрію, тобто $\rho(\vec{r}') = \rho(r', \theta')$. В цьому випадку будуть відсутні всі секторіальні і тесеральні гармоніки, оскільки всі коефіцієнти $C_n^m = S_n^m = 0$, і гравітаційний потенціал матиме тільки зональні гармоніки:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(t) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right]. \quad (1.16)$$

4. Якщо також існує і симетрія відносно екваторіальної площини, тобто густина є парною функцією широті $\varphi = \pi/2 - \theta$, то обертаються на 0 всі непарні зональні гармоніки, і потенціал можна записати в такому вигляді:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} P_{2n}(t) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right]. \quad (1.17)$$

Пункт 2 підводить кількісну основу під твердження про те, що небесні тіла можна розглядати як матеріальні точки завдяки великим відстаням між ними, і дозволяє дати оцінку точності цього наближення в кожному конкретному випадку. Одиночні зірки пізніх спектральних класів (Сонце зокрема), швидкість осьового обертання яких невелика, досить непогано задовольняють умові пункту 1. Газові і рідкі тіла (зірки ранніх спектральних класів, які швидко обертаються, компоненти тісних подвійних систем, планети-гіганти) задовольняють умовам пунктів 3 та 4. Тверdotільні планети земного типу та великі супутники планет також задовольняють цим умовам, але з меншою точністю. Характеристики гравітаційних полів тіл Сонячної системи наведені в табл. 1.1. З неї видно, що виконуються такі нерівності:

$$J_2 \ll 1, \quad J_{n>2}, C_n^m, S_n^m \ll J_2. \quad (1.18)$$

Таким чином, на міжпланетних відстанях Сонце та планети з великим ступенем точності можна вважати матеріальними точками, а в навколопланетному просторі непоганим першим наближенням для гравітаційного потенціалу планет може бути вираз:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + J_2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]. \quad (1.19)$$

Треба, однак, мати на увазі, що достатність того чи іншого наближення для гравітаційного потенціалу залежить не тільки від відносних похибок, які дає це наближення, а і від проміжку часу, на якому розглядається рух в цьому

полі, оскільки малі величини, накопичуючись, можуть привести до значних відхилень в порівняння з рухом в полі з більш точним описом потенціалу. Значення коефіцієнтів, що описують гравітаційні поля планет і Місяця точніше, ніж подані в табл. 1.1, можна знайти в довіднику [36].

Таблиця 1.1

Гравітаційні поля тіл Сонячної системи

Об'єкт	$fM, \text{cm}^3/\text{c}^2$	$J_n \cdot 10^6$				
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Сонце	$1.33 \cdot 10^{26}$	<10	-	-	-	-
Меркурій	$2.17 \cdot 10^{19}$	~100	-	-	-	-
Венера	$3.25 \cdot 10^{20}$	~4	-	-	-	-
Земля	$3.99 \cdot 10^{20}$	-1083	2.54	1.58	0.22	0.59
Марс	$4.30 \cdot 10^{19}$	-1959	30	-10	-6	-3
Юпітер	$1.27 \cdot 10^{23}$	-14733	-	-587	-	5
Сатурн	$3.79 \cdot 10^{22}$	-16479	-	-937	-	11
Уран	$5.80 \cdot 10^{21}$	-3352	-	-29	-	-
Нептун	$7.05 \cdot 10^{21}$	-3411	-	-50	-	-
Місяць	$4.90 \cdot 10^{18}$	-206	-37	33	-5	-

Іноді (зокрема при описі гравітаційних аномалій) більш зручним є подання гравітаційного поля небесних тіл як поля *гравітаційного мультиполя*, тобто сукупності матеріальних точок певної маси і певним чином розташованих. Тоді потенціал

$$V = f \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad (1.20)$$

(див. докладніше про це в [42]). Зауважимо лише, що рівняння руху в полі *гравітаційного диполя* з потенціалом

$$V = f \left(\frac{m_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) \quad (1.21)$$

інтегруються в скінченному вигляді. Розвиваються і інші підходи до опису гравітаційних полів, наприклад, сукупністю дисків різних радіусів.

1.2. Задача багатьох тіл в інерціальній системі координат

Переходячи до розгляду окремих задач небесної механіки, треба усвідомлювати, що в класичній механіці всі можливі системи координат поділяються на два класи – *інерціальні*, в яких виконуються закони динаміки Ньютона, і *неінерціальні*. В неінерціальних системах справедливі рівняння відносного руху, суть яких можна висловити так: до сил, що діють на дане тіло з боку інших тіл, треба додати силу інерції, яка (у випадку систем, що не обертаються) дорівнює добутку маси даного тіла на прискорення початку

системи координат, взятому з протилежним знаком. Саме поняття сили інерції не є таким вже простим, це не сила в розумінні міри взаємодії матеріальних об'єктів, але нам досить буде використовувати його лише як зручний спосіб запису рівнянь руху в неінерціальних системах координат.

Системи координат, які можуть бути реалізовані при розв'язанні конкретних астрономічних задач, пов'язані з певними небесними тілами. Для того, щоб така система була інерціальною, потрібно, щоб ці тіла не взаємодіяли з іншими матеріальними об'єктами. Строго кажучи, це неможливо. І тому можна говорити лише про ступінь інерціальності чи неінерціальності тієї чи іншої системи координат. В цілому в астрономії задача побудови системи координат, найближчої до інерціальної, вирішується фундаментальною астрометрією. Ми надалі будемо або користуватися системами координат, інерціальними за визначенням, або уточнювати ступінь їх інерціальності.

1.2.1. Рівняння задачі багатьох тіл в інерціальній системі координат.

Почнемо з уточнення постановки цієї задачі. Неїай є система з $n+1$ матеріальних точок M_0, M_1, \dots, M_n з масами m_0, m_1, \dots, m_n . Треба знайти їх радіус-вектори як функції часу, якщо на кожну точку діють лише сили всесвітнього тяжіння з боку інших точок системи. В інерціальній системі координат X, Y, Z положення точки M_i визначається її радіусом-вектором \vec{R}_i (рис. 1.2). Тоді рівняння її руху задається другим законом Ньютона і має такий вигляд:

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = f m_i \sum_{j=0}^n \frac{m_j (\vec{R}_j - \vec{R}_i)}{|\vec{R}_j - \vec{R}_i|^3}, \quad j \neq i. \quad (1.22)$$

Вектор в чисельнику правої частини (1.22) визначає напрямок сили, з якою точка M_j притягує точку M_i , а куб відстані $M_j M_i$ в знаменнику забезпечує обернено-квадратичну залежність сили від цієї відстані. Якщо ж індекс i пробігає значення від 0 до n , то (1.22) є системою з $n+1$ векторних диференціальних рівнянь або $3(n+1)$ скалярних. Кожне рівняння має другий порядок, тобто порядок всієї системи рівнянь (1.22) дорівнює $6(n+1)$. Зокрема, система рівнянь, що описує рух Сонця і дев'яти великих планет, має 60-й порядок.

Якщо ми зможемо знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1.22), то він повинен містити відповідну кількість довільних сталих, у загальному випадку $6(n+1)$. Для їх визначення треба мати початкові умови (задача Коші):

$$\vec{R}_i^{(0)} = \vec{R}_i(t_0), \quad \dot{\vec{R}}_i^{(0)} = \dot{\vec{R}}_i(t_0), \quad (1.23)$$

тобто значення радіусів-векторів та векторів швидкості всіх точок системи в початковий момент часу t_0 або значення радіусів-векторів у два моменти часу t_1 і t_2 (крайова задача):

$$\vec{R}_i^{(1)} = \vec{R}_i(t_1), \quad \vec{R}_i^{(2)} = \vec{R}_i(t_2). \quad (1.24)$$

З першою задачею ми стикаємось, наприклад, при виведенні на орбіту штучного об'єкта (ШСЗ або АМС), а з другою – при визначенні орбіти небесного тіла за даними його астрометричних спостережень.

Система рівнянь (1.22) нелінійна і у випадках $n > 1$ не інтегровна в скінченному вигляді. Але за постановкою задачі система матеріальних точок, що розглядається, є замкненою, тому для неї повинні виконуватися відповідні закони збереження. Останні з математичної точки зору мають вигляд функцій $\Psi(\vec{R}_i, \dot{\vec{R}}_i, t)$, які обертаються на сталі, якщо функції $\vec{R}_i(t)$ та $\dot{\vec{R}}_i(t)$ задовольняють рівнянням руху. Ці функції $\Psi(\vec{R}_i, \dot{\vec{R}}_i, t)$ не містять старшої похідної і тому мають назву *перших інтегралів* системи диференціальних рівнянь (1.22). Вони несуть певну інформацію про рух матеріальних точок нашої системи. Зокрема кожен перший інтеграл дозволяє знизити порядок на одну одиницю, а знаходження незалежних перших інтегралів в кількості, що дорівнює порядку системи рівнянь, еквівалентно її інтегруванню. З міркувань, про які буде сказано пізніше, доцільно одержати перші інтеграли задачі багатьох тіл безпосередньо, не посилаючись на загальні теореми механіки, скориставшись при цьому поняттям силової функції розглядуваної задачі.

Але перед цим зробимо два зауваження. Перше зауваження стосується того, що кожне з рівнянь (1.22) можна скоротити на відмінну від 0 масу m_i . Втім ця тривіальна з точки зору алгебри обставина – рівність (при певному виборі значення гравітаційної сталої) міри інерції і міри гравітаційних властивостей для всіх матеріальних об'єктів має глибокий фізичний зміст. У класичній фізиці – це експериментальний факт, установлений з вельми великою точністю. Але фундаментальне значення цього факту, пов'язане з його загальністю, привело А. Ейнштейна до створення загальної теорії відносності. Друге зауваження – термінологічне. Задача, що розглядається, зветься задачею багатьох тіл, а йдеться в ній про рух матеріальних точок. Така певна некоректність термінології, що закріплена традицією, якраз і є свідченням того, що основи небесної механіки закладалися досить давно, ще до того, як сформувалися сучасні суворі вимоги до вживаної термінології. Так, замість вислову „рух в інерціальній системі координат” вживаний нерідко і досі вислів “рух в абсолютних осях”, а рух в неінерціальній системі координат зветься “відносним рухом”, хоча будь-який рух є відносним. Ці вислови нагадують нам про абсолютний простір і абсолютний час Ньютона, позитивний зміст яких є еквівалентом твердження про існування інерціальних систем відліку.

1.2.2. Силова функція задачі багатьох тіл. Назвемо *силовою функцією* системи таку функцію U від координат всіх точок системи, що права частина i -того з рівнянь (1.22) є градієнтом цієї функції, як функції координат i -тої точки, що записувати будемо таким чином: $grad_i U$. Безпосереднім обчисленням можна перевірити, що силова функція задачі багатьох тіл дорівнює

$$U = \frac{f}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad j \neq i, \quad (1.25)$$

де $\Delta_{ij} = |\vec{R}_j - \vec{R}_i|$. Множник $1/2$ з'являється через симетрію виразу (1.25) відносно індексів i та j . Тепер систему рівнянь (1.22) можна записати більш компактно:

$$m_i \ddot{\vec{R}} = \text{grad}_i U, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

Видно, що силова функція U є додатною, якщо всі точки системи знаходяться на скінченних і відмінних від 0 відстанях одна від одної і прямує до 0 тільки тоді, коли всі точки системи розбігаються у нескінченність.

Встановимо деякі властивості силової функції (1.25), користуючися довільністю вибору системи координат (в межах її інерціальності). При цьому важливо те, що ця довільність пов'язана з фундаментальними властивостями простору і часу – з однорідністю та ізотропністю простору і однорідністю часу.

Однорідність простору означає, що початок системи координат можна розташувати в будь-якій точці простору. Перенесемо початок координат системи в точку, що визначається нескінченно малим радіусом-вектором $d\vec{R}$. При цьому радіуси-вектори всіх точок системи зміняться на величину $-d\vec{R}$. Відповідна зміна силової функції за правилом диференціювання функцій багатьох змінних

$$dU = -\sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \cdot d\vec{R}. \quad (1.27)$$

Але відстані Δ_{ij} при цьому не зміняться, значить, і функція U не зазнає зміни, тобто величина $dU = 0$. В силу довільності множника $d\vec{R}$ повинна мати місце рівність

$$\sum_{i=0}^n \text{grad}_i U = 0. \quad (1.28)$$

Очевидно, що рівність (1.28) можна також розглядати як наслідок третього закону Ньютона.

Ізотропність простору означає рівноправність всіх напрямків і можливість довільно обирати напрямки координатних осей. Внаслідок цього дорівнюватиме нулю і зміна силової функції, якщо ми зробимо нескінченно малий поворот системи координат, який ми визначимо вектором повороту $d\vec{\varphi}$. Напрямок цього вектора дасть нам вісь повороту, а його величина – кут повороту навколо цієї осі. Скориставшись рівностями $\dot{\vec{R}}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$ та $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$, матимемо, що $d\vec{R}_i = d\vec{\varphi} \times \vec{R}_i$. Відповідно до цього,

$$dU = \sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \cdot d\vec{\varphi} \times \vec{R}_i = 0. \quad (1.29)$$

Змінивши у змішаному векторному добутку порядок скалярного і векторного множення, одержимо в силу довільності вектора повороту, що

$$\sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \times \vec{R}_i = 0, \quad (1.30)$$

тобто сума моментів сил замкненої системи дорівнює 0.

Нарешті, *однорідність часу* дозволяє довільно обирати момент початку його відліку. Якщо змінити цей момент на величину dt , то зміна силової функції за правилом дифереціювання неявно заданих функцій буде дорівнювати

$$dU = \sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \cdot \vec{R}_i \cdot dt. \quad (1.31)$$

Тепер використаємо знайдені властивості силової функції для одержання перших інтегралів задачі багатьох тіл.

1.2.3. Перші інтеграли задачі багатьох тіл. Просумуємо рівняння (1.26) по індексу i від 0 до n . В силу умови (1.28) одержимо, що

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\vec{R}} = 0. \quad (1.32)$$

Інтегруючи (1.32) послідовно два рази, матимемо, що

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{R}}_i = \vec{a}, \quad \sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (1.33)$$

де \vec{a} і \vec{b} – векторні довільні сталі інтегрування. Якщо ввести позначення

$$m = \sum_{i=0}^n m_i \quad (1.34)$$

і згадати, що радіус-вектор

$$\vec{R}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \quad (1.35)$$

визначає положення *центра мас* (центра інерції) нашої системи матеріальних точок, то перші інтеграли (1.33) наберуть такого вигляду:

$$\dot{\vec{R}}_C = \vec{a}, \quad \vec{R}_C = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (1.36)$$

що визначає їх фізичний зміст – центр мас системи рухається рівномірно та прямолінійно. Тому самі ці перші інтеграли мають назву *інтегралів центра мас*. З цього також випливає, що, якщо розмістити в центрі мас початок системи координат, то така *барицентрична* система координат буде інерціальною.

Для того, щоб використати рівність (1.30), помножимо кожне з рівнянь (1.26) на радіус-вектор \vec{R}_i векторно ліворуч і просумуємо ці добутки за i від 0 до n . Отримаємо:

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \times \ddot{\vec{R}} = 0. \quad (1.37)$$

Додаючи до (1.37) очевидну рівність

$$\sum_{i=0}^n m_i \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} = 0, \quad (1.38)$$

матимемо, що

$$\sum_{i=0}^n m_i (\vec{R}_i \times \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \times \dot{\vec{R}} \right) = 0, \quad (1.39)$$

звідки, інтегруючи, одержуємо:

$$\sum_{i=0}^n m_i \vec{R}_i \times \dot{\vec{R}}_i = \vec{c}. \quad (1.40)$$

Оскільки величина $m_i \dot{\vec{R}}_i$ – це імпульс i -тої точки, кожний доданок в (1.40) дорівнює моменту імпульсу (кінетичному моменту) цієї точки, а стала інтегрування \vec{c} – це не що інше, як кінетичний момент всієї системи матеріальних точок. Відповідно до цього, перший інтеграл (1.40) має назву *інтеграла моменту*.

Нарешті, множачи i -те рівняння (1.26) на вектор швидкості $\dot{\vec{R}}_i$ скалярно, одержимо після сумування всіх рівнянь і використання (1.31):

$$\sum_{i=0}^n m_i \ddot{\vec{R}}_i \cdot \dot{\vec{R}}_i = \sum_{i=0}^n \text{grad}_i U \cdot \dot{\vec{R}}_i. \quad (1.41)$$

Позначаючи модуль вектора швидкості через V_i , можна переписати (1.41) у такому вигляді:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^n m_i V_i^2 \right) = \frac{dU}{dt}, \quad (1.42)$$

що дає:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i V_i^2 = U + h. \quad (1.43)$$

Ліворуч у рівності (1.43) маємо вираз для кінетичної енергії нашої системи T , і першому інтегралу (1.43) можна надати вигляду:

$$T - U = h, \quad (1.44)$$

що підкреслює його фізичний зміст закону збереження енергії, визначає його назву – *інтеграл енергії* і уточнює фізичний зміст силової функції – це потенціальна енергія системи із зворотнім знаком.

Із знайдених чотирьох перших інтегралів три мають векторний характер, один – скалярний. Таким чином, ми знайшли всього десять так званих *класичних перших інтегралів* задачі багатьох тіл. Своєму існуванню ці інтеграли, як і відповідні властивості силової функції, завдячують певним властивостям простору і часу – їх однорідності та ізотропності простору. Тож з'ясувавши із спостережень, що рух небесних тіл, в тому числі і найвіддаленіших, задовольняє в моделі задачі багатьох тіл відповідним співвідношенням, ми тим самим встановлюємо існування цих фундаментальних властивостей простору і часу в різних областях Всесвіту.

Звичайно, виникає питання про існування в задачі багатьох тіл ще інших інтегралів, крім десяти класичних. Наприкінці XIX ст. зусиллями ряду математиків і механіків була доведена практично негативна відповідь на це питання – не існує перших інтегралів більш-менш простої математичної природи, а саме перших інтегралів, які були б однозначними аналітичними функціями координат, швидкостей та часу.

Наявні десять класичних перших інтегралів дозволяють знизити порядок системи диференціальних рівнянь на десять одиниць. Ще на дві одиниці це дозволяють зробити особливості правих частин рівнянь (1.22), а саме, залежність їх тільки від різниць координат точок системи і незалежність їх від незалежної змінної – часу t . Отже, можна знизити порядок системи на 12 одиниць. Цього не досить для інтегрування навіть задачі трьох тіл, яка має 18-й порядок, але якраз досить для того, щоб одержати загальний розв'язок задачі двох тіл.

Знизити порядок системи (1.22) можна різними шляхами. При цьому можна дістати нові співвідношення, що мають певний фізичний зміст. Наведемо два з них, доведення яких можна знайти в [15]:

$$\dot{I} = 2U + 4h, \quad (1.45)$$

де

$$I = \sum_{i=0}^n m_i R_i^2 \quad (1.46)$$

дорівнює моменту інерції системи відносно початку координат, і

$$\dot{R} = 2U + 4h_C, \quad (1.47)$$

де величина

$$R = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad h_C = h - \frac{a^2}{2m}. \quad (1.48)$$

Величина h_C – повна енергія системи відносно її центра мас. Співвідношення (1.47) відоме як *рівняння Лагранжа-Якобі*.

Візьмемо центр мас системи – точку C і сталий вектор моменту \vec{c} . Це дозволяє розглянути площину, що проходить через точку C і має нормальний вектор \vec{c} . Ця площина, яка зберігає постійну орієнтацію у просторі і рухається паралельно самій собі рівномірно, має назву *незмінної площини Лапласа*. Її можна використовувати як основну площину системи координат в задачі багатьох тіл.

1.2.4. Задача багатьох тіл у барицентричній системі координат. Як вже відзначалося, барицентрична система координат є у випадку задачі багатьох тіл інерціальною. Тому, позначивши її осі через ξ, η, ζ , а радіуси-вектори через $\vec{\rho}_i$, на підставі (1.22) запишемо рівняння руху в цій системі координат:

$$m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = f m_i \sum_{j=0}^n m_j \frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{\Delta_{ij}^3}, \quad j \neq i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.49)$$

Але при цьому барицентричні радіуси-вектори будуть зв'язані між собою співвідношенням

$$\sum_{j=0}^n m_j \vec{\rho}_j = 0, \quad (1.50)$$

яке дозволяє виключити з рівнянь (1.49) радіус-вектор будь-якої точки, наприклад, точки M_0 . Матимемо, що

$$\vec{\rho}_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j \vec{\rho}_j. \quad (1.51)$$

Підставляючи (1.51) в (1.49) та виділяючи в сумах по j нульовий та i -й доданки, одержимо такі рівняння руху в барицентричній системі координат:

$$\ddot{\vec{\rho}}_i + \mu_i \frac{\vec{\rho}_i}{\Delta_{i0}^3} = f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{\rho}}{\Delta_{j0}^3} \right), \quad \mu_i = f(m_0 + m_i), \quad j \neq i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1.52)$$

Виключаючи вектори $\vec{\rho}_0$ та $\dot{\vec{\rho}}_0$ у перших інтегралах, одержимо, що інтеграли центра мас виконуються, як це і повинно бути в барицентричній системі координат, тотожньо, а інтеграли моменту і енергії набувають вигляду:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i + \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho} \times \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_i \right) = \vec{c}, \quad (1.53)$$

та

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 + \frac{1}{2m} |m_i \dot{\vec{\rho}}_i|^2 = U + h.$$

І рівняння руху і перші інтеграли моменту та енергії набрали більш громіздкого вигляду, але порядок системи рівнянь знизився на шість одиниць завдяки використанню інтегралів центра мас.

1.3. Задача багатьох тіл у відносній системі координат

Оскільки ми розглядаємо рух наших матеріальних точок, не беручи до уваги існування інших матеріальних об'єктів, то неінерціальною системою координат може бути тільки система, пов'язана з однією з цих точок. Нехай це буде точка M_0 . Позначимо осі цієї *відносної* системи координат через x, y, z , а радіуси-вектори інших точок через \vec{r}_i , ($i=1,2,\dots,n$). Запишемо рівняння руху цих точок, користуючись правилом, сформульованим на початку пункту 1.2:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = f m_i \sum_{j=0}^n m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - f m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}, \quad j \neq i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1.54)$$

Тут перша сума – це сума сил, що діють на i -ту точку з боку інших точок системи, друга – сума сил інерції, викликаних прискоренням точки M_0 – початку системи координат під дією всіх інших точок системи, включаючи i -ту точку. Виділяючи в першій сумі доданок з $j=0$, а в другій – доданок з $j=i$, перепишемо систему рівнянь у такому вигляді:

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \quad \mu_i = f(m_0 + m_i), \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1.55)$$

Внаслідок того, що в конкретних задачах астрономії визначається саме відносний рух небесних тіл, система диференціальних рівнянь (1.55) $6n$ -го порядку є однією з найважливіших в небесній механіці. Така постановка задачі є особливо доцільною, коли маса точки M_0 значно більша від мас усіх інших точок системи, як це і має місце в системі “Сонце – планети” або “планета – її

супутники”. Оскільки маса m_0 входить до лівих частин рівнянь (1.55) і не входить до їх правих частин, то абсолютна величина цих правих частин відносно мала у порівнянні з другими доданками лівих частин рівнянь. З цього випливає, що рух кожної з точок малої маси M_i (принаймні на певному відрізку часу) мало відрізняється від руху у задачі двох тіл – руху точки M_i відносно точки M_0 під дією тільки цієї точки. А оскільки ця задача інтегрується в скінченному вигляді, то і відносний рух у цьому випадку задачі багатьох тіл може бути наближено вивчений тим чи іншим методом теорії збурень. Через це рух у задачі двох тіл будемо називати *незбуреним* (якщо з контексту не випливає, що за незбурений рух береться рух в якійсь іншій задачі), а рух, що описується рівнянням

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \vec{F}_i, \quad (1.56)$$

причому має місце умова $F_i \ll \mu_i / r_i^2$, будемо називати *збуреним*. Повертаючись до рівнянь задачі багатьох тіл (1.55), введемо *збурюючі* (або пертурбаційні) функції

$$R_i = f \sum_{j=1}^n m_j R_{ij}, \quad j \neq i, \quad (1.57)$$

де

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_i}{r_j^3}, \quad j \neq i. \quad (1.58)$$

Тепер рівняння відносного руху набувають вигляду:

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \text{grad}_i R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.59)$$

Підкреслимо, що з нерівностей $m_0 \gg m_i$ випливає також, що система координат пов’язана з точкою M_0 , досить близька до інерціальної, тоді як системи координат з початком в одній з точок M_i суттєво неінерціальні. А саме в цьому з фізичної точки зору і полягає різниця між геліоцентричною і геоцентричною системами.

Переходячи до розгляду перших інтегралів задачі багатьох тіл у відносному русі, треба, насамперед, відзначити, що в неінерціальній системі координат не можуть мати місце інтеграли центра мас, бо він рухається з прискоренням. Інтеграли моменту та енергії можна одержати, якщо згадати, що радіуси-вектори точок в барицентричній та відносній системах координат пов’язані співвідношенням $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \vec{\rho}_0$, яке з урахуванням (1.51) записується так:

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j \vec{\rho}_j. \quad (1.60)$$

Переходячи в перших інтегралах (1.53) від барицентричних до відносних координат, одержимо інтеграли моментів та енергії у відносній задачі багатьох тіл:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r} \times \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}} = \vec{c} \quad (1.61)$$

та

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 - \frac{1}{2m} \left| \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \right|^2 = h. \quad (1.62)$$

Таким чином, у відносній задачі багатьох тіл існують лише чотири класичні перші інтеграли.

З вищесказаного випливає фундаментальна роль, що її відіграє в небесній механіці задача двох тіл. У наступній главі буде одержаний загальний розв'язок цієї задачі і досліджені окремі типи кеплерівського руху. У главі III буде розглянуто ряд додаткових питань теорії руху в задачі двох тіл та її узагальненнях, важливих і цікавих з тієї чи іншої точки зору.

Задачі до глави I.

1.1. Розкласти в ряд за поліномами Лежандра гравітаційний потенціал однорідного диска з масою M та радіусом R .

1.2. Довести, що гравітаційний потенціал однорідного еліпсоїда з густиною ρ та півосями a, b, c дорівнює

$$V = 2\pi abc\rho \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{R(s)},$$

де

$$R(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)},$$

а нижня границя $\lambda = 0$, якщо точка (x, y, z) лежить всередині еліпсоїда, якщо ж зовні – то λ є коренем рівняння

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

1.3. Довести, що гравітаційний потенціал однорідного еліпсоїда обертання ($a = b > c$) дорівнює

$$V = \frac{3fM}{2lc} \left[\arctg(lu) + \frac{x^2 + y^2}{l^2 c^2} \left(\frac{lu}{1 + l^2 u^2} - \arctg(lu) \right) + \frac{z^2}{l^2 c^2} (\arctg(lu) - lu) \right],$$

де $l = \sqrt{a^2 + b^2} / c$, M – маса еліпсоїда, $u = 1$ для точок всередині еліпсоїда і u є коренем рівняння

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + l^2 u^2} + z^2 = \frac{c^2}{u^2}$$

для точок зовні еліпсоїда.

1.4. Довести, що в задачі багатьох тіл момент інерції відносно центра мас задовольняє рівностям $\dot{I} = 2(T + h)$ та $\ddot{I} = 2(U + 2h)$.

1.5. Довести нерівність Зундмана $c^2 \leq I(\ddot{I} - 2h)$, де c – стала інтеграла моменту.

1.6. Нехай ρ_{\max} – найбільша відстань точок до центра мас системи, m_{\max} – найбільша, m_{\min} – найменша з мас цих точок, m – сума мас всіх точок. Довести, що в будь-який момент часу має місце нерівність $m_{\min}\rho_{\max}^2 \leq I \leq m\rho_{\max}^2$.

1.7. Довести теорему Вейерштрасса-Зундмана, яка полягає в тому, що необхідною умовою зіткнення всіх матеріальних точок, які рухаються в полі сил взаємного тяжіння, в один і той же момент часу є рівність нулю кінетичного моменту системи.

1.8. Довести, що найбільша відстань між точками в системі гравітуючих матеріальних точок зростає з часом:

а) не швидше, ніж лінійно, якщо найменша відстань між ними весь час перевищує певну величину $\Delta > 0$;

б) не повільніше, ніж лінійно, якщо повна енергія системи додатна.

1.9. Нехай $\vec{R}_i = \vec{R}_i(t)$ – розв'язок задачі багатьох тіл. Довести, що $\vec{R}'_i = D\vec{R}_i(D^{3/2}t)$ також є розв'язком цієї задачі.

1.10. Записати рівняння відносного руху в задачі багатьох тіл:

а) в сферичній системі координат;

б) в координатах Якобі, в яких рух i -ї точки розглядається відносно центра мас j -х точок, де $j = 0, 1, \dots, i-1$.

1.11. Довести, що для матеріальних точок, які притягують одна одну із силою, пропорційною відстані між ними, орбіти всіх точок відносно будь-якої з них є еліпсами з центрами в цій точці.

Глава II. ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ

2.1. Загальний розв'язок задачі двох тіл.

2.1.1. Рівняння задачі двох тіл. Рівняння задачі двох тіл можна звичайно одержати як частковий випадок рівнянь задачі багатьох тіл при $n = 1$. Але ми не будемо користуватися цим, щоб зробити подальший розгляд незалежним від матеріалу глави I. Почнемо знову з розгляду руху в інерціальній системі координат X, Y, Z . Маємо матеріальні точки M_0 та M_1 з масами m_0 та m_1 і радіусами-векторами \vec{R}_0 та \vec{R}_1 (див. рис. 2.1). Другий закон Ньютона і закон всесвітнього тяжіння дадуть такі *рівняння руху* цих точок:

$$m_0 \ddot{\vec{R}}_0 = f m_0 m_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|^3},$$

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = f m_0 m_1 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_0 - \vec{R}_1|^3},$$
(2.1)

де f – гравітаційна стала.

Ми одержали систему диференціальних рівнянь 12-го порядку, до якої треба додати *початкові умови*

$$\vec{R}_{0,1}^{(0)} = \vec{R}_{0,1}(t_0), \quad \dot{\vec{R}}_{0,1}^{(0)} = \dot{\vec{R}}_{0,1}^{(0)}(t_0)$$
(2.2)

або *крайові умови*

$$\vec{R}_{0,1}^{(1)} = \vec{R}_{0,1}(t_1), \quad \vec{R}_{0,1}^{(2)} = \vec{R}_{0,1}(t_2).$$
(2.3)

Наявність десяти класичних інтегралів, залежність правих частин рівнянь (2.1) тільки від різниць координат точок M_0 та M_1 і незалежність їх від часу t визначають принципову можливість інтегрування системи (2.1) в скінченному вигляді. Але практично ми застосовуємо задачу двох тіл або в барицентричній системі координат (подвійні зірки, рух системи “Земля-Місяць” відносно Сонця і рух Землі та Місяця відносно їх барицентра) або, частіше, у *відносній системі* координат (тобто рух однієї матеріальної точки відносно другої).

Щоб перейти до барицентричної системи координат, згадаймо, що у випадку двох точок їх центр мас лежить на відрізку M_0M_1 на відстанях ρ_0 та ρ_1 , при цьому $\rho_0 + \rho_1 = |M_0M_1|$, а $m_1\rho_0 = m_0\rho_1$, звідки випливає (див. рис. 2.1), що

$$\vec{\rho}_0 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} (\vec{R}_0 - \vec{R}_1), \quad \vec{\rho}_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} (\vec{R}_1 - \vec{R}_0).$$
(2.4)

Підставляючи (2.4) в (2.1), дістанемо, скорочуючи рівняння на m_0 та m_1 відповідно, такі *рівняння руху задачі двох тіл в барицентричній системі* координат:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{\rho}}_0 + \mu_0 \frac{\vec{\rho}_0}{\rho_0^3} &= 0, \\ \ddot{\vec{\rho}}_1 + \mu_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} &= 0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

де сталі

$$\mu_0 = \frac{fm_1^3}{(m_0 + m_1)^2}, \quad \mu_1 = \frac{fm_0^3}{(m_0 + m_1)^2}.\tag{2.6}$$

Щоб перейти до *рівнянь відносного руху*, введемо радіус-вектор точки M_1 відносно точки M_0 як $\vec{r}_{1/0}$ і радіус-вектор точки M_0 відносно точки M_1 як $\vec{r}_{0/1}$. Тоді, віднімаючи перше рівняння (2.1) від другого і навпаки, матимемо:

$$\ddot{\vec{r}}_{1/0} + \mu \frac{\vec{r}_{1/0}}{r_{1/0}^3} = 0\tag{2.7}$$

та

$$\ddot{\vec{r}}_{0/1} + \mu \frac{\vec{r}_{0/1}}{r_{0/1}^3} = 0,\tag{2.8}$$

де

$$\mu = f(m_0 + m_1).\tag{2.9}$$

При цьому рівняння (2.7) і (2.8) вже не утворюють системи рівнянь, є незалежними, при тому записаними в різних системах координат.

Порівнюючи рівняння (2.6)–(2.8), бачимо, що вони всі однакові по своїй структурі і відрізняються тільки значеннями коефіцієнтів в других доданках лівих частин, а у випадку рівнянь (2.7) і (2.8) і ці коефіцієнти збігаються. У двох випадках відносного руху (2.7) і (2.8) початкові умови будуть визначатися протилежними векторами, а в барицентричній системі – векторами, протилежними за напрямками та пропорційними за модулями. Це означає, що в усіх випадках рух буде відбуватися за орбітами, геометрично подібними, а в двох випадках відносного руху просто однаковими, але рухатись точки будуть в протилежних напрямках. Тому не має сенсу питання, яка саме точка (M_1 чи M_0) рухається відносно іншої. Зокрема, рух Сонця відносно Землі так само реальний як і рух Землі відносно Сонця. Це зауваження, що впливає з принципу відносності руху, треба зробити, бо в побутовій свідомості, а подекуди і науково-популярній і навчальній літературі звучить думка, що колись вважалося, що Сонце рухається навколо Землі, а от Копернік встановив, що все відбувається насправді навпаки – Земля рухається навколо Сонця. Але якщо обидва рухи однаково реальні, то виникає питання – в чому ж різниця між геліоцентричною і геоцентричною системами координат або, кажучи старою мовою, між геліоцентричною і геоцентричною системами світу? Відповідь впливає з тієї об'єктивної обставини, що маса Сонця набагато більша від маси Землі ($m_0 \gg m_1$). З цього і співвідношень (2.4) впливає, що в барицентричній системі розміри орбіт і виникаючих прискорень обернено пропорційні масам точок M_0 та M_1 . А це, в свою чергу, означає, що система координат, пов'язана з

точкою великої маси (Сонцем) дуже близька до інерціальної, а система, пов'язана з точкою малої маси (Землею) суттєво неінерціальна. З фізичної точки зору це зумовлено тим, що сила, з якою Сонце притягує Землю, дорівнює силі, з якою Земля діє на Сонце, але прискорення, що при цьому виникають, обернено пропорційні масам. А саме з величиною прискорення початку системи координат і пов'язана ступінь неінерціальності цієї системи. Але вказана різниця між геліоцентричною і геоцентричною системами проявляється тоді, коли ми починаємо розглядати в кожній з них рух якогось третього тіла, наприклад, Марса. Його рух в майже інерціальній геліоцентричній системі значно більш простий, ніж у неінерціальній геоцентричній. В цьому полягає суто механічний зміст переходу від геоцентричних уявлень до геліоцентричних.

При всьому цьому треба розуміти, що історично геоцентрична система Птолемея (точніше Гіппарха-Птолемея, бо саме Гіппарх першим застосував епіцикли і диференти для опису руху небесних тіл) була і залишається величезним надбанням науки на її шляху пізнання людиною навколишнього світу. Вона була першою теорією, що дозволила з певною точністю описувати і прогнозувати положення тіл Сонячної системи і спиралась на певні фізичні засади. А саме вона виходила з фізики Арістотеля, в якій стверджувалася абсолютність швидкостей, а не прискорень. Це, в свою чергу, було узагальненням побутового і виробничого досвіду тих часів – для руху з постійною швидкістю треба було прикладати постійну силу (насправді, як ми це тепер розуміємо, для врівноваження постійної сили опору). Звідси випливала і абсолютизація станів рівномірно руху і спокою. З математичної ж точки зору, якщо перекласти зроблене Гіппархом і Птолемеєм з притаманної античній науці геометричної мови на сучасну аналітичну, то це не що інше як розклад координат небесних тіл, як функцій часу, в ряди Фур'є, тобто використання такого математичного апарату, все значення якого розкривається лише в сучасну епоху. В той же час все сказане ні в якому разі не зменшує значення того, що зробили М.Копернік та його послідовники, створивши нову фізику і нову астрономію і насамперед їх основу – класичну механіку, яка більш адекватно описує величезну кількість явищ в природі і створила теоретичні засади для могутнього технологічного прогресу людства. В свою чергу класична механіка, як пізніше з'ясувалося, має обмеження в її застосуванні з боку квантової фізики і теорії відносності. З огляду на останнє зауважимо, що спостережний факт великої різниці між масами Сонця і Землі приводить до того, що фізична різниця між геліоцентричною і геоцентричною системами відліку зберігається і в рамках загальної теорії відносності (див. про це докладніше роботу [11]).

Після зробленого історико-методологічного відступу повернемося знову до задачі двох тіл. Позначимо надалі наші матеріальні точки, як і їх маси, як M та m . Будемо розглядати рух точки m відносно точки M за рівнянням

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \mu = f(M + m), \quad (2.10)$$

та початковими умовами

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0). \quad (2.11)$$

в системі координат x, y, z (рис. 2.2). Стала μ має назву *гравітаційної сталої задачі двох тіл*. Звернемо увагу на те, що вона залежить від суми мас обох розглядуваних матеріальних точок. Це особливо суттєво при розгляді подвійних зоряних систем. Але при вивченні руху малих планет, комет відносно Сонця, при розгляді руху штучних небесних тіл меншою масою можна нехтувати.

Ми знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.10), а точніше кажучи, системи диференціальних рівнянь шостого порядку методом перших інтегралів. Зауважимо перед цим, що доцільно, насамперед при розгляді руху тіл Сонячної системи, вводити спеціальну астрономічну (*гауссову*) систему одиниць виміру – довжину вимірювати в астрономічних одиницях (а.о.), час – в середніх сонячних добах, масу в частках маси Сонця. Тоді гравітаційна стала $f = 0.0029591$. А величина, що часто зустрічається, $k = \sqrt{f} = 0.0172021$. Стала k дістала назву *сталої Гаусса*.

2.1.2. Перші інтеграли задачі двох тіл. Оскільки ми розглядаємо відносний рух (тобто рух в неінерціальній системі координат), то з десяти класичних інтегралів будуть існувати лише чотири – векторний *інтеграл моменту* та скалярний – *інтеграл енергії*. Для одержання першого з них помножимо рівняння руху (2.10) на радіус-вектор \vec{r} векторно ліворуч. Додаючи до цього добутку рівність $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$, матимемо:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0. \quad (2.12)$$

Інтегруючи, одержуємо:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (2.13)$$

Це означає, що кінетичний момент точки m зберігається, а стала інтегрування \vec{c} дорівнює цьому моменту в розрахунку на одиницю маси.

Щоб одержати *інтеграл енергії*, помножимо рівняння (2.10) на вектор швидкості $\dot{\vec{r}}$ скалярно:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3}. \quad (2.14)$$

Має місце рівність $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{r}$, яка випливає з того, що $r = |\vec{r}|$, а \dot{r} визначає швидкість зміни величини r і дорівнює проекції вектора $\dot{\vec{r}}$ на напрямок вектора \vec{r} , тобто $\dot{r} = |\dot{\vec{r}}| \cdot \cos(\dot{\vec{r}}, \vec{r})$. Позначаючи модуль швидкості $|\dot{\vec{r}}|$ через V , матимемо, що

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(V^2) = -\frac{\mu}{r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.15)$$

а після інтегрування:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (2.16)$$

де стала h – подвійна повна енергія, що приходиться знов-таки на одиницю маси точки m .

Залишаючи повний аналіз властивостей руху, що впливають з наявності цих двох перших інтегралів надалі, зазначимо лише, що з інтегралу моменту та властивостей векторного добутку випливає, що вектори \vec{r} та $\dot{\vec{r}}$ перпендикулярні вектору моменту \vec{c} .

Інтегровність задачі двох тіл проявляється в тому, що крім знайдених класичних інтегралів існує ще один специфічний саме для цієї задачі перший інтеграл. Щоб знайти його, помножимо векторно рівняння руху на інтеграл моменту праворуч:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{c} - \mu \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0. \quad (2.17)$$

Перший доданок ліворуч є похідною від величини $\dot{\vec{r}} \times \vec{c}$. Треба показати, що і другий доданок є повною похідною. Обчислюючи за відомою формулою подвійний векторний добуток, одержимо, що

$$\frac{\vec{r} \times \vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^3} = \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}^2}{r^3} = -\frac{\dot{r}r - r\dot{r}}{r^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (2.18)$$

Підставляючи (2.18) в (2.17), маємо після інтегрування, що

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = \vec{\lambda}. \quad (2.19)$$

Цей перший інтеграл задачі двох тіл дістав назву *інтеграла Лапласа*, а стала $\vec{\lambda}$ – це *вектор Лапласа*. Таким чином, маємо сім перших інтегралів – два векторних і один скалярний. Але засіб знаходження інтеграла Лапласа примушує дійти до висновку, що не всі знайдені перші інтеграли є незалежними. І справді, між сталими інтегрування \vec{c} , $\vec{\lambda}$ та h існують два співвідношення, що їх зв'язують. Перше з них легко одержати, якщо перемножити скалярно інтеграл моменту та інтеграл Лапласа. При цьому

$$\vec{c} \cdot \vec{\lambda} = \vec{c} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0, \quad (2.20)$$

бо кожен із змішаних добутків векторів, що є в (2.20), має по два однакових множника. Таким чином, вектор моменту і вектор Лапласа перпендикулярні між собою. Друге співвідношення зв'язує модулі цих векторів. Знайдемо скалярний квадрат вектора Лапласа:

$$\lambda^2 = (\dot{\vec{r}} \times \vec{c})^2 - 2\mu \frac{(\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) \cdot \vec{r}}{r} + \mu^2 \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)^2 = c^2 V^2 - 2\mu \frac{c^2}{r} + \mu^2. \quad (2.21)$$

Вилучаючи V^2 за допомогою інтеграла енергії, одержимо остаточно, що

$$\lambda^2 = hc^2 + \mu^2. \quad (2.22)$$

Таким чином, ми маємо *п'ять* незалежних перших інтегралів, що дозволяє звести систему диференціальних рівнянь шостого порядку до одного рівняння першого порядку.

2.1.3. Рівняння орбіти і закон руху в задачі двох тіл. Перейдемо до дослідження руху в задачі двох тіл. По-перше, з того факту, що радіус-вектор точки m і вектор її швидкості перпендикулярні до постійного вектора моменту. впливає, що площина, що визначається векторами \vec{r} і $\dot{\vec{r}}$, зберігає постійну орієнтацію в просторі і перпендикулярна вектору \vec{c} . Але вона містить в собі вектор \vec{r} , а, значить, і точку M_0 – початок координат. Тобто, ця площина, в якій рухається точка m , є нерухомою в системі координат x, y, z . Її рівняння у векторній формі є $\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$, а в координатній:

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0, \quad (2.23)$$

якщо c_1, c_2, c_3 – відповідні компоненти вектора \vec{c} .

Оскільки вектор Лапласа перпендикулярний до нормального вектора площини руху \vec{c} , то і він також лежить в цій площині. Це дозволяє ввести в площині руху прямокутну систему координат ξ, η , де вісь ξ спрямована за вектором Лапласа $\vec{\lambda}$, а також полярну систему координат r, ν , де полярний кут ν , що має в астрономії назву *істинної аномалії*, відлічується від напрямку вектора $\vec{\lambda}$. Якщо ввести ще вісь ζ , спрямовану за вектором моменту \vec{c} , то матимемо в просторі поряд з вихідною системою координат x, y, z ще і пов'язану з площиною руху систему ξ, η, ζ , яка має назву *орбітальної системи* координат. Зауважимо, що вихідна система координат – це здебільшого геліоцентрична екліптична система або геоцентрична екваторіальна. Але в разі потреби це може бути селеноцентрична або якась планетоцентрична система координат. Якщо розглядається рух в подвійній зоряній системі, то почасти за основну площину вихідної системи координат беруть картинну площину, яка є дотичною до небесної сфери.

Знайдемо тепер рівняння траєкторії руху в задачі двох тіл або, висловлюючись астрономічною мовою, *рівняння орбіти* точки m , насамперед в полярній системі r, ν . Для цього помножимо скалярно інтеграл Лапласа $\vec{\lambda}$ на радіус-вектор \vec{r} :

$$r\lambda \cos \nu = \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r}^2}{r} = c^2 - \mu r. \quad (2.24)$$

Знаходячи звідси величину r як функцію кута ν , одержуємо рівняння орбіти:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cos \nu}, \quad (2.25)$$

що збігається з рівнянням

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad (2.26)$$

якщо покласти

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.27)$$

Як відомо, рівняння (2.26) – це рівняння кривої другого порядку у випадку, коли полярна вісь спрямована з фокуса кривої до її найближчої вершини. Величина p – *фокальний параметр* кривої (або просто її параметр), що дорівнює довжині фокальної полухорди, яка проходить через фокус перпендикулярно великій осі еліпса, дійсній осі гіперболи або осі симетрії параболи (рис. 2.3). Значення ексцентриситету e визначає, про яку саме криву другого порядку йдеться. Якщо $e = 0$, то це коло, при $e < 1$ – еліпс, значення $e = 1$ дає параболу, $e > 1$ – гіперболу. Однак орбітою буде саме одна з цих кривих тільки тоді, коли є відмінним від нуля параметр p , а, значить, і кінетичний момент c . Якщо ж $c = 0$, то вектори \vec{r} та $\dot{\vec{r}}$ – колінеарні, а орбіта – це пряма, що проходить через початок координат.

Таким чином, ми встановили *перший закон Кеплера* в його узагальненій формі: *у відносній задачі двох тіл матеріальна точка рухається за кривою другого порядку, в одному з фокусів якої знаходиться притягуючий центр.*

Нагадаємо з огляду на це необхідні надалі відомості про криві другого порядку, які зветься так тому, що їх рівняння в декартових координатах при всьлякому розміщенні їх на площині є алгебраїчними рівняннями другого степеня. Їх канонічні рівняння (центр системи збігається з центром еліпса або гіперболи або з вершиною параболи, вісь x спрямована за великою оссю еліпса, дійсною оссю гіперболи або оссю симетрії параболи) є такими:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– еліпс,} \quad (2.28)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– гіпербола,} \quad (2.29)$$

$$y^2 = 2px \quad \text{– параболо,} \quad (2.30)$$

де a та b – довжини великої і малої півосей еліпса або дійсної і уявної півосей гіперболи.

Відношення відстані від центру еліпса або гіперболи до їх фокусів – *фокусної відстані* c (не плутати з модулем вектора моменту \vec{c}) до значення a визначає їх *ексцентриситет*, тобто

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}, \quad (2.31)$$

де знак “–” відноситься до еліпсу, знак “+” – до гіперболи. Виходячи з геометричного змісту параметра p , можна отримати формули:

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{– еліпс,} \quad (2.32)$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{– гіпербола.} \quad (2.33)$$

Звернемо увагу на те, що значення ексцентриситету $e = 1$ можна отримати двома способами. По-перше, можна, зафіксувавши одну вершину і один фокус, заставити центр еліпса і другий його фокус та другу вершину віддалитися вздовж великої осі на нескінченність, тоді $e \rightarrow 1$, бо і $c \rightarrow \infty$ і $a \rightarrow \infty$. При цьому

еліпс розірветься і перетвориться на параболу. По-друге, можна при фіксованій великій півосі еліпса a спрямувати до 0 малу піввісь b , і знову $e \rightarrow 1$ (див формулу (2.31)). В цьому випадку еліпс сплющиться в подвійний відрізок довжиною $2a$. Гіпербола при такій процедурі перетвориться на два подвійних променя.

Інша назва розглядуваного класу кривих – *конічні перерізи* пов'язана з тим встановленим ще в давнину способом одержання цих кривих як перерізів, що утворюються при перетині прямого кругового конуса площиною, яка перетинає цей конус під різними кутами до його осі. Це наочно підтверджує, що всі ці на перший погляд різні за формою криві дійсно утворюють певне єдине сімейство кривих.

Повертаючись до задачі двох тіл, бачимо, що вектор Лапласа визначає напрямок з фокуса, в якому розміщений притягуючий центр, до найближчої вершини – *періцентру* орбіти. У випадку еліптичної орбіти є також і найвіддаленіша від притягуючого центру точка – *апоцентр*. Узагальнююча назва цих двох точок – *апсиди*, а лінія, що їх сполучає – це *лінія апсид*. Коли йдеться про рух навколо окремих конкретних тіл, то назви апсид утворюються за традицією від давньогрецької назви центрального тіла. Так, навколосонячні орбіти мають перигелій (але афелій), навкоземні – перигей та апогей, навколомісячні – периселеній та апоселеній, навколомарсіанські – периарій та апоарій. У орбіт компонент подвійних зірок є періастр та апоастр.

Крім рівняння орбіти треба мати ще *закон руху* за цією орбітою, тобто залежність істинної аномалії v , а тим самим і радіусу r , від часу t . Щоб знайти цей закон, розглянемо модуль інтеграла моменту

$$rV \sin(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = c. \quad (2.34)$$

Але величина $V \sin(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ – це перпендикулярна до радіуса-вектора компонента швидкості, або колова швидкість, що дорівнює добутку радіуса r на кутову швидкість $\omega = \dot{v}$. Тому

$$r^2 \dot{v} = c. \quad (2.35)$$

Інтегруючи (2.35) з урахуванням (2.26) та (2.27), матимемо закон руху у вигляді:

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.36)$$

Стала τ є шостою незалежною сталою, яка разом зі сталими перших інтегралів $\bar{c}, \bar{\lambda}, h$ визначає загальний розв'язок задачі двох тіл. Оскільки при $t = \tau$ значення істинної аномалії v повинно дорівнювати нулю, то фізичний зміст сталої τ – це *момент проходження точкою m періцентру її орбіти*. Інтеграл, що стоїть ліворуч в (2.36), може бути знайдений в елементарних функціях хоча б за допомогою універсальної заміни $s = tg(v/2)$, але він матимемо в загальному випадку досить громіздкий вигляд. А тому його буде обчислено окремо при розгляді кожного з можливих типів кеплерівського руху.

В усякому разі його знаходження визначає істинну аномалію як функцію часу і дає змогу знайти відстань r та орбітальні координати, при цьому

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v, \quad \zeta = 0 \quad (2.37)$$

або, що теж саме, знайти радіус-вектор точки m в орбітальній системі координат, який ми позначимо як $\vec{\rho} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$.

Щоб знайти розв'язок задачі двох тіл у вихідній системі координат x, y, z , тобто знайти радіус-вектор \vec{r} , треба матрицю спрямовуючих косинусів системи координат ξ, η, ζ відносно системи x, y, z помножити на вектор $\vec{\rho}$. Введемо одиничні вектори $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ – орти осей ξ, η, ζ відповідно. Тоді матриця спрямовуючих косинусів буде утворюватися з компонент векторів $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$. А вираз для заходження вектора \vec{r} можна записати таким чином:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \\ \vec{R} \end{pmatrix} \cdot \vec{\rho}. \quad (2.38)$$

При цьому орти осей орбітальної системи координат, виходячи з її визначення, треба обчислювати за формулами:

$$\vec{P} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}, \quad \vec{Q} = \frac{\vec{c} \times \vec{\lambda}}{c\lambda}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{c}}{c}. \quad (2.39)$$

Тепер загальний розв'язок задачі двох тіл можна визначити довільними сталими $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, e, p, \tau$. Ці сталі, як і сталі перших інтегралів, треба обчислювати при знаходженні якогось часткового розв'язку за допомогою початкових умов (2.11) за співвідношеннями (2.13), (2.16), (2.19), (2.27), (2.26) та (2.39). В астрономії сталі інтегрування, що визначають орбіту небесного тіла та його рух за цією орбітою, мають назву *елементів орбіти*. Зокрема вектори $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ називають *векторними елементами орбіти*.

Інтегралові моменту можна надати ще такого вигляду:

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{c} dt. \quad (2.40)$$

Тепер модуль його лівої частини є подвійною площею трикутника, утвореного векторами \vec{r} та $\vec{r} + d\vec{r}$, що з точністю до нескінченно малих вищих порядків співпадає з площею dS сектора, який описується радіусом-вектором \vec{r} за час dt , тобто

$$dS = \frac{1}{2} c dt. \quad (2.41)$$

Інтегрування (2.41) дає:

$$S = \frac{1}{2} ct + c_0. \quad (2.42)$$

Рівності (2.41) та (2.42) визначають *другий закон Кеплера*. Його можна сформулювати так: *секторіальна швидкість кеплерівського руху є величиною сталою або радіус-вектор точки описує за однакові проміжки часу сектори однакової площі*. Треба тільки зауважити, що (2.42) не є ще одним першим інтегралом рівняння руху, бо площа сектора, утвореного дугою кривої другого

порядку (крім кола) не виражається скінченним чином через координати його вершин. Як відомо, І.Кеплер встановив три закони планетних рухів, але третій закон за самим його змістом має місце лише у випадку періодичного руху і буде розглянутий в пунктах 2.2.1 та 2.2.3.

2.1.4. Кеплерівські елементи орбіти. Елементи орбіти $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, e, p, \tau$ можуть бути поділені на три групи. Перша (векторні елементи) визначає положення площини орбіти в просторі та орієнтацію орбіти в цій площині. Друга група (e, p) визначає форму та розмір орбіти. До третьої групи входить один елемент τ , що визначає рух матеріальної точки за орбітою і тому зветься *динамічним* елементом. Але серед дев'яти елементів матриці спрямовуючих косинусів, що її утворюють векторні елементи, лише три незалежних, бо вони зв'язані шістьма співвідношеннями ортонормованості. Тому більш “економним” способом задання положення орбіти було б задання трьох кутів Ейлера, що визначатимуть положення орбітальної системи координат відносно вихідної координатної системи.

