Тема 10. ВИЗНАЧЕННЯ СТРАХОВОГО ТАРИФУ В СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ

10.1. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТАРИФНОЇ СТАВКИ ЗІ СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ ТА ЇЇ СТРУКТУРА

Тарифна ставка. Брутто-ставка. Нетто-ставка. Навантаження. Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

10.2. ТАБЛИЦЯ СМЕРТНОСТІ

Таблиця смертності

10.3. НОРМА ПРИБУТКОВОСТІ

Поняття норми прибутковості. Таблиця відсоткових множників. Дисконтувальний множник. Таблиця дисконтувальних множників

10.4. ТАРИФНІ СТАВКИ ЗА ЗМІШАНИМ СТРАХУВАННЯМ ЖИТТЯ

Нетто-ставка на дожиття. Нетто-ставка на випадок смерті. Нетто-ставка на випадок втрати працездатності. Навантаження

10.5. РІЧНА НЕТТО-СТАВКА

10.6. БРУТТО-СТАВКА

10.7. АНАЛІТИЧНІ ЗАКОНИ СМЕРТНОСТІ

Модель де Муавра. Модель Гомпертца. Модель Мейкхама. Модель Вейбулла

10.1. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТАРИФНОЇ СТАВКИ ЗІ СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ І ЇЇ СТРУКТУРА

Побудова тарифів зі страхування життя має свої особливості:

- розрахунки провадяться з використанням демографічної статистики і теорії ймовірності;
- для розрахунків застосовуються способи довгострокових фінансових розрахунків;
- тарифні нетто-ставки складаються з кількох частин, кожна з яких покликана сформувати страховий фонд за одним з видів страхової відповідальності, який включений в умови страхування.

Тарифна ставка визначає, скільки грошей кожний зі страхувальників повинен внести в загальний страховий фонд з одиниці страхової суми. Тому тарифи повинні бути розраховані так, щоб сума зібраних внесків виявилася достатньою для виплат, передбачених умовами страхування. Таким чином, тарифна ставка – це ціна послуги, що надається страховиком, тобто своєрідна ціна страхового захисту. Від чого ж залежать її розміри, як установити ціну на той чи інший вид страхування життя?

Повна тарифна ставка називається брутто-ставкою. Вона складається з нетто-ставки і навантаження. Завдання нетто-ставки – забезпечити виплати страхових сум, тобто виконання фінансових зобов'язань страховика за договорами страхування. Навантаження призначене компенсувати витрати на проведення страхових операцій.

Своєрідність операцій страхування життя виявляється при побудові нетто-ставки. Умови страхування життя звичайно передбачають виплати у зв'язку з дожиттям застрахованого до закінчення терміну дії договору страхування чи у випадку його смерті протягом цього терміну. Крім того, передбачаються виплати внаслідок втрати здоров'я через травму та деякі хвороби.

Таким чином, для розрахунку обсягу страхового фонду потрібно мати відомості про те, скільки осіб із застрахованих доживе до закінчення терміну дії їх договорів страхування і скільки з них щороку може вмерти; скільки з них і якою мірою втратять здоров'я. Кількість виплат, помножена на відповідні страхові суми, дозволить визначити розміри майбутніх виплат, тобто з'явиться можливість дізнатися, у яких розмірах потрібно буде акумулювати страховий фонд.

Тривалість життя окремих людей коливається в широких межах. Вона належить до категорії випадкових величин, кількісне значення яких залежить від багатьох факторів, настільки віддалених і складних, що, здавалося б, їх неможливо виявити і вивчити. Теорія ймовірності і статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, у тому числі смертність населення. Установлено, що демографічний процес зміни поколінь, що виражається в зміні рівня повікової смертності, підпорядкований закону великих чисел, настільки одноманітному у своїх проявах і настільки достовірному в результатах, що він може бути основою фінансових розрахунків у страхуванні.

Демографічною статистикою виявлена і виражена за допомогою математичних формул залежність смертності від віку людей. Розроблено спеціальну методику складання так званих таблиць смертності, де на конкретних цифрах показується послідовна зміна смертності внаслідок віку. Цими таблицями страхові компанії користуються для розрахунку тарифів.