Ці три кути вводяться таким чином (див. рис. 2.5). В загальному випадку площина орбіти перетинає основну координатну площину xu по певній прямій, на якій лежать і точки перетину самої орбіти з площиною xu . Ці точки мають назву *вузлів орбіти*, а сама лінія перетину – це *лінія вузлів*. Та точка перетину, в якій точка m в процесі свого руху змінює знак апікати з від'ємного на додатний, дістала назву *висхідного вузла* і позначається буквою Ω , а точка, в якій знак змінюється з “+” на “–” – це *нисхідний вузол*, він позначається тією ж буквою, але перегорнутою. Походження цих позначень пов'язане з давньогрецьким позначенням сузір'я Терезів, в якому в ті часі знаходилася точка весняного рівнодення, що є висхідним вузлом орбіти Сонця в його річному русі навколо Землі. Першим кутом Ейлера є кут між додатним напрямком осі x вихідної системи координат і напрямком на висхідний вузол орбіти. Цей кут також позначається буквою Ω і має назву *довготи висхідного вузла* (або просто *довготи вузла*). Кут між напрямком на висхідний вузол і напрямком на перицентр орбіти має назву *перицентральної відстані* і позначається буквою ω . Третім кутом Ейлера є кут між координатною площиною xu і площиною орбіти (або, що теж саме, між їх нормалями – осями z і ζ), він має назву *нахилення орбіти*.

Довгота вузла відлічується від осі x в напрямку осі y , перицентрова відстань від лінії вузлів в напрямку руху точки m . Ці кути можуть приймати значення від 0° до 360° . Нахилення орбіти лежить в межах від 0° до 180° . Воно менше від 90° , якщо проекція точки m на площину xu рухається в першій чверті в напрямку від осі x до осі y , і більше від 90° , якщо цей рух відбувається в протилежному напрямку. В першому випадку рух зветься *прямим*, в другому – *зворотним*.

Вище ми визначили величини Ω та ω як центральні кути між певними напрямками, а вузли орбіти як точки перетину лінії вузлів із самою орбітою.

Але інколи корисно під довготою вузла і перицентровою відстанню розуміти відповідні дуги на небесній сфері, тоді вузли – це точки перетину лінії вузлів з цією небесною сферою. Про що саме йдеться в кожному конкретному випадку, як правило, видно з контексту.

Шість незалежних величин $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ повністю і однозначно визначають рух точки в задачі двох тіл. Вони дістали назву *кеплерівських елементів орбіти*. Цей набір елементів придатний для будь-якої криволінійної орбіти. В окремих випадках він може бути модифікований певним чином. Так, замість параметра орбіти p можна ввести велику піввісь еліптичної орбіти a .

Щоб знайти загальний розв'язок задачі двох тіл, виражений через кеплерівські елементи орбіти, зауважимо, що для відстані r і істинної аномалії v це вже зроблене. Тому досить знайти спрямовуючі косинуси радіуса-вектора \vec{r} , які ми позначимо як α, β, γ , тобто покладемо $\vec{r}^0 = \vec{r}/r \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$. Щоб знайти ці спрямовуючі косинуси, розглянемо проекцію орбіти на небесну сферу (рис. 2.6). Тоді сторони в сферичному трикутнику $x\Omega m$ дорівнюють: $x\Omega = \Omega, \Omega m = \omega + v = u$, а кут $x\Omega m = 180 - i$. Звідси

$$\alpha = \cos(xm) = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i. \quad (2.43)$$

Аналогічно одержимо, що

$$\begin{aligned} \beta &= \cos(ym) = \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i, \\ \gamma &= \cos(zm) = \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Тепер можна записати, що координати точки m у вихідній системі координат ϵ :

$$\begin{aligned} x &= r\alpha = r(\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i), \\ y &= r\beta = r(\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i), \\ z &= r\gamma = r \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Формули (2.26), (2.36) та (2.45) і дають загальний розв'язок задачі двох тіл в кеплерівських елементах. Зазначимо при цьому, що величина u – це кутова відстань між лінією вузлів і поточним радіусом-вектором точки m , вона має назву *аргументу широти*.

За визначенням ортів \vec{P} та \vec{Q} вони дорівнюють орту \vec{r}/r при значеннях $u = \omega$ та $u = \omega + 90^\circ$ (це, до речі, визначає ще одну назву величини ω – *аргумент перицентру*). Тому формули (2.43) і (2.44) дають такий зв'язок між векторними елементами орбіти і кеплерівськими:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\ P_y &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} P_z &= \sin \omega \sin i, \\ Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Безпосередньо проектуючи вектор \vec{R} на осі x, y, z , одержимо, що

$$\begin{aligned}
 R_x &= \sin \Omega \sin i, \\
 R_y &= -\cos \Omega \sin i, \\
 R_z &= \cos i.
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Тепер загальний розв'язок задачі можна записати ще й таким чином, якщо використати формули (2.37) та (2.38):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \xi + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \eta.
 \tag{2.49}$$

Диференціюючи вирази (2.45) або (2.49) за часом t , можна знайти компоненти вектора швидкості $\dot{\mathbf{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Корисним є також розклад цього вектора на *радіальну* V_r та *нормальну* до радіуса-вектора (тангенціальну) V_n компоненти. Очевидно, що $V_r = \dot{r}$, а $V_n = r\dot{v}$. Диференціюючи (2.26) за часом і враховуючи (2.35) і (2.37), одержимо, що

$$\begin{aligned}
 V_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \\
 V_n &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v), \\
 V &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

2.1.5. Класифікація рухів в задачі двох тіл. Розглянемо детальніше, за яких умов буде мати місце в задачі двох тіл той чи інший тип кеплерівського руху. Інформацію про це можна звести в таблицю (див. табл. 2.1).

Таблиця 2.1.

Типи кеплерівського руху

Тип руху	e	c	λ	h	V, r	$\delta = (r, V)$
Коловий	0	$\neq 0$	0	$-\mu/r$	$V^2 = \mu/r$	90°
Еліптичний	$0 < e < 1$	-"-	$< \mu$	$-\mu/a$	$V^2 < 2\mu/r$	$0 < \delta \leq 90^\circ$
Параболічний	1	-"-	μ	0	$V^2 = 2\mu/r$	-"-
Гіперболічний	> 1	-"-	$> \mu$	μ/a	$V^2 > 2\mu/r$	-"-
Прямолінійний	1	0	довільн.	довільн.	довільн.	0° або 180°

Перший і другий стовпці табл. 2.1. впливають з першого закону Кеплера та теорії кривих другого порядку. Третій стовпець фіксує значення кінетичного моменту в криволінійному і прямолінійному рухах. Четвертий стовпець містить зв'язок між гравітаційною сталою задачі μ і величиною вектора Лапласа λ , що впливає з (2.22) та (2.27). Висновки щодо величини подвоєної повної енергії h , що їх містить п'ятий стовпець, впливають з даних третього та четвертого стовпців і співвідношення (2.22).

Підкреслимо, що в коловому та еліптичному рухах, які є *фінітними*, тобто відбуваються в обмеженій частині простору, повна енергія від'ємна – кінетичної енергії не вистачає для подолання гравітаційної дії притягуючого центру. В *інфінітних* випадках параболічного та гіперболічного рухів повна енергія не менша від нуля, і точка, що рухається, долає силу тяжіння і уходить на нескінченність. З цих обмежень на значення повної енергії та інтегралу енергії (2.16) впливають ті співвідношення між швидкістю точки та відстанню, на якій вона знаходиться в даний момент, що наведені в шостому стовпці табл. 2.1. У випадках колового та прямолінійного рухів значення кута δ впливають з очевидних геометричних міркувань. В інших випадках найбільше значення цей кут має в перицентрі орбіти. До нуля він прямує тоді, коли точка прямує по параболі або гіперболі на нескінченність, а у випадку еліптичного руху це відбувається на кінцях малої осі еліпса тоді, коли вона необмежено зменшується.

Виняткове значення для астрономії та космонавтики мають співвідношення перше та третє шостого стовпця табл. 2.1. Це не що інше як відомі формули для *колової* та *параболічної* швидкостей:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \quad (2.51)$$

Зауважимо, що першу з цих формул можна знайти з елементарних міркувань, якщо дорівняти одне одному гравітаційне та відцентрове прискорення (їх рівність якраз і створює умови невагомості на борту штучного супутника чи орбітальної станції):

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{V^2}{r}, \quad (2.52)$$

звідки знову впливає формула для колової швидкості. Якщо виразити відстань r через радіус центрального тіла R та висоту руху H , а гравітаційну сталу μ через радіус тіла та прискорення сили ваги на його поверхні g , то формули (2.51) перетворюються на такі:

$$V_c = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}. \quad (2.53)$$

Якщо ж тепер покласти висоту $H=0$, то одержимо колову та параболічну швидкості біля поверхні цього небесного тіла, які мають назви *першої* та *другої космічних швидкостей*:

$$V_1 = \sqrt{gR}, \quad V_2 = \sqrt{2gR}. \quad (2.54)$$

Друга космічна швидкість має ще назви швидкості звільнення або швидкості вислизання.

Розглянемо співвідношення між різними типами руху в задачі двох тіл ще з однієї точки зору. Нехай усі можливі початкові умови реалізуються з однаковою імовірністю. Тоді значення λ та e будуть випадковими величинами, що рівномірно розподілені на інтервалі $[0, \infty)$. Поставимо питання: яка імовірність кожного з криволінійних типів кеплерівського руху? З методу

обчислення так званих геометричних імовірностей ясно, що імовірності колового і параболічного рухів дорівнюють 0, бо їм відповідають окремі точки на промені можливих значень ексцентриситету (рис. 2.7). Це приклади подій, які мають нульову імовірність, але можливі.

До обчислення імовірностей еліптичного і гіперболічного рухів можна підійти наступним чином. Припустимо, що довжина відрізка на півосі рис. 2.7., що відповідає гіперболічному рухові, велика, але скінченна і дорівнює l . Тоді відношення імовірностей еліптичного $p(e < 1)$ і гіперболічного $p(e > 1)$ рухів є $1/l$. Якщо тепер спрямувати l до нескінченності і врахувати, що сума імовірностей дорівнює 1, то матимемо, що $p(e < 1) = 0$, а $p(e > 1) = 1$. Але така відповідь не є правильною, хоча б тому, що на числовій осі значень повної енергії h випадки еліптичного і гіперболічного руху займають однакові симетричні промені $h < 0$ та $h > 0$. І помилка тут полягає в тому, що відрізок $(0,1)$ розглядався як скінченна величина, а промінь $(1, \infty)$ як нескінченна. Насправді ж обидва вони утворені нескінченними множинами точок, і треба в якійсь спосіб співставити кількості точок в цих множинах. Якщо зробити перетворення $e \rightarrow 1/e$, то воно співставить точці з відрізка $(0,1)$ одну і тільки одну точку променя $(1, \infty)$ і навпаки. Інакше кажучи, це перетворення встановлює взаємно-однозначну відповідність між точками обох множин. Це означає, що кількість точок в цих множинах треба вважати однаковими. Кажучи мовою теорії множин, ці дві множини мають однакову міру. Тому і імовірності еліптичного і гіперболічного рухів однакові і дорівнюють $p(e < 1) = p(e > 1) = 1/2$.

Поставимо ще і таке питання: які імовірності того, що значення ексцентриситету буде числом раціональним або ірраціональним? Відомо, що з точок числової осі, які відповідають раціональним числам, можна утворити лише відрізок нескінченно малої довжини або, як кажуть, їх множина має нульову міру (хоча їх і нескінченно багато). З цього випливає, що імовірність $p(e_r) = 0$. Відповідно до цього, величина $p(e_{ir}) = 1$. Але з іншого боку, значення ексцентриситету орбіти будь-якого небесного тіла визначається на підставі якихось позиційних вимірювань, що мають обмежену точність. При цьому останнє твердження має загальний принциповий характер. Тому мають сенс лише раціональні значення ексцентриситету (як і будь-якої іншої величини), тобто значення $p(e_r) = 1$, а імовірність $p(e_{ir}) = 0$. Парадокс, якого ми дійшли, має глибоку природу (інші його форми – це відомі апорії Зенона “Ахілес та черепаха” і “Стріла”). Він пов’язаний з двома принципово різними картинами світу. Перша, класична, уявляє, що світ складається з дискретних точкових об’єктів, що обумовлює нескінчену подільність його характеристик, насамперед просторово-часових. В основі другої картини, квантової, лежить уявлення про те, що складові елементи світу водночас мають і дискретні і неперервні властивості (дуалізм “частинка-хвиля”). А для зняття протиріччя цієї картини світу із законом виключеного третього якраз і потрібне співвідношення невизначеностей, яке принципово обмежує точність будь-яких

вимірювань. При цьому не слід думати, що до вимірювання мас та відстаней, з якими має справу небесна механіка, квантове співвідношення невизначеностей не має ніякого відношення. При вимірюванні характеристик руху природних та штучних небесних тіл радіотехнічними засобами квантові шуми обмежують точність вимірювань (хоча, звичайно, не тільки вони).

2.2. Окремі типи кеплерівського руху

Типи рухів в задачі двох тіл можна вишикувати в такій послідовності: основні – еліптичний і гіперболічний, граничні – коловий і параболічний, вироджений – прямолінійний. В такому порядку ми і розглянемо кожен з них.

2.2.1. Еліптичний рух. Цей тип руху має місце тоді, коли сталі перших інтегралів мають такі значення – $c \neq 0$, $0 < \lambda < \mu$, $h < 0$. Для того, щоб завершити розв'язок задачі, треба знайти зв'язок між істинною аномалією та часом в скінченному вигляді, тобто обчислити інтеграл

$$\int_0^v r^2 dv = c(t - \tau). \quad (2.55)$$

Цікавою історичною обставиною є те, що заміну змінних, за допомогою якої цей інтеграл обчислюється дуже легко, знайшов І.Кеплер тоді, коли диференціального та інтегрального обчислення ще не існувало, знайшов геометричним шляхом. Якщо провести перпендикуляр до великої осі еліптичної орбіти через поточне положення точки, що рухається за цією орбітою, до перетину з колом, яке побудоване на цій осі як на діаметрі, то величина кута в центрі еліпса між великою віссю і напрямком на цю точку перетину якраз і буде новою змінною інтегрування. Цей кут E (див. рис. 2.8) дістав назву *ексцентричної аномалії*. З розгляду трикутників ΔP_1MP та ΔP_1OP_2 і визначення ексцентриситету (2.31) випливає, що

$$a \cos E = ae + r \cos v. \quad (2.56)$$

За допомогою рівняння еліпсу (2.28) можна одержати, що відношення між координатами точок на еліпсі з півосями a та b і на колі радіусу a при одному і тому ж значенні абсциси:

$$\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b},$$

це за допомогою (2.31) дасть, що

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (2.57)$$

За формулами (2.56) та (2.57) тепер легко знайти орбітальні координати:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = a(\cos E - e), \\ \eta &= r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{aligned} \quad (2.56)$$

а, добуваючи квадратний корінь із суми їх квадратів, одержимо, що радіус

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.59)$$

Тепер з (2.56) можна знайти, що

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (2.60)$$

а з (2.57), що

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (2.61)$$

Знаходячи величину $\sin v / (1 + \cos v)$, яка дорівнює $\operatorname{tg}(v/2)$, знайдемо зв'язок між істинною та ексцентричною аномаліями в такому вигляді:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.62)$$

Ця формула зручна тим, що однозначно зв'язує чверті, в яких лежать кути v та E . Нарешті, диференціювання (2.61) дасть за допомогою (2.60), що

$$dv = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE. \quad (2.63)$$

Підставляючи (2.59) та (2.63) в (2.55), знаходимо за допомогою (2.32):

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau) \quad (2.64)$$

або

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (2.65)$$

де $n = \sqrt{\mu} / a^{3/2}$. Ми одержали славнозвісне *рівняння Кеплера*, яке і завершує розв'язок задачі двох тіл у випадку еліптичного руху. Якщо позначити:

$$M = n(t - \tau), \quad (2.66)$$

то його більш компактна форма буде така:

$$E - e \sin E = M. \quad (2.67)$$

Величині M , яку назвали *середньою аномалією*, можна надати такий зміст. Якщо уявити собі точку, яка рухається рівномірно по колу радіуса a і проходить точки перицентру і апоцентру одночасно з матеріальною точкою m , то її положення і буде визначатися кутом M , що відраховується від напрямку на перицентр і має вершину в центрі еліпса. Величина n є середньою кутовою швидкістю руху за еліптичною орбітою і має в астрономії назву *середнього руху*.

Тепер можна розглянути і третій закон Кеплера. Якщо дорівняти різницю $t - \tau$ періоду обертання матеріальної точки за еліптичною орбітою T , матимемо, що

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{f(M + m)}}. \quad (2.68)$$

Це і є *третій закон Кеплера*, але записаний в менш поширеній формі. Він зв'язує між собою період і велику піввісь еліпса, за яким обертаються одна відносно другої матеріальні точки з масами M та m . Саме в такому вигляді цей закон застосовується для визначення суми мас в подвійних зоряних системах. Для двох точок з масами m_1 та m_2 , що обертаються навколо одного і того ж притягуючого центру з масою M , з (2.68) матимемо, що

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M + m_2}{M + m_1} \cdot \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2.69)$$

Маси тіл Сонячної системи вельми малі в порівнянні з масою Сонця. З одного боку, це і дало І.Кеплеру змогу знайти даний закон в його спрощеному вигляді:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2.70)$$

З другого боку, модифікована форма цього закону, знайдена І.Ньютоном у вигляді (2.69), практично не придатна для визначення мас тіл Сонячної системи. Для цього закон Кеплера застосовується до ситуації, коли навколо центрального тіла (Сонця) з масою M обертається тіло з масою m_p (планета), що має супутника з масою m_s . Тоді застосування третього закону Кеплера до пари “Сонце-планета” і до пари “планета-супутник” дає:

$$\frac{T_p^2}{T_s^2} = \frac{m_p + m_s}{M + m_p} \cdot \frac{a_p^3}{a_s^3} \cong \frac{m_p}{M} \frac{a_p^3}{a_s^3}, \quad (2.71)$$

бо $M \gg m_p$, а $m_p \gg m_s$.

Треба підкреслити надзвичайно велике значення третього закону Кеплера для всієї астрономії – це єдиний прямий засіб визначення мас небесних тіл. Всі інші – або емпіричні співвідношення, врешті-решт засновані на даних, одержаних за допомогою цього третього закону, або лише оцінки за порядком величини, засновані на оцінках розміру та густини.

Підставляючи вирази для орбітальних координат (2.58) в загальні формули (2.49), матимемо для координат точки в еліптичному русі у вихідній системі координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (\cos E - e) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \right], \quad (2.72)$$

а для компонент швидкості після диференціювання (2.72):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \left[- \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \sin E + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \right]. \quad (2.73)$$

Модуль швидкості в еліптичному русі визначається із закону збереження енергії з урахуванням того, що стала $h = -\mu/a$,:

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.74)$$

або з урахуванням (2.59)

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (2.75)$$

Як вже зазначалося, можна одні елементи орбіти замінити на інші. Для еліптичного руху насамперед варто замінити параметр орбіти на велику

піввісь, але доцільним виявляються і ще деякі такі заміни. Перицентрова відстань замінюється на *довготу перицентру*

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (2.76)$$

момент проходження через перицентр – на значення середньої аномалії M_0 в момент часу t_0 (*середня аномалія в початкову епоху*), а сама величина M_0 , в свою чергу, замінюється на *середню довготу в початкову епоху*

$$\varepsilon = \pi + M_0 = \Omega + \omega + M_0. \quad (2.77)$$

Звичайно, позначення π і ε не дуже вдалі з точки зору позначень, прийнятих в сучасній математиці, але вони давно вже стали загально прийнятими в небесній механіці. Сенс же введення цих елементів полягає в наступному. Кути π та ε є ломаними, тобто їх частини лежать в різних площинах, але зате вони разом з довготою вузла Ω відлічуються від одного і того ж основного напрямку – напрямку координатної осі x . Крім того велику піввісь можна замінити на середній рух n , а ексцентриситет e – на *кут ексцентриситету* $\varphi = \arcsin e$. Досить поширеним, зокрема в теоріях руху планет, є такий набір елементів – $\Omega, \pi, i, e, a, \varepsilon$, який має назву *еліптичних кеплерівських елементів*.

Елементи орбіт великих і деяких малих планет наведені в табл. 2.2 та 2.3. Розгляд табл. 2.2. показує, що значення нахилень та ексцентриситетів досить малі, здебільшого менше 4° та 0.05 відповідно. Це разом з певними значеннями великих півосей визначає основні характерні риси будови Сонячної системи. З табл. 2.3 видно, що орбіти малих планет також мають не дуже великі значення нахилень та ексцентриситетів, хоча їх характерні значення дещо більше, ніж у великих планет. Втім зустрічаються і малі планети з досить великими значеннями нахилень та ексцентриситетів. Малі планети з великими півосями біля 2–4 а.о. (що рухаються між Марсом та Юпітером) утворюють *головний пояс малих планет* або астероїдів. Кількість астероїдів головного поясу, для яких визначені орбіти, завдяки новим засобам спостережень різко зростає. На початок 2003 р. вона перевищує 30 тис. Досить давно відомі малі планети, які мають такі орбіти, що можливе їх більш-менш тісне зближення із Землею. Останнім часом кількість знайдених таких об'єктів також швидко збільшується, і на початок 2003 р. їх вже відомо біля 2 тис. *Астероїдами, що зближуються із Землею* (АЗЗ), вважаються такі, що найменша відстань між їх орбітами і орбітою Землі не перевищує 30 млн. км. При цьому за рахунок зміни руху цих астероїдів під збурюючим впливом великих планет є певна імовірність їх зіткнення із Землею. Це спричиняє до вивчення проблеми *астероїдної небезпеки*. Нарешті, нещодавно відкрита значна кількість (біля 400) астероїдних тіл, великі півосі орбіт яких перевищують розміри орбіт Нептуна і Плутона. Вони утворюють *зовнішній пояс астероїдів* або *пояс Койпера*. Орбіти певної кількості малих планет розташовані між орбітами Юпітера і Нептуна.

Формули (2.46), (2.47), (2.66) та (2.72) і рівняння Кеплера (2.67) лежать в основі обчислення ефемерид небесних тіл, що рухаються за еліптичними

орбітами. *Ефемеридами* в астрономії називають значення координат небесних тіл в певні моменти часу, обчислені за відомими елементами орбіт. Якщо ефемериди мають вигляд таблиць с постійним кроком за часом, то цей крок обирається таким чином, щоб координати на потрібний довільний момент часу можна було знайти лінійним або квадратичним інтерполюванням. Повний алгоритм обчислення ефемерид включає і ряд технічних з точки зору небесної механіки етапів – перехід від стандартного (зараз 2000.0) рівнодення до потрібного, перехід від екліптичних векторних елементів орбіти до екваторіальних, перехід від геліоцентричних координат до геоцентричних (здебільшого екваторіальних) тощо. Як правило, ефемериди включають і видиму зоряну величину об’єкту.

Звичайно, в своїй практичній роботі астрономи беруть потрібні їм ефемериди з тих чи інших щорічних видань, де даються обчислені заздалегідь ефемериди різних небесних тіл. Це насамперед “Астрономічний щорічник Російської академії наук” (колишній “Астрономічний щорічник СРСР”) та “The Astronomical almanac”, що видається в США. В основу обчислень ефемерид Сонця, Місяця і великих планет в них покладена сучасна теорія руху планет і Місяця DE2000/LE2000 [47]. В щорічнику “Ефемериди малих планет” наводяться елементи орбіт занумерованих малих планет та ефемериди тих з них, що мають протистояння в поточному році. В скороченому вигляді і з меншою точністю ефемериди Сонця, великих планет і Місяця публікуються в “Астрономічних календарях”. В Україні такі календарі видають Головна Астрономічна обсерваторія НАНУ в Києві та Астрономічна обсерваторія Одеського університету. Але кожен астроном при необхідності повинен вміти обчислити потрібні йому ефемериди. Останнім часом цю задачу спрощують машинні каталоги елементів орбіт та відповідні програми обчислень ефемерид для персональних комп’ютерів. Взагалі зараз проходить процес переходу даних так званої *ефемеридної астрономії* з паперових носіїв інформації на електронні.

Таблиця 2.2

Елементи орбіт великих планет

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Меркурій	0.387	0.240	116	4.09°	7.00°	0.206	48°	77°	252°
Венера	0.723	0.615	584	1.60	3.40	0.007	77	131	182
Земля	1.000	1.000	–	0.99	0.00	0.017	–	103	100
Марс	1.524	1.881	780	0.524	1.85	0.093	49	336	335
Юпітер	5.203	11.86	399	0.083	1.30	0.048	100	14	32
Сатурн	9.555	29.54	378	0.034	2.48	0.056	113	93	50
Уран	19.218	84.25	370	0.012	0.76	0.047	74	173	314
Нептун	30.110	165.2	368	0.006	1.77	0.009	132	48	304
Плутон	39.53	250.1	367	0.004	17.50	0.250	110	223	130

a – велика піввісь, а.о.; T – сідеричний період, роки; S – синодичний період, доби; n – середній рух, за добу в градусах; e – ексцентриситет; i – нахилення до екліптики; Ω – довгота вузла; π – довгота перигелію; M_0 – середня довгота в епоху 2000 січень 1.5

Таблиця 2.3

Елементи орбіт деяких малих планет

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
1 Церера	2.78	4.60	467	0.214	10.6°	0.077	81°	152°	8°
2 Паллада	2.77	4.61	467	0.214	34.8	0.235	173	123	355
3 Юнона	2.67	4.36	474	0.226	13.0	0.257	171	57	243
4 Веста	2.36	3.63	504	0.272	7.1	0.090	104	254	341
5 Астрея	2.57	4.13	482	0.239	5.4	0.192	142	137	43
6 Геба	2.42	3.78	497	0.261	14.8	0.202	139	17	50
153 Гільда	3.98	7.95	419	0.124	7.8	0.143	229	271	14
433 Ерос	1.46	1.76	846	0.560	10.8	0.223	304	22	57
944 Гідальго	5.84	14.08	393	0.070	42.5	0.658	22	79	223
1566 Ікар	1.08	1.12	3409	0.881	22.9	0.827	88	119	105
20000 Варуна	43.19	283.82	366	0.003	17.2	0.051	273	10	87
28978 Іксион	39.43	247.61	367	0.004	19.8	0.241	71	11	262
1998 BU	33.52	194.03	367	0.005	13.8	0.382	132	55	48

a – велика піввісь, а.о.; T – сідеричний період, роки; S – синодичний період, доби; n – середній рух, за добу в градусах; e – ексцентриситет; i – нахилення до екліптики; Ω – довгота вузла; π – довгота перигелію; M_0 – середня довгота в епоху 2000 січень 1.5

2.2.2. Гіперболічний рух. Умови реалізації цього руху – $c \neq 0, \lambda > \mu, h > 0$. Незважаючи на якісну різницю між еліптичним і гіперболічним типами рухів (перший – фінітний, а другий – інфінітний) і зовнішню несхожість форми орбіт, між цими двома типами рухів є глибока аналогія. Найповніше вона виявляється, якщо для опису гіперболічного руху скористатися гіперболічними функціями. Полягає ця аналогія в тому, що всі формули для гіперболічного руху можна формально отримати, якщо у відповідних формулах для еліптичного руху зробити такі заміни:

$$\sin E \rightarrow shH, \cos E \rightarrow chH, tgE \rightarrow thH, \quad (2.78)$$

де H – безрозмірна змінна, що змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Крім того треба замінити всі різниці на протилежні. У зв'язку з цим поступимо таким чином. Випишемо основні співвідношення для еліптичного руху (згадати їх ще раз не завадить), і, користуючись вище вказаною аналогією, запишемо відповідні формули для гіперболічного руху.

Зв'язок між істинною аномалією і змінними E та H :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{th} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}. \quad (2.79)$$

Рівняння Кеплера та його гіперболічний аналог:

$$E - e \sin E = n(t - \tau) \qquad e \cdot \operatorname{ch} H - H = n(t - \tau). \quad (2.80)$$

Орбітальні координати:

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e) & \xi &= a(e - \operatorname{ch} H) \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sin E & \eta &= a\sqrt{e^2-1} \operatorname{sh} H \\ r &= a(1 - e \cos E) & r &= a(e \operatorname{ch} H - 1). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Швидкість руху:

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} \qquad V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{e \cdot \operatorname{ch} H + 1}{e \cdot \operatorname{ch} H - 1}. \quad (2.82)$$

Формули для координат у вихідній системі координат в гіперболічному русі згідно з (2.49) та (2.81) матимуть такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (e - \operatorname{ch} H) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \sqrt{e^2 - 1} \cdot \operatorname{sh} H \right]. \quad (2.83)$$

Для строгого виведення формул (2.79)–(2.83) треба в інтегралі (2.36) зробити заміну змінних (2.79) з урахуванням (2.33). Зауважимо також, що саме існування наведеної аналогії і дало підставу назвати гіперболічні функції гіперболічними, хоча на перший погляд вони нічого спільного з гіперболою не мають. Формально перехід в (2.79)–(2.83) від формул ліворуч до формул праворуч можна здійснити, якщо вважати, що від'ємним значенням великої півосі a відповідає уявний еліпс з уявною малою півоссю ib (тоді рівняння еліпса (2.28) переходить в рівняння гіперболи) і підставити вказані значення півосей в формули для еліптичного руху.

Для обчислення інтегралу (2.36) можна також зробити заміну

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2} \quad (2.84)$$

і знайти всі характеристики гіперболічного руху як функції змінної F , але при цьому повної формальної аналогії з випадком еліптичного руху вже не буде.

З (2.82) випливає, що тоді, коли точка, рухаючись по гіперболі, віддаляється у нескінченність, то її швидкість прямує до відмінної від 0 величини:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (2.85)$$

– це так званий *гіперболічний надлишок* швидкості.

Гіперболічний рух має місце тоді, коли метеорне тіло входить в сферу дії Землі або іншої планети з певною відносною швидкістю, при польоті космічного апарата до іншої планети на припланетних ділянках його траєкторії, при більш–менш тісному зближенні зірок. Імовірність такого зближення для

більшості зірок Галактики вельми мала, але в зоряних скупченнях та поблизу центру Галактики це може бути вже не так. Кінцевим ефектом такого зближення є тільки зміна напрямку відносного руху зірок. Ця зміна напрямку дорівнює куту між асимптотами гіперболи, зя якою одна зірка огинає іншу. Можна знайти величину цього кута в залежності від гіперболічного надлишку та прицільної відстані (відстані між фокусом гіперболи та її асимптотою, див. задачу 2.16).

Нарешті зупинимось на такому, суто теоретичному, але цікавому питанні. В кожному конкретному випадку гіперболічного руху точка описує лише одну певну гілку гіперболи. Якій же сенс має в задачі двох тіл існування іншої гілки при дії саме сили тяжіння? Відповідь може бути дана така (переконатися в цьому залишаємо читачеві самому) – точка буде рухатись по другій гілці гіперболи, якщо перейти від дійсного часу t до уявного часу it .

2.2.3. Коловий рух. Коловий рух має місце тоді, коли $c \neq 0, \lambda = 0, h < 0$. Формально це частковий випадок еліптичного руху при ексцентриситеті $e = 0$. Але при цьому фіксоване значення приймає не тільки цей елемент орбіти. У коловій орбіті відсутні перицентр і апоцентр, тому втрачає свій сенс перицентрова відстань ω . За точку, від якої можна відраховувати кут, що фіксує положення матеріальної точки на коловій орбіті, може правити висхідний вузол орбіти. В цьому випадку істинна аномалія v співпадає з аргументом широти u . З іншого боку їй тепер дорівнюють і ексцентрична аномалія E і середня аномалія M . Не мають сенсу і векторні елементи орбіти в їх загальному вигляді. Коловий рух задається чотирма елементами орбіти, за які можна взяти радіус орбіти r , довготу вузла Ω , нахилення орбіти i та момент проходження через висхідний вузол τ (або середню аномалію M_0 в початкову епоху t_0). Координати точки на коловій орбіті згідно (2.45) є:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos \Omega \cos M - \sin \Omega \sin M \cos i) \\ y &= r(\sin \Omega \cos M + \cos \Omega \sin M \cos i) \\ z &= r \sin M \sin i, \end{aligned} \quad (2.86)$$

де

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}}. \quad (2.87)$$

З останньої рівності впливає третій закон Кеплера для колового руху та вираз для лінійної швидкості руху:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \quad (2.88)$$

Оскільки завжди діють якісь збурюючі фактори, то в чистому виді коловий рух в природі не реалізується. Але він має велике значення як просте наближення для опису еліптичного руху з достатньо малим ексцентриситетом.

2.2.4. Параболічний рух. Умови існування цього типу руху такі – $c \neq 0, \lambda = \mu, h = 0$. Закон руху (2.36) має тепер наступний вигляд тому, що ексцентриситет $e = 1$,:

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t - \tau). \quad (2.89)$$

Перейдемо від $\cos v$ до $tg(v/2)$ за відомою формулою

$$\cos v = \frac{1 - tg^2 \frac{v}{2}}{1 + tg^2 \frac{v}{2}} \quad (2.90)$$

і одержимо, що

$$\int_0^v \left(1 + tg^2 \frac{v}{2}\right) \sec^2 \frac{v}{2} dv = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t - \tau). \quad (2.91)$$

Зробивши заміну $\sigma = tg(v/2)$, а також замінивши параметр орбіти p на $2q$, де q – відстань від вершини параболи (періцентру орбіти) до її фокуса, матимемо після інтегрування:

$$\sigma^3 + 3\sigma - 3n(t - \tau) = 0, \quad (2.92)$$

де

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2}} q^{-3/2}. \quad (2.93)$$

Ліва частина кубічного рівняння (*рівняння Баркера*) є монотонною функцією аргументу σ , бо її похідна, що дорівнює $3(\sigma^2 + 1)$, всюди додатна. А коли значення $\sigma \rightarrow \pm\infty$, то і ця функція також прямує до $\pm\infty$. Тому рівняння (2.92) завжди має тільки один дійсний корінь. Винайшовши цей корінь тим чи іншим наближеним чисельним способом, візьмемо його за нову незалежну змінну. Підставляючи його в рівняння орбіти (2.26), одержуємо, що

$$r = q(1 + \sigma^2). \quad (2.94)$$

Згадуючи формулу

$$\sin v = \frac{2tg \frac{v}{2}}{1 + tg^2 \frac{v}{2}} \quad (2.95)$$

знаходимо орбітальні координати:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = q(1 - \sigma^2) \\ \eta &= r \sin v = 2q\sigma. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Нарешті, перетворення (2.49) дає:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (1 - \sigma^2) + 2 \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sigma \right]. \quad (2.97)$$

Ще раз нагадаємо, що в параболічному русі модуль швидкості визначається за формулою

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}, \quad (2.98)$$

з якої видно, що, коли точка віддаляється за параболою у нескінченність, її швидкість прямує до нуля.

Параболічний рух відділяє еліптичний рух від гіперболічного і через наявність збурень також насправді не має місця. Але він використовується при розгляді еліптичного та гіперболічного рухів при значеннях ексцентриситету достатньо близьких до 1, зокрема при вивченні руху комет (див. задачу (2.17)).

2.2.5. Прямолінійний рух. Цей рух має місце тоді, коли кінетичний момент $c=0$, тоді в силу (2.22) $\lambda = \mu$, а повна енергія h може мати довільне значення. Рівняння орбіти (2.26) вже не придатне. Але записати рівняння прямої, що буде траєкторією руху, можна таким чином. Ця пряма повинна проходити через початок координат, бо $\vec{r} \uparrow \dot{\vec{r}}$, тобто через точку $(0,0,0)$, і мати за спрямовуючий вектор початковий вектор \vec{r}_0 . Тому векторне рівняння траєкторії $\vec{r}_0 \times \vec{r} = 0$, а скалярні рівняння:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \quad (2.99)$$

Закон руху по цій траєкторії можна одержати, проінтегрувавши інтеграл енергії, бо в даному випадку $V^2 = \dot{r}^2$. Інтегрування спроститься, якщо зробити таку заміну змінних: $\sqrt{|h|}dt = \sqrt{\mu/a}d\eta = rd\eta$, де $a = \mu/|h|$, η – нова безрозмірна змінна. Матимемо, що

$$\eta = \int \frac{dr}{\sqrt{2ar + \text{sign}(h) \cdot r^2}}. \quad (2.100)$$

Обчислюючи цей інтеграл, знаходимо:

$$\begin{aligned} a(1 - \cos \eta), \quad h < 0 \\ r = \frac{a}{2} \eta^2, \quad h = 0 \\ a(ch\eta - 1), \quad h > 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

а час t зв'язаний з аргументом η таким чином:

$$\begin{aligned} \eta - \sin \eta \quad h < 0 \\ \frac{\eta^3}{6} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0), \quad h = 0 \\ sh\eta - \eta \quad h > 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Бачимо, що змінна η є граничним значенням ексцентричної аномалії E та її гіперболічного аналога H , якщо зробити граничний перехід $e \rightarrow 1$ при сталому значенні величини a . При цьому перше і третє співвідношення в (2.102) є граничними формами рівняння Кеплера та його гіперболічного аналога. Стала a є граничним значенням великої півосі еліпса або дійсної півосі гіперболи і при $h < 0$ дорівнює максимально можливому значенню r . Треба тільки зауважити, що вираз (2.101) одержаний при початковій умові $r_0 = 0$, в загальному випадку треба до правих частин (2.101) додати величину r_0 .

Розв'язок (2.101)–(2.102) може описувати не тільки рух однієї матеріальної точки в ньютонівському полі тяжіння, а і описувати еволюцію сферично-симетричної пилової хмари. Таку ж математичну форму має і відомий розв'язок рівнянь Ейнштейна загальної теорії відносності, одержане О.О. Фрідманом для однорідного та ізотропного світу, заповненого пилоподібною речовиною (треба тільки замінити величину $\sqrt{\mu/a}$ на швидкість світла c). Цей факт є наслідком того, що класична механіка є граничним випадком ЗТВ, але він не означає, що еволюцію Всесвіту можна описати в рамках ньютонівської механіки, бо розв'язок (2.101)–(2.102) в ЗТВ має зовсім інший фізичний зміст (в класичному випадку йдеться про рух окремих точок в просторі, а в ЗТВ – про зміну метрики (зокрема розширення) самого простору).

Задачі до глави II.

2.1. Одержати диференціальне рівняння орбіти в задачі двох тіл

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = \frac{1}{p},$$

де $u = 1/r$.

2.2. Знайти фокальний параметр та ексцентриситет кеплерівської орбіти, якщо відомі початковий радіус r_0 , початкова швидкість V_0 та кут між ними α_0 .

2.3. Знайти кеплерівські елементи орбіти Ω, ω, i, τ за сталими перших інтегралів.

2.4. Який кут утворює вектор швидкості з радіусом-вектором в точці із заданим значенням r кеплерівської орбіти з великою півоссю a і ексцентриситетом e .

2.5. Знайти радіус r і швидкість V за початковими значеннями r_0, V_0 та кута δ_0 між відповідними векторами в момент, коли цей кут дорівнює δ .

2.6. Знайти середнє арифметичне, середнє геометричне і середнє гармонічне найбільшого та найменшого значень відстані r для точки, що рухається за еліптичною орбітою.

2.7. Довести “правило важеля” – $r_a V_a = r_\pi V_\pi$, де r_a, r_π, V_a, V_π – відстані та швидкості руху на еліптичній орбіті в апоцентрі та перицентрі.

2.8. Знайти початкову швидкість ракети V_0 , необхідну для її підняття на висоту H над поверхнею планети радіуса R , якщо на поверхні планети прискорення сили ваги g . Записати наближені формули для випадків: а) $H \ll R$ та б) $H \gg R$.

2.9. Супутник рухається за орбітою з ексцентриситетом e . Яка буде його швидкість в точці з істинною аномалією ν , якщо колова швидкість в цій точці дорівнює V_0 .

2.10. Довести, що період обертання супутника, що рухається безпосередньо над поверхнею планети, залежить тільки від середньої густини планети.

2.11. Довести, що геліоцентрична орбіта Місяця всюди увігнута крива. Вважати, що геоцентричний рух Місяця і геліоцентричний рух Землі відбувається за компланарними коловими орбітами.

- 2.12. Довести, що геоцентричний рух будь-якої планети має епіциклічний характер, тобто повинні мати місце назадній рух і точки стояння.
- 2.13. Записати рівняння руху в задачі двох тіл в комплексній формі. Довести, що добуток швидкостей в двох точках еліптичної орбіти, симетричних відносно її центру, не залежить від положення цих точок на орбіті.
- 2.14. Знайти годограф швидкості в еліптичному кеплерівському русі.
- 2.15. Знайти першу і другу космічні швидкості в полі з потенціалом (1.21).
- 2.16. Знайти кут між асимптотами гіперболи, за якою огинає притягуючий центр матеріальна точка, яка має на нескінченності швидкість V_∞ та прицільну відстань b .
- 2.17. Комета рухається за еліптичною орбітою з дуже значною великою піввіссю a і близьким до 1 ексцентриситетом. Цей рух при наближенні комети до Сонця, починаючи з точки, в якій радіус-вектор комети перпендикулярний до великої осі її орбіти, розглядається як такий, що відбувається за параболічною орбітою. Які похибки виникають при обчисленні найменшої відстані комети від Сонця та її швидкості в цій точці?

Глава III. ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ КЕПЛЕРІВСЬКОГО РУХУ

У цій главі ми розглянемо деякі додаткові питання теорії незбуреного кеплерівського руху – ряди еліптичного руху, крайову задачу і проблему визначення орбіт, інтегрування задачі двох тіл методом Гамільтона–Якобі, а також ряд узагальнень класичної задачі двох тіл – задачу про рух під дією центральної сили, релятивістську задачу двох тіл та задачу двох тіл у просторі довільного числа вимірів.

3.1. Ряди еліптичного руху

Назва цього підрозділу є також даниною тих традиційних особливостей термінології в небесній механіці, про які вже йшлося раніше. Звичайно, ми займемось розкладанням у функціональні ряди не самого еліптичного руху, а його кількісних характеристик і насамперед ексцентричної аномалії як розв’язку рівняння Кеплера. Постановка такої задачі пов’язана з тим, що рівняння Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (3.1)$$

є трансцендентним рівнянням, і ексцентрична аномалія не може бути знайдена як елементарна функція аргументів M та e .

Зауважимо, що досить поширені випадки (великі і більшість малих планет, природні і, як правило, штучні супутники планет), коли ексцентриситет орбіти досить малий – $e \ll 1$. У цих випадках ефективним засобом розв’язку рівняння Кеплера є його чисельний розв’язок методом ітерацій. При цьому наступне наближення відшукується за попереднім за формулою:

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M. \quad (3.2)$$

За початкове наближення E_0 береться значення середньої аномалії M . Модуль похідної від правої частини (3.2) $|e \cos E| \leq e < 1$, тобто достатня умова збіжності ітераційного процесу виконується, а малість e робить цей процес збіжності дуже швидким. При цьому метод ітерацій для рівняння Кеплера може бути реалізований навіть на непрограмованих калькуляторах без проміжних записів. Для зменшення кількості ітерацій можна брати за початкове наближення наближений розв’язок рівняння Кеплера за відповідними таблицями (див., наприклад, [37]). Проте в цілому ряді прикладних, а особливо теоретичних задач бажано мати розв’язок рівняння Кеплера нехай у наближеній, але аналітичній формі. З огляду на це наявність малого параметра $e \ll 1$ наводить на думку про пошук такого розв’язку у вигляді ряду за степенями ексцентриситету e . При цьому коефіцієнти такого ряду будуть функціями середньої аномалії M . Водночас ексцентрична аномалія E – це періодична функція середньої аномалії M . Ця обставина дозволяє ставити задачу про розкладання величини E в ряд Фур’є за середньою аномалією (відповідно коефіцієнти Фур’є будуть функціями ексцентриситету e).

3.1.1. Розв'язання рівняння Кеплера. Для того, щоб мати розв'язок рівняння Кеплера у вигляді степеневого ряду

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^k, \quad (3.3)$$

треба знайти коефіцієнти цього ряду E_k , які, як відомо, визначаються таким чином:

$$E_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{dE(e)}{de} \right|_{e=0}. \quad (3.4)$$

Однак обчислення похідної довільного порядку, що стоїть у виразі (3.4), стикається із значними труднощами у зв'язку з тим, що ексцентрична аномалія E як функція ексцентриситету e задається рівнянням Кеплера як неявна функція. Подолати ці труднощі допомагає *теорема Лагранжа* з теорії аналітичних функцій. Ця теорема формулюється так:

Якщо в рівнянні

$$z - \alpha \cdot f(z) = a \quad (3.5)$$

сталі α та a мають такі значення, що в певній області площини z виконується умова

$$\left| \frac{\alpha \cdot f(z)}{z - a} \right| < 1, \quad (3.6)$$

то корінь рівняння (3.5) існує і дорівнює

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [(f(a))^k]. \quad (3.7)$$

Ряд Лагранжа (3.7) збігається абсолютно для будь-якого a з області, в якій виконується умова (3.6). Доведення теореми Лагранжа можна зробити методом повної математичної індукції (див. задачу 3.3, а також [30]). Теорема Лагранжа має *узагальнення*, яке дозволяє знайти степеневий ряд для будь-якої аналітичної функції $\Phi(z)$, що є коренем рівняння (3.5), а саме:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) \cdot (f(a))^k]. \quad (3.8)$$

Це дозволяє знайти розклад в ряд Маклорена не тільки ексцентричної аномалії, а і інших характеристик еліптичного руху, що залежать від неї. Основна проблема полягає тепер в тому, щоб знайти радіус збіжності цих рядів з умови

$$|e| < \left| \frac{E - M}{\sin E} \right|, \quad (3.9)$$

яка впливає в нашому випадку із загальної умови (3.6).

Умова (3.9) визначає область, в якій функція $E(e)$, як розв'язок рівняння Кеплера (3.1), буде аналітичною функцією, а відтак буде існувати похідна dE/de при всіх значеннях E і e з цієї області. Обчислюючи цю похідну з рівняння Кеплера, одержимо:

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (3.10)$$

Звідси для радіуса кола збіжності рядів (3.7) і (3.8) матимемо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} E - e \sin E &= M \\ 1 - e \cos E &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При цьому нам треба знайти найменший за модулем корінь e цієї системи. З другого рівняння маємо, що $e = 1/\cos E$. Відповідно,

$$|e|^2 = 1/(\cos E \cdot \cos \bar{E}), \quad (3.12)$$

де \bar{E} означає комплексно спряжену величину, і враховане те, що косинус є парною функцією. Таким чином, нам треба знайти максимум функції $\cos E \cdot \cos \bar{E}$. Її похідна дорівнює

$$-(\sin E \cos \bar{E} + \cos E \sin \bar{E}) = -\sin(E + \bar{E}). \quad (3.13)$$

Якщо покласти $E = \rho + i\sigma$, похідна буде $-\sin 2\rho$, а найменший корінь рівняння $\sin 2\rho = 0$, відмінний від нуля, є $\pi/2$. Підставимо тепер $E = \pi/2 + i\sigma$ у рівняння Кеплера:

$$\frac{\pi}{2} + i\sigma - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)} = M. \quad (3.14)$$

Враховуючи формули приведення та зв'язок між тригонометричними функціями уявного аргументу і гіперболічними функціями дійсного аргументу, одержимо:

$$\frac{\pi}{2} + i\sigma + \frac{\cos i\sigma}{\sin i\sigma} = \frac{\pi}{2} + i\left(\sigma - \frac{ch\sigma}{sh\sigma}\right) = M. \quad (3.15)$$

Оскільки нас цікавлять лише дійсні значення середньої аномалії M , то для визначення коефіцієнта σ маємо рівняння:

$$\sigma \cdot sh\sigma - ch\sigma = 0. \quad (3.16)$$

Неважко переконатися, що корінь цього рівняння лежить між 1 та 2. Більш точне його значення $\sigma_0 = 1.1997$. Тепер остаточно знаходимо, що радіус збіжності рядів Лагранжа

$$e_0 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma_0\right)} = \frac{1}{sh\sigma} = 0.6627. \quad (3.17)$$

Значення ексцентриситету e_0 має назву *границі Лапласа*, який вперше визначив його, хоча і іншим шляхом. При значеннях ексцентриситету, менших від e_0 , ряди Лагранжа збігаються абсолютно, а при більших значеннях e вони можуть навіть розбігатися, принаймні при певних значеннях середньої аномалії M . При значеннях ексцентриситету, менших від границі Лапласа, але близьких до неї, може значно уповільнюватися швидкість збіжності цих рядів.

Перейдемо до відшукування явного вигляду ряду (3.3). З (3.7) маємо, що

$$E_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (\sin^k M). \quad (3.18)$$

Якщо провести обчислення за формулою (3.18), то одержуватимемо для коефіцієнтів E_k вирази у вигляді поліномів від степенів $\sin M$ та $\cos M$. Але, як відомо, за допомогою тотожності

$$(\cos M + i \sin M)^n = \cos nM + i \sin nM \quad (3.19)$$

можна виразити степені $\sin^n M$ та $\cos^n M$ через синуси та косинуси аргументів, кратних M , тобто kM . Тому коефіцієнти E_k можна розглядати і як тригонометричні многочлени від аргументів, кратних середній аномалії M . Зокрема з (3.18) випливає, що

$$E_0 = M, \quad E_1 = \sin M, \quad E_2 = \frac{1}{2} \sin 2M. \quad (3.20)$$

Відповідно, розв'язок рівняння Кеплера є:

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \dots \quad (3.21)$$

3.1.2. Степеневі ряди еліптичного руху. Щоб одержати ряди для різних характеристик еліптичного руху, треба мати ряди для $\cos E$ та $\sin E$, тобто

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^k, \quad \sin E = \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^k. \quad (3.22)$$

Скориставшись узагальненим рядом Лагранжа (3.8), матимемо, що

$$C_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (-\sin^{k+1} M). \quad (3.23)$$

Обчислюючи перші коефіцієнти C_k , одержимо:

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) + \frac{3}{8} e^2 (\cos 3M - \cos M) + \dots \quad (3.24)$$

Для знаходження коефіцієнтів S_k нема потреби звертатися до ряду (3.8), бо з рівняння Кеплера випливає, що

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^{k-1} - \frac{M}{e}. \quad (3.25)$$

Порівнюючи другий ряд з (3.22) і (3.25), можна переконатися, що коефіцієнти

$$S_k = E_{k+1}. \quad (3.26)$$

Так само будемо діяти і надалі, тобто виражати коефіцієнти наступних рядів через коефіцієнти *основних рядів* E_k та C_k – рядів для самої ексцентричної аномалії та її косинуса. Оскільки коефіцієнти основних рядів є безрозмірними, то і інші величини ми будемо записувати в безрозмірному вигляді. Тоді рівняння орбіти (2.59) буде мати вигляд:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E. \quad (3.27)$$

Якщо записати ряд

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k e^k, \quad (3.28)$$

то, порівнюючи (3.27) і (3.28), матимемо, що

$$R_k = C_{k-1} \quad (k \neq 0), \quad R_0 = 1. \quad (3.29)$$

Безрозмірні орбітальні координати є:

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (3.30)$$

Позначимо степеневі ряди для них таким чином:

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \Xi_k e^k, \quad \frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k e^k. \quad (3.31)$$

Порівнюючи вирази для ξ/a , легко побачити, що

$$\Xi_k = C_k \quad (k \neq 1), \quad \Xi_1 = C_1 - 1. \quad (3.32)$$

Щоб знайти коефіцієнти H_k , треба згадати, що із загального вигляду біноміального ряду для $(1+x)^m$ при $m=1/2$ випливає ряд

$$\sqrt{1-e^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^k, \quad (3.33)$$

де

$$\alpha_0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{2j} = (-1)^j \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}, \quad \alpha_{2j+1} = 0.$$

Перемножуючи абсолютно збіжні ряди (3.22) та (3.33), одержуємо, що

$$H_k = \sum_{s=0}^k \alpha_s S_{k-s} = \sum_{s=0}^k \alpha_s E_{k-s+1}. \quad (3.34)$$

Записуючи ряди для координат у вихідній координатній системі

$$\frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k e^k, \quad \frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k e^k, \quad \frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k e^k \quad (3.35)$$

і порівнюючи їх із співвідношенням (2.46), знаходимо:

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \Xi_k + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot H_k. \quad (3.36)$$

Щоб знайти ряд для безрозмірного квадрата швидкості, запишемо за допомогою (2.65) інтеграл енергії (2.74) у такому вигляді:

$$\left(\frac{V}{na} \right)^2 = 2 \cdot \frac{a}{r} - 1. \quad (3.37)$$

Тепер видно, що треба знайти ряд для оберненої відстані

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{R}_k e^k. \quad (3.38)$$

Диференціюючи рівняння Кеплера за M , матимемо:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r}, \quad (3.39)$$

тому коефіцієнти

$$\tilde{R}_k = \frac{dE_k}{dM}, \quad (3.40)$$

а якщо записати ряд

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(2)} e^k, \quad (3.41)$$

то коефіцієнти цього ряду є такими:

$$V_k^{(2)} = 2\tilde{R}_k \quad (k \neq 0), \quad V_0^{(2)} = 1. \quad (3.42)$$

Нарешті, використовуючи співвідношення

$$\frac{V_n}{na} = \frac{r\dot{v}}{na} = \frac{\sqrt{\mu p}}{nar} = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{1-e^2} \quad (3.43)$$

та

$$\frac{\dot{v}}{n} = \frac{V_n}{nr} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{na} \quad (3.44)$$

і перемножуючи відповідні ряди, а потім інтегруючи добуток за часом, можна одержати ряд для істинної аномалії, який має назву *рівняння центра*,

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k e^k. \quad (3.45)$$

Перші його члени такі:

$$v = M + 2 \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots \quad (3.46)$$

У довіднику [36] можна знайти одержані вище та деякі інші степеневі ряди еліптичного руху з точністю до e^7 включно.

3.1.3. Тригонометричні ряди еліптичного руху. Ступеневі ряди з огляду на область їх збіжності ефективні практично лише при значеннях ексцентриситету $e \ll 1$. Тому виникає потреба у знаходженні рядів, які б збігалися при всіх значеннях ексцентриситету ($0 < e < 1$). Такими рядами є ряди Фур'є за середньою аномалією M , до розгляду яких ми і перейдемо.

Ексцентрична аномалія і залежні від неї інші характеристики еліптичного руху є періодичними функціями середньої аномалії, бо ексцентрична аномалія E входить в усі формули лише під знаком синуса або косинуса. Крім того з рівняння Кеплера та наступних формул для еліптичного руху випливає, що різниця $E - M$ та величини r, ξ, η є або парними, або непарними функціями середньої аномалії. Для парної періодичної функції з періодом 2π ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (3.47)$$

де коефіцієнти Фур'є

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad (3.48)$$

для непарної функції:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (3.49)$$

коефіцієнти Фур'є якої

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (3.50)$$

За теоремою Діріхле наявність скінченних значень інтегралів (3.48) та (3.50) є достатньою умовою збіжності рядів (3.47) і (3.50), однак збіжності, взагалі кажучи, тільки умовної.

Знайдемо насамперед коефіцієнти Фур'є основних рядів – для ексцентричної аномалії та її косинуса.

Коефіцієнти для величини $E - M$ згідно із (3.50) суть

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin kM dM. \quad (3.51)$$

Оскільки рівняння Кеплера задає величину E як неявну функцію аргументу M , а M , навпаки, як явну функцію E , перейдемо в інтегралі (3.51) до змінної інтегрування E . Це зручніше зробити, якщо перед цим проінтегрувати (3.51) за частинами. Тоді

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \left[-(E - M) \cos kM \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos kM (dE - dM) \right] = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - ke \sin E) dE. \quad (3.52)$$

Якщо згадати відому інтегральну формулу для функцій Бесселя

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (k\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad (3.53)$$

то побачимо, що коефіцієнти

$$b_k = \frac{2}{k} J_k(ke), \quad (3.54)$$

а ряд Фур'є для ексцентричної аномалії має вигляд:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM. \quad (3.55)$$

Аналогічно, інтегруючи за частинами вираз для коефіцієнтів Фур'є функції $\cos E$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E \cos kM dM, \quad (3.56)$$

знаходимо, що

$$a_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kE - ke \sin E) \sin EdE. \quad (3.57)$$

Переходячи від добутку синусів до різниці косинусів, знаходимо, знову беручи до уваги (3.53):

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (3.58)$$

Звичайно, що вираз (3.58) не придатний при $k=0$, але в цьому випадку пряме інтегрування (3.56) показує, що $a_0 = -e$. Відповідно,

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos M. \quad (3.59)$$

Тепер можна одержати і інші ряди Фур'є для еліптичного руху. Зокрема,

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\xi}{a} &= -\frac{3}{2}e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Як відомо, функції Бесселя розкладаються в абсолютно збіжні степеневі ряди, а саме:

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}}{k!(k+j)!}. \quad (3.61)$$

Покладаючи $x = ke$, підставимо ряд (3.61) в ряди (3.55), (3.59) та (3.60). Збираючи до купи члени з однаковими степенями ексцентриситету e , одержимо ряди за степенями e , коефіцієнтами яких будуть тригонометричні многочлени від $\sin kM$ та $\cos kM$. І навпаки, збираючи у відповідних степеневих рядах пункту 3.1.2 члени з однаковими значеннями аргументів при синусах і косинусах, можна перетворити ці ряди на ряди Фур'є з коефіцієнтами у вигляді степеневих рядів за аргументом e . Але ці перетворення без порушення збіжності рядів до того ж самого значення їх суми можна робити тільки для абсолютно збіжних рядів, тобто таких рядів, для яких збігається і ряд, зіставлений з модулів їх членів. Якщо ж ряд збігається тільки умовно, тобто його збіжність забезпечується частковою взаємною компенсацією членів з протилежними знаками, то перестановка нескінченного числа членів такого ряду може привести до зміни суми ряду або навіть до одержання ряду, що розбігається. Ці міркування приводять до нового погляду на границю Лапласа e_0 . Вона виявляється межею між областями *абсолютної* і *умовної* збіжності рядів Фур'є еліптичного руху. При значеннях ексцентриситету $e < e_0$ ряди Фур'є збігаються абсолютно, тому і одержані з них ряди за степенями e також збігаються і при тому абсолютно. А при значеннях $e > e_0$ ряди Фур'є також збігаються, але тільки умовно. Тому відповідні ряди за степенями ексцентриситету можуть бути розбіжними, принаймні при певних значеннях середньої аномалії M .

3.2. Крайова задача двох тіл. Визначення орбіт. Задачу двох тіл можна розв'язувати як за початковими, так і за крайовими умовами. Задача знаходження елементів орбіти за початковими умовами (або, як кажуть, *визначення орбіти*) по суті розглянута в попередній главі. З виразів для перших інтегралів знаходяться сталі перших інтегралів. Потім із формул (2.27) та (2.36) знаходяться елементи e, p і τ . Щодо винайдення елементів Ω, ω, i , дивись

задачу 2.2. Більш вичерпно ця задача розглянута в книгах Г. М. Дубошина [15] і М. Ф. Субботіна [37].

Що ж до крайової задачі, то треба насамперед згадати, що астрометричні спостереження дають лише напрямок на небесне тіло у вигляді двох його кутових координат. Тому для визначення шести елементів орбіти потрібно щонайменше три спостереження (тільки у випадку колової орбіти достатньо двох спостережень). Але перед тим як власне розв'язувати задачу визначення орбіти, треба одержати крайові умови, тобто значення радіусів-векторів $\vec{r}_{1,2}$ у моменти часу $t_{1,2}$ за значеннями кутових координат, як правило, екваторіальних α_k, δ_k у моменти t_k , де $k=1,0,2$ (середній момент часу зручно позначити як t_0). Для цього використовується апріорна інформація про те, що три точки \vec{r}_k лежать на певній кривій другого порядку і у часі зв'язані між собою другим законом Кеплера.

В основі *метода Гаусса* визначення еліптичної орбіти за трьома спостереженнями лежить наступна ідея. Оскільки радіуси-вектори лежать в одній площині, то вони лінійно зв'язані між собою, тобто $\vec{r}_0 = c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2$, де коефіцієнти $c_{1,2}$ дорівнюють відношенням площ відповідних трикутників, утворених векторами \vec{r}_k . У той же час другий закон Кеплера дає нам відношення площ відповідних еліптичних секторів. Виникає задача знаходження відношення площі трикутника до площі еліптичного сектора – задача досить складна, бо площа еліптичного сектора не виражається в скінченному вигляді через координати його вершин. У першому наближенні ця задача розв'язується в припущенні, що рух відбувається за коловою орбітою. Це припустимо, коли, як це і буває при визначенні орбіт малих планет, спостереження охоплюють лише відносно невелику дугу орбіти і можна очікувати, що значення ексцентриситету не дуже велике. Докладніше метод Гаусса, як і *метод Ольберса* визначення параболічної орбіти, розглянутий в [37]. Алгоритми методів Гаусса та Ольберса наведені в Додатку 3.

Розглянемо коротко метод визначення орбіт, що не потребує вищезгаданих припущень, і тому застосовний в астродинаміці. Він заснований на використанні *теорему Ламберта*. Ця теорема зв'язує велику піввісь еліптичної a орбіти з радіусами $r_{1,2}$, довжиною хорди між цими точками c і проміжком часу $\Delta t = t_2 - t_1$, за який матеріальна точка у своєму русі проходить дугу орбіти між точками $\vec{r}_{1,2}$. При цьому доводиться враховувати, що ця дуга може бути і менша і більша від 180° , а хорда, що сполучає точки $\vec{r}_{1,2}$, може як перетинати, так, і не перетинати велику вісь еліпса. Тому перед тим як сформулювати саму теорему Ламберта, треба визначити допоміжну величину a_m – велику піввісь граничного еліпса, такого, що хорда P_1P_2 (рис. 3.2 д) проходить через другий фокус еліпса, при цьому

$$a_m = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + c). \quad (3.63)$$

Тоді час перельоту за граничною орбітою дорівнює

$$\Delta t_m = \frac{a_m^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\pi - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)]. \quad (3.64)$$

Сама ж теорема Ламберта має такий вигляд:

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = a^{3/2} [\pi + \text{sign}(\Delta t_m - \Delta t)(\varepsilon - \sin \varepsilon) - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)], \quad (3.65)$$

де

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{a_m}{a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{a_m - 2c}{a}}, \quad c = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2},$$

Φ – кут між векторами $\vec{r}_{1,2}$, тобто $\Phi = v_2 - v_1$. При цьому $0 < \delta/2 < \varepsilon/2 < \pi/2$, а поява в (3.64) та (3.65) знакових множників якраз і пов'язана з тими різними можливостями розташування на орбіті точок $\vec{r}_{1,2}$, що про них йшлося вище і які показані на рис. 3.2. Детальний аналіз цих можливостей, як і доказ теореми Ламберта, міститься також у книзі [37].

Якщо відомі вектори $\vec{r}_{1,2}$, то величини $\sin \Phi$ та $\cos \Phi$ знаходяться з модуля векторного добутку цих векторів та їх скалярного добутку. Тоді теорему Ламберта можна розглядати як рівняння відносно великої півосі a , яке треба розв'язати якимось чисельним методом. Знаючи величину a , можна знайти параметр орбіти

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{a \sin \frac{\varepsilon - \gamma}{2}}, \quad (3.66)$$

де

$$\gamma = (\text{sign}(\Delta t_m - \Delta t) \cdot \text{sign}(\sin \Phi)) \delta.$$

Формула (3.67) впливає із співвідношення між різницями істинних та ексцентричних аномалій в точках $\vec{r}_{1,2}$ і залежністю довжини хорди c від різниці ексцентричних аномалій.

Розглянувши інтеграл моментів, інтеграл Лапласа та їх векторний добуток в точках $\vec{r}_{1,2}$, можна одержати такі вирази для векторних елементів орбіти:

$$\vec{P} = \frac{e + \cos v_{1,2}}{p} \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \sin v_{1,2} \dot{\vec{r}}_{1,2} \quad (3.67)$$

та

$$\vec{Q} = \frac{\sin v_{1,2}}{p} \vec{r}_{1,2} + \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cos v_{1,2} \dot{\vec{r}}_{1,2}. \quad (3.68)$$

Виключаючи з цих чотирьох рівнянь швидкості $\dot{\vec{r}}_{1,2}$, одержимо векторні елементи орбіти, за якими можна знайти і елементи Ω, ω, i .

Зауважимо, що, виключаючи з кожної із пар рівнянь (3.67) і (3.68) вектори \vec{P} та \vec{Q} , можна знайти два рівняння, які зв'язують радіуси-вектори і вектори

швидкості в два розглядувані моменти часу. Розв'язавши одержану систему рівнянь відносно радіуса-вектора \vec{r}_2 та вектора швидкості $\dot{\vec{r}}_2$, матимемо, що

$$\vec{r}_2 = \left[1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_1 + \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_1, \quad (3.69)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = + \left[\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{pr_1} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_1. \quad (3.70)$$

Нарешті, опускаючи в (3.69) та (3.70) індекс 2 і замінюючи індекс 1 на 0, одержимо залежність радіуса-вектора і вектора швидкості в довільний момент часу безпосередньо від їх початкових значень:

$$\vec{r} = \left[1 - \frac{r}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.71)$$

$$\dot{\vec{r}} = + \left[\frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{pr_0} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_0 + \left[1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (3.72)$$

де тепер $\Phi = \nu - \nu_0$.

Якщо в теоремі Ламберта зробити граничний перехід при $a \rightarrow \infty$, одержимо *теорему Ейлера*, згідно з якою

$$6\sqrt{\mu \Delta t} = (r_1 + r_2 + c)^{3/2} - \text{sign}(\Phi)(r_1 + r_2 - c)^{3/2}. \quad (3.73)$$

Ця теорема використовується при визначенні параболічних орбіт за методом Ольберса. Теорема Ламберта та Ейлера також використовуються для підрахунку часу перельоту між двома точками за відповідною орбітою.

Взагалі ж розв'язок задачі про визначення орбіт штучних небесних тіл, зокрема ШСЗ, суттєвим чином залежить від характеру телеметричної інформації про їх рух. Радіолокаційні та світолокаційні вимірювання дають відстані до ШНТ, а доплерівські – радіальну компоненту швидкості. Якщо ще за кутовими координатами та відстанню знайти нормальну компоненту швидкості, то задача визначення орбіти зведеться до задачі Коші (докладніше про це див. у [40, 45]).

Задачею на стику небесної механіки і зоряної астрономії є задача визначення орбіт у подвійних зоряних системах. Основні труднощі пов'язані тут з тим, що ми спостерігаємо рух компонент цих систем лише в проекції на картинну площину. Можливості і шляхи подолання цих труднощів залежать від типу подвійної системи (див. докладніше про це в [34, 37]). Ще однією специфічною задачею небесної механіки є обчислення часу і обставин сонячних та місячних затемнень [26].

3.3. Інтегрування задачі двох тіл методом Гамільтона–Якобі. Метод перших інтегралів, що ним були проінтегровані рівняння задачі двох тіл у попередній главі, не є єдино можливим. Зараз ми одержимо розв'язок задачі двох тіл у сферичних координатах методом Гамільтона–Якобі, який стане нам у нагоді, коли в главі IV почнемо вивчення збуреного руху.

Застосування саме сферичної системи координат доцільне тому, що тоді потенціал задачі, який є $V = \mu/r$, залежить лише від однієї координати. Позначимо кутові координати як φ та λ , де φ – широта, а λ – довгота. Для застосування методу Гамільтона–Якобі треба насамперед знайти відповідні обраним координатам r, λ, φ узагальнені імпульси – R, Λ, Φ . Узагальнений імпульс p_i , що відповідає узагальненій координаті q_i , визначається за формулою

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (3.74)$$

де функція Лагранжа дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергій, або $L = T + V$. Кінетична енергія в сферичних координатах має такий вигляд:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2). \quad (3.75)$$

Функція Лагранжа дорівнює

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2) + \frac{\mu}{r}. \quad (3.76)$$

Звідси знаходимо, що

$$R = \dot{r}, \quad \Phi = r^2\dot{\varphi}, \quad \Lambda = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}. \quad (3.77)$$

Тепер можна записати функцію Гамільтона задачі двох тіл, яка дорівнює в консервативних задачах повній енергії, вираженій через узагальнені координати та узагальнені імпульси, тобто

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (3.78)$$

Щоб записати рівняння Гамільтона–Якобі, треба дорівняти до нуля суму частинної похідної від дії S за часом і функції Гамільтона, в якій узагальнені імпульси замінені на частинні похідні від дії S за узагальненими координатами (див. [15] або [23]). Але оскільки в консервативних задачах дія може бути записана як

$$S = W(q_i) - \alpha_1 t, \quad (3.79)$$

де W – так звана усічена дія, то рівняння Гамільтона–Якобі матиме такий вигляд:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.80)$$

Далі нам потрібно знайти повний інтеграл цього рівняння, тобто такий його інтеграл, що на відміну від загального залежить не від трьох довільних функцій, а лише від трьох довільних сталих. Будемо шукати його шляхом розділення змінних, тобто у вигляді

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda). \quad (3.81)$$

Підставляючи (3.81) в (3.80), одержимо:

$$\left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dW_2}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{dW_3}{d\lambda} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.82)$$

Якщо покласти

$$\frac{dW_3}{d\varphi} = \alpha_3, \text{ а } \left(\frac{dW_2}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} = \alpha_2^2, \quad (3.83)$$

матимемо:

$$\left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (3.84)$$

Звідси усічена дія

$$W = \alpha_3 \lambda + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr. \quad (3.85)$$

Загальний розв'язок задачі дається тепер співвідношеннями

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (3.86)$$

які в нашому випадку дають таке:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \alpha_1, \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - \alpha_1 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (3.88)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3. \quad (3.89)$$

Шість сталих інтегрування α_i, β_i , що визначають загальний розв'язок задачі двох тіл в формі Гамільтона–Якобі, мають назву *елементів орбіти Якобі*.

Підходячи формально, ми вирішили поставлену задачу. Але для подальшого нам важливо мати зв'язок між елементами Якобі та елементами Кеплера. Для цього потрібно обчислити інтеграли в (3.87)–(3.89). Оскільки, як видно з (3.89), $\cos^2 \varphi > \alpha_3^2 / \alpha_2^2$, можна покласти

$$\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} = \cos^2 i. \quad (3.90)$$

Якщо тепер зробити відповідну заміну в (3.89), то (3.89) дасть після інтегрування і деяких перетворень, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tgi} \cdot \sin(\lambda - \beta_3). \quad (3.91)$$

Помноживши (3.91) на $r \cos \varphi \cos i$, одержимо, зваживши на відомий зв'язок між декартовими та сферичними координатами:

$$\sin \beta_3 \sin i \cdot x - \cos \beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0. \quad (3.92)$$

Ми одержали рівняння площини руху і, враховуючи (2.48), робимо висновок, що стала β_3 – це довгота вузла, а введений вище кут i співпадає з

нахиленням орбіти i . Щоб знайти перший з інтегралів у (3.88), зробимо заміну змінної інтегрування:

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad (3.93)$$

де аргумент широти $u = \omega + v$. Тоді після інтегрування одержимо, що

$$\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2 - u. \quad (3.94)$$

Обчисливши інтеграл (3.94) за допомогою заміни $s = 1/r$, одержимо рівняння орбіти

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2} \cos(u - \beta_2)}}. \quad (3.95)$$

Порівнюючи (3.95) з (2.25)–(2.27), бачимо, що

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu} = p, \quad \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} = e, \quad \beta_2 = \omega, \quad (3.96)$$

звідки випливає, що

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1). \quad (3.97)$$

З першої рівності (3.97) видно, що елемент α_2 дорівнює кінетичному моменту s , а з другої випливає відоме співвідношення між знаком повної енергії, якій дорівнює стала α_1 , і типом руху в задачі двох тіл. А з (3.90) та (3.97) випливає, що

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i. \quad (3.98)$$

Нарешті, якщо обчислювати інтеграл (3.94) від найменшого значення відстані r (його значення в періцентрі) до поточного значення r , то вимога, щоб ліва і права частини (3.94) одночасно оберталися на нуль, дає значення $\beta_1 = -\tau$. Підведемо підсумок, зібравши до купи формули, що виражають елементи Кеплера через елементи Якобі і навпаки. Матимемо:

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1 \quad (3.99)$$

та

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \sqrt{\mu p} \cos i, \quad \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (3.100)$$

Цікаво зазначити, що елементи Якобі α_i – це саме ті характеристики руху частинки, які в мікрофізиці квантуються.

3.4. Рух під дією центральної сили. Важливою особливістю сили, яка діє в задачі двох тіл, є її центральний характер, тобто те, що лінія дії сили через одну

і ту саму точку – притягуючий центр. Тому цю силу можна записати в такому вигляді:

$$\vec{F} = F(r)\vec{r}^0, \quad (3.101)$$

де \vec{r}^0 – орт радіуса-вектора \vec{r} , а функція

$$F(r) = -\frac{1}{r^2}, \quad (3.102)$$

модуль якої визначає величину сили, а знак – характер її дії (тяжіння це чи відштовхування).

Корисно розглянути більш загальну задачу – задачу про рух під дією довільної *центральної сили*, в якій функція

$$F = F(r, \dot{r}, t) \quad (3.103)$$

є довільною функцією відстані r , швидкості її зміни \dot{r} і часу t . По-перше, це дасть змогу з'ясувати, які властивості задачі двох тіл є наслідком центрального характеру діючої сили, а які є наслідком певної її залежності від відстані r . По-друге, така задача може мати і деякі практичні застосування. Це може бути задача про рух зірки в кульовому зоряному скупченні, де вигляд функції F визначається розподілом зоряної густини в цьому скупченні. Або задача про рух планети навколо зірки, яка інтенсивно втрачає масу, тоді $F = F_1(t)/r^2$.

Узагальнюючи рівняння (2.10), запишемо рівняння відносного руху в розглядуваній задачі:

$$\ddot{\vec{r}} - F(r, \dot{r}, t)\vec{r}^0 = 0. \quad (3.104)$$

Помноживши рівняння (3.104) на радіус-вектор \vec{r} ліворуч, одержимо насамперед інтеграл моменту:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \Rightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (3.105)$$

Таким чином, існування інтеграла моменту та всі наслідки, що з цього випливають, зобов'язані саме центральному характеру діючої сили. Найважливішим з цих наслідків є плоский характер руху під дією центральної сили. Наявність площини руху, рівняння якої $\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$, дозволяє ввести поняття про лінію вузлів і елементи орбіти, що визначають положення цієї площини в просторі – довготу висхідного вузла Ω і нахилення орбіти i (рис. 3.3). Тоді компоненти вектора кінетичного моменту є:

$$\begin{aligned} c_1 &= c \sin \Omega \sin i, \\ c_2 &= -c \cos \Omega \sin i, \\ c_3 &= c \cos i. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Можна ввести також полярні орбітальні координати r і w , де полярний кут w відлічується від напрямку на висхідний вузол. При цьому кут w є аналогом аргументу широти u в задачі двох тіл. Тепер радіус-вектор та його орт можна представити таким чином:

$$\vec{r} = r(t)\vec{r}^0(w(t)), \quad \vec{r}^0 \equiv (\alpha(w(t)), \beta(w(t)), \gamma(w(t))), \quad (3.107)$$

де компоненти орта \vec{r}^0 , які є спрямовуючими косинусами вектора \vec{r} , визначаються формулами (2.40) та (2.41) із заміною u на w . Щоб підставити

(3.107) у рівняння руху (3.104), треба (3.107) двічі продиференціювати за часом t :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}^0 + r\dot{\vec{r}}^0, \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{r}^0 + 2\dot{r}\dot{\vec{r}}^0\dot{w} + r\ddot{\vec{r}}^0 w'^2 + r\dot{\vec{r}}^0\ddot{w}, \quad (3.108)$$

де $'$ означає похідну за w . Лінійна залежність спрямовуючих косинусів від $\sin w$ та $\cos w$ і правила диференціювання тригонометричних функцій приводять до того, що

$$\vec{r}^{0'} = \vec{r}_\perp^0, \quad \vec{r}^{0''} = -\vec{r}^0, \quad (3.109)$$

де \vec{r}_\perp^0 – орт в площині руху, перпендикулярний до орта \vec{r}^0 . Підставляючи тепер (3.109) у (3.108), а (3.108) у (3.104), матимемо, що

$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\vec{r}^0 + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\vec{r}_\perp^0 = 0. \quad (3.110)$$

Оскільки орти \vec{r}^0 та \vec{r}_\perp^0 лінійно незалежні, то рівність (3.110) може мати місце лише тоді, коли

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 &= F \\ r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Друге з рівнянь (3.111) інтегрується один раз, якщо помножити його на r . Зробивши це, одержимо, що

$$r^2\dot{w} = c. \quad (3.112)$$

Інтеграл (3.112) можна одержати також, розглянувши модуль інтеграла моменту, тому стала інтегрування в (3.112) повинна дорівнювати саме $c = |\vec{c}|$. Виключаючи з першого рівняння (3.111) похідну \dot{w} , матимемо рівняння для радіуса r :

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = F(r, \dot{r}, t). \quad (3.113)$$

Якщо можна знайти з цього рівняння радіус $r = r(t)$, то (3.112) дасть закон руху у вигляді:

$$w = w_0 + \frac{1}{c} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r(t)}. \quad (3.114)$$

Можливість інтегрування рівняння (3.113) залежить від вигляду функції F . Якщо вона не залежить від часу t , то доцільно перейти від незалежної змінної t до нового аргументу w . Крім того можна уникнути нелінійності c^2/r^3 , якщо зробити заміну залежної змінної $r = 1/u$. Обчислюючи похідні \dot{r} та \ddot{r} , знаходимо за допомогою (3.112):

$$\dot{r} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2u^2u'', \quad (3.115)$$

а підставляючи (3.115) у (3.113), одержимо рівняння для оберненої відстані u з лінійною лівою частиною:

$$u'' + u = -\frac{1}{c^2u^2} F\left(\frac{1}{u}, -cu'\right). \quad (3.116)$$

Це рівняння відоме як *рівняння Біне*. Воно може бути проінтегроване, якщо сила F є функцією тільки від u . У цьому випадку робиться заміна $p(u) = u'$, тобто змінну u обирають за незалежну. Тоді рівняння Біне перетворюється на рівняння першого порядку:

$$p \frac{dp}{du} + u = -\frac{1}{c^2 u^2} F(u) \equiv \Phi(u). \quad (3.117)$$

Змінні в цьому рівнянні розділяються, що дає після інтегрування:

$$p^2 = p_0^2 - u^2 + u_0^2 + 2 \int_{u_0}^u \Phi(u) du. \quad (3.118)$$

Розв'язуючи рівняння $p(u) = u'$, знаходимо:

$$w = w_0 + \int_{u_0}^u \frac{du}{p(u)} \quad (3.119)$$

і, знову використовуючи (3.112),

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{u^2(w)} = c(t - t_0). \quad (3.120)$$

Таким чином, знайдено загальний розв'язок задачі про рух під дією центральної сили, що залежить тільки від відстані $r = 1/u$, бо ми маємо шість незалежних сталих інтегрування \bar{c}, p_0, u_0, w_0 . Але в цьому випадку дістати розв'язок задачі можна і іншим шляхом, якщо ввести силову функцію задачі співвідношенням

$$F(r) = \frac{dU}{dr}. \quad (3.121)$$

Тоді, помноживши рівняння Біне на u' , можна знайти його перший інтеграл

$$c^2 u'^2 + c^2 u^2 = 2U + h. \quad (3.122)$$

Якщо ж в інтегралі (3.122) повернутися до змінних r та t , то одержимо, що

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{w}^2 = 2U + h, \quad (3.123)$$

тобто цей перший інтеграл є інтегралом енергії.

Повернемося тепер до задачі двох тіл, як часткового випадку розглядуваної задачі, тобто покладемо $F = -\mu/r^2 = -\mu u^2$. Побачимо, що права частина рівняння Біне обернеться на сталу μ/c^2 , а саме рівняння Біне – на лінійне рівняння із сталими коефіцієнтами та сталою правою частиною, розв'язок якого знаходиться відомим стандартним методом і може бути записаний в такому вигляді:

$$u = \frac{\mu}{c^2} + A \cos(w - \omega). \quad (3.124)$$

Покладаючи довільну сталу інтегрування $A = e\mu/c^2$, а сталу $\mu/c^2 = p$, одержуємо вже відоме нам рівняння кеплерівської орбіти:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(w - \omega)}. \quad (3.125)$$

3.5. Релятивістська задача двох тіл

З огляду на те, що загальна теорія відносності (ЗТВ), як правило, не входить до основного курсу теоретичної фізики, стисло розглянемо фізичні та математичні засади цієї теорії.

3.5.1. Елементи загальної теорії відносності. Загальна теорія відносності виходить з відомого, встановленого з великою точністю, експериментального факту рівності інертної і гравітаційної мас будь-якого фізичного об'єкту. Загальність цього факту означає, що є глибокий зв'язок між рухом за інерцією і рухом в гравітаційному полі. Цей зв'язок знаходить свій прояв в *принципі еквівалентності* руху в гравітаційному полі в інерціальній системі відліку і вільного руху у відповідній неінерціальній системі відліку. А оскільки рух в довільному гравітаційному полі нерівномірний та криволінійний, то ми приходимо до необхідності перейти від плоскої чотирирівимірної різноманітності простору-часу Мінковського спеціальної теорії відносності (СТВ) до викривленої просторово-часової різноманітності. Ця необхідність пов'язана з тим, що, замінюючи рух в гравітаційному полі на вільний рух в неінерціальній системі відліку, не можна в скінченній частині простору ввести декартову систему координат замість криволінійної, як це завжди можна зробити в плоскому просторі-часі Мінковського. Відповідно до цього треба узагальнити відомий з СТВ вираз для інтервала

$$ds^2 = c^2 t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (3.126)$$

замінивши його на довільну квадратичну форму від координат:

$$ds^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.127)$$

де сукупність коефіцієнтів

$$g_{ik} = g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (3.128)$$

утворює *фундаментальний* або *метричний тензор*, бо він визначає метричні властивості (метрику) простору-часу. В записах (3.126)–(3.128) зроблений перехід до індексних позначень координат і покладено $ct = x^0$, де, нагадаємо, c – швидкість світла. Тензор g_{ik} описує викривленість простору-часу і, водночас, описує гравітаційне поле, бо в цій викривленості з точки зору ЗТВ гравітація і проявляє себе як фізичне явище.

Звертає на себе увагу наявність в записах (3.126)–(3.128) верхніх і нижніх індексів. Їх поява пов'язана з тим, що в криволінійних системах координат потрібно розрізняти дві можливі форми задання векторних та тензорних величин – коваріантну та контраваріантну. За визначенням, *контраваріантним вектором* зветься вектор, який при переході від системи координат x'^k до системи x^i перетворюється так, як перетворюється диференціал

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k, \quad (3.129)$$

тобто

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (3.130)$$

Починаючи із записів (3.129) та (3.130), ми почнемо використовувати *правило сумування* Ейнштейна, за яким мається на увазі сумування за індексом, що зустрічається в даному записі двічі, один раз як верхній, другий як –

нижній. *Коваріантний вектор* – це вектор, що перетворюється подібно до градієнту скалярної функції

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x'^k}, \quad (3.131)$$

тобто

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \quad (3.132)$$

З геометричної точки зору поява цих двох типів векторів (а точніше, двох форм однієї і тієї ж векторної величини) пов'язана з тим, що вектор можна задати як його компонентами, що є коефіцієнтами розкладу цього вектора за ортами координатних осей (контраваріантна форма), так і проєкціями вектора на координатні осі (коваріантна форма). Ці дві форми будуть розрізнятися вже навіть в косокутній системі координат (рис. 3.4), але збігатися між собою в прямокутній. Перехід від однієї форми до іншої (так зване піднімання чи опускання індексів) здійснюється множенням вектора на фундаментальний тензор. Наприклад:

$$A_i = g_{ik} A^k. \quad (3.133)$$

Тензори також можуть бути коваріантними (A_{ik}) і контраваріантними (A^{ik}), а також змішаними (A^i_k). Коваріантний та контраваріантний метричні тензори є взаємно оберненими, тобто $g_{il} \cdot g^{kl} = \delta_i^k$ – одиничному тензору. На тензори поширюється і правило піднімання та опускання індексів.

Викривленість простору-часу приводить до певних ускладнень при диференціюванні векторів та тензорів як функцій координат. Щоб одержати похідну, треба спочатку знайти різницю значень диференційованої функції в двох близьких точках. Якщо ця функція – вектор, то для цього треба перенести початок вектора з однієї точки до іншої. Якщо обчислюється частинна похідна за певною координатою, то таке паралельне перенесення вектора відбувається вздовж відповідної координатної лінії, яка викривлена, і тому компоненти вектора при такому перенесенні додатково змінюються (рис.3.5). Оскільки перенесення відбувається між нескінченно близькими точками, то цю зміну можна вважати лінійною як за компонентами вектора, так і за диференціалами координат. Тобто повний диференціал контраваріантного вектора в криволінійних координатах можна записати таким чином:

$$DA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x_k} dx^k + \Gamma_{kl}^i A^l dx^k, \quad (3.134)$$

де сукупність коефіцієнтів Γ_{kl}^i дістала назву *символів Кристофеля* (або коефіцієнтів зв'язності). Поділивши (3.134) на dx^k , одержимо так звану *коваріантну похідну* вектора

$$A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l. \quad (3.135)$$

Для коваріантного вектора коваріантна похідна дорівнює:

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_l. \quad (3.136)$$

Символи Кристофеля Γ_{kl}^i , які є певною мірою викривленості простору-часу, не утворюють тензору третього рангу. Вони є лінійними функціями похідних від компонент метричного тензора (чим більше викривлений простір, тим швидше змінюється вектор при його перенесенні):

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (3.137)$$

Формули коваріантного диференціювання узагальнюються на випадок тензорів. Наприклад,

$$A_{k;l}^i = \frac{\partial A_k^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^m A_m^i + \Gamma_{ml}^i A_k^m. \quad (3.138)$$

Можна показати, що завжди можна обрати таку систему координат, що в даній точці всі символи Кристофеля будуть дорівнювати нулю. Тому бажано мати таку міру викривленості простору-часу, як б мала тензорний характер і оберталася на 0 тільки в плоскому просторі. Такою мірою є *тензор кривизни*. Ввести його можна таким чином – чим більше буде викривленість простору, тим більше буде відношення зміни вектора при його паралельному переносі вздовж певного замкненого контура до площі, яку обмежує цей контур. Наприклад, поворот вектора при обході меж октантів двох сфер (рис. 3.6) однаковий і дорівнює 90° , а площа менша у октанта сфери меншого радіуса і, відповідно, більшої кривизни. Зміна вектора при обході замкненого контура L дорівнює

$$\Delta A_k = \oint_L \Gamma_{kl}^i A_i dx^l. \quad (3.139)$$

Перейдемо в (3.139) від криволінійного інтеграла до поверхневого за поверхнею S , що обмежена контуром L , за допомогою теореми Стокса. При цьому потрібні похідні будемо обчислювати згідно з формулою (3.135). Нарешті, зменшуючи необмежено контур L та поверхню S , одержимо:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta S^{lm}, \quad (3.140)$$

при цьому елемент ΔS^{lm} координатної поверхні S^{lm} визначається двома індексами – індексами координатних ліній, що лежать на цій поверхні. Тепер подвоєне відношення $\Delta A_k / A_i \Delta S^{lm}$, яке є тензором четвертого рангу R_{klm}^i , і буде мірою викривленості простору-часу в точці, до якої стягуються контур L і поверхня S . Обчислення показують, що цей тензор кривизни (або *тензор Рімана-Кристофеля*) дорівнює:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (3.141)$$

З урахуванням (3.137) видно, що компоненти тензора кривизни включають лінійно другі похідні від компонент метричного тензора та добутки

перших похідних. Якщо згорнути цей тензор за індексами i та m , одержимо *тензор кривизни другого рангу (тензор Річчі)*

$$R_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{km}^m}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^m}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^m \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^m \Gamma_{kl}^n. \quad (3.142)$$

А згортаючи тензор Річчі, матимемо *скалярну кривизну* $R = g^{kl} R_{kl}$. Всі компоненти тензорів кривизни R_{klm}^i та R_{kl} дорівнюють нулю тільки в плоскому просторі-часі.

Згідно з основною ідеєю ЗТВ характеристики викривленості простору-часу повинні визначатися розподілом і рухом гравітуючої матерії, що знаходяться в ньому. Ці розподіл і рух описуються тензором енергії-імпульсу

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{W_1}{c} & \frac{W_2}{c} & \frac{W_3}{c} \\ \frac{W_1}{c} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \frac{W_2}{c} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \frac{W_3}{c} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.143)$$

де часова компонента T_{00} – це *густина енергії*, змішані компоненти T_{0k} ($k \neq 0$) утворюють з точністю до множника $1/c$ вектор *потoku енергії* \vec{W} (вектор Умова-Пойнтинга). А просторова частина тензора енергії-імпульсу – це тривимірний *тензор напружень* p_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Його діагональні компоненти – це тиск вздовж координатних осей, а недіагональні p_{ik} ($i \neq k$) – k -ті компоненти зсувних напружень в площинах, перпендикулярних до осей x^i . Вище наведена форма тензора енергії-імпульсу має на увазі опис матеріальних об'єктів як неперервних (суцільні середовища, фізичні поля). Для опису дискретних систем треба користуватися так званими узагальненими функціями, найпростішим і найвідомішим представником є δ -функція Дірака.

Оскільки одна з компонент основного рівняння ЗТВ повинна при граничному переході до слабкого гравітаційного поля, коли стає малим відношення гравітаційного потенціалу до квадрату швидкості світла ($V/c^2 \ll 1$), переходити в лінійне рівняння Пуассона $\nabla^2 V = 4\pi f \rho$, то це відшукуване рівняння повинно бути лінійним відносно тензорів g_{ik} , R_{ik} та T_{ik} , тобто йому можна надати такого вигляду:

$$R_{ik} + a g_{ik} = b T_{ik}. \quad (3.144)$$

Властивості тензора кривизни, що задовольняє певним тотожностям (тотожності Біанкі та Ейнштейна) дозволяють знайти коефіцієнт a , а граничний перехід до $V \ll c^2$ дає коефіцієнт b . Остаточне рівняння, що визначають як метрику простору часу, так і рух матерії в ньому під дією гравітації (*рівняння Ейнштейна*) мають такий вигляд:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi f}{c^4} T_{ik}. \quad (3.145)$$

Звичайно, щойно викладене не є строгим виводом рівнянь Ейнштейна. Для докладного ознайомлення із ЗТВ треба звернутися, наприклад, до однієї з книг [10,19,24]. Основи загального тензорного аналізу розглянуті в посібнику [8].

3.5.2. Центральнo-симетричне поле. Розглянемо питання про те, яке гравітаційне поле, тобто яку метрику, створює навколо себе матеріальна точка або тіло із сферично-симетричним розподілом речовини. Природно застосувати для цього сферичну систему координат: $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = \theta$, де φ – широта, а θ – полярна відстань. Оскільки властивості простору всюди повинні бути однакові в усіх напрямках, перпендикулярних до радіуса-вектора, то просторові недиагональні компоненти метричного тензора повинні дорівнювати 0, а залежність від кутових координат повинна бути такою як і в плоскому просторі. Це дозволяє записати вираз для інтервала в такому вигляді:

$$ds^2 = h(r,t)c^2 dt^2 - l(r,t)dr^2 - k(r,t)(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + a(r,t)dt dr. \quad (3.146)$$

Довільність у виборі системи відліку дозволяє зробити перетворення координат $r = f_1(r', t')$ та $t = f_2(r', t')$ таке, щоб $a(r,t) = 0$, а $k(r,t) = r^2$. Тоді, позначивши $h(r,t) = e^\nu$ і $l(r,t) = e^\lambda$, матимемо:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (3.147)$$

Вираз (3.147) дає такі значення компонент метричного тензору:

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{33} = -r^2. \quad (3.148)$$

Шляхом принципово нескладних, але досить кропітких обчислень можна тепер знайти за допомогою (3.137) символи Кристофеля. Відмінними від 0 (з точністю до властивостей симетрії $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$) виявляються:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = ctg\theta, \quad \Gamma_{33}^1 = r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.149)$$

тут штрих означає похідну за r , а крапка – за ct . Обчислюючи за формулою (3.142) компоненти тензора кривизни другого рангу і маючи на увазі, що ми шукаємо поле, яке створюється сферично-симетричним тілом навколо нього в пустоті, тобто там, де тензор енергії-імпульсу $T_{ik} = 0$, одержимо з (3.148) таку систему рівнянь для функцій ν та λ :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} &= 0, \\ e^{-\lambda} \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} &= 0, \\ \dot{\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (3.150)$$

З останнього рівняння (3.150) видно, що функція λ не залежить від часу t . А із суми перших двох рівнянь випливає, що $\lambda + \nu = f(t)$, а це означає, що функції e^λ і e^ν відрізняються лише часовим множником. Якщо зробити таке

перетворення часу, щоб функція $f(t)=0$, то $e^v = e^{-\lambda}$. В другому з рівнянь (3.150) змінні розділяються, і воно після інтегрування дає:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (3.151)$$

де r_g – стала інтегрування. На відстанях r , достатньо великих, ми повині одержати закон всесвітнього тяжіння Ньютона, тобто потенціал $V = fM/r$, де M – маса тіла, яке створює сферично-симетричне поле. А якщо в рівняннях Ейнштейна обмежитися членами порядку V/c^2 , то матимемо, що $g_{00} = 1 - 2V/c^2$. Звідси випливає, що стала

$$r_g = \frac{2fM}{c^2}. \quad (3.152)$$

Величина r_g дістала назву *гравітаційного радіуса* тіла. Цікаво, що формулу (3.152) знайшов ще двісті років тому назад П.Лаплас. Він поставив питання – яким повинен бути радіус тіла з масою M , щоб параболічна швидкість на його поверхні дорівнювала швидкості світла, тобто світло при меншому радіусі тіла не могло його покинути, тобто щоб це тіло було тим, що в наш час назвали *чорною дірою*.

Остаточно з (3.147) та (3.152) маємо такий вираз для інтервала:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (3.153)$$

Ця метрика навколо сферично-симетричного тіла зветься *метрикою Шварцшильда*, а відповідне їй гравітаційне поле – *полем Шварцшильда*. З (3.153) випливає, що власний час, тобто час в системі відліку, початок якої знаходиться в даній точці простору,

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \cdot t < t, \quad (3.154)$$

де t – час в системі відліку з початком в центрі тіла, яке створює поле Шварцшильда. Відстань між точками r_1 та r_2 вздовж будь якого радіального напрямку дорівнює

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \quad (3.155)$$

3.5.3. Рух матеріальної точки в полі Шварцшильда. Згідно з основною ідеєю ЗТВ релятивістська задача двох тіл (при умові $M \gg m$) зводиться до дослідження вільного руху матеріальної точки в просторі-часі з метрикою Шварцшильда. Щоб провести це дослідження, треба насамперед записати рівняння чотиривимірної лінії, яка б узагальнювала рівняння рівномірного та прямолінійного руху за інерцією в СТВ. Так лінія має назву *геодезичної*. В СТВ вводиться поняття про чотиривимірну швидкість $u^i = dx^i/ds$ і ,відповідно, рівняння вільного руху $du^i/ds \equiv d^2x^i/ds^2 = 0$. Згідно з формулою коваріантного

диференціювання (3.135) в ЗТВ це рівняння перейде в таке *рівняння геодезичної*:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (3.156)$$

Перепишемо вираз, що задає метрику Шварцшильда, в такому вигляді:

$$c^2 e^{\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - e^{\lambda} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 \right) = 1. \quad (3.157)$$

Обчислення (3.156) за допомогою (3.149) дає таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} + \nu' \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\nu'}{2} \left[c^2 e^{2\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right] - r e^{\nu} \left[\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2 \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} - \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{ds} \right] \frac{d\varphi}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (3.158)$$

З міркувань симетрії треба очікувати, що в силу центральної симетрії задачі рух буде плоским. Виберемо площину руху за екваторіальну площину системи координат. Тоді полярна відстань $\theta = \pi/2$, крім того, будемо відлічувати довготу φ від початкового напрямку радіуса-вектора, тобто покладемо значення $\varphi_0 = 0$. Тепер третє рівняння (3.158) виконуватиметься тотожно, а друге і четверте рівняння відповідним чином спростяться. Поділивши перше рівняння на dt/ds , а четверте – на $d\varphi/ds$, можна привести їх до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\ln \left(c \frac{dt}{ds} \right) \right) + \frac{d\nu}{ds} &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(\ln \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right) + \frac{d}{ds} (\ln r^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Інтегруючи (3.159), одержимо такі перші інтеграли нашої задачі:

$$e^{\nu} \frac{dt}{ds} = k, \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = c_0. \quad (3.160)$$

Виключаючи тепер похідні від t та φ з (3.159) за допомогою (3.160), одержимо рівняння:

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + e^{\nu} \left(\frac{c_0^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{k^2}{c^2} = 0. \quad (3.161)$$

Перейшовши в (3.162) від незалежної змінної s до незалежної змінної φ і зробивши заміну $r = 1/u$, одержимо рівняння:

$$c_0^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + e^{\nu} (c_0^2 u^2 + 1) - \frac{k^2}{c^2} = 0. \quad (3.162)$$

Нарешті, виключивши з (3.163) величину e^v за допомогою (3.151) і диференціюючи одержане рівняння за φ , матимемо рівняння орбіти релятивістської задачі двох тіл:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3}{2} r_g u^2, \quad (3.163)$$

де покладено $c_0^2 / r_g = p$, а r_g – гравітаційний радіус центрального тіла (3.152). Рівняння (3.164) лише другим доданком праворуч відрізняється від рівняння орбіти класичної задачі двох тіл в формі (3.116). Зробимо оцінки доданків правої частини рівняння (3.163), маючи на увазі планети Сонячної системи. Перший доданок дорівнює $\approx 1/a$, а другий – $\approx r_g / a^2$, де a – велика піввісь планетної орбіти. Гравітаційний радіус Сонця складає приблизно 3 км. Тобто навіть для Меркурія відношення другого доданку до першого є дуже малою величиною, десь біля 10^{-7} . Це дає змогу розв’язувати рівняння (3.163) методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення кеплерівське рівняння орбіти

$$u_0 = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi). \quad (3.164)$$

Підставляючи (3.164) в праву частину рівняння (3.163), одержимо таке рівняння для першого наближення:

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{1}{p} \left[1 + \frac{3 r_g}{2 p} (1 + e \cos \varphi)^2 \right]. \quad (3.165)$$

Перетворюючи другий доданок в правій частині рівняння (3.165), можна одержати:

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{1}{p} \left[1 + 3 \frac{r_g}{p} e \cos \varphi + \frac{3 r_g}{4 p} e^2 \cos 2\varphi \right], \quad (3.166)$$

при цьому ми знехтували малою сталою $3r_g(1+e^2)/2p$. Рівняння (3.166) розв’язується стандартними методами теорії лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Його розв’язок має такий вигляд:

$$u_1 = \frac{1}{p} \left(1 + e \cos \varphi + \frac{3 r_g}{2 p} e \varphi \sin \varphi - \frac{1 r_g}{4 p} e^2 \cos 2\varphi \right). \quad (3.167)$$

Останній доданок в розв’язку (3.167) має малу амплітуду, а в третьому доданку вона росте з часом, тому останнім доданком можна знехтувати. Розглянемо величину $\cos(\varphi - \delta\varphi)$, де $\delta\varphi$ – мала величина. Маємо тоді, що

$$\cos(\varphi - \delta\varphi) = \cos \varphi + \delta\varphi \sin \varphi. \quad (3.168)$$

Порівнюючи (3.167) і (3.168), дійдемо до висновку, що множник перед $\sin \varphi$ в (3.167) можна розглядати як додаткову зміну в аргументі широти, якому дорівнює в силу початкових умов значення координати φ , і ця зміна дорівнює

$$\delta\varphi = \frac{3 r_g}{2 p} \varphi. \quad (3.169)$$

За один оберт планети за орбітою кут φ змінюється на 2π , і величину $\delta\varphi(2\pi)$ можна трактувати як зміну орієнтації еліптичної орбіти планети в її площині, тобто зміну перицентрної відстані (*релятивістський поворот перицентру*) за один оберт. За допомогою третього закону Кеплера величині цього повороту можна надати такого вигляду:

$$\delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}. \quad (3.170)$$

де T – класичний період обороту планети. Величина $\delta\omega$ дуже мала, тому за традицією обчислюється величина повороту лінії апсид за сто років. Розрахунки дають, що для Меркурія ця величина дорівнює $43.03''$, для Венери – $8.62''$, для Землі – $3.84''$, для Марса – $1.35''$.

Цей поворот перицентру є єдиним загальнорелятивістським ефектом в задачі двох тіл в першому наближенні. Ефекти вищих наближень для Сонячної системи лежать далеко за межами точності спостережень. Але це не виключає доцільності дослідження точного розв'язку релятивістської задачі двох тіл, який, до речі, може бути знайдений в еліптичних функціях.

Розбіжність приблизно в $40''$ за сто років між спостережним поворотом перигелію Меркурія і тим його значенням, що визначається збурюючим впливом інших планет, була відома ще з другої половини XIX сторіччя. Принципово ця розбіжність була пояснена в ЗТВ. Але невелика точність цього підтвердження ЗТВ, як і інших експериментальних її перевірок ($\approx 10\%$), приводила на протязі десятиріч до неодноразових спроб якщо не спростувати ЗТВ, то принаймні замінити її якою-небудь альтернативною теорією. Але зараз вся сукупність наземних експериментів (зокрема надзвичайно точні вимірювання зміни сили ваги з висотою за допомогою ефекту Мессбауера) і спостережень за рухом планет та міжпланетних автоматичних станцій радіотехнічними засобами підтверджують ЗТВ з точністю принаймні в 0.01% . В колишньому СРСР та в США розроблені релятивістські теорії руху великих планет, які з успіхом використовуються при балістичних розрахунках космічних місій до цих планет. Хоча в ЗТВ та її застосуваннях ще є певні нерозв'язані проблеми (зокрема, ще недостатня її експериментальна перевірка в сильних гравітаційних полях), вона є надійною основою для розв'язання задач, що виходять за межі класичної механіки і ньютонівської теорії тяжіння, задачах небесної механіки та астродинаміки зокрема.

3.6. Задача двох тіл в просторі довільного числа вимірів

Задача двох тіл (класична) в просторі довільного числа вимірів була розглянута П.Еренфестом в 1907 р. Але довгий час наслідки цього розгляду мали лише абстрактне значення, бо фізика і астрономія мали справу тільки з тривимірним простором оточуючого нас світу. Однак останні результати на стику космології раннього Всесвіту та фізики елементарних частинок дають змогу говорити про можливість існування поряд з нашим Всесвітом ще інших

всесвітів з іншими фундаментальними властивостями, зокрема з іншим, ніж три числом вимірів простору (див. докладніше про це, наприклад, в [33]). Це зробило задачу, що є предметом цього розділу, досить актуальною. Крім того, нижче буде продемонстрований корисний метод якісного аналізу задач механіки.

Вважатимемо, що в просторі будь-якого числа вимірів зберігаються такі його властивості, як однорідність та ізотропність простору. Це означає, що повинні існувати інтеграли моменту та енергії, а також така властивість руху в задачі двох тіл, як його плоский характер. А це в свою чергу означає, що квадрат швидкості руху можна записати таким чином:

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\nu}^2, \quad (3.171)$$

а підставляючи (3.171) в інтеграл енергії (2.16), матимемо, що

$$\dot{r} = \pm \sqrt{h - W_N(r)}, \quad (3.172)$$

де W_N – узагальнений потенціал задачі. Він дорівнює подвоєній сумі відцентрового потенціалу, якому за допомогою (2.35) можна надати вигляду $c^2/2r^2$, та гравітаційного потенціалу, який в просторі виміру N позначимо як $V_N(r)$, тобто

$$W_N(r) = \frac{c^2}{r^2} - 2V_N(r). \quad (3.173)$$

Нагадаймо, що $V_3 = \mu/r$. Який же вигляд має гравітаційний потенціал в N -вимірному просторі? Відповідь на це питання впливає з тієї обставини, що зовні гравітуючих мас цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 V_N}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3.174)$$

розв'язок, якого у випадку, коли потенціал створюється матеріальною точкою, що знаходиться в початку координат, є, як можна перевірити, такий:

$$V_N = \frac{\mu}{(N-2)r^{N-2}}. \quad (3.175)$$

Слід тільки зауважити, що вираз (3.175) не придатний, коли $N=2$, але, як легко перекопати, в двовимірному світі

$$V_2 = -\mu \ln r. \quad (3.176)$$

Як видно з виразу (3.175), степеь в знаменнику на дві одиниці менша від розмірності простору, відповідно, сила тяжіння буде обернено пропорційна r^{N-1} . З фізичної точки зору це означає, що сила є такою, що зменшується із збільшенням відстані найбільш повільно при умові скінченності повної енергії взаємодії, як це впливає із умови збіжності відповідного невластного інтеграла. На зв'язок між тривимірністю нашого простору і обернено квадратичною залежністю сили від відстані в законі всесвітнього тяжіння звернув увагу ще І.Кант.

З (3.172) впливає, що рух можливий тільки при таких значеннях координати r , при яких підкореневий вираз невід'ємний, що буде тоді, коли

$$W_N(r) \leq h, \quad (3.177)$$

тобто лише там, де на графіку $W_N - r$ крива $W_N(r)$ проходить нижче прямої $W_N = h$. Розглянемо ці графіки для різних значень розмірності простору N . Запишемо узагальнений потенціал $W_N(r)$ для $N = 2, 3, 4, 5$:

$$W_2 = \frac{c^2}{r^2} + 2\mu \ln r, \quad W_3 = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}, \quad W_4 = \frac{c^2 - \mu}{r^2}, \quad W_5 = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{3r^3}. \quad (3.178)$$

Неважко переконатися, що в усіх випадках вісь r буде горизонтальною асимптотою, а вісь W_N – вертикальною. Похідна від потенціалу дорівнює

$$W_N'(r) = -\frac{2c^2}{r^3} - \frac{2\mu}{r^{N-1}} \quad (3.179)$$

і в усіх випадках, крім $N = 4$, буде на кривій $W_N(r)$ лише один екстремум в точці

$$r_0 = \left(\frac{\mu}{c^2} \right)^{1/(N-1)}. \quad (3.180)$$

З характеру асимптотичної поведінки функцій $W_N(r)$ видно, що цей екстремум при $N = 2, 3$ є мінімумом, а при $N = 5$ – максимумом. Із загальних виразів (3.175) та (3.180) можна переконатися, що при $N > 5$ якісний характер поведінки функцій $W_N(r)$ порівняно з випадком $N = 5$ не зміниться, тому і розглядати їх нема потреби.

Графіки узагальнених потенціалів $W_N(r)$ показані на рис. 3.7. З них видно, що у випадках $N = 2, 3, 5$ можливі колові орбіти з радіусами r_0 , стійкі у двовимірному та тривимірному світах, але нестійкі в п'ятивимірному світі. Більш того, в двовимірному світі має місце в певному розумінні понадстійкість – рух буде фінітним, обмеженим кільцем $r_1 < r < r_2$, при будь-якому скінченному значенні повної енергії $h/2$. В цьому світі нема поняття про другу космічну швидкість (інакше кажучи, $V_2 = \infty$). В багатовимірних світах ($N \geq 4$) матеріальна точка в своєму русі (якщо не брати до уваги нестійку колову орбіту при $N \geq 5$) врешті-решт або опиняється в притягуючому центрі ($r \rightarrow 0$) або прямує на нескінченність ($r \rightarrow \infty$), тобто фінітний рух протягом необмежено довгого часу неможливий.

І тільки наш “рідний” тривимірний простір виділяється багатством своїх можливостей – при від’ємній повній енергії рух має фінітний характер (коловий або еліптичний, $r_1 < r < r_2$). При енергії $h/2 \geq 0$ рух буде інфінітним (параболічним або гіперболічним). При цьому перехід від одного типу руху до іншого відбувається при скінченній зміні повної енергії. Зазначимо, що це не єдина особливість тривимірного простору. Тільки в ньому число незалежних компонент антисиметричного тензора (це число є $(N^2 - N)/2$) дорівнює розмірності простору, бо рівняння $(N^2 - N)/2 = N$ має лише один нетривіальний корінь $N = 3$. Це, в свою чергу, означає, що тільки в тривимірному просторі можна ввести поняття векторного добутку векторів, котрий насправді є псевдовектором, а точніше кажучи, антисиметричним тензором другого рангу. З цього випливає, що “математичне лице” фізики в світах з іншою, ніж 3,

розмірністю простору повинно бути іншим і складнішим – вже класична механіка і електродинаміка повинні мати суттєво тензорний характер. Але головне полягає в тому, що цю фізику скоріше всього нема буде кому розвивати. Проведений аналіз задачі двох тіл в просторі довільної розмірності показує, що існування гравітаційно зв'язаних систем (планетних зокрема) та електростатично зв'язаних (атоми та молекули) можливе лише в двох- та тривимірному світах. Але в двовимірному світі не можливе руйнування таких систем (міжпланетні польоти, розліт речовини при спалахах наднових, іонізація атомів та молекул). А, значить, розвиток вищих, ніж фізична, форм організації та руху матерії (хімічної, біологічної, соціальної) можливий лише в світах з певними фундаментальними фізичними властивостями, зокрема лише в тривимірних світах. Останнє твердження становить суть так званого *антропного принципу*, який має величезне світоглядне значення. Обґрунтування цього принципу не обмежується щойно сказаним. Воно включає як необхідні умови якісного розвитку матерії досить тонку збалансованість між собою констант фундаментальних фізичних взаємодій і спектру мас елементарних частинок (див. докладніше про це в [33]). Антропний принцип робить якщо не необхідним, то вельми природним телеологічний погляд на світ, тобто уявлення про те, що наш світ створений спеціально з певною метою, наприклад, появи в ньому людини. Але слідом постає питання – ким створений? Тобто телеологічний погляд на світ означає, по суті, і теологічний, релігійний погляд на нього. Але уявлення про множинність всесвітів, про яку згадувалося на початку цього розділу, дозволяє зберегти і розвинути матеріалістичний погляд на світ. При великій кількості всесвітів та випадковому характері формування їх властивостей, який впливає з квантової природи раннього Всесвіту, виникнення всесвіту з усіма необхідними умовами для його якісної еволюції є явищем закономірним, але ця закономірність має імовірнісну, стохастичну природу.

Задачі до глави III.

3.1. Довести оцінку похибки при розв'язанні рівняння Кеплера методом ітерацій:

$$|E - E_n| \leq \frac{1}{1-e} |E_{n-1} - E_n|.$$

3.2. Одержати формулу Гюльдена для малих значень ексцентриситету:

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin M}{\cos M - e}.$$

3.3. Довести, що для аналітичної функції ексцентричної аномалії $F(E)$ і будь-якого натурального n :

$$\frac{d^n F}{de^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left[F'(M) \sin^n M \frac{\partial E}{\partial M} \right].$$

3.4. Користуючись рядом Лагранжа, довести, що функція

$$\frac{1}{\sqrt{1-2te+e^2}}$$

є створюючою функцією поліномів Лежандра.

3.5. Розкласти в ряд Фур'є за середньою аномалією модуль швидкості V , її радіальну і нормальну до радіуса компоненти V_r та V_n в задачі двох тіл.

3.6. Знайти найменший та найбільший час перельоту між планетами, що рухаються за компланарними орбітами з великими півосями a_1 і a_2 та ексцентриситетами e_1 і e_2 .

3.7. Довести теорему Ейлера для параболічного руху.

3.8. Записати аналог теореми Ламберта для гіперболічного руху.

3.9. Визначити траєкторію та закон руху за нею зірки в однорідній еліптичній галактиці, знайшовши повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі цієї задачі.

3.10. Зірка рухається в однорідному кульовому скупченні за еліптичною орбітою, центр якої збігається з центром еліпса. Довести, що модуль її швидкості дорівнює

$$V = \frac{2\pi\rho}{P},$$

де ρ – півдіаметр, спряжений з радіусом-вектором зірки, а P – період її обертання за орбітою.

3.11. Орбіта точки, що рухається під дією центральної сили $F(r)$, має перицентр і апоцентр. Довести, що швидкість точки на довільній відстані r визначається за формулою:

$$V^2 = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \int_a^r F(r) dr + \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \int_r^b F(r) dr,$$

де a і b – відстані в перицентрі та апоцентрі.

3.12. Знайти в квадратурах розв'язок рівнянь руху точки під дією центральної сили

$$F(r, t) = \frac{\mu}{(at + b)r^2}.$$

3.13. Знайти закон руху матеріальної точки (залежність відстані r і часу t від величини інтервалу s , що падає в полі Шварцшильда: а) зі стану спокою з відстані $r = R$, б) зі стану спокою з нескінченності, в) з нескінченності з початковою швидкістю V_∞ .

3.14. Знайти час падіння на притягуючий центр матеріальної точки в просторі N вимірювань ($N \geq 4$), якщо падіння починається з відстані $r = R$.

Глава IV. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНОГО РУХУ

Поняття збуреного та незбуреного руху були введені в розділі 1.3. Їх рівняння є, відповідно,:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F} \quad (4.1)$$

та

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (4.2)$$

при умові, що $F \ll \mu/r^2$. Тобто за незбурений рух приймається кеплерівський рух. Ще раз зауваживши, що подекуди в небесній механіці за незбурений рух обирають і інші випадки руху з інтегровними рівняннями, ми надалі будемо виходити саме з рівнянь (4.1) і (4.2). При цьому, нагадаємо, рівняння незбуреного руху мають такий загальний розв'язок:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i \\ \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

де

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad u = \omega + v, \quad \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (4.4)$$

Основна ідея введення понять незбуреного і збуреного руху полягає в тому, щоб, виходячи з розв'язку рівнянь незбуреного руху, одержати наближений розв'язок рівнянь збуреного руху.

4.1. Метод оскулюючих елементів.

4.1.1. Основи методу. Якщо є початкові умови

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0), \quad (4.5)$$

то орбіти збуреного і незбуреного рухів будуть проходити через одну і ту ж точку \vec{r}_0 і мати в цій точці одну і ту ж саму дотичну з напрямком $\dot{\vec{r}}_0$. Тому на малому інтервалі часу $t_0 - \Delta t < t < t_0 + \Delta t$ орбіта збуреного руху буде достатньо мало відрізнятися від орбіти незбуреного руху (ця різниця буде малою вищого порядку від Δt). Кількісно при даному значенні інтервалу Δt малість різниці орбіт буде залежати від ступеня виконання нерівності $F \ll \mu/r^2$. Однак те ж саме матимемо і в такому ж околі моменту часу $t_1 = t_0 + 2\Delta t$, якщо знайти розв'язок рівнянь обох рухів для початкових умов \vec{r}_1 та $\dot{\vec{r}}_1$. В цілому збурений рух на скінченному відрізку часу $t_0 < t < t_n$) можна наближено представити набором незбурених кеплерівських рухів на проміжках $t_k - \Delta t < t < t_k + \Delta t$, кожен з яких буде мати свої початкові умови і, відповідно, свої значення елементів орбіти (рис. 4.1). При цьому ці значення елементів для сусідніх апроксимуючих кеплерівських рухів будуть мало відрізнятися один від другого.

Якщо ж зробити граничний перехід при $\Delta t \rightarrow 0$, то кожному моменту часу t буде відповідати кеплерівський рух такий, що його радіус-вектор \vec{r} і вектор швидкості $\dot{\vec{r}}$ будуть збігатися з радіусом-вектором і вектором швидкості збуреного руху. Кожен з цих кеплерівських рухів буде мати свої елементи орбіти, тобто ці елементи перетворяться тепер на неперервні функції часу $\Omega(t), \omega(t), \dots, \tau(t)$. Ми матимемо нескінченну послідовність кеплерівських орбіт, кожна з яких у відповідній точці буде дотикатися до орбіти збуреного руху. Або, як кажуть в таких випадках в геометрії, збурена орбіта буде *огинаючою* сімейства незбурених кеплерівських орбіт. З точки ж зору аналітичної ми прийшли до ідеї відшукування розв'язку рівняння збуреного руху методом варіації довільних сталих, якими є елементи орбіти незбуреного руху. В небесній механіці, в ході розвитку якої цей метод і виник, він дістав свою назву – метод оскулюючих орбіт або оскулюючих елементів.

Оскулюючий рух – це такий незбурений рух, що в кожен момент часу t має радіус-вектор $\vec{r}(t)$ і швидкість $\dot{\vec{r}}(t)$ такі самі, як і в досліджуваному збуреному русі. Його елементи, що є змінними величинами, – *оскулюючі елементи*, його орбіта – *оскулююча орбіта*. Цікаве походження цього терміну. Він походить від латинського слова “поцілунок” – збурена орбіта в кожній своїй точці “цілується” з відповідною кеплерівською орбітою.

З методом варіації довільних сталих читач, мабуть, стикався в теорії лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами і довільною правою частиною. Там цей метод приводить до системи лінійних диференціальних рівнянь для сталих, які варіюються, і розв'язок якої завжди знаходиться в квадратурах. В нашому ж випадку цей метод означає перехід від рівнянь (4.1) в координатах до системи шести диференціальних рівнянь для оскулюючих елементів:

$$\frac{dE_i}{dt} = \Phi_i(t, E_j(t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.6)$$

де E_i або E_j – один з елементів кеплерівської орбіти. Зауважимо, що варіюються не обов'язково саме кеплерівські елементи, це може бути і якийсь інший набір елементів орбіти, наприклад, елементи Якобі. Оскулюючий рух може при цьому бути, взагалі кажучи, довільного типу – еліптичний, гіперболічний т.д. Але, маючи на увазі насамперед рух планет та їх супутників, будемо надалі вважати, що цей рух еліптичний.

Чи інтегрується система рівнянь (4.6) в скінченному вигляді? Якщо ні, то який сенс в застосуванні методу варіації довільних сталих до задачі двох тіл? Для того, щоб відповісти на ці питання, треба насамперед одержати рівняння для оскулюючих елементів в явному вигляді. Зробити це можна різними шляхами. Один з них заснований на використанні перших інтегралів. Якщо функція $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i), \dot{\vec{r}}(t, E_i)) = C$ є першим інтегралом рівняння незбуреного руху (4.2), то функція $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i(t)), \dot{\vec{r}}(t, E_i(t))) = C$ буде першим інтегралом рівняння

збуреного руху (4.1). Знайдемо перші похідні за часом t від обох цих перших інтегралів:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots = 0, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{dE_i}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Координати і швидкості в обох рівностях (4.7) співпадають, а різниця прискорень дорівнює збурюючому прискоренню \vec{F} . Тому, віднімаючи першу рівність від другої, одержимо, що

$$\sum_{i=0}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{dE_i}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{x}} F_x + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{y}} F_y + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{z}} F_z = 0. \quad (4.8)$$

Одержане рівняння є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно похідних від оскулюючих елементів за часом. Маючи шість незалежних перших інтегралів, з системи шести рівнянь типу (4.8) можна знайти ці похідні, тобто одержати систему диференціальних рівнянь (4.6). Таким чином з трьох компонент інтеграла моменту відносно просто знаходяться рівняння для елементів Ω, ω та i . Але знаходження в такий спосіб інших трьох рівнянь потребує значно більш кропітких обчислень.

Аналітична механіка пропонує для переходу від рівнянь руху в координатах до рівнянь в оскулюючих елементах певний стандартний апарат – дужки Лагранжа. Однак його застосування також потребує досить громіздких обчислень. Ми підемо іншим шляхом. Спочатку розглянемо випадок, коли збурююча сила \vec{F} потенціальна, тобто існує збурюючий потенціал R , і сила $\vec{F} = \text{grad}R$. При цьому ми використаємо розв'язок задачі двох тіл, одержаний методом Гамільтона-Якобі, знайдемо рівняння для оскулюючих елементів Якобі, а потім перейдемо до рівнянь для елементів Кеплера. І нарешті розглянемо загальний випадок.

4.1.2. Рівняння Лагранжа для оскулюючих елементів. Ми знайшли розв'язок задачі двох тіл в елементах Якобі α_i, β_i і встановили їх зв'язок з елементами Кеплера (див. розділ (3.3)). Нагадаємо співвідношення, які зв'язують ці дві системи елементів орбіти в задачі двох тіл:

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1. \quad (4.9)$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i, \quad \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (4.10)$$

Елементи Якобі в збуреному русі відповідають функції Гамільтона $H = H_0 - R$, де H_0 – функція Гамільтона незбуреного руху (3.72), до якої треба додати потенціальну енергію збурення, яка дорівнює $U_1 = -R$. Елементи α_i і β_i в збуреному русі є канонічно-спряженими змінними. Це впливає із співвідношень (3.86)–(3.88), тому вони ще мають назву *канонічних елементів*.

Якщо застосувати до елементів Якобі будь-яке канонічне перетворення, то одержимо нову систему канонічних елементів. В небесній механіці застосовуються також канонічні елементи Делоне (див. підрозділ 5.2.2) та перша і друга системи канонічних елементів Пуанкаре.

Рівняння Гамільтона, яким задовольняють канонічні змінні α_i та β_i , такі:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}. \quad (4.11)$$

Але, оскільки гамільтоніан незбуреного руху H_0 приводить до сталих значень елементів α_i та β_i , то рівняння (4.11) переходять в рівняння

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (4.12)$$

Тепер треба в рівняннях (4.12) перейти від оскулюючих елементів Якобі до оскулюючих елементів Кеплера за допомогою співвідношень (4.9) і (4.10). Диференціюючи формули (4.9), матимемо, враховуючи (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \\ \sin i \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_3}{dt} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

А знайшовши похідні від збурюючого потенціалу R за елементами Якобі за допомогою (4.10), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} &= -\frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{\mu(e^2 - 1)}{2p^2} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\mu e}{p} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos i \frac{\partial R}{\partial p} - \sqrt{\mu p} \sin i \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Підставивши тепер (4.14) в (4.12), а потім (4.12) в (4.13), одержимо систему диференціальних рівнянь для оскулюючих кеплерівських елементів – рівняння Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1 - e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{1 - e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ці рівняння придатні при будь-якому типі оскулюючого руху. В підрозділі 2.2.1 ми ввели систему еліптичних елементів $\Omega, \pi, i, a, e, \varepsilon$. Користуючись визначеннями довготи перицентру та середньої довготи в початкову епоху

$$\pi = \Omega + \omega, \quad \varepsilon = \pi + M_0 \quad (4.16)$$

і співвідношеннями

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad p = a(1 - e^2), \quad (4.17)$$

можна перейти від рівнянь (4.15) для загальних кеплерівських елементів до рівнянь для еліптичних елементів. Система рівнянь Лагранжа для еліптичних оскулюючих елементів має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Звернемо увагу на структуру правих частин рівнянь Лагранжа. Ці праві частини є лінійними функціями частинних похідних від збурюючого потенціалу за оскулюючими елементами. При цьому коефіцієнт при похідній за елементом E_1 в рівнянні для елемента E_2 лише знаком відрізняється від коефіцієнта при похідній за елементом E_2 в рівнянні для елемента E_1 . Нарешті, систем рівнянь (4.15) і (4.18) виявляють певну квазіканоничність. В рівняння системи (4.18) для елементів a, e, i входять похідні від потенціалу R тільки за елементами Ω, π, ε і навпаки. В системі (4.15) такими квазіканоничними групами елементів є p, e, i та Ω, ω, τ .

4.2.2. Рівняння Ньютона для оскулюючих елементів. Рівняння Лагранжа застосовуються досить широко, насамперед тоді, коли збурююча сила – це сила тяжіння. Але тоді, коли збурююча сила – це сила опору середовища, наприклад, сила опору атмосфери планети руху її штучного супутника, то ці рівняння вже непридатні. Тому треба розглянути більш загальний випадок, коли збурююча сила \vec{F} задається своїми компонентами X, Y, Z в деякій системі координат x, y, z . При цьому ясно, що вигляд системи рівнянь для оскулюючих елементів в компонентах збурюючої сили не буде залежати від того, потенціальна ця сила чи ні. Тому цю систему можна одержати з системи рівнянь (4.15), перейшовши

від похідних від збурюючого потенціалу до компонент збурюючої сили на підставі тієї умови, що $\vec{F} = \text{grad}R$, тобто

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (4.19)$$

Якщо позначити будь-який з елементів оскулюючої орбіти як E , то

$$\frac{\partial R}{\partial E} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial E} = X \frac{\partial x}{\partial E} + Y \frac{\partial y}{\partial E} + Z \frac{\partial z}{\partial E}. \quad (4.20)$$

Звертаючись до формул (4.3) та (4.4), бачимо, що модуль радіуса-вектора \vec{r} залежить тільки від елементів p, e, τ , а його спрямовуючі косинуси α, β, γ – тільки від елементів Ω, ω, i . Тому для елементів p, e, τ похідні

$$\frac{\partial x}{\partial E} = \alpha \frac{\partial r}{\partial E}, \quad \frac{\partial y}{\partial E} = \beta \frac{\partial r}{\partial E}, \quad \frac{\partial z}{\partial E} = \gamma \frac{\partial r}{\partial E}, \quad (4.21)$$

а для елементів Ω, ω, i –

$$\frac{\partial x}{\partial E} = r \frac{\partial \alpha}{\partial E}, \quad \frac{\partial y}{\partial E} = r \frac{\partial \beta}{\partial E}, \quad \frac{\partial z}{\partial E} = r \frac{\partial \gamma}{\partial E}. \quad (4.22)$$

Обчислюючи похідні від величин α, β, γ за елементами Ω, ω, i , одержимо, що

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \Omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \Omega} \right) = (-\beta, \alpha, 0), \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right) = (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (4.24)$$

де α', β', γ' – це компоненти орта \vec{r}_{\perp}^0 , який спрямований в площині оскулюючої орбіти перпендикулярно орту \vec{r}^0 , а

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}, \frac{\partial \beta}{\partial i}, \frac{\partial \gamma}{\partial i} \right) = (\alpha'', \beta'', \gamma''), \quad (4.25)$$

де $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \vec{R} = \vec{c}/c$, тобто це орт, перпендикулярний до площини оскулюючої орбіти. Вираз (4.23) впливає безпосередньо з формул (4.3), вираз (4.24) враховує, що диференціювання функцій синус та косинус еквівалентне застосуванню формули приведення від аргумента $90^\circ + u$, тобто повороту вектора на 90° . І, нарешті, вираз (4.25) впливає безпосередньо з (2.48).

Якщо ввести систему координат S, T, W , систему що визначається ортами $\vec{r}^0, \vec{r}_{\perp}^0, \vec{R}$ (так звану *природну систему координат*, див. рис. 4.2), то матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

буде матрицею спрямовуючих косинусів системи координат S, T, W відносно системи x, y, z . Це означає, що, позначаючи компоненти збурюючої сили \vec{F} в новій системі координат також літерами S, T, W , можна записати співвідношення, які зв'язують компоненти S, T, W з компонентами X, Y, Z :

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \cdot Y + \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix} \cdot Z. \quad (4.26)$$

Тепер, сполучаючи (4.20) з (4.23)–(4.25), знаходимо, що похідні від збурюючого потенціалу R за елементами Ω, ω, i дорівнюють:

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = rT, \quad \frac{\partial R}{\partial i} = r \sin u \cdot W, \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega} = r(-\beta X + \alpha Y) = r(\cos i \cdot T - \cos u \sin i \cdot W). \quad (4.27)$$

Для одержання останнього виразу треба звернути увагу на те, що вираз в дужках є z -компонентою векторного добутку $\vec{F} \times \vec{r}^0$ і знайти вираз для цієї компоненти в системі S, T, W . Підставляючи знайдені похідні в рівняння (4.15), одержимо рівняння для оскулюючих елементів Ω, p, i . При знаходженні похідних від відстані r за елементами p, e, τ треба враховувати не тільки явну залежність величини r від p та e , а і неявну – через істинну аномалію v від p, e і τ . Тому їх обчислення більш громіздке, але і воно дає лінійну залежність від компонент збурюючої сили S, T, W для похідних потенціалу R за елементами p, e, τ . Підставляючи вирази для всіх шести похідних від збурюючого потенціалу за елементами в рівняння (4.15), одержимо врешті-решт таку систему диференціальних рівнянь для оскулюючих елементів у випадку довільної збурюючої сили:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin u}{p \sin i} \tilde{W}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \tilde{W}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} \tilde{S} + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u \cos i \tilde{W}, \\ \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}, \\ \frac{de}{dt} &= \sin v \tilde{S} + \left[\cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{r^2}{e\sqrt{\mu p}} \left[(eN \sin v - \cos v) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

де для скорочення запису введені позначення:

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W, \quad N = \int_0^v \frac{\cos v}{(1 + \cos v)^3} dv.$$

Оскільки уявлення про рівняння (4.28) мав ще І.Ньютон, вивчаючи збурений рух Місяця, то ці рівняння мають назву *рівнянь Ньютона для оскулюючих елементів*.

Коефіцієнти в правих частинах рівнянь (4.15), (4.18) та (4.28) залежать від часу через орбітальні координати r та v , але оскільки відстань r виражається через v за рівнянням орбіти, ці коефіцієнти є функціями істинної аномалії v .

Тому може бути доцільним перейти в рівняннях для оскулюючих елементів від незалежної змінної t до незалежної змінної v . Для цього треба знайти повну похідну dv/dt . Ця похідна виявляється рівною

$$\frac{dv}{dt} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} + \frac{\cos v}{e} \tilde{S} - \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T}. \quad (4.29)$$

Від рівнянь Ньютона (4.28) можна перейти до рівнянь для інших елементів, наприклад, до еліптичних елементів. Всі ці різновиди диференціальних рівнянь для оскулюючих елементів можна знайти в довіднику [36]. Зокрема, для великої півосі таке рівняння має вигляд:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2ae \sin v}{1 - e^2} \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T}. \quad (4.30)$$

4.2. Інтегрування рівнянь збуреного руху.

4.2.1. Наближене інтегрування рівнянь для оскулюючих елементів.

Системи рівнянь (4.15), (4.18) або (4.28) нелінійні як за аргументом – часом, так і за відшукуваними функціями – оскулюючими елементами, і тому не інтегровні в скінченному вигляді. Чому ж тоді вони лежать в основі всієї теорії збуреного руху в небесній механіці? Питання тим більш слушне, що кожна з цих систем рівнянь вельми громіздка в порівнянні з дуже компактною системою (4.1) рівнянь збуреного руху в координатах. Відповідь впливає із самого поняття збуреного руху, яке пов'язане з виконанням нерівності $F \ll \mu/r^2$. В цьому разі і компоненти збурюючої сили S, T, W також є величинами, малими за модулем. А відтак, малими є і праві частини рівнянь для оскулюючих елементів. Це означає, що самі оскулюючі елементи є функціями, що змінюються дуже повільно на відміну від координат рухомої точки. Тому *рівняння руху в оскулюючих елементах типу (4.6) набагато зручніше для будь-якого методу наближеного інтегрування, ніж рівняння руху в координатах (4.1)*.

Основними аналітичними методами наближеного інтегрування є *метод ітерацій* і *метод малого параметру*. В методі ітерацій наступне наближення

$$E_i^{(k)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_j^{(k-1)}(t)) dt. \quad (4.31)$$

За початкове наближення $E_i^{(0)}$ обирають звичайно початкові умови E_{i0} . Якщо праві частини рівнянь (4.6) залежать від якогось малого параметру σ , (наприклад, відношення маси збурюючої планети до маси Сонця), то маючи степеневий ряд

$$\Phi_i(t, E_j, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \Phi_i^{(k)}(t, E_j), \quad (4.32)$$

можна побудувати ряд

$$E_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \tilde{E}_i^{(k)}(t), \quad (4.33)$$

де коефіцієнти ряду (4.33) можуть бути знайдені за допомогою квадратур:

$$\tilde{E}_i^{(k)}(t) = \int_{t_0}^t E_i^{(k)}(t, \tilde{E}_j^{(0)}, \dots, \tilde{E}_j^{(k-1)}) dt, \quad (4.34)$$

а $E_i^{(k)}$ – певні поліноми відносно величин $E_j^{(0)}, \dots, E_j^{(k-1)}$, які є вже відомими функціями часу. Неважко переконатися, що перші наближення в обох цих методах наближеного інтегрування будуть однаковими і дорівнювати

$$E_i^{(1)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_{j0}) dt, \quad (4.35)$$

наближення ж вищих порядків вже співпадати не будуть.

Ці ж самі методи застосовні і до рівнянь руху в координатах. Але при інтегруванні рівнянь в оскулюючих елементах знадобиться значно менше ітерацій (4.31) або членів ряду (4.33) для досягнення заданої точності або при тому ж числі ітерацій або членів ряду буде досягнута значно більша точність, ніж при використанні рівнянь в координатах.

У випадку чисельного інтегруванні рівнянь руху на заданому інтервалі часу при інтегруванні рівнянь типу (4.6) завдяки малості похідних dE_i / dt можна буде взяти значно більший крок інтегрування при заданій точності або досягнути значно більшої точності при заданому кроці, ніж при інтегруванні рівнянь (4.1).

Крім того, оскільки кожен з елементів орбіти несе певну специфічну інформацію про рух, то ті чи інші особливості збурюючої сили можуть приводити до часткового інтегрування або, принаймні, спрощення системи рівнянь для оскулюючих елементів. Наочним прикладом такої ситуації є рух штучного супутника під дією опору атмосфери планети. Сила опору спрямована в бік, протилежний вектору швидкості, і, відповідно, лежить в площині оскулюючої орбіти. Тому її компонента $W=0$. З системи рівнянь Ньютона (4.28) видно, що рівняння для довготи вузла Ω та нахилення орбіти i інтегруються тривіально, а рівняння для перицентрової відстані ω спрощується. Маємо, що $\Omega = \Omega_0$ та $i = i_0$, а це означає, що площина руху лишається незмінною.

Диференціюючи координати за елементами орбіти, можна за допомогою рівнянь в оскулюючих елементах знайти наближені вирази для координат, як функцій компонент збурюючої сили або похідних від збурюючого потенціалу за елементами (див., наприклад, [44]).

4.2.2. Вікові і періодичні збурення. Малість збурюючої сили порівняно з центральною ньютонівською проявляє себе досить ефективно, якщо застосувати до рівнянь руху в оскулюючих елементах можливість розкладу всіх характеристик еліптичного руху в ряди. При цьому маються на увазі ряди Фур'є за середньою аномалією, бо значення оскулюючого ексцентриситету орбіти наперед невідомі, і треба використовувати ряди, збіжні при всіх значеннях ексцентриситету.

Отже, припустимо, що ми маємо розклад правих частин рівнянь для оскулюючих елементів в ряди Фур'є:

$$\frac{dE}{dt} = A_0(E_j) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(E_j) \cos kM + B_k(E_j) \sin kM), \quad (4.36)$$

(індекс i для простоти запису опущений). Якщо малі праві частини цих рівнянь, то тим більше малими будуть і коефіцієнти ряду (4.36). І для одержання першого наближення розв'язку рівнянь (4.36) треба обчислити коефіцієнти A_k, B_k при початкових значеннях елементів E_{j0} . Матимемо:

$$\frac{dE^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(0)} \cos kM + B_k^{(0)} \sin kM). \quad (4.37)$$

Якщо згадати тепер, що $M = n_0(t - t_0) + M_0$, то рівняння (4.37) легко інтегрується, і перше наближення для елемента E буде таким:

$$E^{(1)} = E_0 + A_0^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{A_k^{(0)}}{kn_0} \sin kM + \frac{B_k^{(0)}}{kn_0} \cos kM \right) \Big|_{t_0}^t. \quad (4.38)$$

Розглянемо структуру одержаного виразу (4.38). Крім постійного доданка E_0 він містить лінійний за часом член $A_0^{(0)}(t - t_0)$ і нескінченну кількість періодичних членів. Хоча коефіцієнт $A_0^{(0)}$ малий за модулем, добуток $A_0^{(0)}(t - t_0)$ необмежено зростає з часом. Періодичні члени утворюють збіжний ряд з малою сумою, причому такий, що збігається швидше, ніж вихідний ряд (4.37). Різниця $\delta E^{(1)} = E^{(1)} - E_0$ – це *збурення* елемента E , в даному разі *збурення першого порядку*. Так от, вплив на збурення в цілому лінійного члена і суми періодичних буде принципово різним. Періодичні члени описують лише відносно невеликі кількісні відхилення збуреного руху від незбуреного, які до того ж періодично обертаються на нуль. За рахунок же лінійного члена за достатньо великий час зміна відповідного елемента орбіти може суттєво вплинути на характер збуреного руху. Так, наприклад, майже кругова початкова орбіта може перетворитися на сильно витягнутий еліпс, може істотно змінитися нахил площини орбіти і таке інше. Лінійні члени в збуреннях першого порядку мають назву *вікових збурень*. Періодичні члени в (4.38) – це *періодичні збурення*. Якщо підставити перше наближення (4.38) в рівняння (4.36), то можна одержати збурення другого порядку, яке буде містити крім періодичних збурень квадратичні за часом вікові збурення, а також добуток лінійних множників на тригонометричні – *змішані збурення*, тобто періодичні збурення, але з все зростаючими з часом амплітудами. Але в усякому разі, якщо нам потрібен достатньо точний кількісний опис збуреного руху, то нам потрібно мати вікові і змішані збурення і необхідну кількість перших періодичних збурень. Якщо ж нас цікавить лише якісний аналіз відмінностей збуреного руху від незбуреного, то можна обмежитися лише віковими збуреннями, зокрема в першого порядку.

При цьому важливим і корисним є встановлення факту відсутності вікових збурень, що в першому наближенні буде мати місце тоді, коли відповідний коефіцієнт $A_0^{(0)} = 0$.

Однак за певних обставин якісне співвідношення між віковими та періодичними збуреннями, про яке йшлося вище, може порушуватися. Розглянемо так звану *двохпланетну задачу*, тобто задачу про взаємне збурення руху планети m_1 планетою m_2 і навпаки. Тоді збурююча сила та її потенціал є функціями від координат обох планет і, тим самим, є періодичними функціями від середніх аномалій цих планет M_1 та M_2 . Тепер рівняння для першого наближення будь-якого елемента орбіти збурюваної планети буде таким:

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)}(M_2) + \sum_{k_1=1}^{\infty} (A_{k_1}^{(0)}(M_2) \cos k_1 M_1 + B_{k_1}^{(0)}(M_2) \sin k_1 M_1), \quad (4.39)$$

де кожен з коефіцієнтів $A_{k_1}^{(0)}$ може бути розкладений в ряд Фур'є за істинною аномалією M_2 :

$$A_{k_1}^{(0)} = A_{k_1,0}^{(0)} + \sum_{k_2}^{\infty} (A_{k_1,k_2}^{(0)} \cos k_2 M_2 + B_{k_1,k_2}^{(0)} \sin k_2 M_2), \quad (4.40)$$

аналогічний ряд може бути одержаний і для коефіцієнтів $B_{k_1}^{(0)}$. Якщо підставити ряди для коефіцієнтів $A_{k_1}^{(0)}, B_{k_1}^{(0)}$ в ряд (4.39), то після певних його перетворень одержимо подвійний ряд Фур'є:

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_{0,0}^{(0)} + \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} (A_{k_1, k_2}^{(0)} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) + B_{k_1, k_2}^{(0)} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2)). \quad (4.41)$$

Звернемо увагу на дуже важливу для подальшого обставину. При одержанні ряду (4.41) треба перейти від добутків синусів та косинусів до синусів та косинусів сум, а для цього треба мати добутки цих функцій з певним знаком у відповідності з формулами синуса та косинуса суми. Цього можна досягти, якщо в разі потреби змінювати знак коефіцієнта, вводячи в розгляд від'ємні частоти k_1 або k_2 . Тому в подвійному ряді Фур'є (4.41) індекси сумування пробігають вже значення не від 0 до ∞ , а від $-\infty$ до $+\infty$. Після інтегрування рівняння (4.41) перше наближення для елемента E_1 матиме вигляд:

$$E_1^{(1)} = E_1^{(0)} + A_{0,0}^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{A_{k_1, k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2) + \frac{B_{k_1, k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) \right] \Big|_{t_0}^t. \quad (4.42)$$

В ряді (4.42) знаменники у виразах для амплітуд періодичних збурень не тільки не обов'язково збільшуються, а навпаки, можуть і зменшуватися і навіть обернутися на нуль. Практично однак з огляду на те, що значення середніх рухів n_1, n_2 визначаються в решті-решт в конкретних задачах з якихось вимірювань з обмеженою точністю з одного боку, а з другого є змінними в часі,

то може йтися про ситуацію, коли ці середні рухи лише близькі до співмірності, тобто $n_1/n_2 \cong -k_2/k_1$. Інакше кажучи, частота збурюючої сили з боку планети m_2 є близькою до співмірності з власною частотою руху планети m_1 , тобто система близька до резонансного стану. Зрозуміло, що це відноситься і до збурюючої дії планети m_1 на планету m_2 . В розглядуваному випадку амплітуди відповідних гармонік ряду (4.42) зростають і можуть стати вже не малими, зростають і періоди цих збурень

$$T_{k_1, k_2} = \frac{2\pi}{|k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}|}. \quad (4.43)$$

Такі майже резонансні збурення мають назву *довгоперіодичних збурень*. Ці збурення на проміжках часу, співставних з їх періодами, можуть за характером їх впливу на збурений рух не відрізнятися від вікових збурень. Практично мають значення довгоперіодичні збурення лише з достатньо малими частотами k_1 та k_2 . На великих частотах резонансний ефект подавлюється спрямуванням до нуля коефіцієнтів $A_{k_1, k_2}^{(0)}$ та $B_{k_1, k_2}^{(0)}$, яке є необхідною умовою збіжності ряду (4.42). Відомим прикладом довгоперіодичних збурень є взаємні збурення в русі Юпітера і Сатурна на частотах $|k_1| = 2$ та $|k_2| = 5$, бо орбітальний період Юпітера близький до 12 років, а Сатурна – до 30 років. Період цих збурень близько 900 років. Детальний розгляд проблеми резонансів та малих знаменників в небесній механіці можна знайти в [13].

4.2.3. Еволюційні рівняння збуреного руху. Як вже вказувалося, важливим завданням при дослідженні збуреного руху є виділення вікових збурень. Зробити це можна в такий спосіб. З малості збурюючої сили впливає малість зміни оскулюючих елементів за певний характерний час. У випадку еліптичного руху таким характерним часом є період обертання. Усереднимо рівняння для оскулюючих елементів за періодом обертання T . За визначенням середнього від функції на проміжку матимемо:

$$\frac{d\bar{E}_i}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_i(t, E_j) dt. \quad (4.44)$$

Але при цьому з огляду на вище сказане будемо вважати елементи E_j сталими, і враховувати при обчисленні інтеграла (4.44) лише пряму залежність функції Φ_i від часу. Ліворуч ми поміняли місцями операції усереднення і диференціювання, що можливо зробити, бо обидві ці операції лінійні. Якщо ж тепер скористатися для правої частини рівняння Φ_i рядом Фур'є для неї (4.36), то всі періодичні члени саме тому, що вони є періодичними функціями з періодом T , після інтегрування обернуться на нулі, і залишиться тільки інтеграл від вільного члена A_0 , який після інтегрування за часом усередненого рівняння якраз і дасть вікове збурення елемента E_i .

Практично метод усереднення в небесній механіці застосовувався ще з XVIII сторіччя, зокрема в задачі про астрономічну прецесію Землі. Але строге

його обґрунтування і, тим самим, межі його застосування були дані лише в 30-роках ХХ сторіччя, коли М.М.Боголюбовим, М.М.Криловим та Ю.О.Мітропольським була розвинута асимптотична теорія нелінійних коливань. Узагальнюючи, ситуацію, про яку йдеться, можна описати в таких термінах. Є певний нелінійний періодичний процес. Змінні, які його описують, можна поділити на дві групи – “швидкі” та “повільні”. “Повільні” змінні за період змінюються достатньо мало, а “швидкі” можуть за період змінюватися довільним чином. Тоді диференціальні рівняння цього процесу, усереднені послідовно за всіма “швидкими” змінними, будуть асимптотично точно описувати неперіодичну вікову частину зміни “повільних” змінних. Таким чином, усереднені рівняння описують еволюцію розглядуваного процесу протягом часу значно більшого від періода процесу, і тому мають назву його *еволюційних рівнянь*. Послідовне усереднення за незалежними “швидкими” змінними припустиме тоді, коли між ними нема резонансних співвідношень (практично – близьких до резонансних). Докладніше асимптотична теорія нелінійних коливань розглянута в [12,41].

В нашому випадку збуреного руху “повільними” змінними є оскулюючі елементи, а “швидкими” – координати, і, насамперед, істинна аномалія. Оскільки залежність від часу t в інтегралі усереднення (4.44) йде через істинну аномалію v і залежний від неї радіус $r(v)$, доцільно в цьому інтегралі перейти від змінної інтегрування t до змінної v , враховуючи, що

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}, \quad T = \frac{2\pi}{n}. \quad (4.45)$$

Тоді еволюційні рівняння набудуть такого вигляду:

$$\frac{d\bar{E}_i}{dt} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_i(r(v), v, E_j) \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} dv, \quad (4.46)$$

де, нагадаймо, елементи E_j розглядаються як сталі.

Певне спрощення в застосування методу усереднення можна внести, якщо існує збурюючий потенціал R . Тоді в силу лінійної залежності правих частин рівнянь (4.15) або (4.18) від похідних $\partial R / \partial E_j$, досить усереднити цей потенціал:

$$\bar{R} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r(v), v, E_j) \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} dv \quad (4.47)$$

і підставити похідні від усередненого потенціалу \bar{R} у відповідні рівняння для оскулюючих елементів:

$$\frac{d\bar{E}_i}{dt} = \Phi_i \left(E_j, \frac{\partial \bar{R}}{\partial E_j} \right). \quad (4.48)$$

При цьому усереднений потенціал \bar{R} може залежати від меншого числа елементів, що приводить до спрощення еволюційних рівнянь, а інколи до їх часткового або навіть повного інтегрування. Відповідні приклади будуть розглянуті в наступній главі.

Неодноразово вище йшлося про малість різних величин, насамперед правих частин рівнянь для оскулюючих елементів. Уточнимо, про яку ж малість йдеться. Нехай рівняння типу (4.6) зведені до безрозмірних змінних. Для цього потрібно рівняння для кутових змінних та ексцентриситету поділити на величину з розмірністю кутової швидкості n , а рівняння для елементів p або a – на величину na . Тоді можна зробити таке твердження – малі величини Φ_i та $\delta E_i (t \leq T)$ є малими того ж порядку малості, що мала величина Fr^2 / μ .

Подальшим розвитком, ідеї методу усереднення є, по суті, метод адіабатичних інваріантів. Усереднюючи за періодом похідну від функції Гамільтона за часом, зміна якої викликана повільною зміною певних параметрів системи, приходимо врешті-решт до існування постійних (в певному наближенні) величин

$$I_k = \oint p_k dq_k,$$

де p_k – узагальнений імпульс, що відповідає періодичній узагальненій координаті q_k . Величини I_k , які і мають назву *адіабатичних інваріантів*, можуть бути використані для дослідження властивостей поведінки динамічної, зокрема небесно-механічної системи.

4.3. Стійкість руху небесних тіл

4.3.1. Елементи теорії стійкості руху. Перш ніж розглядати питання стійкості руху в задачах небесної механіки, зупинимось на основних уявленнях про стійкість руху взагалі.

Під стійкістю будь-якого процесу розуміють те, що на відхилення збурених його параметрів від незбурених накладені певні обмеження. Ці обмеження можуть бути більш жорсткими або більш слабкими. Тому існують різні визначення стійкості руху. Найбільш слабким є поняття стійкості, пов'язане з ім'ям Ж.Лагранжа. В застосуванні до системи матеріальних точок *стійкість за Лагранжем* означає, що всі відстані між точками системи Δ_{ij} є скінченними на протязі часу від t_0 до ∞ , тобто система “не розвалюється”. Тривіальним прикладом руху, стійкого за Лагранжем, є еліптичний кеплерівський рух.

Найбільш жорстким поняттям стійкості руху є визначення, що його дав О.М.Ляпунов у своїй праці “Загальна задача про стійкість руху”, яка вийшла у виданні Харківського університету в 1892 р. [25]. Для того, щоб дати це визначення, розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_i), \quad x_i^{(0)} = x_i(0), \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (4.50)$$

де x_i – це відхилення збурених параметрів певного процесу (зокрема руху матеріальної точки) від незбурених, X_i – збурення правих частин незбурених рівнянь (збурюючі сили), $x_i^{(0)}$ – збурення початкових умов. Тим самим підкреслюється, що стійкість розглядуваного процесу можна вивчати, як щодо збурюючих факторів вихідної моделі процесу, так і щодо збурення початкових

умов. Процес є *стійким за Ляпуновим* тоді, коли, якщо всі значення $|x_i(t)|$ будуть малими величинами, якщо малими є значення $|X_i|$ або $|x_i^{(0)}|$ відповідно. Точніше кажучи, це означає, що для всякого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що $|x_i(t)| < \varepsilon$ для всіх $t > t_0$, якщо $|X_i| < \delta$ або $|x_i^{(0)}| < \delta$.

Проміжним є поняття стійкості відносно траєкторії. Якщо ввести параметричні рівняння збуреного і незбуреного процесів $y_i = y_i(t)$ та $y_{0i} = y_{0i}(t)$, тоді можна дати таке визначення. Процес є *стійким відносно траєкторії* тоді, коли для будь-якого малого ε буде існувати таке δ , що для будь-якої точки на траєкторії y_0 знайдеться хоч одна точка траєкторії y така, що $|y_i - y_{0i}| < \varepsilon$, якщо $|X_i| < \delta$ або $|x_i^{(0)}| < \delta$, хоча при цьому може бути $|x_i(t)| = |y_i(t) - y_{0i}(t)| > \varepsilon$. Тобто траєкторії збурена і незбурена близькі одна до одної, але збурена і незбурена точки можуть розійтися по цих траєкторіях на скінченну відстань, незважаючи на малість збурюючих сил або збурень початкових умов. При цьому може йтися як про траєкторії матеріальної точки в реальному просторі, так і про траєкторії зображуючої точки в фазовому просторі розглядуваного процесу.

Якщо система (4.49) інтегровна в скінченному вигляді, висновки про стійкість або нестійкість можна звичайно зробити з аналізу її розв'язку. Якщо ця система лінійна, то це визначається характером коренів її характеристичної системи. Якщо серед цих коренів є хоч один дійсний додатний або комплексний з додатною дійсною частиною, то рух буде нестійким. Відповідне збурення буде з часом необмежено зростати за модулем. В інших випадках рух буде стійким. На протязі XVIII–XIX століть стійкість нелінійних систем досліджували, замінюючи ці системи їх лінійними наближеннями і вважаючи, що характер руху щодо його стійкості або нестійкості при цьому не змінюється. Однак можна привести елементарний приклад, який показує, що це, взагалі кажучи, не так. Візьмемо рівняння

$$\dot{x} = \varepsilon \sin t, \quad x(0) = 0. \quad (4.51)$$

Його точним розв'язком є $x = \varepsilon(1 - \cos t)$. Розв'язок цього рівняння в лінійному наближенні ($\dot{x} = \varepsilon t$) буде дорівнювати $x = \varepsilon t^2 / 2$. Видно, що лінійне наближення нестійке, в той час, як точний розв'язок – стійкий.

В порозумінні того, що не можна за лінійними наближеннями робити остаточного висновку про стійкість нелінійних процесів, а головне, в розробці методів дослідження цього питання в разі неінтегровності відповідної системи рівнянь полягає заслуга О.М.Ляпунова, як засновника теорії стійкості руху. Щоб дати уявлення про цю теорію, сформулюємо *основну* (так звану першу) *теорему Ляпунова про стійкість руху*. Але перед цим нам треба ввести поняття про *знаковизначену* та *знакосталу* функції. Функція $V(t, x_i)$ така, що в околі точки $t=0, x_i=0$ вона набуває значення лише одного знаку або нульові, є *знакосталою*. Якщо ж функція $V(t, x_i)$ в цьому околі набуває значення лише одного знаку, то вона є *знаковизначена*. Тоді має місце така теорема:

Якщо можна знайти таку функцію $V(t, x_i)$, яка при $x_i(t)$, що задовольняють рівнянням для збурень (4.49), є функцією знаковизначеною, а її повна похідна за часом є функцією знакосталою протилежного знаку або тотожно дорівнює нулю, то збурений рух буде стійким.

Інші теореми Ляпунова визначають умови нестійкості динамічної системи* та її асимптотичної стійкості або нестійкості, тобто такої ситуації, коли відповідні нерівності починають виконуватися лише при $t > t_1$, де t_1 – певне достатньо велике значення часу t . Треба однак відзначити, що теорія не дає загального засобу побудови функцій Ляпунова, їх доводиться відшукувати окремо в кожній конкретній задачі. Але почасти така функція так чи інакше пов'язана з енергією досліджуваної системи. Простий приклад цього – відомі умови стійкості та нестійкості положень рівноваги математичного маятника – мінімум та максимум його потенціальної енергії.

О.М.Ляпунов дослідив і зв'язок між стійкістю руху в першому (лінійному) наближенні і стійкістю точного розв'язку нелінійної системи. Якщо система стаціонарна, тобто всі праві частини рівнянь (4.49) не залежать явно від часу, то при всіх від'ємних дійсних частинах коренів відповідної характеристичної системи стійким буде і рух за точним розв'язком. При хоча б одній додатній, а всіх інших від'ємних, рух буде нестійким. І, нарешті, при хоч одній дійсній частині, що дорівнює нулю, висновку про характер руху за лінійним наближенням зробити не можна. Для подальшого ознайомлення з теорією стійкості руху треба звернутися до книг [16,25].

Іншим важливим для небесної механіки напрямком якісного дослідження нелінійних систем є вивчення умов існування періодичних збурених рухів. Сучасний етап цих досліджень було започатковано також роботами О.М. Ляпунова та А.Пуанкаре. Досліджувалося таке питання. Нехай система рівнянь руху залежить від кількох параметрів, і відомо, що при певних значеннях цих параметрів існує періодичний розв'язок системи (так званий *породжуючий розв'язок*). Чи існує періодичний розв'язок, якщо параметри приймають значення з достатньо малого околу точки, в якій такий розв'язок існує. О.М.Ляпунов вивчав випадок, коли є ціла область значень параметрів з періодичними розв'язками, а А.Пуанкаре – коли існує лише один такий набір значень параметрів. Наведемо, як приклад, теорему Пуанкаре про існування періодичного збуреного руху для випадку, коли система залежить тільки від одного параметру.

Нехай ми маємо породжуючий розв'язок $\varphi_i(t)$ і досліджуваний розв'язок $x_i = \Phi_i(t, \mu, \beta_j)$, де μ – малий параметр, а $\beta_j = x_j(t_0) - \varphi_j(t_0)$ – це збурення

*Динамічна система – це система, що описується скінченною кількістю параметрів, зміна яких визначається системою звичайних диференціальних рівнянь.

початкових умов. Необхідною і достатньою умовою періодичності розв'язку x_i з періодом T є співвідношення $\Phi(t_0 + T, \mu, \beta_j) - \Phi(t_0, \mu, \beta_j) = 0$. Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \psi_i(\mu, \beta_j) &= \Phi_i(t_0 + T, \mu, \beta_j) - \Phi_i(t_0, \mu, \beta_j), \\ \Delta(\mu, \beta_j) &= \frac{D(\psi_i)}{D(\beta_i)}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

де $\Delta(\mu, \beta_j)$ – якобіан функцій $\psi_i(\mu, \beta_j)$. Тоді має місце така теорема Пуанкаре:

Якщо $\Delta(\mu, \beta_j)|_{\beta_i=\mu=0} \neq 0$, то при достатньо малих значеннях $|\mu|$ існує єдиний періодичний розв'язок з періодом T , аналітичний відносно μ і такий, що обертається на породжуючий розв'язок $\varphi(t)$ при $\mu = 0$.

Докладніше про результати О.М.Ляпунова і А.Пуанкаре можна дізнатися з [16,31]. Подальші дослідження проблеми періодичних розв'язків належать А.М.Колмогорову та В.І.Арнольду (див. [3]).

В останні десятиріччя розвиток теорії нелінійних систем привів до відкриття таких систем, що характер їх руху змінюється в ході еволюції цих систем – вони можуть переходити із стану стійкості в нестійкий стан, в стан так званого динамічного хаосу. *Динамічний хаос* – це нестійкість, пов'язана з тим, що аттрактором (місцем притягання) стійких розв'язків системи є не точка (поліус, вузол), а певна область фазового простору параметрів системи, яка має назву *странного атрактора*. При цьому зображуюча точка, попадаючи в странный аттрактор, попадає в малий окіл будь-якої його точки нескінченну кількість разів з певною імовірністю. Таким чином, доводиться для системи із скінченною кількістю ступенів свободи переходити від динамічного її опису до статистичного.

4.3.2. Стійкість руху в задачі багатьох тіл. З огляду на неінтегровність рівнянь задачі багатьох тіл в скінченному вигляді її якісний аналіз поряд з розробкою методів її наближеного інтегрування є одним з найважливіших завдань небесної механіки. Зокрема, з точки зору дослідження еволюції систем небесних тіл важливе значення має проблема стійкості їх руху.

Почнемо з розгляду питання про стійкість руху за Лагранжем. Необхідні умови такої стійкості випливають із співвідношень (1.47) та (1.48), які є наслідками перших інтегралів задачі багатьох тіл. Була введена величина

$$R_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad (4.53)$$

обмеженість якої гарантує стійкість системи матеріальних точок за Лагранжем. Якщо не відбувається зіткнення цих точок, то силова функція системи U обмежена зверху. Нехай $U \leq A$, тоді з (1.47) випливає нерівність

$$\ddot{R}_0 \leq 2A + h', \quad (4.54)$$

де h' – подвоєна повна енергія системи в барицентричній системі координат. Двічі інтегруючи цю нерівність, побачимо, що оцінка зверху величини R_0 є квадратичною функцією із старшим коефіцієнтом, який дорівнює $2A + h'$. Тепер

видно, що необхідною умовою стійкості нашої системи за Лагранжем є від'ємне значення енергії h' , бо, якщо величина $2A + h' < 0$, то функція R_0 , а відтак і значення відстаней Δ_{ij} будуть обмежені зверху.

Кроком в подальшому дослідженні цього питання стала *теорема Лапласа про відсутність вікових збурень* в певному випадку задачі двох тіл. А саме, надалі будемо розглядати в цьому підрозділі системи типу Сонячної, тобто такі, в яких маса однієї точки значно більша від мас всіх інших точок даної системи ($m_0 \gg m_1, m_2, \dots, m_n$). В цьому випадку відносний рух точок m_1, m_2, \dots, m_n можна розглядати як збурений і застосувати для його опису метод оскулюючих орбіт. Для доказу теореми Лапласа скористуємося еліптичною системою оскулюючих елементів (4.18). Розкладемо збурюючу функцію R задачі багатьох тіл в ряд Фур'є:

$$R = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM) \quad (4.55)$$

і звернемо увагу на те, що коефіцієнти Фур'є цього ряду не залежать від середньої довготи в початкову епоху ε , бо остання входить лише у вираз для середньої аномалії

$$M = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi. \quad (4.56)$$

Відповідно до цього рівняння першого наближення для великих півосей буде мати вигляд (див. (4.18)):

$$\frac{da^{(1)}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k^{(0)} \sin kM + B_k^{(0)} \cos kM). \quad (4.57)$$

Інтегруючи (4.57), побачимо, що до збурень великих півосей будуть входити лише періодичні члени:

$$a^{(1)} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k^{(0)}}{n_0} \cos kM + \frac{B_k^{(0)}}{n_0} \sin kM \right) \Big|_{t_0}^t. \quad (4.58)$$

Теорема доведена, але тільки в першому наближенні, а значить, лише для певного скінченного проміжку часу. А з визначення стійкості руху випливає, що нетривіальним це поняття є якраз тоді, коли його умови виконуються саме на нескінченному проміжку часу. Думку про те, що така стійкість все ж таки має місце, підсилює *теорема Пуассона про відсутність вікових збурень в другому наближенні* розглядуваної задачі. Однак, строго кажучи, ці теореми не вирішують остаточно питання про стійкість руху за Лагранжем в задачі багатьох тіл.

Крім того, теореми про відсутність вікових збурень великих півосей стають в нагоді при розгляді іншої теореми про стійкість руху в задачі багатьох тіл. Оскільки умови теореми, до розгляду якої ми переходимо, більш-менш виконуються в системі "Сонце – великі планети", то ця теорема, що також була доведена П.Лапласом, відома як *теорема Лапласа про стійкість Сонячної системи*:

Якщо у відносній задачі n тіл з еліптичним оскулюючим рухом точок малої маси:

- 1) початкові значення ексцентриситетів та нахилень малі, тобто $e_{k0} \ll 1, i_{k0} \ll \pi/2$;
- 2) відсутні вікові збурення великих півосей, тобто $a_k = a_{k0} + \alpha_k(t)$, де $\alpha_k/a_k \ll 1$ на проміжку часу $t_0 < t < t_1$;
- 3) величини $m_k \sqrt{\mu_k a_k}$ є величини одного і того ж порядку,

то значення ексцентриситетів $e_k(t)$ і нахилень $i_k(t)$ будуть малими на проміжку часу $t_0 < t < t_1$.

Перша умова відбиває характерні риси будови Сонячної системи в сучасну епоху – орбіти планет близькі до кругових і мало нахилені до площини екліптики. Друга умова для скінченного значення t_1 впливає з теорем про відсутність вікових збурень великих півосей планетних орбіт. Більш сумнівним є виконання третьої умови, особливо, якщо порівняти величини $m\sqrt{\mu a}$ для Меркурія та Юпітера. Але можна вважати, що вона все ж виконується порівняно з безумовним її невиконанням для астероїдів.

Вихідним співвідношенням для доказу теореми про стійкість Сонячної системи є проекція інтегралу моментів на напрямок вектора моменту \vec{c} . Запишемо це співвідношення в такому вигляді:

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k p_k} \cos i_k = c. \quad (4.59)$$

При цьому другий доданок в інтегралі моментів відносної задачі багатьох тіл (1.61) відкинутий в силу нерівностей $m_k \ll m_0$. Згадавши, що фокальний параметр $p = a(1 - e^2)$, перейдемо в (4.59) до великих півосей a_k :

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_k (1 - e_k^2)} \cos i_k = c. \quad (4.60)$$

Друга умова теореми дає змогу записати після деяких перетворень, що

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0} (1 - e_k^2)} \cos i_k = c + \alpha, \quad (4.61)$$

де мала величина

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \alpha_k \sqrt{\mu_k (1 - e_k^2)} \cos i_k.$$

Введемо в розгляд також сталу

$$c_0 = \sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}} \quad (4.62)$$

і візьмемо різницю між (4.62) та (4.60):

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}} \left(1 - \sqrt{1 - e_k^2} \cos i_k\right) = c_0 - c - \alpha. \quad (4.63)$$

Різниця сталих $c_0 - c$ в силу першої умови теореми є малою величиною. При цьому, звичайно, розмірні величини $\alpha, c_0 - c$, а відтак і $c_0 - c - \alpha$ є малими

щодо значення повного кінетичного моменту системи c . Позбавимося тепер від ірраціональності в чисельнику (4.63). Матимемо:

$$\sum_{k=1}^n m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}} \frac{\sin^2 i_k + e_k^2 \cos^2 i_k}{1 + \sqrt{1 - e_k^2} \cos i_k} = c_0 - c - \alpha. \quad (4.64)$$

Проаналізуємо малу величину (4.64). Якщо за третьою умовою теореми сталі множники $m_k \sqrt{\mu_k a_{k0}}$ є однаковими за порядком величини, то безрозмірні величини

$$\frac{\sin^2 i_k + e_k^2 \cos^2 i_k}{1 + \sqrt{1 - e_k^2} \cos i_k} \quad (4.65)$$

повинні бути малими вже відносно 1. Але знаменники в (4.65) обмежені (вони менші від 2), а це означає, що малими повинні бути всі чисельники. Звідси вже і випливає твердження теореми Лапласа – $e_k(t) \ll 1, i_k(t) \ll \pi/2$ на проміжку часу $t_0 < t < t_1$, на якому виконується друга умова теореми.

Обидві теореми Лапласа, взяті разом, означають стійкість відповідної задачі багатьох тіл відносно великих півосей, ексцентриситетів і нахилень орбіт (так званих *позиційних* елементів) і нестійкість відносно довгот вузлів, довгот перицентрів і середніх довгот в початкову епоху. А це, якщо взяти до уваги малість ексцентриситетів і нахилень, означає стійкість задачі по відношенню до траєкторій або її *орбітальну стійкість*. В тій мірі, в якій обидві ці теореми мають відношення до нашої реальної Сонячної системи, вони означають, що її нинішня будова зберігатиметься і в майбутньому. Варто також відзначити, що відносно великі значення ексцентриситетів та нахилень орбіт Меркурія і Плутона якраз і пов'язані, мабуть, з тим, що третя умова теореми про стійкість для них виконується найгірше. Але головне питання полягає в тому, щоб визначити наскільки велике те майбутнє, про яке йдеться. Треба довести теореми Лапласа для проміжку часу (t_0, ∞) або спростувати їх для цього випадку.

Важливим кроком у вирішенні вказаної проблеми стало в 60-х роках ХХ сторіччя створення в аналітичній механіці *теорії КАМ*. Ця теорія дістала свою назву від прізвищ її авторів – А.М.Колмогорова, його учня В.І.Арнольда і швейцарського математика Ю.Мозера. Для того, щоб одержати уявлення про теорію КАМ, розглянемо канонічну систему, для наочності двохвимірну, з функцією Гамільтона

$$H(q_i, p_i, \varepsilon) = H_0(q_i, p_i) + \varepsilon H_1(q_i, p_i), \quad i = 1, 2 \quad (4.66)$$

де H_0 – її незбурена частина, εH_1 – збурююча, ε – мала величина, а безрозмірні незбурені координати q_1, q_2 є періодичними функціями часу з періодом 2π . Якщо взяти тепер ці координати за кутові координати в тороїдальній системі координат і розглянути, як кажуть, фазовий портрет незбуреного руху, то це буде крива, що намотується на певний тор (див. рис.4.3). Якщо частоти координат співмірні, то ця крива буде замкненою, в разі

ж їх неспівмірності вона буде обмотувати тор всюди щільно. При наявності збурення тор почне деформуватися, і задача полягає в дослідженні характеру цих деформацій в залежності від величини параметра ε . В аналітичній постановці задача звелася до побудови збіжних рядів, які описують збурення координат q_i . Це вдалося зробити, застосувавши певне узагальнення методу ітерацій Ньютонa, яке дає в k -тому наближенні похибку порядку e^{-2k} , тобто дуже швидко збіжність.

Перед тим, як сформулювати основний результат теорії КАМ, треба ввести поняття про майже-періодичні та умовно-періодичні функції. Функція $f(x)$ є *майже-періодичною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ в будь-якому проміжку $[a, a+l]$ існує таке число τ , що $a < \tau < a+l$, а $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$. Нехай побудований ряд Фур'є такої майже-періодичної функції

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i\lambda_k x}. \quad (4.67)$$

Якщо в спектрі λ_k функції $f(x)$ будь-яка частота може бути представлена як лінійна функція певного набору базисних частот з цілочисленними коефіцієнтами, тобто

$$\lambda_k = \sum_i^n N_i \lambda_{ni}, \quad (4.68)$$

то функція $f(x)$ має назву *умовно-періодичної*.

Основний результат теорії КАМ (*теорема Арнольда*, [3]) є такий:

Збурений рух, описуваний канонічною системою (4.66), є умовно-періодичним, постійно близьким до відповідного незбуреного руху, майже для всіх початкових умов. Вираз “майже для всіх” означає в даному разі – “за винятком початкових умов, які утворюють множину нульової міри”. Цю множину в даному випадку складають резонансні початкові умови та їх нескінченно малі околиці. Для цих початкових умов (за винятком двовимірних задач) теорія КАМ не дає відповіді на питання про стійкість збуреного руху.

А спостережуваним нами системам якраз властива певна квазі-резонансність (див., наприклад, [6]). Для великих планет Сонячної системи вдалося знайти дев'ять співвідношень типу

$$\sum_i k_i n_i \cong 0, \quad (4.69)$$

що зв'язують середні рухи n_i кількох планет (від трьох до п'яти), як правило, сусідніх. При цьому коефіцієнти k_i є малими цілими числами, переважно це 1 і 2. Такого ж типу співвідношення знайдені і в супутникових системах планет-гігантів. Імовірність випадкового існування сукупності таких співвідношень дуже мала.

З огляду на це М.Овенден в 1973 р. висунув як гіпотезу принцип “найменшої взаємодії”. Згідно з цим принципом супутникова система більшу частину часу близька до такої конфігурації, в якій середня за часом дія S ,

обумовлена взаємодією точок системи, мінімальна. Еквівалентним є твердження, що середнє за часом значення збурюючої функції R (1.58) повинно бути близьким до мінімального. Звідси і випливає існування квазірезонансних співвідношень (4.69). Основою для формулювання цього *принципу Овендена* були результати чисельного інтегрування задачі багатьох тіл з різними співвідношеннями мас точок і різними початковими умовами [34].

З точки зору теорії стійкості руху принцип Овендена означає, що еволюція системи типу супутникової задачі багатьох тіл приводить її саме в квазірезонансний стійкий стан, який забезпечується мінімізацією гравітаційних збурюючих сил. Але тут виникає питання про можливу дестабілізуючу роль відносно дуже малих дисипативних сил – припливних сил та сил опору середовища (оцінки густини останнього в Сонячній системі $\approx 10^{-21} \text{ г/см}^3$). З огляду на це може бути запропонований такий сценарій небесно-механічної еволюції планетних і супутникових систем [13]. Спочатку основну роль відіграють збурюючі сили взаємодії між тілами системи. Вони приводять систему в стійкий квазірезонансний стан згідно з принципом Овендена. В умовах мінімізації дії цих збурюючих сил починають проявляти себе як збурюючі дисипативні сили, які з часом виводять систему із стійкого стану. Знов зростає роль консервативних гравітаційних сил, які приводять систему в новий квазірезонансний стійкий стан і так далі. Звичайно, ці міркування є гіпотетичними, а кожен етап такої еволюції потребує дуже багато часу.

Водночас безперечно, що за певних умов (наприклад, в системі “Сонце – Юпітер – астероїд”, в якій суттєво не виконується третя умова теореми Лапласа про стійкість) квазірезонансний рух є нестійким. Про це свідчить існування *люків Кірквуда* – прогалин в розподілі астероїдів головного поясу за великими півосями їх орбіт, що пов’язані з нестійкістю орбіт із середнім рухом, близьким до співмірності з середніми рухами Юпітера і Сатурна (2:1, 3:2, 5:2 і т.п.).

Нарешті, зауважимо, що неспроможними є численні спроби “проквантувати” Сонячну систему, тобто знайти загальне “теоретичне” обґрунтування відомого правила Бодє-Тиціуса у вигляді формули для великих півосей типу $a_k = a_k(k)$ на зразок формули Рідберга в атомній фізиці. При цьому нерідко посилаються на те, що просторово-обмежена система повинна мати дискретний спектр. Але це стосується неперервних систем. Атом є такою системою (згадаймо фізичний зміст хвильової функції), а класична система скінченної кількості матеріальних точок – ні. Хоча практично просторово-обмеженою її роблять гравітаційні поля інших тіл. Для Сонячної системи – це гравітаційне поле Галактики.

4.3.3. Стійкість обертального руху супутника на коловій орбіті. Досі ми розглядали лише поступальний (орбітальний) рух небесних тіл. Але якщо розглядати небесні тіла як абсолютно тверді тіла скінченних розмірів, то задача про їх осьове обертання та його взаємозв’язок з орбітальним рухом лежить в межах небесної механіки. Розглянемо тепер задачу про стійкість осьового обертання супутника, що рухається за коловою орбітою радіуса R з кутовою

швидкістю $n = \mu / R^{3/2}$. Нам знадобляться для цього три системи координат – 1) інерціальна X_i (осі X_1 та X_2 розташовані в площині орбіти); 2) природна x'_i (вісь x'_1 спрямована за орбітальним радіусом-вектором центра мас супутника \vec{R} , ось x'_3 перпендикулярна площині орбіти); 3) система координат x, y, z , яка жорстко зв'язана з головними осями інерції супутника, осьові моменти інерції відносно яких дорівнюють A_i . Тоді вектор кутової швидкості орбітального руху супутника в системі X_i є $\vec{n} = (0, 0, n)$, а вектор кутової швидкості осьового обертання супутника в цій системі позначимо як $\vec{\omega}$. Матрицю спрямовуючих косинусів осей системи x_i відносно осей системи x'_k позначимо як α_{ik} . Тоді рівняння обертального руху супутника в інерціальній системі, відомі як *рівняння Ейлера*, в індексних позначеннях, які ми вже почали застосовувати, матимуть такий вигляд:

$$A_i \frac{d\omega_i}{dt} + (A_j - A_k)\omega_j\omega_k = M_i, \quad (4.70)$$

в запису (4.70) мається на увазі правило циклічної перестановки індексів, тобто, наприклад, якщо $i=2$, то $j=3$, а $k=1$. Сили, що створюють обертальний момент M_i , можуть мати, взагалі кажучи, різну природу. Ми врахуємо лише момент гравітаційних сил, який виникає тому, що різні елементи маси супутника знаходяться на трохи різних відстанях від центрального тіла і тому притягується ним з різною силою. Цей момент дорівнює

$$\vec{M} = \mu \int_{(m)} \frac{\vec{R}' \times \vec{r}}{R'^3} dm, \quad (4.71)$$

де \vec{R}' – радіус-вектор елемента маси dm в системі X_i , а \vec{r} – радіус вектор того ж елемента в системі x_i . Але $r \ll R$ і тому

$$R' = \sqrt{R^2 + 2\vec{R}\vec{r} + r^2} \cong \sqrt{R^2 + 2\vec{R}\vec{r}} \cong R \left(1 + \frac{\vec{R}\vec{r}}{R^2} \right). \quad (4.72)$$

Підставляючи (4.72) в (4.71), одержимо, що

$$\vec{M} = \frac{\mu}{R^5} \int_{(m)} (\vec{R} \times \vec{r}) \cdot (\vec{R} \cdot \vec{r}) dm. \quad (4.73)$$

Розписуючи (4.73) за координатами в системі x_i векторний та скалярний добутки векторів \vec{R} та \vec{r} , одержуємо врешті-решт, що

$$M_i = -3n^2 (A_j - A_k) \alpha_{1j} \alpha_{1k}. \quad (4.74)$$

Тепер видно, що систему (4.70) не можна розв'язувати без системи рівнянь, що визначає зміну в часі елементів матриці α_{ik} . Якщо ввести орти \vec{e}_i осей x_i , то лінійна швидкість кінців цих ортів дорівнює $\dot{\vec{e}}_i = (\vec{\omega} - \vec{n}) \times \vec{e}_i$. В координатній формі це дасть таке:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_{i1}}{dt} &= \omega_2\alpha_{i3} - \omega_3\alpha_{i2} + n\alpha_{i2}, \\ \frac{d\alpha_{i2}}{dt} &= \omega_3\alpha_{i1} - \omega_1\alpha_{i3} - n\alpha_{i1}, \\ \frac{d\alpha_{i3}}{dt} &= \omega_1\alpha_{i2} - \omega_2\alpha_{i1}.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Система рівнянь (4.70) та (4.75) нелінійна і не інтегрується в скінченному вигляді. Однак вона має перший інтеграл типу інтеграла енергії:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} A_i \omega_i^2 + \frac{3}{2} n^2 A_i \alpha_{i1} - n A_i \omega_i \alpha_{i2} \right) = h.\tag{4.76}$$

Для того, щоб переконатися в цьому, треба знайти повну похідну від (4.76) за часом і підставити в значення похідних від ω_i та α_{ik} з (4.70) і (4.75). Щоб дізнатися, як виглядає супутник з центрального тіла, перейдемо в інтегралі (4.76) до відносної кутової швидкості $\vec{\omega}' = \vec{\omega} - \vec{n}$. Тоді цей інтеграл прийме такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} A_i \omega_i'^2 + \frac{3}{2} n^2 A_i \alpha_{i1}^2 - \frac{1}{2} n^2 A_i \alpha_{i2}^2 \right) = h.\tag{4.77}$$

Нарешті, виключимо з (4.77) величини α_{11}^2 та α_{22}^2 за допомогою співвідношень ортонормованості, яким підкоряються спрямовуючі косинуси. Одержимо такий перший інтеграл:

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} A_i \omega_i'^2 + \frac{3}{2} n^2 \left((A_2 - A_1) \alpha_{21}^2 + (A_3 - A_1) \alpha_{31}^2 \right) + \frac{1}{2} n^2 \left((A_3 - A_2) \alpha_{32}^2 + (A_3 - A_1) \alpha_{31}^2 \right) \right] = h_0,\tag{4.78}$$

де h_0 – нова стала. Ліву частину першого інтеграла (4.78) можна використати як функцію Ляпунова V для дослідження поведінки збуреного обертального руху в околі стану синхронного осьового обертання супутника. Тоді в незбуреному русі $\vec{\omega}' = 0, \vec{\omega} = \vec{n}, \alpha_{ik} = \delta_{ik}$ і $V = 0$. Похідна від лівої частини (4.78) дорівнює нулю, бо це перший інтеграл. А при умові

$$A_3 > A_2 > A_1\tag{4.79}$$

функція V буде знаковизначеною при малих відхиленнях від стану синхронного обертання, тобто цей стан згідно з основною теоремою Ляпунова буде стійким. А сама умова (4.79) означає, що супутник повинен бути зорієнтований таким чином, щоб він був найбільш стиснутим в напрямі, перпендикулярному площині орбіти, а найбільш витягнутим в напрямку на центральне тіло. Саме так зорієнтований Місяць, у якого екваторіальний діаметр, спрямований на Землю, на 3 км більший від діаметра, дотичного до орбіти, а перпендикулярний до них діаметр ще менше. На одержаному результаті засновано і вживаний в космонавтиці принцип *гравітаційної стабілізації* штучних супутників Землі.

Якщо накласти додаткову умову, що осьове обертання відбувається навколо осі, перпендикулярної до орбіти, то задача спрощується, в (4.70) лишається тільки одне рівняння, яке виявляється подібним до рівняння руху математичного маятника і може бути проінтегровано – залежність $t = t(\varphi)$, де φ

– кут повороту супутника навколо осі, дається еліптичним інтегралом. Можна в цьому випадку визначити і межі відхилення супутника від стану синхронного обертання при заданій різниці осьових моментів інерції, при яких зберігається стійкість (або, як, кажуть, має місце *лібраційний режим* обертання), а при виході відхилень за ці межі обертання супутника стає нестійким (він переходить в *ротаційний режим* обертального руху, див. про це докладніше в [2,5]).

Задачі до глави IV.

4.1. Виразити компоненти збурюючого прискорення S і T через компоненти F_r , дотичну до орбіти, і F_n , спрямовану за нормаллю до орбіти в її площині.

4.2. При значеннях $e \rightarrow 0$ елемент ω стає невизначеним. Щоб уникнути пов'язаних з цим труднощів, вводять елементи $p = e \sin \omega, q = e \cos \omega$. Знайти диференціальні рівняння для оскулюючих елементів p та q .

4.3. При значеннях $i \rightarrow 0$ стає невизначеною довгота вузла Ω . Щоб уникнути, пов'язаних з цим ускладнень, вводять елементи $l = tgi \sin \Omega$ і $m = tgi \cos \Omega$. Знайти диференціальні рівняння для оскулюючих елементів l і m в еліптичній системі елементів.

4.4. Скласти диференціальні рівняння для істинної аномалії ν та відстаней в перицентрі r_p і апоцентрі r_a в компонентах S і T .

4.5. Навколо зірки, яка втрачає масу внаслідок корпускулярного випромінювання, рухається планета. Довести, що при цьому площа руху не змінює свого положення в просторі. Знайти збурення інших елементів, якщо орбіта планети майже кругова.

4.6. Нехай збурюючі прискорення від опору атмосфери $\vec{F} = -kr^{-2}V\vec{V}$. Довести, що швидкість зміни оскулюючої великої півосі орбіти

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2k}{\mu(1-e^2)} \left(\frac{p}{r}\right)^2 V^3.$$

4.7. Довести, що збурений еліптичний рух стійкий, якщо при збуренні початкових умов зберігається значення сталої інтеграла моменту c .

4.8. Довести, що кругові екваторіальні орбіти зірок на периферії еліптичної однорідної галактики стійкі, якщо її ексцентриситет перевищує значення $e = 0.834$.

4.9. Планета з моментами інерції $A < B < C$ обертається навколо осі з найбільшим моментом інерції з кутовою швидкістю ω . Показати, що вершини екваторіального еліпса є точками відносної рівноваги в системі координат, що обертається разом з планетою, та дослідити їх стійкість в першому наближенні.

4.10. Знайти необхідні та достатні умови стійкості нульового розв'язку наближених рівнянь для оскулюючих елементів l та m задачі 4.3:

$$\frac{dl}{dt} = -m[b - c(l^2 + m^2)]$$

$$\frac{dm}{dt} = l[b - c(l^2 + m^2)]$$

Глава V. ЗБУРЕНИЙ РУХ СУПУТНИКА

Будемо розуміти під супутником будь-яке небесне тіло, що як матеріальна точка обертається навколо іншого (центрального) тіла, яке в незбуреному русі також розглядається як матеріальна точка. Тобто незбурений рух супутника – це еліптичний кеплерівський рух. Як збурюючі розглянемо такі чинники:

- 1) вплив відхилення гравітаційного поля центрального тіла від центрального ньютонівського поля (поля матеріальної точки);
- 2) вплив будь-якого іншого небесного тіла, яке також вважатиметься матеріальною точкою;
- 3) вплив опору середовища, в якому відбувається рух супутника.

У першому випадку мається на увазі насамперед рух природного або штучного супутника стисненої планети. Це може також бути рух планети навколо зірки раннього спектрального класу, відчутно стисненої внаслідок великої швидкості її осевого обертання. В іншому випадку це збурення руху однієї планети іншою, руху одного природного супутника планети іншим, руху штучного супутника планети природним і, нарешті, збурення руху супутника планети Сонцем. Також це може бути збурення руху одного з компонентів потрійної зоряної системи відносно другого під впливом третього компонента, бо, як правило, стійка конфігурація потрійної системи така, що третій компонент системи значно віддалений від перших двох. Третій чинник – це, насамперед, рух штучного супутника планети, збурений опором атмосфери цієї планети. Останнім часом стала досить актуальною ще така задача. Вже знайдено біля ста планет поблизу інших зірок – позасонячних планет. Однак техніка спостережень дозволяє знаходити лише планети з масами порядку маси Юпітера на відстанях від центральної зірки порядку $1 a.o.$ і менше. А за наявними уявленнями про утворення планетних систем такі планети на таких відстанях утворюватися не можуть. Тому виникла ідея, що ці планети утворюються на більших відстанях, але відносно швидко. Потім їх рух відбувається у ще досить щільних рештках протопланетної хмари і відчутно гальмується ними, за рахунок чого планети переходять на орбіти, значно більш близькі до зірки.

Розгляд указаних трьох задач дозволить продемонструвати на практиці застосування методу оскулюючих орбіт та методу усереднення. Буде ставитися задача одержання і дослідження еволюційних рівнянь збуреного руху.

5.1. Вплив стиснення центрального тіла на рух супутника

5.1.1. Збурений рух супутника в першому наближенні. За самою постановкою цієї задачі гравітаційне поле центрального тіла відрізняється від поля матеріальної точки, і його потенціал є

$$V = \frac{\mu}{r} + R, \quad (5.1)$$

де R – збурюючий потенціал. З фізичної точки зору ця різниця є наслідком того, що відцентрові сили при осьовому обертанні розтягують тіло вздовж його екватора (хоча звичайно говорять про полярне стиснення). Теорія фігур небесних тіл (див. [2, 38]) зв'язує в першому наближенні малі параметри – геометричне стиснення тіла ε , коефіцієнт другої зональної гармоніки його гравітаційного поля J_2 і параметр обертання

$$q = \frac{\omega^2 a}{\mu}, \quad (5.2)$$

який є відношенням відцентрової сили до гравітаційної на екваторі тіла. При цьому

$$J_2 = -\frac{2\varepsilon - q}{3}. \quad (5.3)$$

Оцінки за формулою (5.3) показують, що для планет Сонячної системи величина J_2 за модулем десь $10^{-2} \div 10^{-3}$ (див. також табл. 1.1). Це дозволяє досліджувати вплив стиснення планет на рух їх супутників методом оскулюючих елементів, а більш-менш придатним наближенням для їх гравітаційного потенціалу може бути, як вже вказувалося, формула (1.19), тобто

$$R = \mu J_2 \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \frac{a^2}{r^3}, \quad (5.4)$$

де, нагадаємо, μ – гравітаційний параметр центрального тіла, a – його екваторіальний радіус, θ – полярна відстань точки, в якій відшукується потенціал. Крім того, вводячи (5.4), ми тим самим обираємо систему координат, пов'язану з екваторіальною площиною центрального тіла.

За загальною схемою підрозділу 4.2.3 для одержання еволюційних рівнянь збуреного руху треба насамперед усереднити збурюючий потенціал за періодом обороту, тобто обчислити інтеграл (див. (4.47)):

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} n a^2 J_2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 - 1) \frac{dv}{r}. \quad (5.5)$$

Якщо підставити значення r з рівняння орбіти (4.3) і обчислити $\cos \theta$ як синус широти з відповідного сферичного трикутника, то матимемо:

$$\bar{R} = \frac{1}{4\pi} \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{p^{3/2}} \int_0^{2\pi} [3 \sin^2(\omega + \nu) \sin^2 i - 1] (1 + e \cos \nu) d\nu. \quad (5.6)$$

Інтегрування (5.6) дає:

$$\bar{R} = \frac{n a^2 J_2 \sqrt{\mu}}{4 p^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i). \quad (5.7)$$

Усереднений потенціал (5.7) залежить лише від елементів i та p . Підставляючи його похідні за елементами в рівняння Лагранжа для оскулюючих елементів (4.15), одержуємо:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{e}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \frac{3}{2}nJ_2\left(\frac{a}{p}\right)^2 \cos i, \quad (5.8)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{3}{4}nJ_2\left(\frac{a}{p}\right)^2(1 - 5\cos^2 i).$$

Таким чином, елементи i, p, e не мають вікових збурень – нахилення орбіти, її форма і розмір у середньому не змінюються. Останні ж два рівняння показують, що збурення руху під дією другої гармоніки збурюючого потенціалу зводяться до *прецесії лінії вузлів* (або, що теж саме, до прецесії нормалі до площини орбіти навколо полярної осі центрального тіла) і *прецесії лінії апсид* в площині орбіти. Швидкість прецесії лінії вузлів дорівнює нулю для полярної орбіти і збільшується із зменшенням нахилення орбіти, відбуваючись у напрямку, протилежному рухові супутника за орбітою (бо $J_2 < 0$). Швидкість прецесії лінії апсид обертається на нуль при $\cos i = 1/\sqrt{5}$, тобто при $i \cong 63.5^\circ$, при цьому змінюється і її напрямок на протилежний. Підрахунки показують, що для низьких ($p \cong a$) штучних супутників Землі з нахиленням орбіти близько 60° період прецесії лінії вузлів приблизно три місяці, бо її швидкість біля 4° за добу.

Зробимо ще таке зауваження. Коли йдеться про рух «малесенького» штучного супутника навколо «величезної» Землі, то ми говоримо про прецесію нормалі до орбіти супутника навколо осі Землі. А у випадку руху «маленької» Землі навколо «величезного» Сонця – про прецесію осі обертання Землі навколо нормалі до площини її орбіти. А втім йдеться про одне і те ж фізичне явище – гравітаційну взаємодію між стисненим тілом і матеріальною точкою в їх відносному русі. Це цікавий і нетривіальний прояв принципу відносності руху.

Відзначимо також, що розглянута задача є частковим випадком такої задачі – визначення руху матеріальної точки внаслідок її взаємодії з довільним тілом скінченних розмірів. Ця задача дістала в небесній механіці назву *задачі Фату* (за іменем французького астронома П. Фату).

Хоча величина коефіцієнта J_2 для Землі досить мала ($|J_2| \cong 10^{-3}$), все ж для обчислення координат ШСЗ з потрібною точністю наближення (5.8) є недостатнім. Тим більше це так для супутників значно більш стиснених Юпітера або Сатурна. І тут в нагоді стала ще одна задача, про інтегровність рівнянь якої вже давно було відомо.

5.1.2. Задача двох нерухомих центрів та її застосування. Задача ця формулюється таким чином. Є дві точки m_1 і m_2 , нерухомі в інерціальній системі координат. Треба дослідити рух матеріальної точки m в сумісному полі тяжіння цих нерухомих точок. З фізичної точки зору ця задача не є коректною. Якщо точки m_1, m_2 притягують точку m , то чому вони не притягуються одна одною і не притягуються точкою m , а якщо притягуються, то вони не можуть бути нерухомими. Однак інтегровність задачі і пов'язані з цим можливості її

застосування роблять розглядання цієї задачі доцільним. Рівняння задачі двох нерухомих центрів таке:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = 0.$$

Якщо розмістити початок координат у центрі мас нерухомих точок, а вісь z спрямувати за прямою, що сполучає ці точки, то (див. рис. 5.3)

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 - 2rc_{1,2} + c_{1,2}^2}, \quad (5.9)$$

де $c_{1,2}$ – аплікати точок m_1, m_2 відповідно.

Тепер силова функція задачі двох нерухомих центрів може бути записана в такому вигляді (див. (1.2) та (1.3)):

$$V_{12} = \frac{\mu_1}{r_2} + \frac{\mu_2}{r_2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\cos \gamma) \frac{\gamma_k}{r^k} \right], \quad (5.10)$$

де коефіцієнти

$$\gamma_k = \frac{m_1 c_1^k + m_2 c_2^k}{m_1 + m_2}. \quad (5.11)$$

Інакше кажучи, функція V_{12} – це потенціал гравітаційного диполя, що визначається чотирма параметрами $m_{1,2}$ та $c_{1,2}$. Порівнюючи ряди для осесиметричного тіла (1.16) і для гравітаційного диполя (5.10), можна поставити таку задачу – знайти параметри гравітаційного диполя з умови, щоб перші чотири гармоніки обох потенціалів співпадали. Це дасть таку систему рівнянь для параметрів диполя:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 &= 0, \\ m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 &= J_2 M a^2, \\ m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 &= J_3 M a^3, \end{aligned} \quad (5.12)$$

де M та a – маса і екваторіальний радіус тіла, а J_2, J_3 – коефіцієнти другої та третьої гармонік його гравітаційного потенціалу. З перших двох рівнянь одержуємо, що

$$m_1 = -\frac{M c_2}{c_1 - c_2}, \quad m_2 = \frac{M c_1}{c_1 - c_2} \quad (5.13)$$

(нагадаймо, що за вибором системи координат (рис. 5.3) значення $c_2 < 0$). А підставляючи (5.13) в останні два рівняння (5.12), побачимо, що

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 c_2 (c_1 + c_2) = -J_3 a^3 \quad (5.14)$$

або

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \quad c_1 + c_2 = \frac{J_3}{J_2} a.$$

Тепер за теоремою Вієта

$$c_{1,2} = \left(\frac{J_3}{J_2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_3}{J_2} \right)^2 + 4J_2} \right) \frac{a}{2}. \quad (5.15)$$

Якщо ж тіло симетричне відносно екватора, то $J_3 = 0$ і

$$c_{1,2} = \pm\sqrt{J_2}a. \quad (5.16)$$

Рівняння задачі двох нерухомих центрів інтегруються в скінченному вигляді в спеціальній еліптичній системі координат (як це встановив ще Л. Ейлер). Тому, якщо обчислити параметри гравітаційного диполя за формулами (5.13) та (5.15) або (5.16), то матимемо точний розв'язок задачі про рух супутника в полі центрального тіла з урахуванням другої та третьої гармонік його потенціалу. І все було б добре, якби не те, що це тіло стиснене, а не витягнуте, і тому $J_2 < 0$, а оскільки стиснення відносно невелике, то $|J_3| \ll |J_2|$. Внаслідок цього значення координат нерухомих точок комплексні у випадку (5.15) і чисто уявні – у випадку (5.16). Ця обставина довгий час гальмувала застосування задачі двох нерухомих центрів до опису руху супутника стисненої планети. Відбувалося це, мабуть, з двох причин. По-перше, діяла певна психологічна недовіра до уявних величин, до того, що вони можуть описувати реальні фізичні процеси. По-друге, задача про вплив стиснення планети на рух її природного супутника не є такою вже актуальною порівняно із задачею про цей вплив на рух штучного супутника. Бо більш-менш великий природний супутник не може рухатися за орбітою, розмір якої менше границі Роша, інакше він буде розірваний припливними силами. А вплив стисненості планети зростає обернено відношенню квадратів радіуса орбіти і радіуса планети (див. (5.8)). Але ця задача стала вкрай актуальною з виникненням практичної космонавтики, бо більшість ШСЗ виводяться на низькі орбіти з висотою польоту, малою у порівнянні з радіусом Землі. І задача двох нерухомих центрів з успіхом була застосована до опису впливу стисненості Землі на рух ШСЗ. Тим більше, що методом оскулюючих елементів можна наближено урахувати вплив четвертої гармоніки гравітаційного потенціалу планети. Додамо, що у випадку дійсних значень координат $c_{1,2}$ розглядувана задача має назву *класичної задачі двох нерухомих центрів*, а тоді, коли значення $c_{1,2}$ комплексні або уявні, це *узагальнена задача двох нерухомих центрів*.

Ця історико-гносеологічна ситуація виразно підкреслює найважливішу роль потреб практики в розвитку науки. «Якщо у суспільства з'являється технічна потреба, то вона рухає науку швидше, ніж десяток університетів» – писав Ф. Енгельс в «Діалектиці природи». Водночас треба підкреслити, що саме університети є однією з найбільш вдалих організаційних форм розвитку науки. І дослідження щодо застосування задачі двох нерухомих центрів до опису збуреного руху ШСЗ були виконані саме в університеті, це було зроблене в Московському університеті учнями Г. М. Дубошина Є. П. Аксьоновим, Є. О. Гребенніковим та В. Г. Дьоміним [14].

Наведемо, нарешті, формули, що зв'язують декартові та *еліптичні координати* λ, μ, w у випадку тіла, симетричного відносно екватора:

$$\begin{aligned}
 x &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \cos w, \\
 y &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \sin w, \\
 z &= c\lambda\mu,
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

де $c = |c_{1,2}|$.

Розв'язок задачі двох нерухомих центрів має такий вигляд [14, 16]:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d\lambda}{\sqrt{2(1+\lambda^2)(\alpha_1 c^2 \lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)c\lambda + \alpha_2) + \alpha_3^2}} &= \tau + \beta_1, \\
 \int \frac{d\mu}{\sqrt{2(1-\mu^2)(\alpha_1 c^2 \mu^2 - \alpha_2) - \alpha_3^2}} &= \tau + \beta_2, \\
 w &= \alpha_3 \int \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} d\tau + \beta_3, \\
 t &= c^2 \int (\lambda^2 + \mu^2) d\tau,
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

де α_i, β_i – сталі інтегрування за методом Гамільтона–Якобі. Перші два інтеграли (5.18) зводяться до еліптичних інтегралів, а явний вигляд розв'язку (залежність координат λ, μ від змінної τ) може бути знайдений за допомогою еліптичних функцій Якобі, які є функціями, оберненими до неповних еліптичних інтегралів.

Зазначимо, нарешті, що значення параметра гравітаційного диполя c для Землі дорівнює 209 км, для Марса – 150 км, для Юпітера – 8462 км, для Сатурна – 7547 км.

5.2. Вплив третього тіла на рух супутника

Для визначеності задачі треба задати рух збурюючого тіла з масою m_1 відносно центрального тіла з масою M , які обидва вважаються за матеріальні точки. Нехай це буде коловий рух за орбітою з радіусом r_1 та кутовою швидкістю n_1 . Візьмемо площину цього руху за основну площину системи координат.

5.2.1. Збурюючий потенціал і його усереднення. Рівняння збуреного руху мають такий вигляд (рис. 5.4):

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \right),
 \tag{5.19}$$

де перший доданок праворуч – це прискорення з протилежним знаком, що його надає збурююче тіло початку координат – центральному тілу, а другий – це прискорення, яке надає збурююче тіло супутнику. При цьому модуль всієї правої частини рівняння (5.19) значно менший, ніж прискорення від центрального тіла μ/r^2 . Це може бути як за рахунок малої маси збурюючого тіла (планета та два її супутника), так і за рахунок його віддаленості (планета – супутник – Сонце). Відповідно до вигляду правої частини (5.19) збурюючий потенціал є таким:

$$R = \mu_1 \left(-\frac{\vec{r}_1 \vec{r}}{r_1^3} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} \right). \quad (5.20)$$

Тут перший доданок в (5.20) записано, зважаючи на те, що радіус-вектор \vec{r}_1 не залежить від координат супутника. Відстань між супутником і збурюючим тілом

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}| = \sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos \psi + r_1^2}. \quad (5.21)$$

Будемо вважати, що $r \ll r_1$. Це здебільшого так, якщо збурююче тіло – природний супутник планети (згадаймо про границю Роша), і безумовно так, якщо рух супутника збурюється Сонцем.

Розкладемо обернену відстань між супутником і збурюючим тілом в ряд за степенями відношення r/r_1 і вдержимо лише три перших члени цього ряду. Матимемо, що тепер збурюючий потенціал

$$R = \frac{\mu_1 r^2}{2r_1^3} (3 \cos^2 \psi - 1), \quad (5.22)$$

при цьому ми відкинули сталу μ_1/r_1 . Зі сферичного трикутника $m\Omega m_1$ (рис. 5.4) випливає, що

$$\cos \psi = \cos u \cos(v_1 - \Omega) + \sin u \sin(v_1 - \Omega) \cos i. \quad (5.23)$$

Тепер треба усереднити збурюючий потенціал (5.22). У даному разі він залежить від двох “швидких” змінних – істинної аномалії супутника v та істинної аномалії збурюючого тіла v_1 . Якщо періоди обертання супутника і збурюючого тіла неспівмірні, то можна усереднювати за кожною з цих змінних послідовно. Почнемо із змінної $v_1 = n_1 t$. Обчислюючи інтеграл

$$\bar{R} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} R(v_1(t)) dt, \quad (5.24)$$

де період $T_1 = 2\pi/n_1$, дістанемо:

$$\bar{R} = \frac{\mu_1 r^2}{4r_1^3} (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i). \quad (5.25)$$

Після виключення радіуса r за допомогою рівняння орбіти інтеграл усереднення за істинною аномалією супутника v матиме згідно з (4.47) такий вигляд:

$$\bar{\bar{R}} = \frac{1}{2\pi} \frac{n\mu_1 p}{4r_1^3 \sqrt{\mu p}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + v) dv}{(1 + e \cos v)^4}. \quad (5.26)$$

Цей інтеграл також знаходиться в скінченному вигляді, принаймні універсальною заміною $x = \operatorname{tg}(v/2)$ і наступним інтегруванням раціональної функції. Остаточний результат такого інтегрування такий:

$$\bar{\bar{R}} = \frac{3}{8} \frac{\mu_1 a^2}{r_1^3} [(1 - e^2) \cos^2 i + e^2 (2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i)], \quad (5.27)$$

де a – велика піввісь оскулюючої орбіти супутника.

5.2.2. Еволюційні рівняння та їх перші інтеграли. Тепер треба записати систему еволюційних рівнянь нашої задачі. Це зручніше зробити, якщо перейти від кеплерівських елементів оскулюючої орбіти до системи канонічних елементів, що має назву системи *елементів Делоне* (за іменем французького астронома XIX ст.). Ці елементи пов'язані з кеплерівськими таким чином:

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i, \quad l = \pi + M, \quad g = \omega, \quad h = \Omega. \quad (5.28)$$

Двічі усереднений збурюючий потенціал в елементах Делоне, якщо підставити (5.28) у (5.27), матиме такий вигляд:

$$\bar{\bar{R}} = \frac{3 n \mu_1}{8 r_1^3} \frac{L^4}{\mu^4} \left[\frac{H^2}{L^2} + \frac{L^2 - G^2}{L^2} \left(2 - 5 \frac{G^2 - H^2}{G^2} \sin^2 g \right) \right]. \quad (5.29)$$

Для того щоб записати канонічні рівняння збуреного руху, треба знайти його функцію Гамільтона, яка дорівнюватиме $H = H_0 + H_1$, де гамільтоніан незбуреного руху H_0 співпадає з його повною енергією $-\mu/a$, а збурення гамільтоніана H_1 – це збурююча функція $\bar{\bar{R}}$ з протилежним знаком. Тобто

$$H = - \left[\frac{\mu^2}{2L^2} + \bar{\bar{R}}(L, G, H, g) \right]. \quad (5.30)$$

Оскільки функція Гамільтона (5.30) не залежить від змінних l та h , існують перші інтеграли $L = L_0$ і $H = H_0$. Першим інтегралом є і сама ця функція, бо вона не залежить явно від часу t , тобто $H = \text{const}$. Повертаючись до кеплерівських елементів, матимемо, що

$$a = a_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1. \quad (5.31)$$

Але з існування вказаних перших інтегралів випливає, що і другий доданок у виразі для збурюючого потенціалу є постійною величиною, тобто

$$e^2 (2 - 5 \sin^2 \omega \sin^2 i) = c_2. \quad (5.32)$$

Нагадаймо, що, хоча ми не підкреслювали цього позначеннями, йдеться про усереднені значення оскулюючих елементів, тобто про їх вікові частини. Тому ясно, що перший інтеграл $a = a_0$ є проявом теореми Лапласа про відсутність вікових збурень великих півосей.

Розглянемо поведінку збуреного руху у фазовій площині $x = \cos^2 i$ та $y = 1 - e^2$. Зображуюча точка в силу (5.31) буде рухатися вздовж рівнобічної гіперболи $xy = c_1$, а точніше кажучи, вздовж її частини в межах одиничного квадрата (рис. 5.5). Розглянемо два такі граничні випадки: 1) $c_1 \cong 1, e \ll 1, i \ll \pi/2$ і 2) $c_1 \ll 1$. Перший випадок матиме місце тоді, коли значення початкового ексцентриситету e_0 і початкового нахилення орбіти i_0 будуть достатньо малими. А в силу першої рівності (5.31) в цьому разі значення e та i також будуть малими, принаймні на певному відрізку часу, чого і слід очікувати за теоремою Лапласа про стійкість Сонячної системи, умови якої виконуються. В другому випадку виділимо два граничні положення зображуючої точки: а) $e \ll 1, i \cong \pi/2$ і б) $e \cong 1, i \ll \pi/2$. Положення а) відповідає

орбіті супутника майже коловій і майже перпендикулярній до площини руху збурюючого тіла. При положенні б) маємо мало нахилену, але сильно витягнуту орбіту супутника. При достатньому часі збуреного руху зображуюча точка буде переходити з положення а) в положення б) і навпаки. Тобто у випадку 2) по відношенню до форми орбіти та її нахилу до основної координатної площини збурений рух буде нестійким (це буде за початкової умови $(1 - e_0^2) \cos^2 i_0 \ll 1$). При цьому він буде дуже нестійким у тому розумінні, що еволюція орбіти з одного граничного стану до іншого відбуватиметься досить швидко. Так, обчислення дали такий результат. Якщо “перевести” Місяць на орбіту з її нинішнім ексцентриситетом, але нахилену до екліптики на кут, який доповнює нинішнє нахилення до 90° , то це нахилення почне швидко зменшуватися, а ексцентриситет орбіти збільшуватися. І всього через 4.5 роки відстань Місяця в перигеї стане дорівнювати радіусу Землі, тобто Місяць “звалиться” на Землю (бо треба пам’ятати, що при цьому велика піввісь орбіти зберігатиме своє середнє значення, і відстань в перигеї буде зменшуватися відповідно до збільшення ексцентриситету).

Якщо в першому інтегралі (5.32) виключити значення e з допомогою другого із співвідношень (5.31), то можна дослідити поведінку збуреного руху у фазовій площині $x = \cos^2 i$ та $z = \sin^2 \omega$. Матимемо, що

$$z = \frac{(2 - c_2)x - 2c_1}{5(x^2 - c_1)(1 - x^2)}. \quad (5.33)$$

Дослідження дробово-раціональної функції (5.33) показує, що можливі два типи її поведінки: а) функція не має екстремумів у межах одиничного квадрата і перетинає його нижню та верхню сторони; б) функція має мінімум і двічі перетинає верхню сторону одиничного квадрата. У випадку а) $\sin^2 \omega$ пробігає значення від 0 до 1, і перицентрова відстань монотонно зростає – має місце *прецесія лінії апсид*, а нахилення орбіти періодично змінюється в певних межах від i_1 до i_2 . У випадку б) перицентрова відстань може змінюватися лише в певних межах – $90^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 90^\circ + \Delta\omega_2$ або $270^\circ - \Delta\omega_1 \leq \omega \leq 270^\circ + \Delta\omega_2$. Тобто має місце *лібрація лінії апсид* при погойдуванні площини орбіти в межах від i_1 до i_2 . При відповідних початкових умовах може мати місце цікава гранична ситуація, коли на верхню сторону одиничного квадрата попадає лише вершина кривої $z = z(x)$. Лінія апсид займатиме при цьому стійке в середньому положення, перпендикулярне до лінії вузлів, при фіксованому середньому нахиленні орбіти до площини орбіти збурюючого тіла, а в силу (5.31) фіксованим буде і середнє значення ексцентриситету ($\omega = 90^\circ, i = i_0, e = e_0$). Обчислення показують, що це буде при $i_0 \cong 48^\circ, e_0 \cong 0.51$.

Повний розв’язок еволюційних рівнянь можна одержати, якщо записати ці рівняння для усереднених оскулюючих елементів Делоне G, g, h . Після обчислення похідних від функції Гамільтона (5.30) за елементами g, G, H одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{dt} &= -\frac{15}{8} \frac{n\mu_1}{r_1^3} \frac{L_0^5}{\mu^4} \frac{(L_0^2 - G^2)(G^2 - H^2)}{G^2} \sin 2g, \\
\frac{dg}{dt} &= \frac{3}{4} \frac{n\mu_1}{r_1^3} \frac{L_0^5}{\mu^4} G \left(2 - 5 \frac{G^4 - L_0^2 H_0^2}{G^4} \sin^2 g \right), \\
\frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{n\mu_1}{r_1^3} \frac{L_0^5}{\mu^4} H_0 \left(1 + 5 \frac{G^2 - L_0^2}{L_0^2} \sin^2 g \right),
\end{aligned} \tag{5.35}$$

яка інтегрується за допомогою еліптичних інтегралів.

І знову ми стикаємося із ситуацією, коли певний результат (нестійкість збуреного руху у випадку 2) міг би бути отриманий уже давно в класичній небесній механіці, але був знайдений лише з розвитком астродинаміки в середині 50-х років ХХ ст. У даному разі це пов'язане зі змістом самого цього результату – він означає сильну нестійкість систем певної конфігурації і тому в природі не зустрічається. А людина, почавши освоєння космічного простору, може створювати такі системи. Щоправда, тут можна заперечити, навівши приклад системи супутників Урана. Нахилення площини його екватора до площини його орбіти дещо більше 90° , а нахилення орбіт супутників Урана до площини його екватора дуже малі. Тобто ці супутники знаходяться в нестійкому стані відносно збурюючої дії Сонця. Однак тут справа в тому, що на ці супутники діють одночасно і тяжіння Сонця, і нецентральність гравітаційного поля порівняно сильно стисненого Урана. І стабілізуючий вплив стиснення Урана є значно більшим, ніж дія далекого Сонця.

5.3. Вплив опору атмосфери на рух штучного супутника планети

5.3.1. Сила опору атмосфери. При великих швидкостях сила опору середовища пропорційна густині цього середовища і квадрату швидкості руху, вона спрямована в бік, протилежний вектору швидкості. Прискорення сили опору записують звичайно таким чином:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \frac{c_x}{m} \rho S_x V \vec{V}, \tag{5.36}$$

де c_x – коефіцієнт опору, m – маса супутника, S_x – площа перерізу супутника, перпендикулярного вектору швидкості \vec{V} , ρ – густина атмосфери. Надалі будемо вважати, що

$$\vec{F} = -c\rho V \vec{V}. \tag{5.37}$$

Густина атмосфери залежить від висоти h . Вважаючи, що атмосфера в середньому знаходиться в стані гідростатичної рівноваги, тобто

$$dp = -g\rho dh, \tag{5.38}$$

і підкоряється рівнянню стану ідеального газу, матимемо, що

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\bar{\mu}g}{RT} dh = -\frac{dh}{H}, \tag{5.39}$$

де $\bar{\mu}$ – відносна молекулярна вага атмосфери, T – її температура, R – універсальна газова стала, а величина H має назву *шкали висот атмосфери*. Прискорення сили ваги, строго кажучи, залежить від висоти:

$$g = \frac{fM}{r^2} = \frac{fM}{(R_0 + h)^2}, \quad (5.40)$$

де R_0 – радіус планети, а M – її маса. Температура верхньої атмосфери (термосфери) також змінюється з висотою, підвищуючись завдяки розігріву атмосфери короткохвильовим та корпускулярним випромінюванням Сонця. Це нагрівання відбувається тому, що надлишок енергії фотонів та корпускул переходить в кінетичну енергію продуктів реакцій дисоціації та іонізації, що відбуваються при поглинанні сонячного випромінювання частинками атмосфери. Тому, до речі, зменшується з висотою і відносна молекулярна вага атмосфери $\bar{\mu}$. Таким чином, шкала висот атмосфери є змінною величиною, яка у верхній атмосфері збільшується з висотою. Тому, інтегруючи (5.39), треба записати:

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{dh}{H(h)}\right). \quad (5.41)$$

Нас цікавить поведінка густини атмосфери на тих висотах, де відбувається рух супутника, тобто поміж висотами перицентра та апоцентра орбіти супутника. Якщо ексцентриситет орбіти невеликий, то наближено можна записати, що

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp\left(-\frac{r - r_\pi}{H_\pi}\right), \quad (5.42)$$

де ρ_π і H_π – густина і шкала висот атмосфери в перицентрі орбіти супутника. Згадуючи, що відстань до центра планети $r = a(1 - e \cos E)$, одержимо, що різниця

$$r - r_\pi = ae(1 - \cos E), \quad (5.43)$$

а густина атмосфери

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp(-\alpha(1 - \cos E)), \quad (5.44)$$

де безрозмірний параметр

$$\alpha = \frac{ae}{H}. \quad (5.45)$$

Нагрівання атмосфери визначається кількістю короткохвильового і корпускулярного випромінювання Сонця і залежить від широти, часу доби, пори року, але головне від фази циклу сонячної активності. Тому температура верхньої атмосфери та її шкала висот можуть змінюватися в досить широких межах. Для земної атмосфери на висотах 200 ÷ 400 км, де рухається більшість ШСЗ, шкала висот коливається від 30 до 100 км. Якщо взяти як характерні значення $H \cong 60 \div 70$ км, то відношення великої півосі орбіти до шкали висот дорівнюватиме приблизно 100.

5.3.2. Еволюційні рівняння. Для того щоб записати рівняння для оскулюючих елементів, які треба взяти у формі (4.28), треба знайти радіальну і нормальну до

радіуса-вектора компоненти сили опору атмосфери S і T . Скориставшись формулами (2.50) для модуля і компонент швидкості, матимемо з (5.37):

$$\begin{aligned} S &= -c\rho \frac{\mu}{p} e \sin v \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}, \\ T &= -c\rho \frac{\mu}{p} (1 + e \cos v) \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Підставляючи (5.46) у (4.28), знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= 0, \quad \frac{di}{dt} = 0, \\ \frac{dp}{dt} &= -2c\rho \sqrt{\mu p} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}, \\ \frac{de}{dt} &= -2c\rho \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos v + e) \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -2c\rho \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin v}{e} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Перші два рівняння дають: $\Omega = \Omega_0, i = i_0$. Це висловлює той факт, що сила опору атмосфери, яка лежить у площині оскулюючої орбіти, не може змінити положення цієї площини. Останні три рівняння усереднимо за періодом обертання супутника, тобто перейдемо до еволюційних рівнянь руху. Права частина рівняння для перицентрної відстані є добутком непарної функції від істинної аномалії v на парну, тобто є непарною функцією. А оскільки функцію, періодичну на проміжку $[0, 2\pi]$, можна інтегрувати і в межах від $-\pi$ до π , то її середнє значення дорівнює нулю. Вікове збурення перицентрної відстані відсутнє, і лінія апсид під дією атмосфери лише погойдується з малою амплітудою. Для середніх значень фокального параметра та ексцентриситету матимемо на підставі (4.46), опускаючи позначення усереднення:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -2cnp^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \frac{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}{(1 + e \cos v)^2} dv, \\ \frac{de}{dt} &= -2cnp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \frac{(\cos v + e) \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}{(1 + e \cos v)^2} dv. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Видно, що середнє значення фокального параметра p з часом під впливом атмосфери зменшується, бо права частина першого з рівнянь (5.48) додатна. Права частина другого рівняння може змінювати свій знак, але більшу частину часу вона додатна і середнє значення першого множника в чисельнику підінтегрального виразу, який визначає знак правої частини рівняння, дорівнює ексцентриситету e , тобто є додатним. Тому середнє значення ексцентриситету орбіти також зменшується. Таким чином, під впливом опору атмосфери висота польоту супутника зменшується і його орбіта наближається до колової. Врешті-решт супутник входить у настільки щільні шари атмосфери, що супутник невеликих розмірів згорає, а великі об'єкти типу орбітальних станцій руйнуються, тобто гальмівний вплив атмосфери на рух низького штучного

супутника планети визначає час його існування на орбіті. Для того щоб оцінити цей час, треба проінтегрувати систему рівнянь (5.48).

5.3.3. Наближене інтегрування еволюційних рівнянь. Підінтегральні вирази в (5.48) дещо спростяться, якщо перейти в них від істинної аномалії ν до ексцентричної аномалії E , маючи на увазі (див. (2.60) та (2.63)), що

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad d\nu = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE. \quad (5.49)$$

Беручи до уваги також (5.44), знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -2cn\rho_\pi p^2 \frac{\exp(-\alpha)}{1 - e^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos E) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 E} dE, \\ \frac{de}{dt} &= -2cn\rho_\pi p \exp(-\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos E) \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}{1 - e \cos E} dE. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Для подальшого спрощення інтегралів в (5.50) скористаємося вже фактично введеною умовою малості ексцентриситету орбіти супутника: $e \ll 1$. При цьому будемо вважати, що значення $e \leq 0.1$, тобто нехтуючи членами порядку e^2 , ми робитимемо похибку приблизно в 1%. Тож розкладаючи підінтегральні функції (5.50) в ряд за степенями e і лишаючи тільки лінійні за e величини, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -2cn\rho_\pi p^2 \exp(-\alpha) I_0(\alpha), \\ \frac{de}{dt} &= -2cn\rho_\pi p \exp(-\alpha) \left(I_0 + \frac{e}{2} (I_0(\alpha) + I_2(\alpha)) \right), \end{aligned} \quad (5.51)$$

де інтеграли

$$I_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos E) \cos kE dE \quad (5.52)$$

є не що інше, як інтегральна форма задання *модифікованої функції Бесселя* k -го порядку, яка дорівнює $i^{-k} J_k(i\alpha)$, де i – уявна одиниця. Ці функції розкладаються в степеневий ряд:

$$I_k(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha/2)^{2s}}{s!(k+s)!}, \quad (5.53)$$

а при великих ($\alpha \geq 10$) значеннях аргументу мають досить просту асимптотику:

$$I_k(\alpha) \cong \frac{\exp(\alpha)}{\sqrt{2\pi\alpha}}. \quad (5.54)$$

Розглянемо далі два випадки : 1) $\alpha \ll 1$ і 2) $\alpha \gg 1$. У першому випадку з огляду на оцінку $a/H \cong 100$ ексцентриситет e повинен бути порядку і менше 0.001. У другому, враховуючи раніш зроблену оцінку ($e \leq 0.1$), величина $\alpha \cong 10$.

У першому випадку, нехтуючи членами порядку α^2 і вище, матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -2cn\rho_\pi p^2, \\ \frac{de}{dt} &= -cn\rho_\pi \left(\frac{p}{H} + 1 \right) e. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Перше рівняння (5.55) легко інтегрується і

$$p = \frac{p_0}{1 + 2cn\rho_\pi t}, \quad (5.56)$$

що дозволяє, знаючи критичну висоту руху супутника h_{cr} , визначати час його існування на орбіті. Для земної атмосфери величина h_{cr} в залежності від фази циклу сонячної активності коливається в межах від 120 км до 180 км з найбільш характерними значеннями 150 ÷ 160 км. Поділяючи друге рівняння (5.55) на перше, можна знайти ексцентриситет e як функцію параметра p :

$$e = e_0 \sqrt{\frac{p}{p_0}} \exp\left(\frac{p}{p_0}\right). \quad (5.57)$$

У другому випадку асимптотика (5.54) приводить до таких рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{2cn}{\sqrt{2\pi}} \rho_\pi \sqrt{H_\pi} p \sqrt{\frac{p}{e}}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2cn}{\sqrt{2\pi}} \rho_\pi \sqrt{H_\pi} (1+e) \sqrt{\frac{p}{e}}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Знову поділивши друге рівняння на перше, знайдемо, що

$$e = (e_0 + 1) \frac{p}{p_0} - 1. \quad (5.59)$$

Виключаючи з першого рівняння (5.58) ексцентриситет e за допомогою (5.59), можна і в цьому випадку знайти залежність фокального параметра p від часу t , але кінцевий результат тут досить громіздкий. Звернемо увагу на те, що завдяки тому, що розглядаються малі і до того ж такі, що все зменшуються, значення ексцентриситету, зменшення величин p і e відбувається все швидше і швидше.

Таким чином, знайдені залежності середніх значень параметра орбіти p від часу t , а ексцентриситету e від параметра p для дуже малих ($e \leq 0.001$) і малих, але не дуже ($e \approx 0.1$), значень ексцентриситету (див. рис. 5.7). Для проміжних значень ексцентриситету ($e \approx 0.01$) результати можуть бути знайдені за допомогою інтерполювання вище розглянутих випадків. Більш докладний розгляд впливу опору атмосфери на рух штучного супутника проведено в [20] (див. також задачу 5.8).

При малому ексцентриситеті параметр p практично дорівнює великій півосі орбіти a . Зробивши відповідну заміну в першому з рівнянь (5.58), можна за допомогою третього закону Кеплера привести його до такого вигляду:

$$\rho_\pi \sqrt{H_\pi} \cong A \sqrt{\frac{a}{e}} \frac{\dot{T}}{T}, \quad (5.60)$$

де A – певний коефіцієнт. Одержане співвідношення дозволяє знайти фізичні характеристики атмосфери на висотах, де рухається супутник, маючи оцінки величин a та e і хоча б із візуальних спостережень за рухом супутника оцінки швидкості зміни періоду обертання супутника T .

Задачі до глави V

5.1. Що відбувається з прецесією лінії вузлів, коли нахилення орбіти прямує до нуля?

5.2. Показати, що постійна за модулем радіальна збурююча сила не змінює фокального параметра орбіти, а постійна за модулем збурююча сила, перпендикулярна до площини орбіти, залишає незмінною велику піввісь орбіти.

5.3. Яким повинно бути стиснення Сонця, щоб викликати прецесію лінії апсид Меркурія зі швидкістю в $43''$ за сто років?

4. Знайти вікову частину збурення четвертої зональної гармоніки збурюючого потенціалу стисненої планети.

5.5. Показати, що еліптичні координати в задачі двох нерухомих центрів дорівнюють

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2c}$$

і з'ясувати їх геометричний сенс.

5.6. Обчислити, за яких значень ексцентриситету та нахилення орбіти відносно екліптики буде відсутнє вікове збурення перигейної відстані у збуреному русі ШСЗ.

5.7. Уявіть собі, що Місяць знаходиться на орбіті з нинішніми значеннями великої півосі та ексцентриситету, але з нахиленням до екліптики, що доповнює нинішнє до 90° . Яке найбільше значення зможе прийняти у збуреному русі під впливом Сонця ексцентриситет e і яке найменше – відстань до центра Землі в перигеї r_π ?

5.8. Одержати такі формули для зміни середніх значень великої півосі, відстані супутника в перицентрі та періоду обертання під впливом опору атмосфери:

$$\delta a = -4\pi c \rho_\pi a^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} + e\alpha \right),$$

$$\delta r_\pi = -4\pi c \rho_\pi a^2 (1 - e) \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{e}{2} + \frac{e\alpha}{2} \right),$$

$$\delta T = -\frac{12\pi^2}{\sqrt{\mu}} c \rho_\pi a^{5/2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} + e\alpha \right).$$

Глава VI. ЗАДАЧА ТРЬОХ ТІЛ

Задачею, не інтегрованою в скінченному вигляді, але такою, що нерідко моделює реальні системи небесних тіл і тому досить добре досліджена, є *задача трьох тіл*. Тобто задача про рух трьох матеріальних точок в полі взаємного тяжіння. Це – потрійна зоряна система, системи “Земля – Місяць – Сонце”, “Сонце – планета – комета”, “Земля – Місяць – ШСЗ” і т.п.

Рівняння задачі трьох тіл в інерціальній системі координат, як частковий випадок ($n = 2$) системи рівнянь задачі багатьох тіл (1.22), є такими (рис. 6.1):

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_0 &= fm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{\Delta_{01}^3} + fm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{\Delta_{02}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_1 &= fm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_1}{\Delta_{01}^3} + fm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \ddot{\vec{R}}_2 &= fm_0 \frac{\vec{R}_0 - \vec{R}_2}{\Delta_{02}^3} + fm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{\Delta_{12}^3}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Це система 18-того порядку. На підставі міркувань пункту 1.2.3 її порядок можна знизити до шостого порядку, а далі інтегрувати якимось наближеним методом. Але в загальній задачі трьох тіл виділяється важливий практично і спрощуючий її систему рівнянь випадок. Це – ситуація, коли маса однієї з трьох матеріальних точок надзвичайно мала порівняно з масами двох інших точок.

6.1. Обмежена задача трьох тіл.

Випадок, коли маса $m \equiv m_0 \lll m_1, m_2$, тобто маса m знехтовно мала порівняно з масами m_1, m_2 , дістав назву *обмеженої задачі трьох тіл*. Така задача вперше була розглянута П.Лапласом при дослідженні руху комет поблизу однієї з планет-гігантів. Ідеально вона описує ситуацію, коли одна з матеріальних точок – це космічний апарат. Фізична суть обмеженої задачі трьох тіл полягає в тому, що одна з точок має настільки малу масу, що практично не впливає на рух інших двох точок, а сама рухається в їх гравітаційному полі. Тим самим, рух цих двох точок (як кажуть, “важких точок”) є кеплерівським і може вважатися відомим. Відповідно до цього обмежена задача трьох тіл може бути коловою, еліптичною і т.д. Далі ми розглядатимемо найпростіший випадок – *колову обмежену задачу трьох тіл*.

6.1.1. Колова обмежена задача трьох тіл. В цьому випадку важкі точки M_1, M_2 з масами m_1, m_2 знаходяться одна від одної на постійній відстані a і обертаються одна навколо одної або навколо їх центру мас з постійною кутовою швидкістю

$$n = \frac{f(m_1 + m_2)}{a^{3/2}}.\tag{6.2}$$

В останніх двох рівняннях задачі трьох тіл (6.1) в обмеженій задачі випадають перші доданки праворуч, і ці два рівняння утворюють систему

рівнянь задачі двох тіл з відомим розв'язком. Лишається рівняння руху точки малої маси m :

$$\ddot{\vec{R}} = fm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}}{\rho_1^3} + fm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}}{\rho_2^3}, \quad (6.3)$$

де через $\rho_{1,2}$ позначені відстані точки M до точок $M_{1,2}$. В коловій обмеженій задачі трьох тіл доцільно перейти до барицентричної системи координат, яка обертається навколо центру мас з кутовою швидкістю n . Зовні обмежена задача трьох тіл стане дуже схожа на задачу двох нерухомих центрів. Але принципова фізична різниця між цими двома задачами така: в задачі двох нерухомих центрів рух третьої точки розглядається в інерціальній системі координат і ця точка не впливає на стан перших двох точок за самою постановкою задачі, в обмеженій задачі трьох тіл – в неінерціальній системі, а на рух перших двох точок третя точка не впливає завдяки своїй дуже малій масі. Для того, щоб перейти до рівняння руху точки M в цій неінерціальній системі координат, треба врахувати сили інерції, що діють на матеріальну точку в системі координат, яка рівномірно обертається. Це сила Коріоліса, яка дорівнює $-2\vec{n} \times \dot{\vec{r}}$, і відцентрова сила, яка є $-\vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r}$, де \vec{n} – вектор кутової швидкості системи координат, \vec{r} – радіус-вектор точки M . Матимемо:

$$\ddot{\vec{r}} = -2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} - \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} - fm_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^3}, \quad (6.4)$$

де радіуси-вектори $\vec{\rho}_{1,2}$ визначають положення точки M відносно важких точок $M_{1,2}$, тобто $\vec{\rho}_{1,2} = \vec{r} - \vec{r}_{1,2}$, а $\vec{r}_{1,2}$ – радіуси-вектори точок $M_{1,2}$ (рис. 6.2). При цьому мається на увазі, що вісь z системи координат спрямована за вектором \vec{n} , а вісь x проходить через точки M_1 та M_2 . Тоді в координатній формі рівняння (6.4) будуть такими:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2x + fm_1 \frac{x_1 - x}{\rho_1^3} + fm_2 \frac{x_2 - x}{\rho_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2y - fm_1 \frac{y}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{y}{\rho_2^3}, \\ \ddot{z} &= -fm_1 \frac{z}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{z}{\rho_2^3}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Нарешті, для подальшого розгляду задачі введемо спеціальну (канонічну) систему одиниць. Візьмемо за одиницю довжини відстань a , за одиницю маси – суму мас $m_1 + m_2$ і за одиницю часу – час, за який система координат повертається на один радіан. Тоді дорівнюватиме 1 величина кутової швидкості n , а з (6.2) випливає, що гравітаційна стала f в цій системі одиниць також дорівнює 1. Позначимо, крім того, масу точки M_1 в цій системі одиниць як μ , тоді маса точки M_2 є $1 - \mu$, а координати точки M_1 є $(1 - \mu, 0, 0)$, точки M_2 – $(-\mu, 0, 0)$. Будемо також вважати, що $m_1 < m_2$, тобто $\mu < 1/2$. Тепер система рівнянь (6.5) перепишеться таким чином:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - x) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu - x), \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Помноживши рівняння системи (6.6) на компоненти відносного вектора швидкості $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ відповідно, дістанемо:

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2}\right),\tag{6.7}$$

де $v^2 = |\dot{\vec{r}}|^2$. Інтегруючи (6.7), матимемо перший інтеграл відносної обмеженої колової задачі трьох тіл:

$$v^2 = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right) - c.\tag{6.8}$$

Цей перший інтеграл має назву *інтеграла Якобі*. Він є аналогом інтегралу енергії, бо праворуч стоїть подвоєний *узагальнений потенціал задачі*, що дорівнює сумі відцентрового і гравітаційного потенціалів. Інтеграл Якобі використовується для дослідження стійкості в задачі трьох тіл. В астродинаміці він знаходить таке застосування. Траєкторію міжпланетного перельоту можна поділити на три ділянки: дві відносно невеликі планетоцентричні і одну основну – геліоцентричну, і на кожній з цих ділянок вважати рух космічного апарату кеплерівським. А для оптимізації переходу від однієї ділянки до іншої якраз і використовується інтеграл Якобі, бо на перехідних етапах польоту ми маємо ситуацію обмеженої задачі трьох тіл.

Якщо узагальнений потенціал задачі позначити як U , тобто

$$U = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right),\tag{6.9}$$

то рівняння обмеженої колової задачі трьох тіл набувають більш компактного вигляду:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z},\end{aligned}\tag{6.10}$$

а інтеграл Якобі має вигляд: $v^2 = 2U - c$.

6.1.2. Плоска колова обмежена задача трьох тіл. Якщо початкові умови в обмеженій задачі трьох тіл будуть такими, що при $t = t_0$ будуть $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, то, як це впливає з останнього рівняння (6.6), апліката z тотожно дорівнюватиме

нулю. Тобто рух буде плоским. І ми матимемо *плоску колову задачу трьох тіл*. Для її дослідження доцільно, як це почасти робиться в плоских задачах, перейти до комплексної координати $z = x + iy$. Не дуже вдалою обставиною є те, що за традицією і третя декартова координата і комплексна змінна позначаються однією і тією ж літерою z . Не будемо порушувати цю традицію, але пам'ятатимемо, що надалі в цій главі z – це комплексна координата на площині, крім окремо обумовлених випадків.

Помноживши друге рівняння (6.6) на уявну одиницю i і додаючи його до першого рівняння, дістанемо таке рівняння плоскої колової обмеженої задачі трьох тіл:

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + z). \quad (6.11)$$

При цьому $\rho_{1,2} = |z - z_{1,2}|$. Інтеграл Якобі набирає тепер такого вигляду:

$$|\dot{z}|^2 = |\dot{z}|^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1 - \mu}{\rho_2}\right). \quad (6.12)$$

На відміну від задачі двох тіл, в якій (за винятком прямолінійного руху) відстань між точками завжди більше нуля, в задачі трьох тіл можливі зіткнення матеріальних точок. При цьому прискорення різко зростають, порушується неперервність правих частин рівнянь руху. Щоб уникнути цього, датський астроном Т.Тіле запропонував спеціальну заміну змінних в рівнянні плоскої обмеженої задачі трьох тіл в комплексній формі (6.11). По-перше, початок координат переноситься в середину відрізка M_1M_2 :

$$z = \zeta + \mu - \frac{1}{2}. \quad (6.13)$$

Потім виконується перехід від комплексної координати ζ до нової комплексної змінної w :

$$\zeta = \cos w. \quad (6.14)$$

Водночас робиться диференціальна заміна часу t на нову змінну τ :

$$dt = \rho_1 \rho_2 d\tau. \quad (6.15)$$

Зміст останньої заміни не важко зрозуміти. Якщо одна з відстаней $\rho_{1,2}$ прямує до нуля, час починає ніби розтягуватися, як при демонстрації кінофільму з все меншою і меншою швидкістю. Заміна (6.14) корисна тому, що софокусні еліпси і гіперболи в площині ζ переходять в площині w в прямі, паралельні осям координат. Щоб переконатися в цьому, треба в рівності (6.14) виділити дійсну і уявну частини. А оскільки поблизу однієї з важких точок рух точки малої маси буде близький до кеплерівського, то цей рух в площині w буде зображуватися лініями, близькими до прямих, паралельних координатним осям. І тим більш близьким, чим ближче точка малої маси до однієї з важких точок. Особливе значення це *перетворення Тіле* набуло в астродинаміці при розрахунку траєкторій попадання при перельоті з одного небесного тіла на інше, наприклад, із Землі на Місяць.

Продовжуючи спрощення розглядуваної задачі, можна перейти до випадків прямолінійного руху. По-перше, це буде при початкових умовах $x_0 \neq 0$ і $\dot{x}_0 \neq 0$, а $y_0 = \dot{y}_0 = 0$). При цьому точка M буде рухатися вздовж осі x і або зіткнеться з однією з важких точок або віддаляться від них на нескінченність. Інший випадок прямолінійного руху буде мати місце при умовах: $\mu = 1/2, x_0 = \dot{x}_0 = 0$. Точка M знов-таки або віддаляться на нескінченність або почне коливатися вздовж відрізка осі y , симетричного відносно осі x . Нагадаємо, що все це відбуватиметься у відносній системі координат, що обертається разом з важкими точками навколо їх центру мас.

6.2. Точки лібрації. Лінії Хілла.

6.2.1. Точки лібрації. Поставимо таке питання: чи може точка малої маси в обмеженій задачі трьох тіл знаходитися в стані рівноваги відносно важких точок в системі координат, яка обертається разом з ними. В інерціальній системі це, взагалі кажучи, неможливо, бо під дією двох сил, які не спрямовані за однією прямою, стан рівноваги неможливий. У відносній системі така точка знаходиться під дією трьох сил – двох гравітаційних і відцентрової, що мають різні напрямки. І тому стан рівноваги можливий. Знайдемо розв'язки, що дають положення точки малої маси у стані рівноваги у випадку плоскої колової обмеженої задачі трьох тіл. Ці точки відносної рівноваги мають назву *точок лібрації*.

В стані рівноваги прискорення \ddot{z} і швидкість \dot{z} тотожно дорівнюють нулю. Тому рівняння, якому повинна задовольняти комплексна координата z , є таким:

$$z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - z) - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3}(\mu + z) = 0 \quad (6.16)$$

або

$$z \left(1 - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \frac{1 - \mu}{\rho_2^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3} \right). \quad (6.17)$$

Оскільки права частина (6.17) дійсна, то або координата z повинна бути дійсною або ця права частина і дійсний множник в дужках ліворуч повинні дорівнювати нулю.

Почнемо з останньої можливості. З рівності нулю правої частини (6.17) випливає, що $\rho_1 = \rho_2$. Тоді з рівності нулю множника ліворуч одержуємо, що $\rho_1 = \rho_2 = 1$. А оскільки відстань між точками M_1 і M_2 також дорівнює одиниці, то всі три точки утворюють рівнобічний трикутник. Можливі дві такі конфігурації – одна відповідає значенню $y > 0$, друга – координаті $y < 0$ (рис.6.3). Ці точки позначаються літерами L_4 і L_5 і мають назву *трикутних точок лібрації*.

Якщо ж координата z дійсна, то всі можливі точки лібрації лежать на одній прямій – осі x . При цьому їх координати і відстані до точок $M_{1,2}$ пов'язані

певними співвідношеннями. Але ці співвідношення будуть залежати від того, де саме розташована точка малої маси – між важкими точками або по той чи інший бік від них обох. Розглянемо кожну з цих ситуацій окремо.

а) Точка M лежить поміж точками M_1 і M_2 . Тоді (рис.6.4а) маємо:

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \quad \mu + z + \rho_1 = 1. \quad (6.18a)$$

Виключаючи з рівняння (6.17) за допомогою (6.18) ρ_2 і z , матимемо:

$$(1 - \mu - \rho_1) \left(1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1 - \mu}{(1 - \rho_1)^3} \right) = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{(1 - \rho_1)^3} \right). \quad (6.19)$$

Якщо привести (6.19) до загального знаменника, то одержимо для відстані ρ_1 алгебраїчне рівняння п'ятого степеня:

$$\rho_1^5 - (3 - \mu)\rho_1 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 - \rho_1)^2 = 0. \quad (6.20)$$

б) Точка M лежить праворуч від точки M_1 . Тоді (рис. 6.3б)

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \mu + z - \rho_1 = 1 \quad (6.18б)$$

і відповідне рівняння для величини ρ_1 , знову таки п'ятого степеня, буде таким:

$$\rho_1^5 + (3 - \mu)\rho_1 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(1 + \rho_1)^2 = 0. \quad (6.21)$$

в) Нарешті, якщо точка M розташована ліворуч від точки M_2 , то (рис.6.3в)

$$\rho_1 = \rho_2 + 1, \quad \rho_2 = z + \mu. \quad (6.18в)$$

Звідси і (6.17) знаходимо таке рівняння для відстані ρ_2 :

$$\rho_2^5 + (2 + \mu)\rho_2^4 + (1 - 2\mu)\rho_2^3 - (1 - \mu)(1 + \rho_2)^2 = 0. \quad (6.22)$$

Можна показати, що кожне з одержаних рівнянь п'ятого степеня має тільки по одному дійсному кореню. Таким чином, ми маємо три *прямолінійні точки лібрації*. Вони позначаються як L_1 (поміж точками M_1 і M_2), L_2 (праворуч від важкої точки меншої маси M_1) та L_3 (ліворуч від важкої точки більшої маси M_2). Значення відстаней ρ_1 і ρ_2 можуть бути обчислені за методом ітерацій. Наприклад, для точки L_1 за формулою:

$$\rho_1^{(k)} = \left(\frac{\mu(1 - \rho_1^{(k-1)})^2}{(\rho_1^{(k-1)})^2 - (3 - \mu)\rho_1^{(k-1)} + 3 - 2\mu} \right)^{1/3} \quad (6.23)$$

Можна також одержати ряди для значень ρ_1 за степенями $\mu^{1/3}$ і для ρ_2 за степенями μ . Вони мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, & (L_1) \\ \rho_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \mu^{1/3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \mu^{2/3} - \frac{1}{27} \mu + \dots, & (L_2) \\ \rho_2 &= \frac{7}{12} \mu + \frac{1127}{20736} \mu^3 + \dots & (L_3) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Бачимо, що при значеннях $\mu \ll 1$, точки лібрації L_1 та L_2 лежать близько від точки M_1 на приблизно однакових відстанях.

Точки лібрації, як часткові розв'язки рівнянь колової обмеженої задачі трьох тіл, були відомі ще Л.Ейлеру. Потім вони досліджувалися П.Лапласом і

Ж.Лагранжем. Лагранж встановив, що точки лібрації мають місце і в еліптичній і навіть в необмеженій задачах трьох тіл. В еліптичній задачі роль відстані a відіграє фокальний параметр p відносного кеплерівського руху важких точок. Тому ці розв'язки і відповідні їм точки лібрації мають також назву лагранжевих.

Точки лібрації мають неабияке значення в астрономії і астродинаміці. Найбільш відоме явище, пов'язане з ними, – це існування двох груп астероїдів, які скупчилися в околах трикутних точок лібрації системи “Сонце – Юпітер”. Оскільки астероїди, що рухаються на 60° попереду Юпітера названі іменами героїв грецького війська, яке осаджувало Трою, а ті, що рухаються на 60° позаду Юпітера, – іменами захисників Трої, то всі ці астероїди мають назву “*троянців*”. В трикутних точках лібрації системи “Земля – Місяць” польський астроном К.Кордилевський знайшов хмари метеорної речовини, котрі дістали назву *хмар Кордилевського*. Ці ж точки лібрації неодноразово привертали увагу вчених, що розробляють проекти подальшого освоєння космосу людиною. Відомий проект розташування в трикутних точках лібрації системи “Земля – Місяць” людських поселень з населенням до 100 тис. чоловік належить американському вченому О.Нейлу. Для розробки таких проектів важливо знати характер впливу збурень на рух тіл, які знаходяться в точках лібрації. До розгляду цього питання ми зараз і перейдемо.

6.2.2. Стійкість руху в точках лібрації. Запишемо рівняння для збурень у вигляді, прийнятому в теорії стійкості (пункт 4.3.1), тобто

$$\ddot{x}_i = 2(-1)^{i+1} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i=1,2 \quad (6.25)$$

де x_i – збурення координат x, y відносно сталих значень цих координат в точках лібрації, а узагальнений потенціал U має вигляд (6.9). Розкладаючи цей потенціал в ряд Маклорена, одержимо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\ddot{x}_i = 2(-1)^{i+1} \dot{x}_i + \sum_{j=1}^2 p_{ij} x_j, \quad (6.26)$$

де

$$p_{ij} = 2^{1-\delta_{ij}} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_i=x_j=0}. \quad (6.27)$$

Обчислення коефіцієнтів p_{ij} за (6.27) дає такі результати:

$$\begin{aligned} p_{11}^{(k)} &= 1 + 2A, & p_{22}^{(k)} &= 1 - A, \\ p_{12}^{(k)} &= p_{21}^{(k)} = 0, & A &= \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}, \quad k=1,2,3 \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$p_{11}^{(k)} = \frac{3}{4}, \quad p_{22}^{(k)} = \frac{9}{4}, \quad p_{12}^{(k)} = (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu). \quad k=4,5$$

де k – номер точки лібрації.

Якщо тепер відшукувати розв'язок системи (6.26) в комплексній формі $A_i \exp(\omega_i t)$, то для амплітуд A_i одержимо таку алгебраїчну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}(\omega^2 - p_{11})A_1 - (2\omega + p_{12})A_2 &= 0, \\(2\omega - p_{21})A_1 + (\omega^2 - p_{22})A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{6.29}$$

А для того, щоб ця однорідна система рівнянь мала ненулевий розв'язок потрібно, щоб її детермінант

$$\begin{vmatrix}\omega^2 - p_{11} & -2\omega - p_{12} \\ 2\omega - p_{21} & \omega^2 - p_{22}\end{vmatrix} = 0.\tag{6.30}$$

Значення частот ω , як коренів характеристичного рівняння (6.30), і будуть визначати характер збуреного руху в околах точок лібрації в лінійному наближенні. Рівняня (6.30) є біквадратним рівнянням

$$\omega^4 + p\omega^2 + q = 0,\tag{6.31}$$

де

$$p = 2 - A, \quad q = (1 + 2A)(1 - A), \quad k = 1, 2, 3\tag{6.32}$$

та

$$p = 1, \quad q = \frac{27}{4}\mu(1 - \mu). \quad k = 4, 5\tag{6.33}$$

Обчислення дискримінанту цього рівняння $D = p^2 / 4 - q$ показує, що

$$D = \frac{9}{4}A\left(A - \frac{8}{9}\right) \quad k = 1, 2, 3\tag{6.34}$$

та

$$D = \frac{1}{4}(1 - 27\mu(1 - \mu)). \quad k = 4, 5\tag{6.35}$$

Аналіз значень дискримінанту D за (6.34) та (6.35) і відповідних йому значень частот ω приводить до таких висновків. Прямолінійні точки лібрації в лінійному наближенні є нестійкими, бо завжди є одна дійсна додатна частота. У випадку трикутних точок лібрації ситуація пов'язана із співвідношенням між значенням маси μ і коренем рівняння

$$1 - 27\mu(1 - \mu) = 0,\tag{6.36}$$

а саме тим його коренем, що лежить поміж 0 та 1/2 і дорівнює $\bar{\mu} \cong 0.38$. При значеннях $\mu > \bar{\mu}$ трикутні точки лібрації є нестійкими. При $\mu < \bar{\mu}$ трикутні точки лібрації стійкі в лінійному наближенні. Переконалися в цих висновках надаємо можливість читачеві самому (див. задачу 6.2).

Що ж до стійкості точок лібрації за точним розв'язком задачі, то теорія стійкості Ляпунова (пункт 4.3.1) підтверджує висновки, зроблені за лінійним наближенням про нестійкість прямолінійних точок лібрації і трикутних точок при $\mu > \bar{\mu}$, але не дає відповіді у практично важливому випадку $\mu < \bar{\mu}$. Ця відповідь була знайдена лише в 1968 р. методами теорії КАМ. Було показано, що трикутні точки лібрації стійкі для всіх значень маси $\mu < \bar{\mu}$ за винятком двох значень, які дорівнюють

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{213}}{30}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1833}}{90}.\tag{6.37}$$

Цей результат підтверджується існуванням “троянців” та хмар Кордилевського і робить трикутні точки лібрації цікавими для космонавтики.

Нарешті, зазначимо, що дослідження точок лібрації в просторовому (тривимірному) русі приводить до характеристичного рівняння

$$(\omega^2 + s)(\omega^4 + p\omega^2 + q) = 0, \quad (6.38)$$

де

$$s_k = A, \quad k=1,2,3, \quad s_k = 1, \quad k=4,5 \quad (6.39)$$

Видно, що обидві додаткові частоти є уявними, і тому точки лібрації стійкі в першому наближенні щодо відхилень від площини обертання важких точок.

Досліджені також розв’язки задачі трьох тіл, близькі до точок лібрації, з точки зору їх періодичності і виявлені умови, коли такі періодичні розв’язки існують (див. [16, 35]).

6.2.3. Лінії Хілла. Інтеграл Якобі дає змогу провести якісне дослідження обмеженої колової задачі трьох тіл, яке дозволяє виділити ті області, де рух точки малої маси може відбуватися за даними початковими умовами, і ті, де цей рух неможливий. Проведемо таке дослідження для плоского випадку.

Нехай відносна швидкість v точки в її русі обернулася на нуль (при цьому прискорення, взагалі кажучи, відмінне від нуля). Геометричне місце точок, де це буде так, згідно з інтегралом Якобі (6.8) задається таким рівнянням:

$$2U(x, y) - c = r^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} - c = 0. \quad (6.40)$$

На площині x, y це буде певна лінія, яку і назвемо лінією нульової швидкості або *лінією Хілла* (за ім’ям американського астронома Дж.Хілла). Оскільки прискорення $\dot{v} \neq 0$ (інакше це буде ізольована точка – точка лібрації), то точки, що утворюють лінію Хілла не будуть точками екстремумів функції $U(x, y)$. Тому ця функція повинна змінювати свій знак, якщо точка M у своєму русі перетинає лінію Хілла. Але тоді по один бік від цієї лінії квадрат швидкості v^2 повинен бути від’ємним, що неможливо. Тому точка малої маси може рухатися лише в тій частині площини, де виконується умова:

$$2U(x, y) - c \geq 0. \quad (6.41)$$

Зауважимо у зв’язку з цим, що координати точок лібрації можна знайти, як точки екстремумів функції $U(x, y)$.

Почнемо подальший аналіз з достатньо великих значень сталої Якобі c . Якщо $c \gg 1$, то повинні бути або значно більшим від 1 радіус r або малою одна з відстаней $\rho_{1,2}$. В першому випадку другий доданок в (6.41) малий (точка M досить далека від точок $M_{1,2}$). Тому наближене рівняння лінії Хілла має вигляд $r^2 = c$, і ця лінія майже співпадає з колом радіуса \sqrt{c} . В другому випадку принаймні другий або третій доданок в (6.41) значно більше 1 в той час, як $r^2 \approx 1$. І наближене рівняння лінії Хілла в цьому випадку таке:

$$\frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \quad (6.42)$$

Це рівняння задає дві замкнені криві, одна з яких оточує точку M_1 , друга – точку M_2 . Ці криві мають в геометрії назву “овали” і зовні схожі на еліпси (однак еліпс лежить в межах овала з такими ж осями). Ці овали на рис. 6.5 разом з колом $r^2 = c$ позначені цифрою 1. Рух точки малої маси можливий лише за межами кола з великим радіусом \sqrt{c} або всередині одного з овалів, тобто поблизу однієї з точок $M_{1,2}$. Звернемо увагу на те, що в кожному з цих трьох випадків рух точки малої маси близький до руху в задачі двох тіл з масами $m_1 + m_2$, m_1 та m_2 відповідно і може бути досліджений методами теорії збурень.

При зменшенні сталої c коло та овали почнуть все більше деформуватися, причому квазіколо почне зменшуватися, а квазіовали – збільшуватися. І при певному критичному значенні $c = c_1$ овали дотикнуться один до одного. Відбудеться це якраз у внутрішній точці лібрації L_1 (криві 2 на рис. 6.5).

При подальшому зменшенні величини c ($c < c_1$) горловина, що з'єднує колишні овали, почне розширюватися, і область, де можливий рух точки M , стане двохзв'язною (криві 3 рис. 6.5). При критичному значенні $c = c_2$ внутрішня та зовнішня лінії Хілла дотикнуться одна до одної в точці лібрації L_2 (криві 4 рис. 6.5).

Потім при $c > c_2$ розширюватиметься горловина біля точки L_2 – область руху точки малої маси стане вже однозв'язною (крива 5 рис. 6.5). Якщо і далі зменшувати значення c до критичного значення $c = c_3$, то відбудеться дотикання зовнішньої і внутрішньої частин лінії Хілла в точці лібрації L_3 (крива 6 рис. 6.5).

При значеннях $c < c_3$ єдина лінія Хілла знову розірветься на дві замкнені лінії (подібні до перерізу крила літака, криві 7 рис. 6.5), і рух точки M можливий лише поза областями, які оточують трикутні точки лібрації L_4 та L_5 . Нарешті, значення c при подальшому його зменшенні досягає критичного значення c_4 , при якому лінії Хілла стягуються в точки лібрації $L_{4,5}$.

З проведеного аналізу можна побачити особливу роль, що її відіграють точки лібрації в структурі ліній Хілла. В прямолінійних точках лібрації порушується однозначність ліній Хілла – це точки їх взаємоперетину. Трикутні точки – це граничні точки сімейства ліній Хілла. Критичні значення сталої Якобі c_k можна знайти, підставляючи в (6.40) значення координат точок лібрації x_k, y_k . Значення c_k , як і координати точок лібрації, залежать від параметра μ , тобто від відношення мас важких точок M_1 та M_2 .

Якщо розглянути геометричне місце точок нульової відносної швидкості v в просторовій обмеженій задачі трьох тіл, то це вже будуть *поверхні Хілла*. А рис. 6.5 буде давати уявлення про структуру перерізів поверхонь Хілла площиною $z = 0$ (де z – тут вже апліката точки M). Структура перерізів поверхонь Хілла площиною $y = 0$ з рівнянням

$$x^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c \quad (6.43)$$

показана на рис. 6.6. А структуру перерізів площиною $x=0$, які визначаються рівнянням

$$y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c, \quad (6.44)$$

можна побачити на рис. 6.7.

Особливо важливу роль поверхні Хілла відіграють в фізиці подвійних зоряних систем, а саме ті поверхні, що відповідають критичному значенню сталої Якобі c_1 . При цьому утворюються дві дотичні одна до одної яйцеподібні області навколо точок $M_{1,2}$, які мають назву *порожнин Роша*. Їх значення полягає в тому, що тільки тоді, коли один з компонентів подвійної системи заповнює свою порожнину Роша, можливе ефективне перетікання речовини з цього компонента на іншій. В такому випадку подвійна система зветься *тісною подвійною системою* (ТПС). Особливо цікаві явища виникають в ТПС тоді, коли цей інший компонент є масивною зіркою на кінцевій стадії еволюції (пульсар або чорна діра). Тоді прискорення речовини, що падає на цей компактний об'єкт досягає дуже великих значень. Тому різко зростає температура цієї речовини, і акреційний диск, що утворюється внаслідок осевого обертання компактного компонента, стає джерелом рентгенівського випромінювання. А прецесійний рух в такій подвійній системі може приводити до спостережної змінності цього джерела.

Практично важливим є той випадок, коли стала Якобі $c \gg 1$ за рахунок того, що $\rho_1 \ll 1$, тобто точка малої маси рухається в безпосередньому околі важкої точки меншої маси (система “Сонце – планета – її супутник”). Дослідження в цьому випадку розв’язків, зокрема періодичних, дістало назву *задачі Хілла*. При цьому, якщо відмовитися від канонічної системи одиниць, можна вважати, що відстань a є нескінченно великою, але при умові, що величина $n^2 a^3 = f(m_1 + m_2)$ лишається скінченною. Тобто точка M_2 знаходиться вельми далеко від точок M і M_1 , але все ж таки впливає на рух точки M завдяки своїй великій масі. Результати, одержанні при вивченні задачі Хілла, лягли в основу створеної Е.Брауном теорії руху Місяця.

На закінчення розгляду обмеженої задачі трьох тіл зазначимо, що в довільній обмеженій задачі трьох тіл рівняння руху можна звести до вигляду (6.10), якщо перейти від координат x, y, z до нових координат ξ, η, ζ , де

$$x = \frac{r}{p} \xi, \quad y = \frac{r}{p} \eta, \quad z = \frac{r}{p} \zeta, \quad (6.45)$$

а p – фокальний параметр відносного кеплерівського руху важких точок $M_{1,2}$.

Тоді рівняння обмеженої задачі трьох тіл набувають такого вигляду (це так звані *рівняння Нехвіла*):

$$\begin{aligned}\xi'' &= 2\eta' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}, \\ \eta'' &= -2\xi' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta},\end{aligned}\tag{6.46}$$

де потенціал

$$\bar{U} = \frac{r}{p} \left[\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} e \zeta^2 \cos \nu + p^3 \left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right) \right],\tag{6.47}$$

а ' означає похідну за істинною аномалією ν .

Поняття ліній і поверхонь Хілла використовуються для дослідження руху і в інших задачах небесної механіки.

6.3. Необмежена задача трьох тіл. Термін “обмежена задача” застосовується не тільки до задачі трьох тіл, а і до будь-якої задачі про рух точки настільки малої маси, що вона зовсім не впливає на рух тіл, під дією яких вона сама рухається. Навпаки, задачі, в яких не накладається ніяких обмежень на маси взаємодіючих матеріальних точок та тіл, мають назву “необмежених задач”. Найбільш відомою і дослідженою серед них є *необмежена задача трьох тіл*. Її рівняння в інерціальній системі координат були наведені на початку цієї глави – рівняння (6.1). Як вже вказувалося, і в необмеженій задачі трьох тіл існують п'ять часткових лагранжеві розв'язків – точок лібрації. Тому виникають задачі дослідження стійкості цих розв'язків, а також стійкості та періодичності розв'язків, близьких до лагранжевих [16,34].

Необмежена задача трьох тіл стала першим випадком задачі багатьох тіл, який був точно проінтегрований за допомогою степеневих рядів. Це було зроблене в 1912 р. фінським математиком К.Зундманом. Наведемо без доказу (який можна знайти в [16]) основний результат дослідження Зундмана. Він міститься в такій *теоремі Зундмана*:

Якщо в задачі трьох тіл стала інтегралу моментів $c \neq 0$, то за початковими умовами можна знайти дві таких додатних сталих l та Ω , що координати точок, взаємні відстані між ними і час будуть розкладатися в ряди (ряди Зундмана) за цілими додатними степенями певної змінної τ . Ці ряди будуть абсолютно збіжними при всіх $|\tau| < 1$ і визначатимуть рух в задачі трьох тіл для всіх значень часу t .

Для того, щоб навести формули для обчислення сталих l та Ω і змінної τ , треба зробити диференціальну заміну часу t на нову змінну ω , а саме:

$$dt = \Gamma d\omega, \quad \Gamma = \prod_{k=0}^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{R_k}{l}\right) \right).\tag{6.48}$$

Сенс цієї заміни полягає, як і в перетворенні Тіле, в тому, щоб мати можливість описувати процес зіткнення точок при їх русі. Але цього разу

мається на увазі, що після зіткнення рух продовжується за новими початковими умовами, які обчислюються за початковими умовами до зіткнення. Стала l визначається таким чином:

$$l = \frac{1}{3} \sqrt{m_0} \frac{c_1^2 R^{(0)}}{(R^{(0)} \dot{R}^{(0)})^2 + c_1^2}, \quad (6.49)$$

де m_0 – найменша з мас трьох точок, $R^{(0)}, \dot{R}^{(0)}$ – це початкові значення величини

$$R = \sqrt{\frac{\Delta_{12}^2}{m_0} + \frac{\Delta_{02}^2}{m_1} + \frac{\Delta_{01}^2}{m_2}} \quad (6.50)$$

та її похідної за часом, Δ_{ij} і m_k – відстані між точками системи та їх маси, $m = m_0 + m_1 + m_2$, а величина

$$c_1 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m} c. \quad (6.51)$$

Стала

$$\Omega = \frac{l_1 \sqrt{\frac{3l_1}{\mu}}}{\frac{15}{8} \frac{m}{m_0} + \frac{3G^2 l_1}{2\mu_0} + \frac{9G\sqrt{\mu l_1}}{2\mu_0} + \frac{3}{4f} l_1 |K| + 224 \sqrt{\frac{16m}{m_0} + \frac{3l_1}{f} |K|}}, \quad (6.52)$$

де $l_1 = \frac{2}{29} l$, $\mu = fm$ – гравітаційна стала задачі, а $\mu_0 = fm_0$ – гравітаційна стала точки найменшої маси. Допоміжна стала

$$G = \frac{1}{14l_1} \sqrt{\frac{9c^2}{2m_0^2} + \left(775 + \frac{3m}{m_0}\right) \left(\frac{1}{29} + \frac{m}{4m_0} + \frac{l_1}{16f} |K|\right) \mu l_1}, \quad (6.53)$$

а величина

$$K = -\frac{m}{m_0 + m_1 + m_2} h, \quad (6.54)$$

де h – стала інтеграла енергії.

Нарешті, змінна τ визначається таким чином:

$$\tau = th \left(\frac{\pi \omega}{4\Omega} \right). \quad (6.55)$$

Результат досить громіздкий. То ж скільки праці треба було докласти, щоб його одержати. Цей результат самим же Зундманом був узагальнений на довільну задачу багатьох тіл. Але практичного застосування ряди Зундмана, на жаль, не знайшли, бо вони виявилися збіжними надзвичайно повільно. Підраховано, що для одержання більш-менш прийнятної точності для обчислення координат потрібно підсумувати біля $10^{8000000}$. І все ж принципове значення результатів Зундмана велике, вони стимулювали подальші аналітичні дослідження задачі багатьох тіл.

Задачі до глави VI.

6.1. Одержати в квадратурах розв'язок так званої копенгагенської задачі, колової обмеженої задачі трьох тіл з $\mu = 1/2$ та початковими умовами:

$$x_0 = \dot{x}_0 = y_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0, \text{ а } z_0 \neq 0.$$

6.2. Обґрунтувати висновки про стійкість точок лібрації в лінійному наближенні.

6.3. З'ясувати, чи буде рух вказаних малих планет з урахуванням збурення від Юпітера завжди фінітним:

а) Гільда: $\Omega = 228^\circ, \omega = 49^\circ, i = 8^\circ, e = 0.153, a = 3.975$;

б) Єва: $\Omega = 77^\circ, \omega = 283^\circ, i = 24^\circ, e = 0/345, a = 2.824$.

6.4. Показати, що рух в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл задовольняє системі рівнянь (6.46).

6.5. Довести, що прямолінійні точки лібрації нестійкі в еліптичній задачі трьох тіл при достатньо малому значенні ексцентриситету орбіт важких точок.

6.6. Довести, що в необмеженій задачі трьох тіл постійна конфігурація, що має вигляд рівнобічного трикутника, зберігається незмінною, якщо відстані до центру мас системи r_i задовольняють рівностям:

$$\frac{r_1}{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}} = \frac{r_2}{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2}} = \frac{r_3}{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}.$$

Глава VII. ОСНОВИ ТЕОРІЇ РУХУ ТІЛ СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ

В четвертій главі були викладені загальні основи вивчення збуреного руху в небесній механіці – метод оскулюючих елементів та метод усереднення. Нижче зроблено огляд методів, за допомогою яких будуються теорії руху великих та малих планет і інших тіл Сонячної системи. Більш докладно будуть розглянуті метод Лагранжа, заснований на розкладі в ряд збурюючої функції, та пов'язане з ним поняття про власні елементи орбіти. Викладені також основи теорії руху Місяця.

7.1. Огляд методів в теоріях руху тіл Сонячної системи

7.1.1. Чисельні методи. При розгляді руху будь якого конкретного тіла, для якого відомі із спостережень чисельні значення початкових умов та параметрів, що описують збурюючі сили, природно звернутися до того чи іншого методу чисельного інтегрування диференціальних рівнянь збуреного руху. Як підкреслювалося в четвертій главі, повільність зміни оскулюючих елементів порівняно з координатами робить більш доцільним чисельне інтегрування рівнянь руху саме в оскулюючих елементах. Але складність обчислення правих частин цих рівнянь порівняно з рівняннями в координатах приводить до того, що чисельне інтегрування останніх також досить поширене, особливо при обчисленні ефемерид, тобто тоді, коли потрібні значення координат на відносно невеликому проміжку часу.

Є два підходи до інтегрування рівнянь руху в координатах. Перший, що дістав назву *метода Коуелла*, полягає в тому, що той чи інший метод чисельного інтегрування застосовується безпосередньо до самих рівнянь руху. При другому підході, який пов'язується з іменем Енке (*метод Енке*), складаються і інтегруються рівняння для відхилень координат від їх значень в задачі двох тіл (точніше кажучи, обчислених за оскулюючими елементами в початковий момент t_0). В першому випадку більш простим є обчислення правих частин рівнянь. В другому – праві частини є складнішими і потрібен додатковий етап – обчислення початкових значень координат. Але змінюються варіації координат значно повільніше від самих координат, тому рівняння для них зручніше для чисельного інтегрування. Проте ці варіації, тобто відхилення збурених координат від незбурених, взагалі кажучи, з часом збільшуються. Це примушує переходити від оскулюючих елементів в момент t_0 , як початкових, до елементів в певний момент t_1 і так далі. Це також ускладнює обчислення за схемою Енке. Тому однозначної відповіді на питання про те, який метод – Коуелла чи Енке більш доцільний, не можна дати. Це питання доводиться вирішувати в кожному конкретному випадку окремо.

Переходячи до питання про вибір конкретного засобу чисельного інтегрування рівнянь руху, нагадаємо, що вони поділяються на однокрокові та багатокрокові. В однокрокових методах для знаходження наступних значень

розв'язків системи використовується лише одне попереднє їх значення. Такими є метод Ейлера – найпростіший за ідеєю та реалізацією, але і найменш точний, та відомий метод Рунге-Кутта. В останньому для підвищення його точності додатково обчислюються значення відшукуваних функцій ще в певних точках на проміжку (t_k, t_k+h) , де h – крок інтегрування. Багатокрокові методи засновані на наближеному знаходженні похідних кількох перших порядків відшукуваних функцій за допомогою скінченних різниць та застосуванні відповідної кількості членів ряду Тейлора. Прикладом такого методу є *метод Адамса*, що його він винайшов при обчисленні координат Нептуна за його збурюючим впливом на рух Урана. В методі Адамса наступне (п'яте) значення розв'язку знаходиться за чотирма попередніми:

$$x_5 = x_1 + \frac{1}{2}\Delta_{7/2}^1 + \frac{5}{12}\Delta_3^2 + \frac{3}{8}\Delta_{5/2}^3 + \frac{251}{720}\Delta_4^4. \quad (7.1)$$

Пізніше Штермер модифікував метод Адамса так, щоб він був застосовний безпосередньо для систем рівнянь другого порядку і не було потреби зводити їх до систем першого порядку. Коуелл, досліджуючи рух VIII супутника Юпітера, запропонував засіб чисельного інтегрування, що має більш високу точність, ніж метод Адамса. В *методі Коуелла*

$$x_5 = x_4 + \frac{1}{2}(\Delta_{9/2} + \Delta_{7/2}) + \frac{1}{6}\Delta_3^2 - \frac{1}{24}(\Delta_{7/2}^3 + \Delta_{5/2}^3) - \frac{1}{720}\Delta_4^4. \quad (7.2)$$

Досягається це за рахунок припущення, що четверті різниці є вже сталими, і обчислення різниць в наступній точці від четвертої до першої.

Важливим моментом у чисельному інтегруванні є оптимальний вибір кроку інтегрування i , зокрема, його зміна у відповідності до швидкості зміни відшукуваних координат. При цьому очевидно, що зміна кроку інтегрування значно простіша при застосуванні однокрокових методів, ніж багатокрокових.

При інтегруванні рівнянь руху тіл Сонячної системи, як правило, постає одна з двох можливих задач. Перша з цих задач – знайти достатньо точні координати тіла для обчислення його ефемерид на відносно невеликому відрізьку часу (порядку одного чи кількох його обертів). Друга задача виникає при дослідженні динамічної історії Сонячної системи або якоїсь її частини, коли треба наближено проінтегрувати рівняння руху на максимально можливому проміжку часу. В першому випадку доцільніше інтегрувати рівняння руху в координатах, в другому – в оскулюючих елементах або еволюційні рівняння, які описують лише вікові збурення елементів.

7.1.2. Аналітичні методи. Аналітичні методи наближеного інтегрування, що виникли при побудові теорій руху різних тіл Сонячної системи, також орієнтовані на вирішення однієї з тих двох задач, про які йшлося наприкінці попереднього підрозділу.

Зупинимося спочатку на методах знаходження вікових збурень. *Метод Гаусса* – це і є метод усереднення, розглянутий в загальному вигляді в

четвертій главі. Застосований до так званої двохпланетної задачі (збурення руху планети m планетою m'), цей метод має таку фізичну інтерпретацію. Усереднення правих частин рівнянь для оскулюючих елементів за середньою аномалією збурюючої планети призводить до того, що в ці рівняння замість компонент збурюючої сили треба підставляти похідні по напрямкам S, T, W від потенціалу так званого гауссового кільця

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta}, \quad (7.3)$$

де Δ – відстань між планетами, а dm' – маса елемента еліптичного кільця, утвореного розподілом маси збурюючої планети вздовж її орбіти з густиною, що пропорційна площі елементарного фокального сектора. Як показав Гаусс, потенціал V може бути обчислений за допомогою еліптичних інтегралів. Інтеграл усереднення за середньою аномалією збурюваної планети знаходиться його чисельним інтегруванням. Труднощі, що виникають при практичній співмірності середніх рухів збурюваної та збурюючої планет можуть бути подолані за допомогою методу, що був запропонований М.М.Боголюбовим.

Метод Лагранжа для знаходження вікових збурень оскулюючих елементів, заснований на розкладі в ряд збурюючої функції, буде розглянутий в наступному підрозділі.

Першим методом, запропонованим для одержання збурених координат планет, був *метод Лапласа*, модифікований пізніше Ньюкомбом. В цьому методі складаються і наближено інтегруються рівняння для логарифма геліоцентричної відстані планети та її широти в оскулюючій орбіті і рівняння для елементів Ω та i , що визначають положення цієї оскулюючої орбіти. При цьому наближення розв'язків цих рівнянь будуються за степенями відношення маси збурюючої планети до маси Сонця.

Метод Ганзена в цілому аналогічний методу Лапласа, але в ньому відшуковуються збурення сферичних координат в певній спеціальній системі координат, яка дістала назву *ідеальних координат Ганзена*. Ця система координат одержується з екліптичної поворотом координатних осей за допомогою матриці повороту A , на яку накладаються такі умови:

$$\frac{dA}{dt} \cdot \vec{r} = 0, \quad z = 0. \quad (7.4)$$

Система координат Ганзена є рухомою. Але в ній має місце такий же зв'язок між координатами і оскулюючими елементами, що і в нерухомих системах.

Ще один метод – *метод Хілла* заснований на одержаних ним точних рівняннях для збурень сферичних координат планети і їх наступному інтегруванні методом послідовних наближень.

Нарешті, *метод*, запропонований *Делоне*, потребує використання канонічних оскулюючих елементів Делоне (див. пункт 5.2.2). Основна ідея

методу Делоне полягає в тому, що після розкладу правих частин рівнянь для цих елементів в ряди Фур'є робляться послідовно такі їх канонічні перетворення, щоб виключити з цих рядів вільні члени та члени з найбільшими амплітудами.

Для докладнішого ознайомлення із згаданими та деякими іншими методами інтегрування рівнянь збуреного руху великих планет треба звернутися до книг [9,37].

На закінчення ще раз нагадаємо, що при побудові теорій руху великих планет суттєвим чином використовуються наявність (в гауссовій системі одиниць) малих параметрів – мас планет, ексцентриситетів та відносних нахилень їх орбіт. Зокрема вводиться малий параметр, $\sigma = \sin^2(J/2)$, де J - відносне нахилення орбіт збурюючої та збурюваної планет. За всіма цими малими величинами можуть бути розкладені в степеневі ряди коефіцієнти Фур'є правих частин рівнянь збуреного руху. Тоді при інтегруванні цих рівнянь методом послідовних наближень одержимо, що певний елемент орбіти збурюваної планети матиме такий вигляд:

$$E = E^0 + \sum_k \delta_k E, \quad (7.5)$$

де k -те збурення цього елемента буде сумою членів такої структури:

$$AM \frac{t^p \cos[(s, n) + \alpha]}{\prod_j (s_j, n)^{k_j}}, \quad (7.6)$$

де множник A пропорційний добуткові невід'ємних степенів збурюючих мас, при цьому сума показників дорівнює k . Це число k визначає *порядок збурення*. Множник M є одночленом невід'ємних степенів ексцентриситетів та величин σ . Сума показників цього одночлена має назву *степеня збурення*. Величини

$$(s, n) = \sum_i s^{(i)} n_i, \quad (s_j, n) = \sum_i s_j^{(i)} n_i, \quad (7.7)$$

l – кількість планет, s, s_j - цілі числа, p, k_j – невід'ємні цілі числа. Добуток, що стоїть в знаменнику (7.6), виникає при послідовному інтегруванні за методом ітерацій. Різниця $k-p$ зветься *рангом збурення*, а величина $k-q/2-p/2$, де $q=\sum k_j$, його *класом*. Сенс введених понять полягає в тому, що при певних умовах, які накладаються на числа s та s_j , можна встановити умови, яким задовольняють ранг та клас збурення. Зокрема, це встановлюється відповідними теоремами Пуанкаре про ранг та клас збурень (докладніше див. про це в [30,37]. З цих теорем випливають і відомі теореми Лапласа та Пуассона про відсутність вікових збурень великих півосей в планетній задачі в першому та другому наближеннях.

7.2. Вікові збурення планет. Метод Лагранжа

7.2.1. Розклад збурюючої функції. Якщо збурений рух описується відносною задачею багатьох тіл, то існує збурююча функція для кожної планети, яка має вигляд (1.57). Розглянемо спочатку задачу трьох тіл (двохпланетну задачу). В цьому випадку збурююча функція

$$R = fm \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right), \quad (7.8)$$

де відстань між планетами

$$\Delta = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{1/2}, \quad (7.9)$$

H – кут між радіусами-векторами збурюваної планети \vec{r} та збурюючої – \vec{r}' . Перший доданок в (7.8) має назву *головної частини* збурюючої функції, другий – її додаткового або другого члена. Важливо те, що другий член після розкладу його в подвійний ряд Фур'є за середніми аномаліями M та M' не має вільного члена, бо інтеграли типу

$$\oint x r^{-3} dM \quad (7.10)$$

в силу рівнянь незбуреного руху дорівнюють 0. Тому, якщо нас цікавлять лише вікові збурення, то достатньо мати справу лише з головною частиною (7.8), тобто величиною Δ^{-1} . Задача полягає в тому, щоб знайти розклад цієї величини в ряд Фур'є за кутовими змінними Ω , π , M , Ω' , π' , M' і степеневі ряди за ексцентриситетами e та e' і величиною σ . При цьому коефіцієнти такого ряду будуть функціями лише великих півосей a та a' .

Якщо позначити (див. рис. 7.1) через Π та Π' довготи перигеліїв планетних орбіт, а через L та L' – довготи самих планет, що відлічуються від точки перетину орбіт (на геліоцентричній небесній сфері), то матимемо:

$$\cos H = \cos L \cos L' + \sin L \sin L' \cos J = \cos(L - L') - 2\nu \sin J, \quad (7.11)$$

де $\nu = \sin^2(J/2)$.

Тоді

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} (1 + \beta)^{-1/2}, \quad (7.12)$$

де відстань між планетами на компланарних орбітах

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(L - L'))^{1/2}, \\ \beta &= 4\nu \sin L \sin L' rr' / \Delta_0^2 \leq 4\nu rr' / (r - r')^2 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Розклад виразу (7.12) в ряд за степенями β (а тим самим і ν) та виразу для Δ_0 в ряд Фур'є за кутом $S = L - L'$ і лежить в основі розкладу в ряд головної частини збурюючої функції. При цьому важливу роль відіграють величини, що мають назву *коефіцієнтів Ньюкомба*

$$c_n^i = \alpha^{(n-1)/2} b_n^i, \quad b_n^i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos S)^{-n/2} \cos i S dS \quad \alpha = a / a' < 1. \quad (7.14)$$

Зауважимо, що умова $\alpha < 1$ не накладає обмежень на значення півосей a та a' , бо відстань Δ симетрично залежить від r та r' . Інтегралі b_n^i мають назву коефіцієнтів Лапласа і дорівнюють в загальному випадку:

$$b_n^i = \frac{2(n/2, i)}{(1, i)} F(n/2 + n/2 + i, i + 1, \alpha^2), \quad (7.15)$$

де F – гіпергеометрична функція, а $(k, i) = k(k-1)\dots(k+i-1)$. Потрібні нам в подальшому перші коефіцієнти Лапласа

$$b_1^0 = \frac{4}{\pi} F(\alpha), \quad b_1^1 = \frac{4}{\pi\alpha} (F(\alpha) - E(\alpha)), \quad (7.16)$$

де F та E – повні еліптичні інтегралі першого та другого роду.

Після одержання рядів за степенями ν їх коефіцієнти, що залежать від r та r' розкладають в ряди за степенями ексцентриситетів e та e' за допомогою ряду (3.28). Величини $\cos iS$ за допомогою рівняння центру (3.46) розкладаються в ряди Фур'є за середніми аномаліями M та M' . Кінцевий результат має вигляд:

$$R = \sum e^n e'^n P_{j,j'}^{(s,s')} \nu^k \cos(s\Pi + s'\Pi + jM + j'M'), \quad (7.17)$$

де n , n' та k – цілі невід'ємні числа, а s , s' , j та j' – цілі числа, але в кожному члені ряду (7.17) сума $n+n'+2k$ або дорівнює $|j+j'|$ або перевищує його на парне число. Коефіцієнти $P_{j,j'}^{(s,s')}$ можуть бути знайдені через коефіцієнти Лапласа за допомогою так званих операторів Ньюкомба. Оператори Ньюкомба є певними поліномами ступеня n від аргументів D та s , де оператор $D \equiv d/d(\ln \alpha)$. Коефіцієнти Ньюкомба і Лапласа та їх похідні зв'язані багатьма рекурентними співвідношеннями. Зокрема,

$$n^2 D^k c_{n+2}^i = D^k [D^2 + D - (i + (n-1)/2)(i + (n-3)/2)] c_n^{i-1}. \quad (7.18)$$

Докладніше задача розкладу збурюючої функції в ряди розглянуто в [9,37]. Ми далі наведемо лише явний вигляд ряду для вікової частини збурюючої функції (точніше для відношення a'/Δ). Вдержуючи члени другого порядку відносно малих величин e, e' та ν^2 матимемо:

$$\frac{a}{\Delta} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{128} e^4 \right) c_1^0 + \left\{ \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) - \frac{1}{2} \nu^2 [1 + e^2 (2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2)] \right\} c_3^1 + \quad (7.19)$$

$$+ \frac{1}{4} ee' (2 - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2) c_1^0 \cos(\Pi - \Pi') + \frac{1}{16} e^2 \nu^2 (6 + 6\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2) c_3^1 \cos 2(\Pi - \Pi'),$$

де $D_\alpha \equiv d/d\alpha$.

7.2.2. Власні елементи орбіт. Якщо малими першого порядку є величини e , e' та ν , то з тією ж точністю матимемо, враховуючи (7.18), що вікова частина збурюючої функції після деяких перетворень буде дорівнювати:

$$R = fm' \{ M + N(e^2 + e'^2 - \sin^2 i - \sin^2 i' + 2 \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega')) - 2Pe'e' \cos(\Pi - \Pi') \}, \quad (7.20)$$

де коефіцієнти

$$M = b_1^0 / a', \quad N = \frac{1}{4a'} \left(\alpha \frac{db_1^0}{d\alpha} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2 b_1^0}{d\alpha^2} \right), \quad P = \frac{1}{4a'} \left(b_1^1 - \alpha \frac{db_1^1}{d\alpha} - \frac{1}{2} \frac{d^2 b_1^1}{d\alpha^2} \right), \quad (7.21)$$

а коефіцієнти Лапласа визначаються формулами (7.16). Якщо тепер перейти до багатопланетної задачі (Сонце та n планет) і ввести нові елементи замість кеплерівських:

$$h_a = e_a \sin \pi_a, \quad k_a = e_a \cos \pi_a, \quad p_a = \sin i_a \sin \Omega_a, \quad q_a = \sin i_a \cos \Omega_a, \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (7.22)$$

то (7.20) перепишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ab} = fm' \{ & M_b + N_{ab} [h_a^2 + h_b^2 + k_a^2 + k_b^2 - p_a^2 - p_b^2 - q_a^2 - q_b^2 + 2(p_a p_b + q_a q_b)] - \\ & - 2P_{ab} (h_a h_b + k_a k_b) \}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Бачимо, що потенціал осередненої задачі в оскулюючих елементах h , k , p та q є квадратичною функцією цих елементів, тобто для цих елементів ми маємо добре відому в механіці задачу про лінійні коливання системи з багатьма ступенями свободи [23]. При цьому рівняння руху розпадаються на дві незалежні системи – одна для елементів h та k , друга – для елементів p та q . Ці системи можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dh_a}{dt} &= (a, a)k_a - \sum_b [a, b]k_b, \\ \frac{dk_a}{dt} &= -(a, a)h_a + \sum_b [a, b]h_b \end{aligned} \quad (7.24)$$

та

$$\begin{aligned} \frac{dp_a}{dt} &= -(a, a)q_a + \sum_b (a, b)q_b \\ \frac{dq_a}{dt} &= (a, a)p_a - \sum_b (a, b)p_b. \end{aligned} \quad (7.25)$$

де введені позначення:

$$(a, a) = \sum_b \frac{2fm_b}{n_a a_a^2} N_{ab}, \quad (a, b) = \frac{2fm_b}{n_a a_a^2} N_{ab}, \quad [a, b] = \frac{2fm_b}{n_a a_a^2} P_{ab} \quad (7.26)$$

Величини N_{ab} та P_{ab} узагальнюють (7.21); m , a та n - маси планет, великі півосі їх орбіт та їх середні рухи. Розв'язок кожної з цих систем рівнянь можна шукати в такому вигляді:

$$h_a = \sum_b M_{ba}^{(a)} \sin(g_b t + \beta_b), \quad k_a = \sum_b M_{ba}^{(a)} \cos(g_b t + \beta_b), \quad (7.27)$$

та

$$p_a = \sum_b N_{ba}^{(a)} \sin(f_b t + \gamma_b), \quad q_a = \sum_b N_{ba}^{(a)} \cos(f_b t + \gamma_b). \quad (7.28)$$

Частоти g_b – це корені характеристичного рівняння

$$\|A_{ab} - g\delta_{ab}\| = 0, \quad (7.29)$$

де

$$A_{ab} = -\frac{a_a \sqrt{m_a n_a}}{a_b \sqrt{m_b n_b}} [a, b],$$

а частоти f_b знаходяться з рівняння

$$\|B_{ab} - f\delta_{ab}\| = 0 \quad (7.30)$$

де

$$B_{ab} = -\frac{a_a \sqrt{m_a n_a}}{a_b \sqrt{m_b n_b}} (a, b).$$

Амплітуди $M_{ab}^{(a)}$ та $N_{ab}^{(a)}$ і початкові фази β_b та γ_b є сталими інтегрування задачі і дістали назву *власних елементів орбіти*. Знання амплітуд дозволяє знайти межі, в яких змінюються вікові значення ексцентриситетів та нахилень планетних орбіт з періодами, відповідними знайденим частотам, а якщо відомі і початкові фази, то можна обчислити і самі значення елементів e та i в дану епоху. Значення власних елементів для восьми великих планет (крім Плутона) можна знайти в [36]. Зокрема, ексцентриситет земної орбіти змінюється з періодом в 24 тис. років, що може впливати на клімат Землі. Плутон в цю схему не вписується, бо для пари Нептун–Плутон значення β в (7.6) не є малим і відповідний ряд збігається дуже повільно.

Розглянемо тепер обмежену задачу 10 тіл – Сонце, вісім великих планет та тіло знехтовно малої маси з достатньо малими значеннями ексцентриситету та нахилень орбіти (мала планета, короткоперіодична комета, крупне метеорне тіло). В цьому випадку повна система рівнянь задачі розпадеться на системи (7.18) та (7.19) для великих планет і системи рівнянь для власних елементів h та k і p та q для тіла нехтовно малої маси:

$$\frac{dh}{dt} = k \sum_b (0, b) - \sum_b k_b [0, b], \quad \frac{dk}{dt} = -h \sum_b (0, b) + \sum_b h_b (0, b) \quad (7.31)$$

та відповідна система для елементів p та q . Підставляючи в (7.31) значення h_b та k_b з (7.27), матимемо:

$$\frac{dh}{dt} = gk - \sum_b B_b \cos(g_b t + \beta_b), \quad \frac{dk}{dt} = -gh + \sum_b B_b \sin(g_b t + \beta_b), \quad (7.32) \text{ де}$$

$g = \sum_b (0, b)$. Таким чином, величини h та k коливаються з власною частотою g та

вимушеними частотами g_b , тобто

$$h = e \sin \pi = B \sin(gt + \beta) + \sum_b \frac{B_b}{g - g_b} \sin(g_b t + \beta_b),$$

$$k = e \cos \pi = B \cos(gt + \beta) + \sum_b \frac{B_b}{g - g_b} \cos(g_b t + \beta_b). \quad (7.33)$$

Аналогічно для елементів p та q матимемо:

$$p = \sin i \sin \Omega = C \sin(-gt + \gamma) + \sum_b \frac{C_b}{g + f_b} \sin(f_b t + \gamma_b),$$

$$q = \sin i \cos \Omega = C \cos(-gt + \gamma) + \sum_b \frac{C_b}{g + f_b} \cos(f_b t + \gamma_b). \quad (7.34)$$

Сталі інтегрування B , C , β та γ разом з великою півоссю a , у якої також відсутні вікові збурення, – це *власні елементи* відповідного малого тіла Сонячної системи. Вони придатні при розгляді руху цього тіла на достатньо великих проміжках часу – частоти g та f відповідають періодам в десятки та сотні тисяч років. Близькість власних елементів малих планет є підставою для об'єднання їх в групи (*сімейства Хіраями*), в яких астероїди, мабуть, мають спільне походження. Але треба пам'ятати, що для застосування поняття про власні елементи потрібні не тільки малі значення ексцентриситетів та нахилень, а й недопустима близькість великої півосі тіла a до півосі якоїсь з великих планет, бо тоді параметр α прямує до 1, а еліптичний інтеграл першого роду, а разом з ним і коефіцієнти Лапласа розходяться. Цей квазірезонансний випадок зараз є предметом активних досліджень в небесній механіці. Більш докладно метод Лагранжа розглянуто в працях [9,37].

7.3. Основи теорії руху Місяця

Теорія руху Місяця займає особливе місце в усій історії небесної механіки. З одного боку це визначається великим прикладним значенням задачі. До створення в 1781 р. Харрісоном морського хронометра співставлення спостережних і розрахованих значень положень Місяця було основним засобом визначення довгот в мореплаванні. Важливу роль у вивченні Місяця та вирішенні інших задач астрономії мають спостереження покриттів зірок Місяцем, для чого також потрібні його точні координати. Зокрема, при проведенні таких спостережень з достатньо великим часовим розділенням можна вимірювати діаметри зірок за виникаючою при цьому дифракційною картиною. Потрібна точність обчислення ефемерид Місяця зростала із збільшенням точності його позиційних спостережень. Зараз світлолокаційні методи дають змогу визначати відстань до Місяця з точністю, що менша 10 см. Практичне значення теорії руху Місяця зараз пов'язано також з його вивченням та майбутнім освоєнням засобами ракетно-космічної техніки. Після вивчення Місяця автоматичними станціями та перших короткочасних пілотованих польотів до нього космонавтика впритул підійшла до наступного етапу – створення постійної науково-дослідної бази на поверхні Місяця.

Задача про рух Місяця належить до так званих супутникових задач, але має свої особливості, які роблять її більш складною, ніж задачі про рух інших природних супутників планет. Це пов'язано з тим, що, по-перше, Земля найближча до Сонця з планет, які мають супутники, і, по-друге, з тим, що маса Землі найменша з мас планет, які мають супутники, достатньо віддалені від своєї планети. Це зумовлює відносно великий збурюючий вплив Сонця на рух Місяця. Цікаво відзначити, що Сонце притягує Місяць з силою, що в двічі перевищує силу, з якою Земля притягує Місяць, але на рух Місяця навколо Землі впливає лише різниця сил, з якими Сонце впливає на Місяць та Землю, а ця різниця значно менша. Практичне значення та теоретична складність місячної задачі призвели до того, що саме вирішуючи її, ціла низка видатних вчених внесла визначний внесок в розвиток небесної механіки в цілому. Це – І.Ньютон, Л.Ейлер, А.Клеро, Ж.Даламбер, П.Лаплас, П.Ганзен, Ш.Делоне, Д.Хілл та багато інших.

На рух Місяця відносно центру Землі впливають багато факторів. Вони вказані в табл. 7.1. Там же наведені складові в вікових збуреннях довгот перигею та вузла місячної орбіти, зумовлені кожним з цих факторів. Видно, що визначальну роль відіграють збурення від Сонця в межах еліптичної задачі трьох тіл. Тому розв'язання цієї задачі дістало назву *основної проблеми теорії руху Місяця* (або *сонячної теорії руху Місяця*).

Розглянемо основні етапи розв'язання основної проблеми теорії руху Місяця, основи якого були закладені Д.Хіллом. А потім цю теорію розвивали Е.Браун, У.Еккерт та інші.

Таблиця 7.1.

Віковий рух в "/>рік	перигею орбіти	вузла орбіти
1. Основна дія Сонця	$1.46 \cdot 10^5$	$-0.70 \cdot 10^5$
2. Відхилення від п. 1 в межах задачі трьох тіл	-0.68	0.89
3. Дія планет на Місяць і Землю	2.70	-1.40
4. Дія планет на Сонце	-0.16	0.05
5. Несферичність Землі	6.40	-6.00
6. Несферичність Місяця	0.03	-0.14
7. Релятивістська поправка	0.02	0.02

Задача розв'язується у відносних координатах Якобі, тобто рух Місяця (точка M на рис. 7.1) розглядається відносно Землі (точка E), а рух Сонця

(точка S) – відносно центру мас системи «Земля – Місяць» (точка G). Маса точок позначатимемо також як M , E та S . Тоді рівняння руху (див. задачу 1.10):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + f(E+M)\frac{\vec{r}}{r^3} = f\frac{S(E+M)}{EM}\text{grad}_r R, \quad \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = f\frac{S+E+M}{E+M}\text{grad}_\rho R, \quad (7.35)$$

де \vec{r} – геоцентричний радіус-вектор Місяця, $\vec{\rho}$ – барицентричний радіус-вектор Сонця, збурююча функція

$$R = \frac{fE}{r_{ES}} + \frac{fM}{r_{MS}}. \quad (7.36)$$

Розкладаючи відстані r_{ES} та r_{MS} в ряди за ступенями відношення r/ρ , матимемо, зокрема, що

$$R = f(E+M)\frac{1}{\rho} + \frac{fME}{E+M}\frac{r^2}{\rho^3} + \dots \quad (7.37)$$

Відношення другого члена в (7.37) до першого $\approx 10^{-7}$, що і зумовлює велику точність наближення еліптичної задачі трьох тіл у вирішенні основної проблеми руху Місяця, бо з вказаною точністю маємо:

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} + f(S+E+M)\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = 0 \quad (7.38)$$

і рух Сонця можна розглядати як кеплерівський. Позначимо тепер середній рух Сонця як n' , середній рух Місяця – n , а відношення середнього руху Сонця до синодичного середнього руху Місяця як

$$m = \frac{n'}{n - n'}. \quad (7.39)$$

Величина $m=0.0808$ відіграє важливу роль в теорії руху Місяця – саме у вигляді степеневих рядів за m і будується в подальшому ця теорія.

Якщо ввести систему координат, що обертається в площині екліптики з кутовою швидкістю n' та віссю x , яка спрямована на Сонце, то узагальнення рівнянь (6.7) можна привести до вигляду:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = 2\frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \vec{k}^0 - \frac{k\vec{r}}{r^3} + (3\vec{i}^0 + \vec{k}^0)m^2\vec{r} + \text{grad}\Omega, \quad (7.40)$$

де $k = (S+E)/(n-n')^2$, $\tau = (n-n')t$, \vec{i}^0, \vec{k}^0 – орти координатних осей x та z , Ω – певна функція координат Місяця та Сонця. Потім, як перше наближення, розв'язується плоска кругова задача трьох тіл, тобто ексцентриситет сонячної орбіти та нахилення місячної покладаються рівними 0. Лишається система рівнянь:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} + \left(\frac{k}{r^3} - 3m^2\right)x = 0, \quad (7.41)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \frac{ky}{r^3} = 0,$$

де $k/a_0 = 1 + 2m + \frac{3}{4}m^2$.

Розв'язок системи (7.41) відшукується в нульовому наближенні не у вигляді кеплерівського еліпсу, а у вигляді так званої *варіаційної кривої*. Це і є тим головним, що вніс в теорію місячного руху Д.Хілл в порівнянні із своїми попередниками. Варіаційна крива знаходиться з умови, що вона перетинає вісі x та y під прямими кутами. Можливість такого розв'язку системи (7.40) впливає з її інваріантності відносно перетворень $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $t \rightarrow -t$. Рівняння варіаційної кривої виявляються такими:

$$x = a_0 \cos \tau \left[1 - m^2 \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \tau \right) \right],$$

$$y = a_0 \sin \tau \left[1 + m^2 \left(1 + \frac{3}{4} \cos^2 \tau \right) \right],$$

де відношення сталої a_0 до середньої відстані Місяця від Землі a , дорівнює

$$\frac{a_0}{a} = 1 - \frac{m^2}{6}. \quad (7.43)$$

Відхилення в русі Місяця від варіаційної кривої відшукується в першому наближенні в компонентах δp та δs , де δp - радіальне відхилення, а δs - нормальне до радіусу відхилення. Досить громіздкі перетворення приводять врешті-решт для варіацій δp та δs до рівнянь типу:

$$\frac{d^2 \delta}{d\tau^2} = \delta \sum_{k=0}^2 q_k \cos \tau. \quad (7.44)$$

Особливістю цих рівнянь, які дістали назву *рівнянь Хілла*, є те, що при їх розв'язку методом ітерацій у вищих наближеннях з'являються змішані періодичні члени, яких не повинно бути, хоча в першому наближенні величина δ гармонійно коливається з частотою $\sqrt{q_0}$. Щоб уникнути цього, Хілл запропонував шукати перше наближення у вигляді коливань з частотою c , що близька до $\sqrt{q_0}$. Умова сумісності рівнянь для амплітуд коливань з частотами c_l ($l=1,2,\dots,l_0$, l_0 - номер наближення) дає рівняння для визначення величини c . В другому наближенні:

$$c = \sqrt{1 + \sqrt{(q_0 - 1)^2 - q_1^2}}. \quad (7.45)$$

Одержавши таким чином другі наближення для варіацій δp та δs , переходять потім до уточнених координат Місяця x та y . А підставляючи ці координати до третього з рівнянь (7.40), знаходять в тому ж наближенні і

координату z . Для завершення розв'язку основної проблеми теорії руху Місяця потрібно ще врахувати еліптичність сонячної орбіти. Це робиться за допомогою розкладання оберненої відстані між Місяцем та Сонцем за степенями ексцентриситетів місячної та сонячної орбіт. Остаточні результати подаються у вигляді рядів для екліптичних координат Місяця та синуса його горизонтального паралаксу. Ці ряди після підстановки числових значень параметрів та відповідних обчислень такі:

$$\begin{aligned} \lambda &= L + 377' \sin M + 13' \sin 2M + 76' \sin(2D - M) + 39' \sin 2D + 12' \sin M' - 2' \sin D + \dots, \\ \beta &= 308' \sin M + 13' \sin 2M + 76' \sin(2D - M) + 39' \sin 2D + 12' \sin M' - 2' \sin D + \dots, \quad (7.46) \\ \sin p &= 57.04' + 3.11' \sin M + 0.17' \cos 2M - 0.47' \cos 2D - 0.58' \cos(2D - M) + \\ &+ 0.05' \cos(2D + M) - 0.03' (2D - M') + \dots, \end{aligned}$$

де M та M' – середні аномалії Місяця та Сонця, середня довгота Місяця $L = nt + \varepsilon$, D – різниця середніх довгот Місяця і Сонця, $F = L - \Omega$.

Швидкість прецесій вузла та перигею місячної орбіти дорівнює:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -n \left(2m + \frac{5}{2} m^2 \right) (1 + m), \quad \frac{d\pi}{dt} = n \left(1 - \frac{c}{1 + m} \right). \quad (7.47)$$

Ряди повної теорії місячного руху, створенної Е.Брауном на основі ідей Хілла, включають понад 1300 членів. Та ж теорія, уточнена У.Еккертом, представлена рядами, що налічують більше 1800 членів. Застосування ЕОМ для обчислення рядів місячної теорії за допомогою програм, які здійснюють аналітичні перетворення, дозволило одержати такі ряди із загальною кількістю членів біля 7000.

Періодичні збурення довготи Місяця мають назву *нерівностей місячного руху*. Другий та третій доданки у виразі для довготи в (7.46) описують *еліптичні нерівності* в русі Місяця. Четвертий доданок описує *евекцію*, п'ятий – *варіацію*, шостий – *річну нерівність*, останній сьомий – *паралактичну нерівність*. Еліптичні нерівності відкрив ще Гіппарх, існування евеції встановив Птолемея. Варіацію та річну нерівність визначив лише в XVI ст. найкращий спостерігач дотелескопічної астрономії Т.Браге. Хоча за величиною варіація співставна з евецією, її період дорівнює половині синодичного місяця і вона обертається на 0 в сизигіях. Тому античні астрономи, які цікавилися насамперед сонячними та місячними затемненнями, не змогли помітити варіацію. Хоча амплітуда паралактичної нерівності відносно мала, але вона цікава тим, що залежить тільки від відношення великих півосей Місяця та Сонця. Це дає ще один метод визначення сонячного паралаксу, звідси походить і назва цієї нерівності.

Всі фактори, що вказані в табл. 7.1, не приводять до появи вікових членів в значеннях великої півосі та середнього руху Місяця. Але ще Е.Галлей, спираючись на дані про затемнення в античну епоху та середньовіччі, зібрани

Птолемесем і арабськими астрономами, встановив наявність вікового прискорення в середньому русі Місяця з величиною приблизно в $11''$ за 100 років. Це пояснюється (приблизно в однакових долях) двома чинниками:

1) довгоперіодичним збуренням (з періодом в 24 тис. років) ексцентриситету земної орбіти, яке на менших проміжках часу проявляє себе як вікове;

2) припливним тертям в різних оболонках Землі (насамперед, в мілководних морях), яке приводить до зменшення обертового моменту Землі і, відповідно, орбітального моменту Місяця (див., наприклад, [2]).

Докладніше теорія руху Місяця викладена в [9,37]. Коефіцієнти рядів місячного руху з точністю до $0.01''$ для екліптичних координат і до $0.001''$ для паралаксу наведені в довіднику [36].

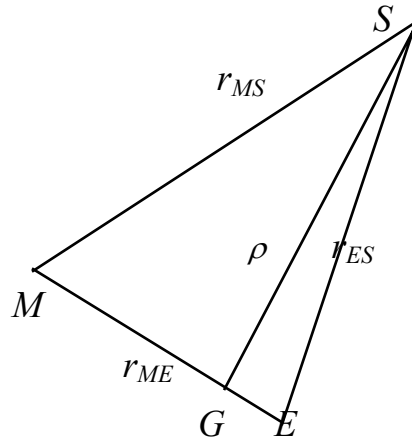


Рис. 7.1

ДОДАТКИ

Додаток 1

Елементи сферичної тригонометрії. Системи астрономічних координат

З тим, щоб полегшити користування підручником особам, які не вивчали систематичний курс загальної астрономії, нижче подані основні формули сферичної тригонометрії, визначення та формули перетворення координат в системах координат, застосованих в астрономії.

Трикутники на сфері утворюються дугами великих кіл (кіл, які мають радіус, що дорівнює радіусу сфери). Сторони сферичного трикутника можна вимірювати в кутовій мірі (градусах, радіанах, часовій мірі) і розглядати їх тригонометричні функції. Кути сферичного трикутника – це кути між дотичними до дуг, що утворюють цей трикутник. Тригонометричні функції сторін та кутів сферичного трикутника зв'язані між собою цілою низкою співвідношень, з яких основними є наступні (рис. Д1.1).

а) формула косинусів:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A; \quad (\text{Д1.1})$$

б) формула синусів:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}; \quad (\text{Д1.2})$$

в) формула п'яти елементів:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \quad (\text{Д1.3})$$

В прямокутному сферичному трикутнику (рис. Д1.2):

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin a \sin B, \\ \cos a &= \cos b \cos C. \end{aligned} \quad (\text{Д1.4})$$

Сферична система координат визначається основною площиною, яка проходить через центр сфери, і віссю системи – прямою, яка проходить через центр сфери перпендикулярно основній площині. Точки перетину осі системи із сферою – полюси системи. Одна з координат відлічується вздовж великого кола, що утворюється при перетині сфери основною площиною, друга – або від цього кола або від одного з полюсів системи.

В астрономії, зокрема в небесній механіці, застосовуються такі системи сферичних координат на небесній сфері (сфері довільного радіуса з центром в точці, де знаходиться спостерігач):

1. **Горизонтальна система.** Основна площина – площина математичного горизонту, вісь системи – прямовисна лінія. Координати – *зенітна відстань*, відлічується від зеніту вздовж вертикалу (рис. Д1.3), $0^\circ \leq z \leq 180^\circ$; *азимут* – відлічується вздовж горизонту від точки півдня (одна з точок перетину горизонту з небесним меридіаном) на захід, $0^\circ \leq A < 360^\circ$. Саме в горизонтальній системі безпосередньо вимірюються координати світил на небесній сфері. Ця система зв'язана з напрямком сили ваги і може бути в принципі просто фізично реалізована за допомогою виска та двох рівнів. Але горизонтальні координати

весь час змінюються внаслідок добового обертання Землі і до того ж нерівномірно.

2. Перша екваторіальна система. Основна площина – площина, паралельна площині земного екватора, вісь системи – вісь світу, паралельна осі обертання Землі. Координати – *схилення*, відлічується від небесного екватора вздовж кола схилення (рис. Д1.4), $0 - 90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$; *годинний кут*, відлічується вздовж небесного екватора від точки його перетину з небесним меридіаном, $0^h \leq t < 24^h$. Схилення не змінюється при добовому обертанні Землі, а годинний кут змінюється рівномірно, і тому використовується для виміру часу.

3. Друга екваторіальна система. Основна площина і вісь системи – ті ж самі, що і в першій екваторіальній системі. Координати – *схилення* і *пряме сходження*, відлічується від точки весняного рівнодення (одна з точок перетину небесного екватора з екліптикою, рис. Д1.4), $0^h \leq \alpha < 24^h$. Обидві координати не залежать від осьового обертання Землі, і тому саме вони використовуються для задання положень світил на небесній сфері.

Розрізняють топоцентричні екваторіальні системи – початок системи знаходиться в певній точці на поверхні Землі і геоцентричні – початок системи співпадає з центром Землі.

4. Екліптична система. Основна площина – площина екліптики, тобто площина незбуреної орбіти Сонця в його русі відносно Землі, вісь системи – нормаль до площини екліптики. Координати – *екліптична широта*, відлічується від екліптики (рис. Д1.5), $-90^\circ \leq \beta \leq +90^\circ$; *екліптична довгота*, відлічується вздовж екліптики від точки весняного рівнодення, $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$. Використовується для опису руху тіл Сонячної системи, зокрема задання елементів їх орбіт.

Із сферичних трикутників ZPM (рис. Д1.6) і $РПМ$ (рис. Д1.7) і формул (Д1.1–Д1.3) впливають такі формули переходу між координатами в різних системах:

від горизонтальної системи до екваторіальної –

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ \cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\ \sin \delta &= \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos A, \\ \alpha &= s - t, \end{aligned} \tag{Д1.5}$$

де φ – географічна широта місця спостереження, s – зоряний час, який вимірюється годинним кутом точки весняного рівнодення;

від екваторіальної до горизонтальної –

$$\begin{aligned} \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t \\ \sin z \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t, \\ \cos z &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \end{aligned} \tag{Д1.6}$$

від екваторіальної до екліптичної –

$$\begin{aligned}
\cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\
\cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha, \\
\sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha,
\end{aligned}
\tag{Д1.7}$$

де ε – нахилення екліптики до небесного екватора;

від екліптичної до екваторіальної –

$$\begin{aligned}
\cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\
\cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon \sin \lambda, \\
\sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda.
\end{aligned}
\tag{Д1.8}$$

Поряд з геоцентричними екваторіальною та екліптичною системами координат застосовуються геліоцентрична екліптична система і планетоцентричні екваторіальні системи, зв'язані з площиною екватора будь-якої планети.

Додаток 2

Обчислення ефемерид

Вихідні дані:

Моменти часу: $t_l, l = 1, 2, \dots, N$.

Екліптичні елементи орбіти тіла Сонячної системи:

а) $\Omega, \omega, i, e, a, M_0$ – для еліптичної орбіти;

б) $\Omega, \omega, i, q, \tau$ – для параболическої орбіти.

Прямокутні екваторіальні координати Сонця X_l, Y_l, Z_l .

1. Обчислення екваторіальних елементів орбіти:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\ P_y &= (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) \cos \varepsilon - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ P_z &= (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) \sin \varepsilon + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon, \\ Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_y &= (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \cos \varepsilon - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ Q_z &= (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \sin i + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (Д2.1)$$

2. Обчислення середньої аномалії для заданих моментів часу:

$$M_l = \frac{k}{a^{3/2}}(t_l - t_0) + M_0, \quad k = 0.0172021 \quad (Д2.2)$$

3. а) Знаходження відповідних значень ексцентричної аномалії шляхом розв'язання рівняння Кеплера методом ітерацій:

$$E_l^{(n+1)} = M_l + e \sin E_l^{(n)}, \quad E_l^{(0)} = M_l; \quad (Д2.3)$$

б) Знаходження відповідних значень параметра σ чисельним розв'язанням рівняння Баркера:

$$\sigma_l^3 + 3\sigma_l = \frac{3k}{q^{3/2}\sqrt{2}}(t_l - \tau). \quad (Д2.4)$$

4. Обчислення орбітальних геліоцентричних прямокутних координат:

$$\text{а) } \xi_l = a(\cos E_l - e), \quad \eta_l = a\sqrt{1 - e^2} \sin E_l; \quad (Д2.5)$$

$$\text{б) } \xi_l = q(1 - \sigma_l^2), \quad \eta_l = 2q\sigma_l. \quad (Д2.6)$$

5. Обчислення екваторіальних геліоцентричних прямокутних координат:

$$\begin{aligned} x_l &= P_x \xi_l + Q_x \eta_l, \\ y_l &= P_y \xi_l + Q_y \eta_l, \\ z_l &= P_z \xi_l + Q_z \eta_l. \end{aligned} \quad (Д2.7)$$

6. Обчислення геоцентричних екваторіальних координат:

$$\begin{aligned} \rho_l &= \sqrt{(x_l + X_l)^2 + (y_l + Y_l)^2 + (z_l + Z_l)^2}, \\ \text{tg } \delta_l &= \frac{z_l + Z_l}{\sqrt{(x_l + X_l)^2 + (y_l + Y_l)^2}}, \end{aligned} \quad (Д2.8)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_l = \frac{y_l + Y_l}{x_l + X_l}.$$

При знаходженні прямого сходження треба уважно визначити чверть, в якій лежить його значення.

Прямокутні геоцентричні екваторіальні координати Сонця X_l, Y_l, Z_l беруться з астрономічного щорічника або обчислюються за допомогою відповідної стандартної програми на ПК.

При виконанні обчислень за допомогою калькулятора обов'язково треба виконувати і обчислення контрольних співвідношень (див. [37]).

Додаток 3

Визначення еліптичної орбіти за трьома спостереженнями

Вихідні дані: геоцентричні екваторіальні координати тіла Сонячної системи α_k, δ_k і геоцентричні прямокутні координати Сонця X_k, Y_k, Z_k для трьох моментів часу t_k ($k=1,0,2$), які є приблизно рівновіддаленими.

1. Обчислення спрямовуючих косинусів:

$$\lambda_k = \cos \delta_k \cos \alpha_k, \quad \mu_k = \cos \delta_k \sin \alpha_k, \quad \nu_k = \sin \delta_k. \quad (\text{ДЗ.1})$$

2. Обчислення величин

$$R_0^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2, \quad C = -(\lambda_0 X_0 + \mu_0 Y_0 + \nu_0 Z_0) \quad (\text{ДЗ.2})$$

і детермінантів

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U_k = \begin{vmatrix} X_k & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_k & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_k & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}. \quad (\text{ДЗ.3})$$

3. Обчислення величин

$$\tau_1 = k(t_2 - t_0), \quad \tau_2 = k(t_0 - t_1), \quad \tau_0 = k(t_2 - t_1), \quad k = 0.0172021, \\ n_i^0 = \frac{\tau_i}{\tau_0}, \quad c_i = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_i^0), \quad i = 1, 2. \quad (\text{ДЗ.4})$$

4. Знаходження геліоцентричної відстані r_0 і геоцентричної відстані ρ_0 методом ітерацій з системи рівнянь:

$$\rho_0 = P - Q r_0^{-3}, \\ r_0^2 = (\rho_0 + C)^2 + S^2, \quad (\text{ДЗ.5})$$

де

$$P = \frac{U_0 - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2}{D}, \quad Q = \frac{c_1 U_1 + c_2 U_2}{D}, \quad S^2 = R_0^2 - C^2. \quad (\text{ДЗ.6})$$

5. Знаходження геоцентричних відстаней $\rho_{1,2}$ з системи рівнянь:

$$\rho_1 n_1 \lambda_1 + \rho_2 n_2 \lambda_2 = \rho_0 \lambda_0 + n_1 X_1 - X_0 + n_2 X_2, \\ \rho_1 n_1 \mu_1 + \rho_2 n_2 \mu_2 = \rho_0 \mu_0 + n_1 Y_1 - Y_0 + n_2 Y_2, \\ \rho_1 n_1 \nu_1 + \rho_2 n_2 \nu_2 = \rho_0 \nu_0 + n_1 Z_1 - Z_0 + n_2 Z_2, \quad (\text{ДЗ.7})$$

методом найменших квадратів або з тих двох рівнянь, які мають найбільший детермінант, і де $n_i = n_i^0 + c_i r_0^{-3}$, $i = 1, 2$.

6. Обчислення геліоцентричних координат і відстаней:

$$x_k = \lambda_k \rho_k - X_k, \\ y_k = \mu_k \rho_k - Y_k, \\ z_k = \nu_k \rho_k - Z_k, \\ r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}. \quad (\text{ДЗ.8})$$

7. Редукція моментів спостережень за аберацію:

$$t_k^0 = t_k - \frac{\rho_k}{c}, \quad \frac{1}{c} = 0.0057756^d. \quad (\text{Д3.9})$$

8. Визначення величин n_i в другому наближенні:

$$n_i = \frac{1 + B_i r_i^{-3}}{1 - B_0 r_0^{-3}} n_i^0, \quad i = 1, 2 \quad (\text{Д3.9})$$

де

$$B_1 = \frac{1}{12}(\tau_0 \tau_2 - \tau_1^2), \quad B_0 = \frac{1}{12}(\tau_1 \tau_2 + \tau_0^2), \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau_0 \tau_1 - \tau_2^2). \quad (\text{Д3.10})$$

9. Знаходження відношення площі сектора до площі трикутника η_0 в другому наближенні з цепного дробу:

$$\eta_0 = 1 + \frac{10}{11} \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \dots}} \quad (\text{Д3.11})$$

де

$$d = \frac{22\tau_0^2}{\kappa^2(6\kappa + 9(r_1 + r_2))}, \quad \kappa^2 = 2(r_1 r_2 + I), \quad I = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (\text{Д3.12})$$

10. Обчислення відстаней r_0, ρ_k ($k = 1, 0, 2$) в другому наближенні.

11. Обчислення координат x_k, y_k, z_k і відстаней r_i ($i = 1, 2$) в другому наближенні.

12. Обчислення параметра орбіти:

$$p = B^2 \left(\frac{\eta_0}{\tau_0} \right)^2, \quad (\text{Д3.13})$$

де $B^2 = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|$.

13. Обчислення ексцентриситету орбіти:

$$e^2 = \frac{f_1^2 + g_1^2}{r_1^2} \quad \text{або} \quad e^2 = \frac{f_2^2 + g_2^2}{r_2^2},$$

де

$$g_1 = \frac{f_1 I - f_2 r_1^2}{r_1^2}, \quad g_2 = \frac{f_1 r_2^2 - f_2 I}{r_2^2}, \quad f_{1,2} = p - r_{1,2}. \quad (\text{Д3.14})$$

14. Обчислення великої півосі:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (\text{Д3.15})$$

15. Обчислення ексцентричних та середніх аномалій і середнього руху:

$$\operatorname{tg} E_i = \frac{g_i}{(a - r_i) \sqrt{1 - e^2}}, \quad M_i = E_i - e \sin E_i, \quad n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} \quad \text{або} \quad n = ka^{-3/2}. \quad i = 1, 2 \quad (\text{Д3.16})$$

16. Обчислення екваторіальних векторних елементів орбіти:

$$\begin{aligned} P_x &= x_1 C - K_x S, & Q_x &= x_1 S + K_x C, \\ P_y &= y_1 C - K_y S, & Q_y &= y_1 S + K_y C, \\ P_z &= z_1 C - K_z S, & Q_z &= z_1 S + K_z C, \end{aligned} \quad (\text{Д3.17})$$

де

$$C = \frac{f_1}{r_1^2 e}, \quad S = \frac{g_1}{r_1^2 e}, \quad K_x = \frac{x_2 r_1^2 - x_1 I}{B} \text{ і аналогічні формули для } K_y, K_z. \quad (\text{Д3.18})$$

$$R_x = \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_x}{B} \text{ і аналогічні формули для } R_y, R_z.$$

17. Обчислення екліптичних векторних елементів орбіти:

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= P_x, \\ \bar{P}_y &= P_y \cos \varepsilon + P_z \sin \varepsilon, \\ \bar{P}_z &= P_y \sin \varepsilon - P_z \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{Д3.19})$$

і аналогічні формулами для $\bar{Q}_x, \dots, \bar{R}_z$.

18. Обчислення довготи вузла, нахилення орбіти і перигелійної відстані із співвідношень:

$$\sin \Omega \sin i = \bar{R}_x, \quad \cos \Omega \sin i = -\bar{R}_y, \quad \cos i = \bar{R}_z, \quad \sin \omega \sin i = \bar{P}_z, \quad \cos \omega \sin i = Q_z \quad (\text{Д3.20})$$

Контроль: Обчислення екваторіальних координат для середнього моменту часу t_0 .

Основні праці з небесної механіки

Наведені роки першого видання, для багатотомних праць – роки видання першого і останнього томів.

- 1543 р. М.Копернік. „Про обертання небесних сфер”
- 1609 р. І.Кеплер. „Нова астрономія”
- 1686 р. І.Ньютон. „Математичні начала натуральної філософії”
- 1746–1753 р.р. Праці А.Клеро, Ж.Даламбера, Л.Ейлера з теорії руху Місяця.
- 1788 р. Ж.Лагранж. „Аналітична механіка”
- 1798–1825 р.р. П.Лаплас. „Трактат з небесної механіки” (5 томів)
- 1810 р. К.Гаусс. „Теорія руху небесних тіл”
- 1822 р. Ф.Ф.Шуберт. „Трактат з теоретичної астрономії”
- 1834 р. У.Гамільтон. „Про загальний метод в динаміці”
- 1830–1847 р.р. Ж.Понтекулан. „Аналітична система світу” (3 томи)
- 1860 р. Ж.Делоне. „Теорія руху Місяця”
- 1866 р. К.Якобі. „Лекції з динаміки”
- 1878 р. Д.Хілл. „Дослідження з теорії Місяця”
- 1888–1896 р.р. Ф.Тіссеран. „Трактат з небесної механіки”
- 1892 р. О.М.Ляпунов. „Загальна задача про стійкість руху”
- 1892–1899 р.р. А.Пуанкаре. „Нові методи в небесній механіці” (3 томи)
- 1902–1907 р.р. К.Шарльс. „Небесна механіка” (2 томи)
- 1902 р. Ф.Мультон. „Вступ до небесної механіки”
- 1912 р. К.Зундман. „Мемуар про задачу трьох тіл”
- 1930 р. Ж.Шазі. „Теорія відносності і небесна механіка”
- 1933–1949 р.р. М.Ф.Субботін. „Курс небесної механіки” (3 томи)
- 1941 р. А.Уінтнер. „Аналітичні основи небесної механіки”
- 1956 р. К.Зігель. „Лекції з небесної механіки”
- 1963–1983 р.р. Г.М.Дубошин. „Небесна механіка” (3 томи)

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ

1.1. Для $r > R$

$$V = \frac{2fM}{r} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n}(\theta) \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} \right].$$

1.2. Див. [16] або [21].

1.3. Skorистatisia rezul'tatom zadachi 1.2.

1.4. Skoristatisia integralom enerhii ta spivvidnošennyam, sho vyplyvae dlia silovoi funktsii z teoremi Eйлера pro odnoridni funktsii.

1.5. Do sumi moduli kinetichnih momentiv tochk systemi zastosuvati nerivnist' Koshi-Bunyakovskogo, a potim skoristatisia perшим із spivvidnošen' zadachi 1.4.

1.7. Pomnozhiti nerivnist' Zundmana (zad. 1.5) na \dot{I}/I ta pro integruvati ii.

1.8. Viktoristati drugе spivvidnošenня zadachi 1.4 ta rezul'tat zadachi 1.6.

1.9. Viktoristati rivnannya (1.22).

1.10. а)
$$\ddot{r}_i - r_i \dot{\varphi}_i^2 - r_i \lambda_i^2 \cos^2 \varphi_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial r_i},$$

$$\frac{d}{dt}(r_i^2 \dot{\varphi}_i) + r_i^2 \dot{\lambda}_i^2 \sin \varphi_i \cos \varphi_i = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \varphi_i},$$

$$\frac{d}{dt}(r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i) = \frac{\partial \Omega_i}{\partial \lambda_i},$$

де

$$\Omega_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + f \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i \cos \gamma_{ij}}{r_j^2} \right),$$

γ_{ij} – кут між векторами \vec{r}_i та \vec{r}_j .

б)
$$m_i \ddot{\vec{r}}_i' = \text{grad} U, \quad m_i' = m_i \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^i m_j}.$$

2.1. Виключити нормальну до радіуса компоненту швидкості з інтеграла енергії за допомогою інтеграла моменту.

2.2.
$$p = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2 \delta, \quad e = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 (r_0^2 V_0^2 - 2\mu) \sin^2 \delta}.$$

2.3.
$$\text{tg} \omega = \frac{c \lambda_3}{c_1 \lambda_2 - c_2 \lambda_1}, \quad \cos \omega = \frac{\lambda_1 \cos \Omega + \lambda_2 \sin \Omega}{\lambda}.$$

2.4.
$$\text{tg} \delta = a \sqrt{\frac{1 - e^2}{a^2 e^2 - (a - r)^2}}.$$

2.5. а) $V_0^2 = 2gR$ б) $V_0^2 = 2gH$.

2.6.
$$r = \frac{\mu r_0}{2\mu - r_0^2 V_0^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\mu^2 + r_0^2 V_0^2 (r_0^2 V_0^2 - 2\mu) \sin^2 \delta_0 / \mu^2}{\mu^2 \sin^2 \delta_0}} \right],$$

$$V = \frac{\mu \sin \delta_0}{r_0 V_0 \sin \delta} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{r_0^2 V_0^2 (r_0^2 V_0^2 - 2\mu) \sin^2 \delta_0}{\mu^2 \sin^2 \delta}} \right].$$

2.7.
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{a(1 - e^2)}{re \sin v}.$$

2.8. $r_{\text{с.ар.}} = a, r_{\text{с.геом.}} = \sqrt{r_a r_\pi}, r_{\text{с.гарм.}} = p.$

2.11. Записати параметричні рівняння геліоцентричної орбіти Місяця $x(t), y(t)$, знайти кривизну і довести її додатність за допомогою третього закону Кеплера.

2.12. Довести, що кривизна орбіти планети змінює свій знак.

2.13. $\ddot{z} + \frac{\mu z}{|z|^3} = 0$. Скористатися тим, що $z = a \cos E + ib \sin E$, а $V = |\dot{z}|$.

2.14. Годограф швидкості є колом з радіусом $\sqrt{p/\mu}$ і координатами центру $(0, e\sqrt{\mu/p})$ в площині орбіти.

2.15.
$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r} \left(1 + J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right)}, V_p = 2\sqrt{\frac{\mu}{r} \left(1 + \frac{1}{3} J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right)}.$$

2.16.
$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\mu}{bV_\infty^2}.$$

2.17.
$$\delta q = \frac{a}{2} (1 - e)^2, \delta V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} (1 - e).$$

3.1. Скористатися рівностями $E = M + e \sin E$ та $E_{n+1} = M + e \sin E_n$.

3.2. Поділити лінійне за e наближення для $\sin E$ на лінійне наближення для $\cos E$.

3.3.
$$\left(\frac{V}{na} \right)^2 = 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM,$$

$$\left(\frac{V}{na} \right)^2 = e \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM,$$

$$\left(\frac{V_n}{na} \right)^2 = \sqrt{1 - e^2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM \right].$$

3.6.
$$T = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(a_1(1 \pm e_1) + a_2(1 \pm e_2))^3}{2}}.$$

3.9. Взяти силову функцію згідно із зад. 1.3 у вигляді $U = [A(x^2 + y^2) + Bz^2]$. Тоді рівняння орбіти і закон руху за нею в циліндричних координатах:

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{A\rho^4 + (\alpha_3 + 2\alpha_2)\rho^2 - \alpha_2^2}} - \int \frac{dz}{\sqrt{Bz^2 - \alpha_3}} = \beta_3,$$

$$\lambda - \int \frac{d\rho}{\sqrt{A\rho^4 + (\alpha_3 + 2\alpha_1)\rho^2 - \alpha_2^2}} = \beta_2,$$

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{A\rho^4 + (\alpha_3 + 2\alpha_1)\rho^2 - \alpha_2^2}} = t + \beta_1.$$

3.10. Про інтегрувати інтеграл моменту в межах періоду P та скористатися теоремою, за якою площа паралелограма, що описаний навколо еліпса дорівнює $4\rho_1\rho_2$, де ρ_1 і ρ_2 – спряжені діаметри еліпса.

3.11. Скористатися інтегралом енергії.

3.12. Зробити заміну змінних: $\vec{r} = \{at + b\}\vec{\rho}$.

3.13. Скористатися першими інтегралами: $u^0 = const$ та $g_{ik}u^i u^k = -1$, де u^i – чотиривимірна швидкість, доцільно використати систему одиниць, в якій швидкість світла $c = 1$, тоді $r_g = M$.

3.14.
$$t = -\frac{\sqrt{\mu - c^2}}{2h}, \quad h < 0, \quad \mu > c^2, \quad N = 4.$$

$$t = \int_0^{r_1} \frac{r^{N-2} dr}{\sqrt{hr^{N-2} - c^2 r^{N-4} + \frac{2\mu}{N-2}}}, \quad N \geq 5.$$

4.1.
$$S = \frac{F_\tau e \sin v - F_n (1 + e \cos v)}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}, \quad T = \frac{F_\tau (1 + e \cos v + F_n e \sin v)}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}.$$

4.2.
$$\frac{dq}{dt} = \sin \tilde{u} S + [(q + \cos u) \Lambda^{-1}] \tilde{T} + p \sin u \Lambda^{-1} \text{ctgi} \tilde{W},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\cos u \tilde{S} + [(p + \sin u) \Lambda^{-1} + \sin u] \tilde{T} - p \sin u \Lambda^{-1} \text{ctgi} \tilde{W},$$

$$\Lambda = 1 + q \cos u + p \sin u.$$

4.3.
$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{m \sec i \sec^2(i/2)}{2na^2 \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right),$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{m \sec i \sec^2(i/2)}{2na^2 \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right).$$

4.4.
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left[\sin v \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} - \cos v \tilde{S} \right],$$

$$\frac{dr_\pi}{dt} = \frac{p}{(1 + e)^2} \left[-\sin v \tilde{S} + \frac{2(1 - e \cos v) + e \sin^2 v}{1 + e \cos v} \tilde{T} \right],$$

$$\frac{dr_a}{dt} = \frac{p}{(1 + e)^2} \left[\sin v \tilde{S} + \frac{2(1 - \cos v) - e \sin^2 v}{1 + e \cos v} \tilde{T} \right].$$

4.5. Взяти збурюючу функцію у вигляді:

$$R = -\frac{\alpha \mu t}{r} \cong -\frac{\alpha \mu t}{a} (1 + e \cos(nt + \varepsilon - \pi)).$$

4.7. Дослідити стійкість відповідного розв'язку рівняння Біне.

4.8. Скористуватися виразом для силової функції зад. 1.2.

4.9. Використати силову функцію:

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{fM}{r} + \frac{f}{r^5}[(B + C - 2A)x^2 + (a + c - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2].$$

Точки рівноваги на кінцях великої осі – нестійкі, на кінцях малої осі – стійкі.

4.10. Нульовий розв'язок стійкий при всіх значеннях коефіцієнтів b і c . Взяти за функцію Ляпунова $V = l^2 + m^2$.

5.3. Стиснення $e = 2.4 \cdot 10^{-5}$.

5.4.
$$\bar{R} = -\frac{\mu J_4 a^4}{a^5(1 - e^2)^{7/2}} \left[3 - 15 \sin^2 i + \frac{105}{8} \sin^4 i \right] \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right).$$

5.6. Дорівняти нулю дискримінант рівняння для $\cos^2 i$ при $\sin^2 \omega = 1$.

5.7. $e = 0.994$, $r_\pi = 2440$ км.

5.8. Знайти еволюційні рівняння для величин a, r_π, T (див. задачу 4.4) в лінійному наближенні, а потім розкласти в ряд за степенями α відповідні функції Бесселя.

6.1. $x = y = 0$,
$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\zeta(4 + h\zeta(\zeta^2 - 1))}} = 2h(t - t_0), \quad \zeta^2 = z^2 + \frac{1}{2}.$$

6.2. Умови фінітності руху – відстань в афелії менша від відстані між Сонцем і точкою лібрації L_2 . Рух Гільди – нестійкий, Єви – стійкий.

6.3. Див. [16].

6.4. Скористатися рівняннями (6.46).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике.– М.: Наука, 1986.–318 с.
2. Александров Ю.В. Фізика планет.– К.: Вiпол, 1997 р.–432 с.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.– М.: Наука, 1989.–472 с.
4. Балк В.М., Демин В.Г., Куницын А.Л. Сборник задач по небесной механике и астродинамике.– М.: Наука, 1972.–336 с.
5. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле.– М.: Изд-во МГУ, 1975.– 304 с.
6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел.– М.: Наука, 1977.–430 с.
7. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики.– М.: Наука, 1984.– 136 с.
8. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления.– Харьков: Вища школа, 1989.–236 с.
9. Брауэр Д., Клеменс Д. Методы небесной механики.– М.:Мир, 1964.–514 с.
- 10.Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика.– М.: Наука, 1972.–382 с.
- 11.Гинзбург В.Л. О физике и астрофизике.– М.: Наука, 1985.–400 с.
- 12.Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике.– М.: Наука, 1972.– 1971.–442 с.
- 13.Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике.– М.: Наука, 1978.–120 с.
- 14.Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения.– М.: Наука, 1968.–352 с.
- 15.Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.– М.: Наука, 197.–799 с.
- 16.Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы.– М.: Наука, 1964.–560 с.
- 17.Дубошин Г.Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел.– М.: Наука, 1983.–351 с.
- 18.Емельянов Н.В. Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики.– М.: Наука, 1983.–128 с.
- 19.Зельманов А.Л., АгаковВ.Г. Элементы общей теории относительности.– М.: Наука, 1989.–236 с.
- 20.Кинг-Хили Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере.– М.:Мир, 1966.–189 с.
- 21.Кондратьев Б.П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур.– М.:Наука, 1989.–269 с.
- 22.Курс астрофизики и звездной астрономии.– т. 2/ Под ред. А.А.Михайлова.– М.: Физматгиз, 1962.–688 с.
- 23.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика.– М.: Наука, 1988.– 215 с.

24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.– М.: Наука, 1988.–509 с.
25. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.– т. 2.– Изд-во АН СССР, 1956.–473 с.
26. Михайлов А.А. Теория затмений.– М.: Гостехиздат, 1954.–277 с.
27. Неустойчивости в динамических системах. Приложения к небесной механике / Под ред. В.Себехея.– М.: Мир, 1982.–168 с.
28. Ньютон И. Математические начала натуральной философии.– М.: Наука, 1989.–687 с.
29. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета.– М.: Наука, 1990.–445 с.
30. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике.– М.: Наука, 1965.–571 с.
31. Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Избр. труды.– М.: Наука, 1979.–771 с.
32. Пуанкаре А. О науке.– М.: Наука, 1983.–560 с.
33. Розенталь И.Л. Геометрия. Частицы. Вселенная.– М.: Наука, 1987.–143 с.
34. Рой А. Движение по орбитам.– М.: Мир, 1981.–544 с.
35. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел.– М.: Мир, 1982.–666 с.
36. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г.Н.Дубошина.– М.: Наука, 1976.–862 с.
37. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию.– М.: Наука, 1968.–800 с.
38. Тассуль Ж. Теория вращающихся звезд.– М.: Мир, 1982.–472 с.
39. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.– М.: Наука, 1967.–523 с.
40. Херрик С. Астродинамика: в 3 т.– М.: Мир,– т. 1, 1976.–318 с.; т. 2, 1977.–263 с.; т. 3, 1978.–360 с.
41. Холшевников К.В. Асимптотические методы в небесной механике.– Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.–208 с.
42. Холшевников К.В., Антонов В.А., Тимошкова Е.И. Введение в теорию ньютоновского потенциала.– М.: Наука, 1988.–268 с.
43. Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики.– М.-Л.: Наука, 1965.–367 с.
44. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли.– М.: Наука, 1965.–540 с.
45. Эскобал П. Определение орбит.– М.: Мир, 1972.–341 с.
46. Laplace P. Traite de mecanique celeste.–Paris, t. 1, 1798.–368 p.; t. 2, 1802.–353 p.; t. 3, 1802.–341 p.; t. 4, 1805.–372 p.; t. 5,–327 p.
47. USNO Circular № 163.–Washington, 1981.– P. C1–C4.

ЗМІСТ

Вступ

Глава I. ОСНОВНА ЗАДАЧА НЕБЕСНОЇ МЕХАНІКИ

- 1.1. Гравітаційні поля небесних тіл
 - 1.1.1. Гравітаційне поле тіла довільної форми
 - 1.1.2. Гравітаційні поля зірок та планет
- 1.2. Задача багатьох тіл в інерціальній системі координат
 - 1.2.1. Рівняння задачі багатьох тіл в інерціальній системі координат
 - 1.2.2. Силова функція
 - 1.2.3. Перші інтеграли задачі багатьох тіл
 - 1.2.3. Задача багатьох тіл в барицентричній системі координат
- 1.3. Задача багатьох тіл у відносній системі координат

Задачі до глави I

Глава II. ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ

- 2.1. Загальний роз'язок задачі двох тіл
 - 2.1.1. Рівняння задачі двох тіл
 - 2.1.2. Перші інтеграли задачі двох тіл
 - 2.1.3. Рівняння орбіти і закон руху в задачі двох тіл
 - 2.1.4. Кеплерівські елементи орбіти
 - 2.1.5. Класифікація рухів в задачі двох тіл
- 2.2. Окремі типи кеплерівського руху
 - 2.2.1. Еліптичний рух
 - 2.2.2. Гіперболічний рух
 - 2.2.3. Коловий рух
 - 2.2.4. Параболічний рух
 - 2.2.5. Прямолінійний рух

Задачі до глави II

Глава III. ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ КЕПЛЕРІВСЬКОГО РУХУ

- 3.1. Ряди еліптичного руху
 - 3.1.1. Розв'язання рівняння Кеплера
 - 3.1.2. Степеневі ряди еліптичного руху
 - 3.1.3. Тригонометричні ряди еліптичного руху
- 3.2. Крайова задача. Визначення орбіт
- 3.3. Інтегрування задачі двох тіл методом Гамільтона-Якобі
- 3.4. Рух під дією центральної сили
- 3.5. Релятивістська задача двох тіл
 - 3.5.1. Елементи загальної теорії відносності
 - 3.5.2. Центральньо-симетричне поле
 - 3.5.3. Рух матеріальної точки в полі Шварцшильда
- 3.6. Задача двох тіл в просторі довільного числа вимірів

Задачі до глави III

Глава IV. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНОГО РУХУ

4.1. Метод оскулюючих елементів

4.1.1. Основи методу

4.1.2. Рівняння Лагранжа для оскулюючих елементів

4.1.3. Рівняння Ньютона для оскулюючих елементів

4.2. Інтегрування рівнянь збуреного руху

4.2.1. Наближене інтегрування рівнянь для оскулюючих елементів

4.2.2. Вікові і періодичні збурення

4.2.3. Метод усереднення. Еволюційні рівняння

4.3. Стійкість руху небесних тіл

4.3.1. Елементи теорії стійкості руху

4.3.2. Стійкість руху в задачі багатьох тіл

4.3.3. Стійкість обертального руху супутника на коловій орбіті

Задачі до глави IV

Глава V. ЗБУРЕНИЙ РУХ СУПУТНИКА

5.1. Вплив стиснення центрального тіла на рух супутника

5.1.1. Збурений рух супутника в першому наближенні

5.1.2. Задача двох нерухомих центрів та її застосування

5.2. Вплив третього тіла на рух супутника

5.2.1. Збурюючий потенціал і його усереднення

5.2.2. Еволюційні рівняння та їх перші інтеграли

5.3. Вплив опору атмосфери на рух штучного супутника планети

5.3.1. Сила опору атмосфери

5.3.2. Еволюційні рівняння

5.3.3. Наближене інтегрування еволюційних рівнянь

Задачі до глави V

Глава IV. ЗАДАЧА ТРЬОХ ТІЛ

6.1. Обмежена задача трьох тіл

6.1.1. Колова обмежена задача трьох тіл

6.1.2. Плоска колова обмежена задача трьох тіл

6.2. Точки лібрації і лінії Хілла

6.2.1. Точки лібрації

6.2.2. Стійкість точок лібрації

6.2.3. Лінії Хілла

6.3. Необмежена задача трьох тіл

Задачі до глави VI

Глава VII. ОСНОВИ ТЕОРІЇ РУХУ ТІЛ СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ

7.1. Огляд методів в теоріях руху тіл Сонячної системи

7.1.1. Чисельні методи

7.1.2. Аналітичні методи

7.2. Вікові збурення. Метод Лагранжа

7.2.1. Розклад збурюючої функції

7.2.2. Власні елементи орбіти

7.3. Основи теорії руху Місяця

ДОДАТКИ

Додаток 1. Елементи сферичної тригонометрії. Системи астрономічних координат

Додаток 2. Обчислення ефемерид

Додаток 3. Визначення еліптичної орбіти за трьома спостереженнями

Додаток 4. Основні праці з небесної механіки

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

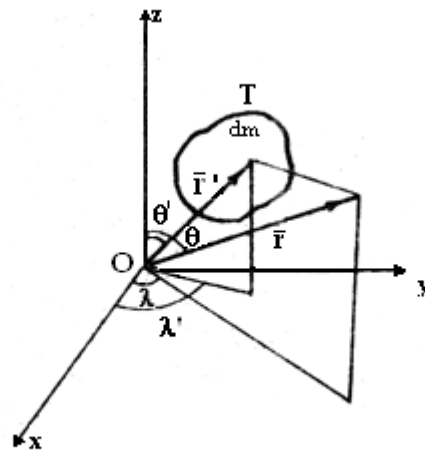


Рис. 1.1. Обчислення гравітаційного потенціалу довільного тіла

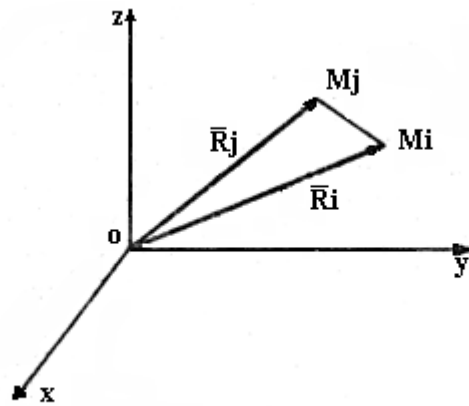


Рис 1.2. Задача багатьох тіл в інерціальній системі координат

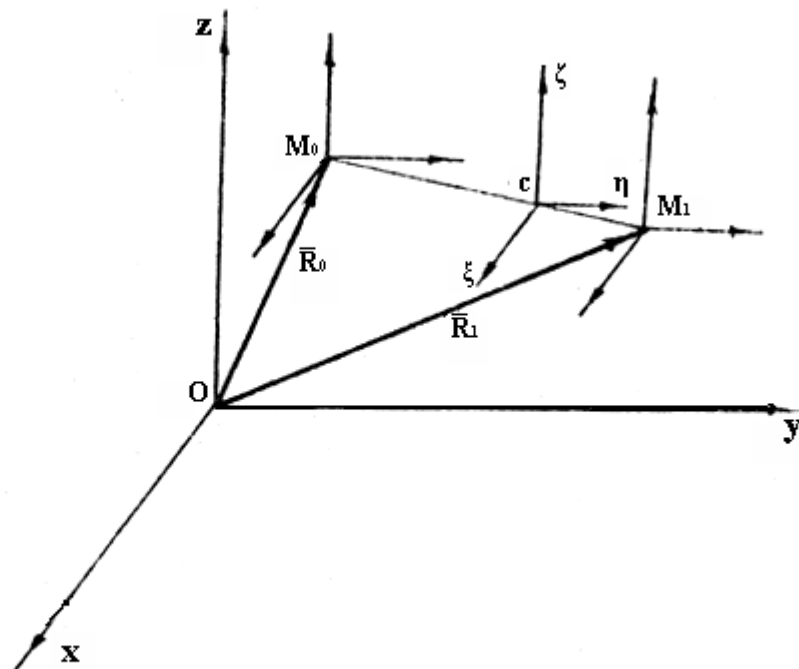


Рис 2.1 Задача двох тіл в інерціальній та барицентральної системах координат

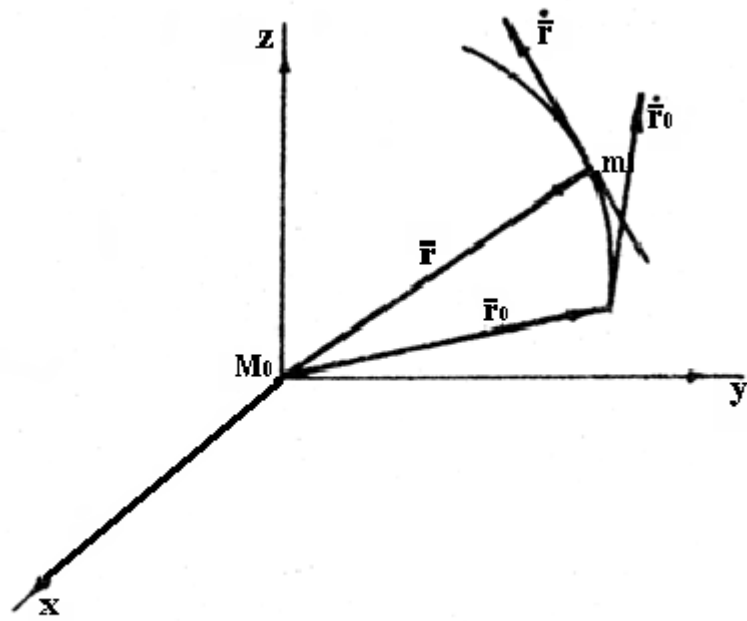


Рис. 2.2. Відносна задача двох тіл

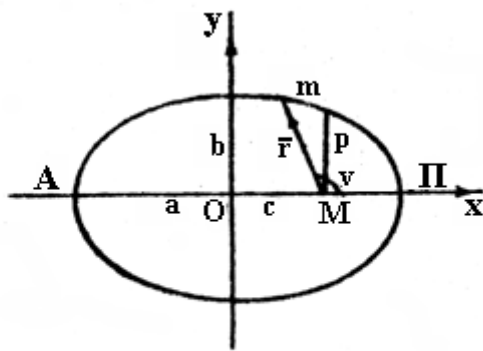


Рис. 2.3. Рух точки по еліптичній орбіті

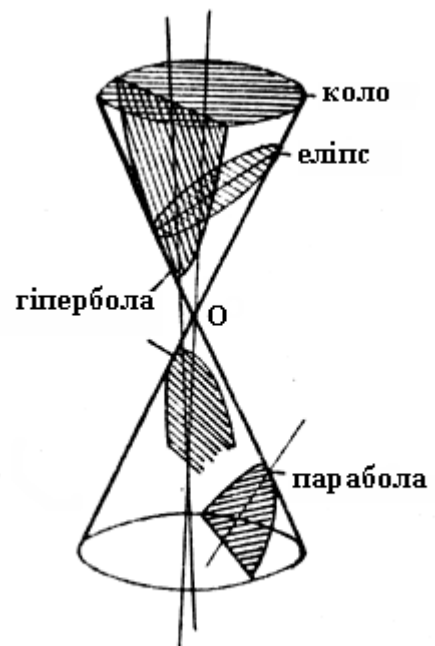


Рис. 2.4. Конічні перерізи

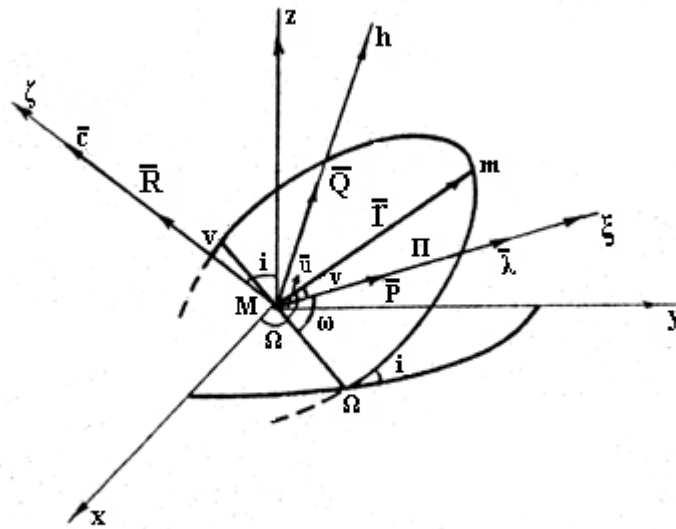


Рис. 2.5. Орбітальна система координат та кути Ейлера

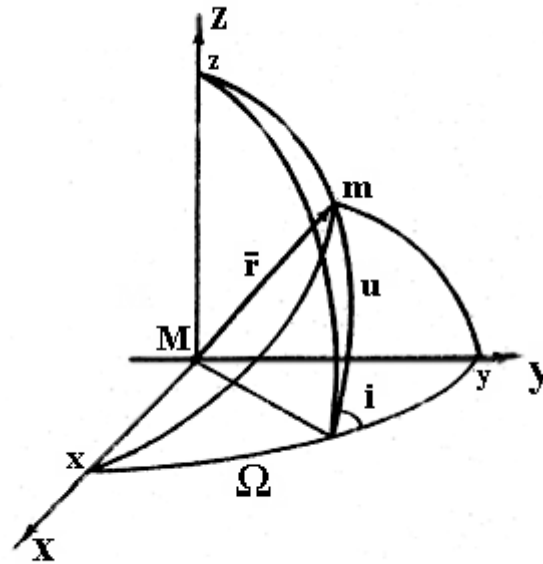


Рис. 2.6. Обчислення спрямовуючих косинусів радіуса-вектора

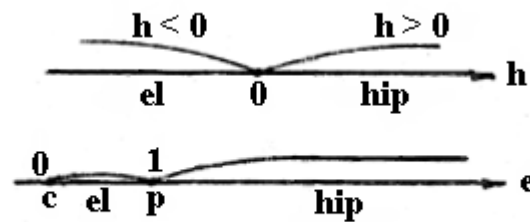


Рис. 2.7. Ймовірність різних типів кеплерівського руху

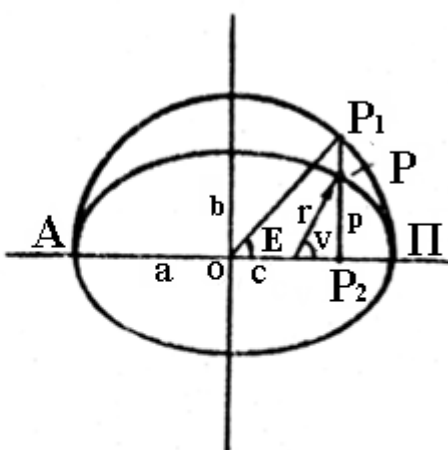


Рис. 2.8. Екцентрична аномалія

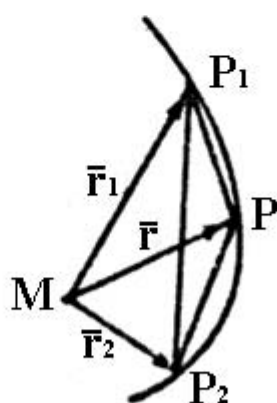


Рис. 3.1. До визначення орбіти за трьома спостереженнями

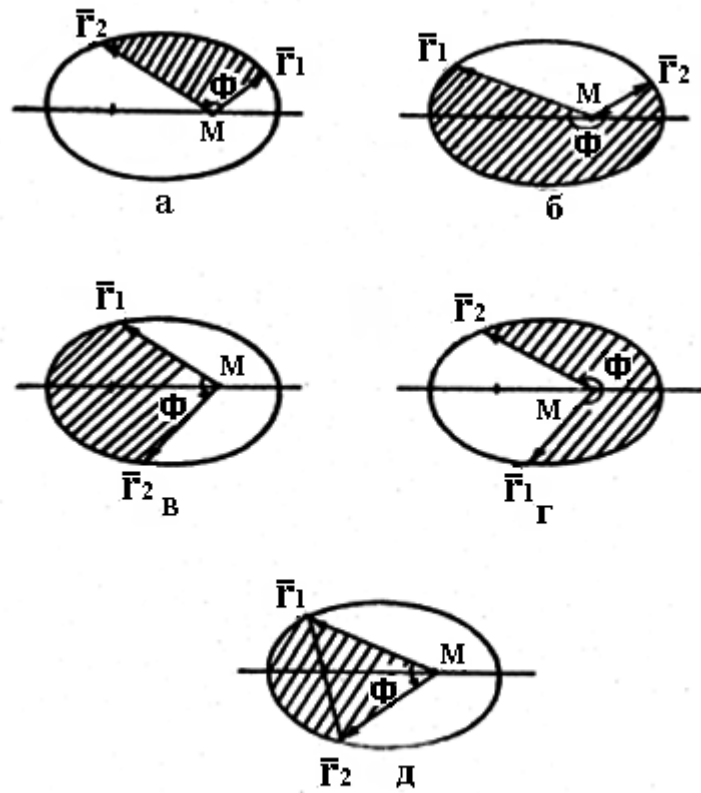


Рис. 3.2. Різні випадки розміщення еліптичного сектора відносно великої осі еліпса

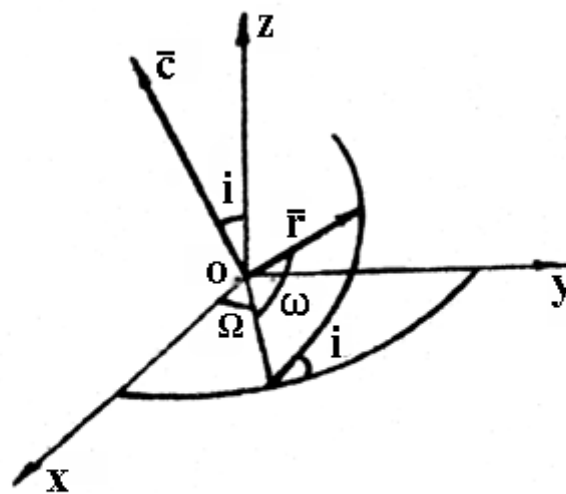


Рис. 3.3. Рух під дією центральної сили

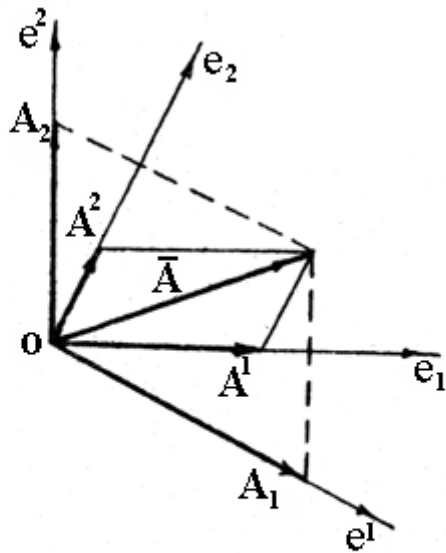


Рис. 3.4. Коваріантні та контра-варіантні компоненти вектора

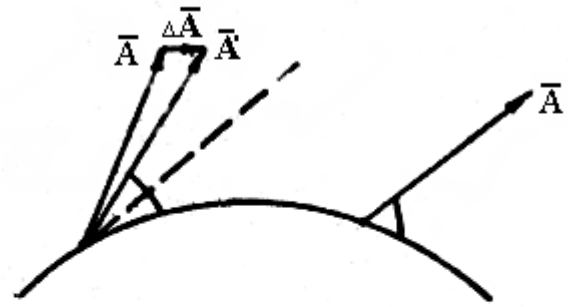


Рис. 3.5. Паралельний перенос вектора в криволінійній системі координат

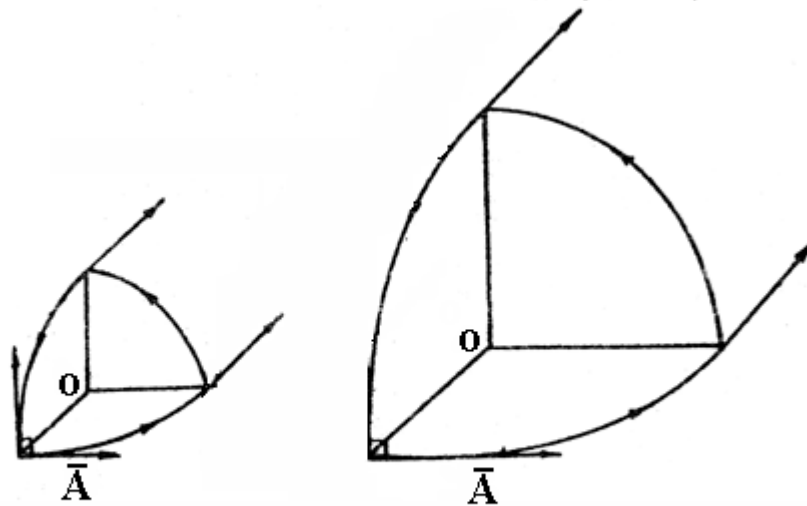


Рис. 3.6. Поворот вектора при його паралельному переносі вздовж замкнутого контура

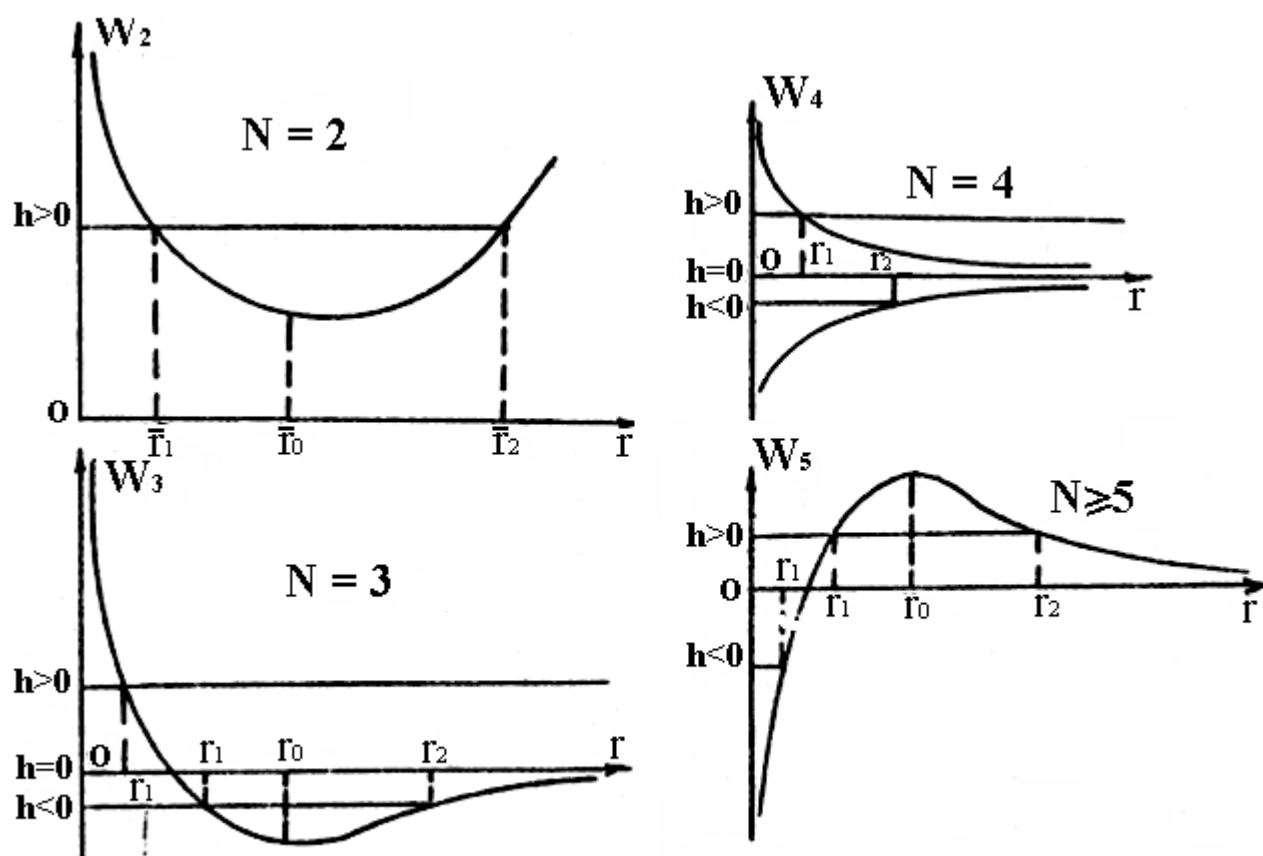


Рис. 3.7. Залежність узагальненого потенціалу W задачі багатьох тіл від відстані r у просторі N вимірів

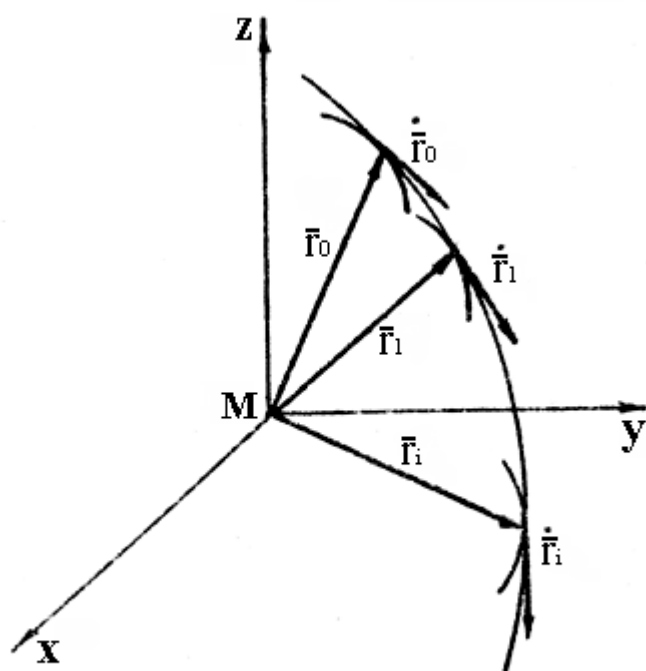


Рис. 4.1. Збурена та оскулюючі орбіти

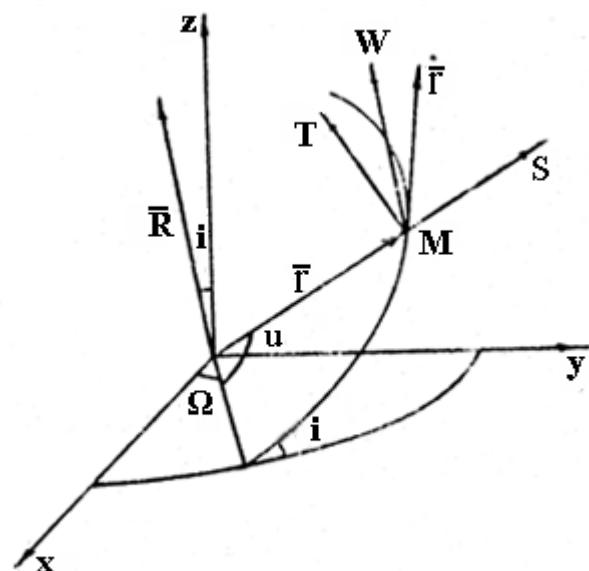


Рис. 4.2. Природна система координат

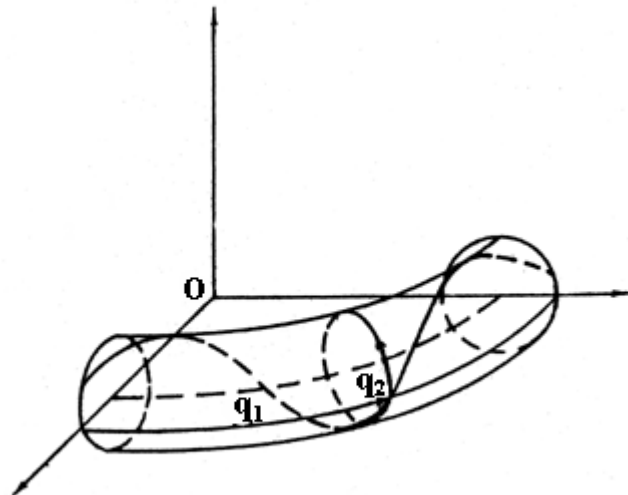


Рис. 4.3. Зображення двовимірного періодичного руху в тороїдальній системі координат

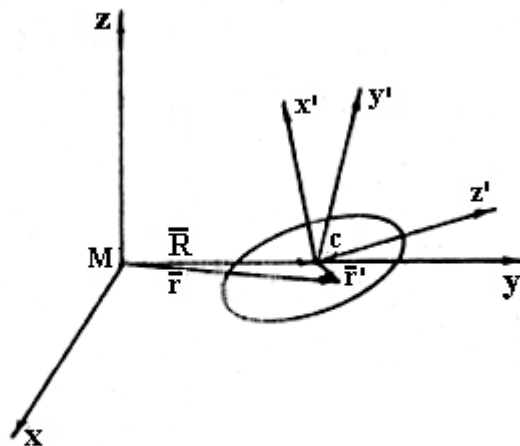


Рис. 4.4. Системи координат для опису орбітального та обертового руху супутника

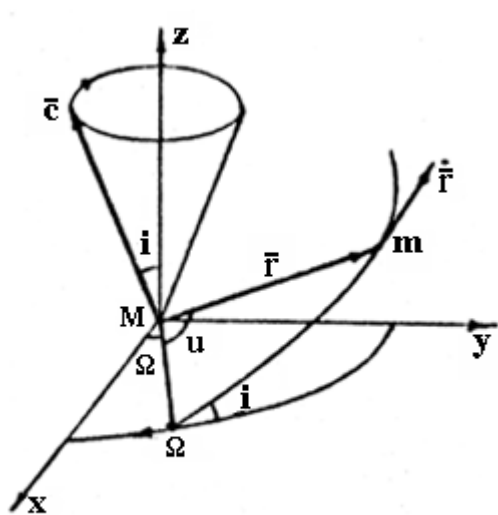


Рис. 5.1. Прецесія лінії вузлів

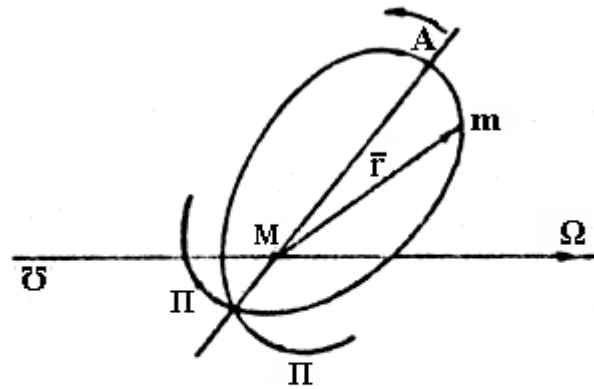


Рис. 5.2. Прецесія лінії апсид

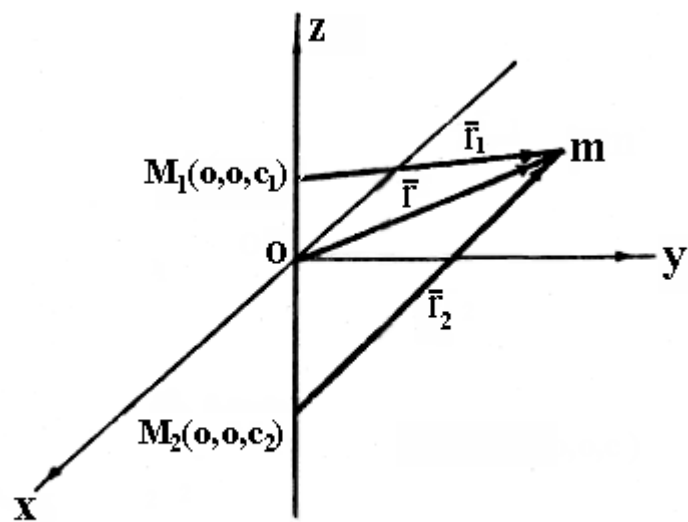


Рис. 5.3. Задача двох нерухомих центрів

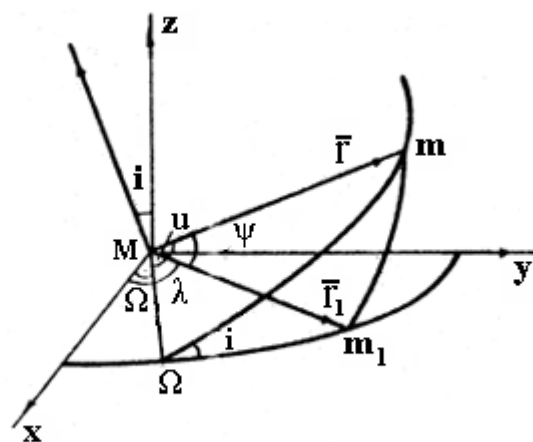


Рис. 5.4. Збурення руху супутника m третім тілом m_1

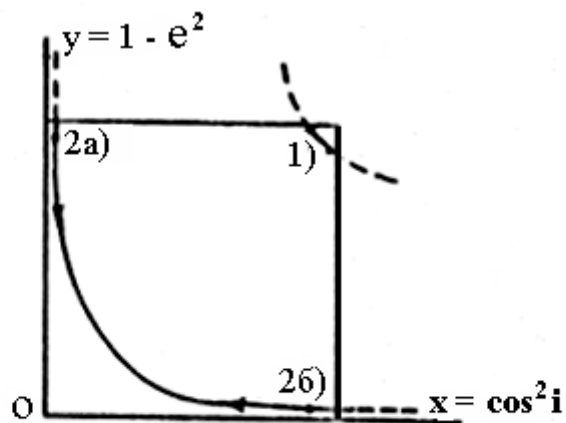


Рис. 5.5 Стійкий та нестійкий випадки збуреного руху супутника: 1 - $c \approx 1$ - стійкий; 2 - $c \ll 1$ - нестійкий

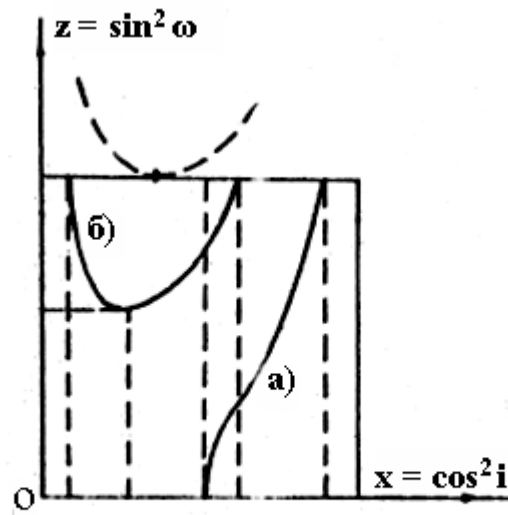


Рис. 5.6. Ротаційний а) та лібраційний б) випадки збурення периферійної відстані орбіти супутника

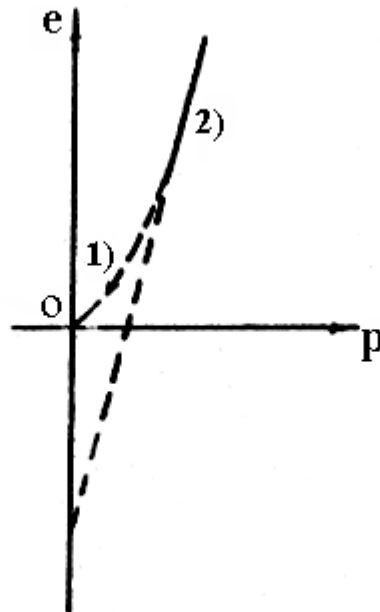


Рис. 5.7. Залежність між оскулюючими значеннями ексцентриситета та параметра збуреної орбіти

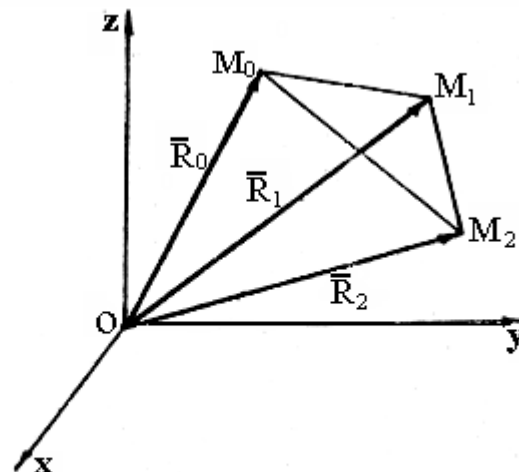


Рис. 6.1. Задача трьох тіл в інерціальній системі координат

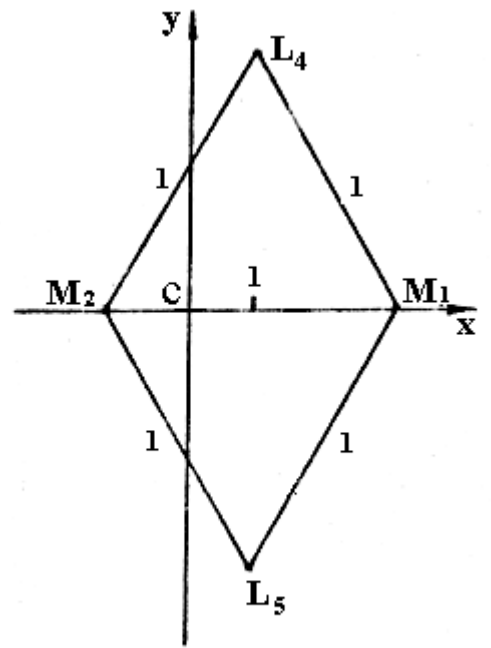
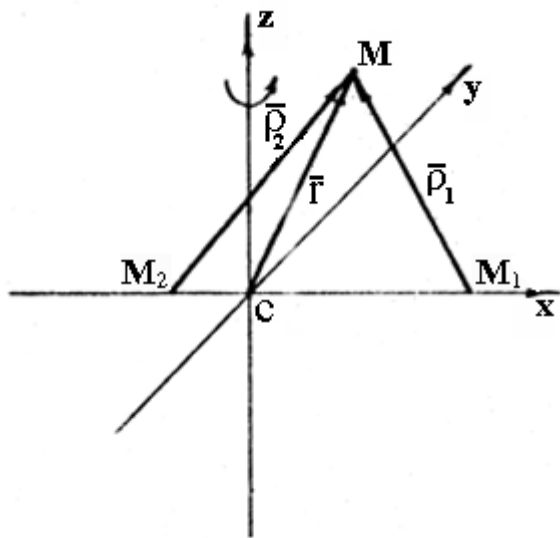


Рис. 6.2. Обмежена кругова задача трьох тіл Рис. 6.3. Трикутні точки лібрації

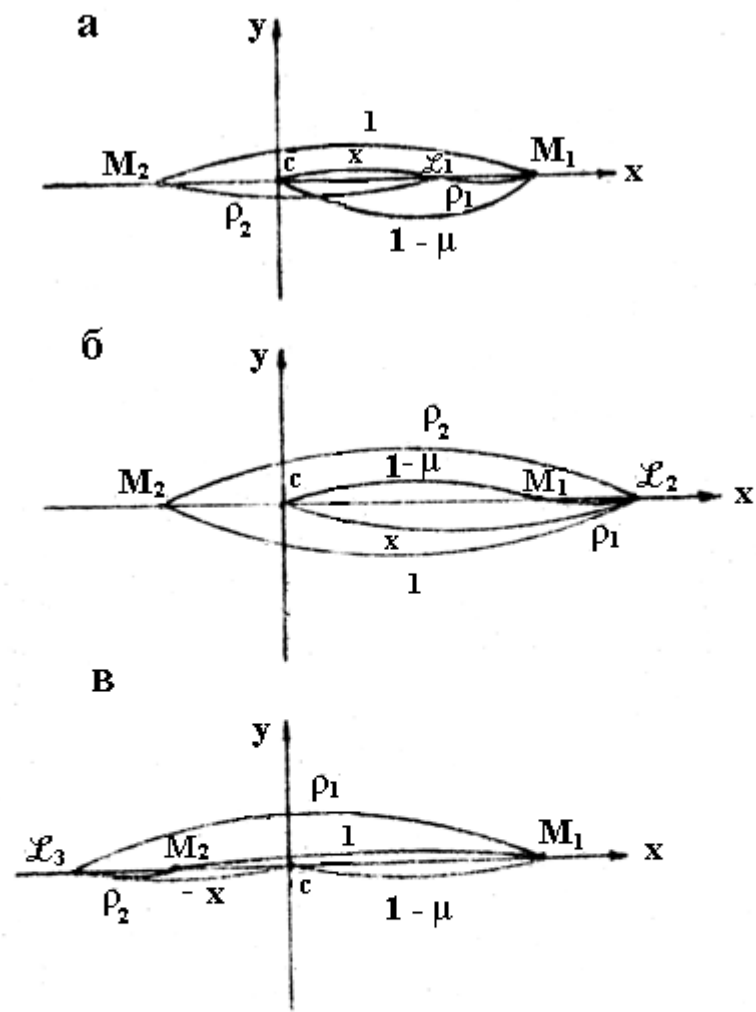


Рис. 6.4. Прямолінійні точки лібрації

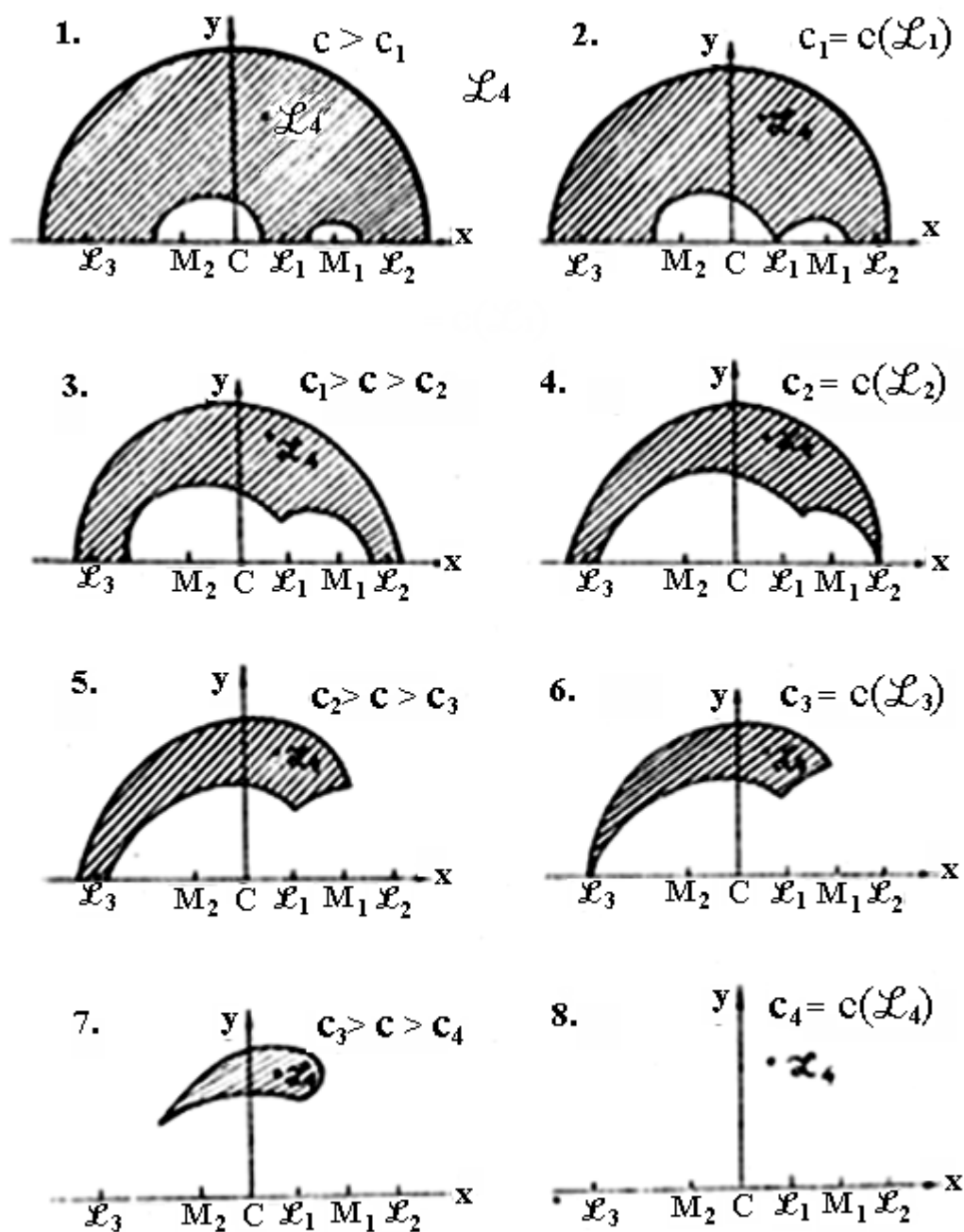


Fig. 6.5. Шлиф Хілла обмеженої плоскої кругової задачі трьох тіл при різних значеннях сталої інтеграла Шварца

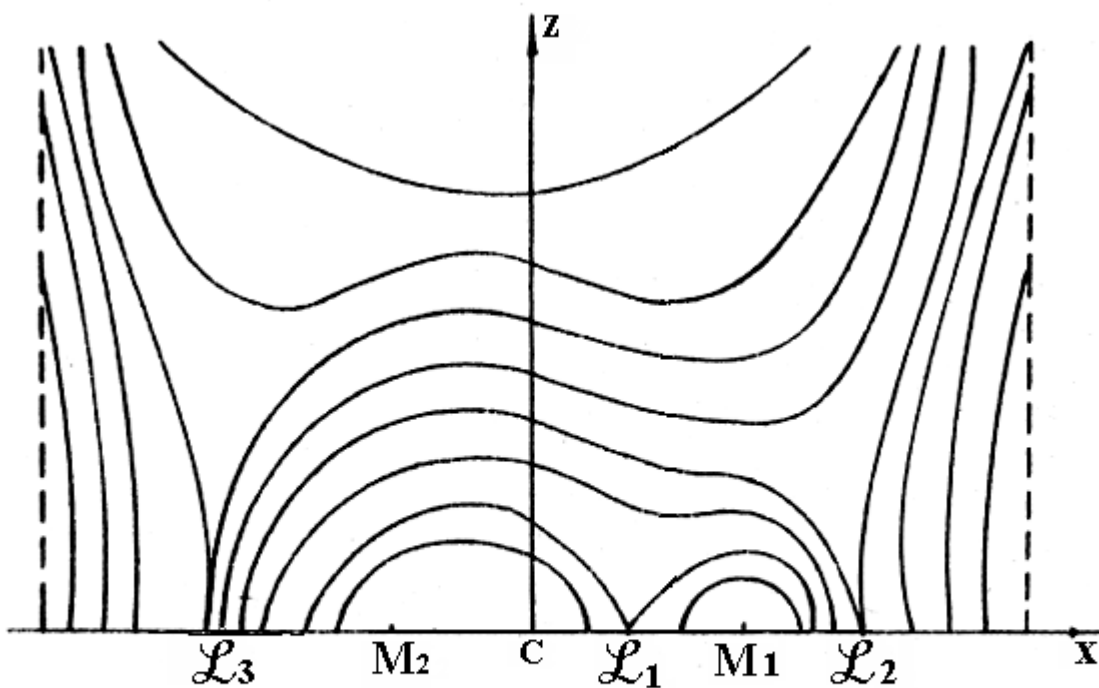


Рис. 6.6. Перерізи поверхонь Хілла площиною $X - Z$ у просторовій обмеженій круговій задачі трьох тіл

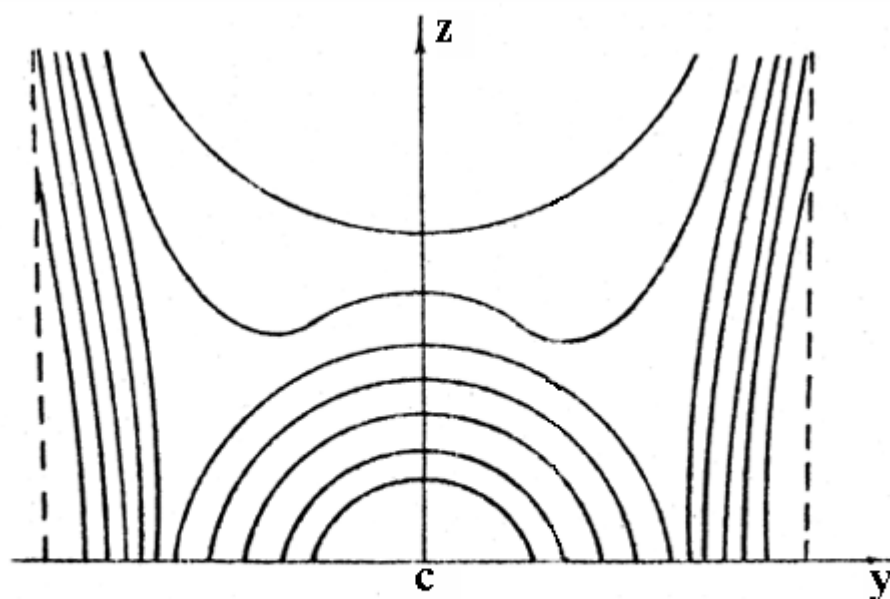


Рис. 6.7. Перерізи поверхонь Хілла площиною $Y - Z$ у просторовій обмеженій круговій задачі трьох тіл

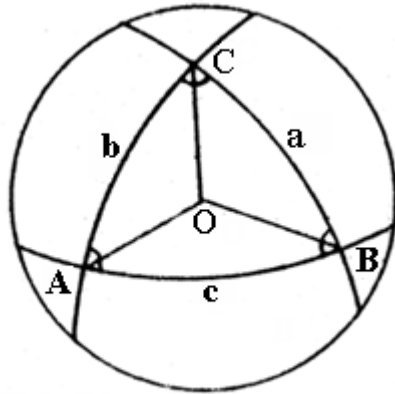


Рис. Д1.1. Сферичний трикутник

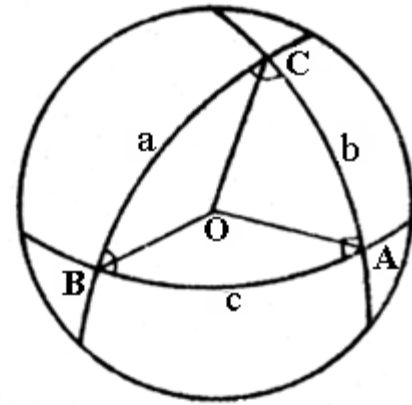


Рис. Д1.2. Сферичний прямокутний трикутник

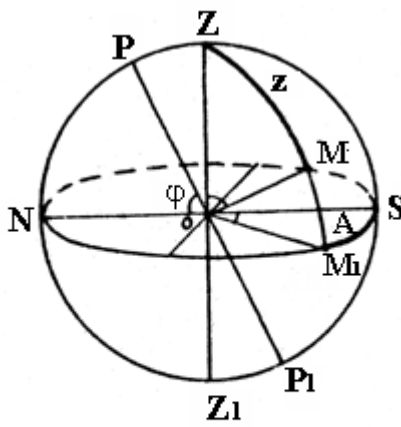


Рис. Д1.3. Горизонтальна система координат

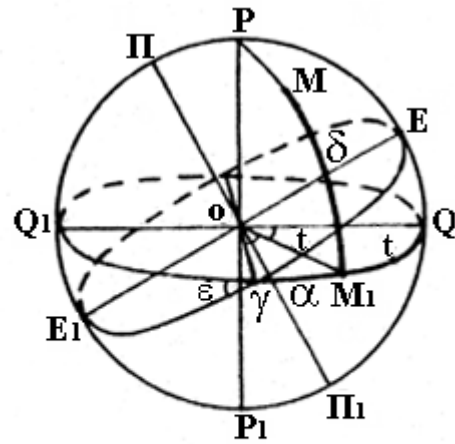


Рис. Д1.4. Екваторіальна система координат

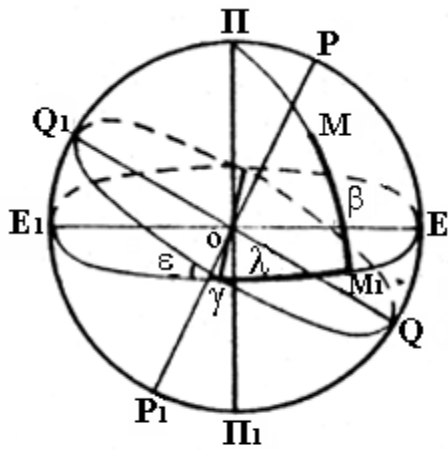


Рис. Д1.5. Екліптична система координат

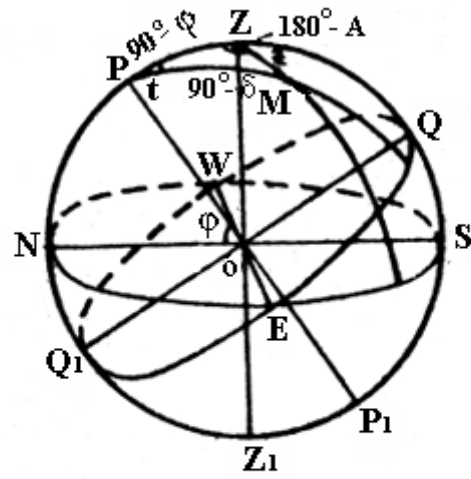


Рис. Д1.6. Зв'язок між горизонтальною та екваторіальною системами координат

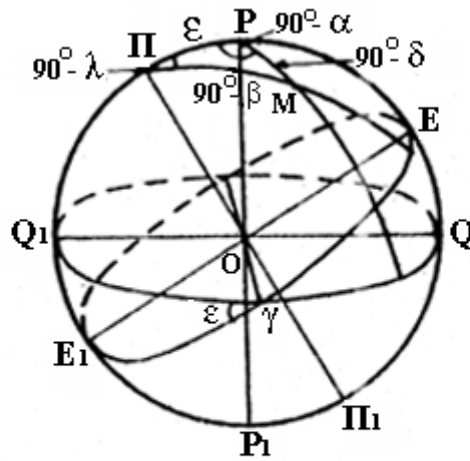


Рис. Д1.7. Зв'язок між екваторіальною та екліптичною системами координат