Крім закономірностей, пов'язаних із процесом дожиття і смертності, при побудові тарифів враховується довгостроковий характер операцій страхування життя, оскільки ці договори укладаються на тривалі терміни від трьох років. Протягом усього часу їх дії (чи на самому початку терміну страхування при одноразовій сплаті) страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум проводяться протягом терміну страхування чи після закінчення певного періоду від початку дії договору, якщо настане смерть застрахованого чи він втратить здоров'я.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховою компанією і використовуються як кредитні ресурси. За користування ними сплачується позичковий відсоток. Але якщо в ощадній операції дохід від відсотків приєднується до внеску, то в страхуванні на суму цього доходу заздалегідь зменшуються (дисконтуються) внески страхувальника, що підлягають сплаті. Для того щоб заздалегідь понизити тарифні ставки на той дохід, що буде утворюватися протягом кількох років, використовуються методи теорії довгострокових фінансових розрахунків.

Тарифні ставки у страхуванні життя складаються з кількох частин. Візьмемо для прикладу змішане страхування життя. У ньому поєднуються кілька видів страхування, які могли б бути й самостійними:

- страхування на дожиття;
- страхування на випадок смерті;
- страхування від нещасних випадків.

За кожним з них за допомогою тарифу створюється страховий фонд, тому тарифна ставка в змішаному страхуванні складається з трьох частин, що входять у нетто-ставку, і четвертої частини – навантаження.

Аналогічний склад має структура тарифних ставок і за іншими видами страхування життя.

Структура тарифної ставки наведена на рис. 10.1.

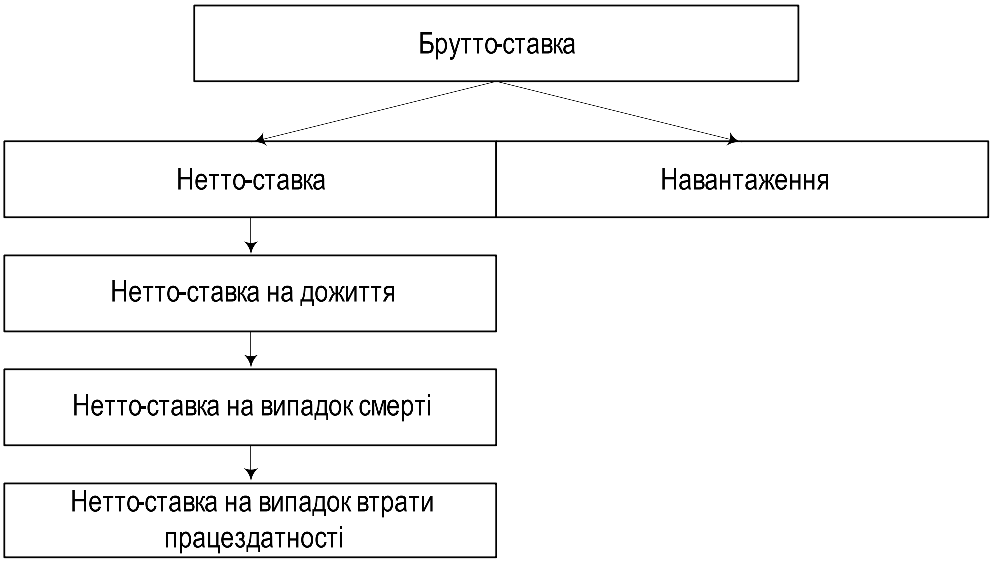

Рис. 10.1. Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

10.2. ТАБЛИЦЯ СМЕРТНОСТІ

Страхові операції ґрунтуються на принципі еквівалентності фінансових зобов’язань страховика і страхувальника. Тому перш ніж визначити, скільки кожен страхувальник повинен внести в загальний страховий фонд, необхідно встановити розмір виплат страховика.

Оскільки умови договорів страхування життя звичайно передбачають виплати в зв’язку з дожиттям застрахованого до визначеного терміну чи його смертю, для розрахунку відповідних витрат страховій компанії потрібно мати відомості про те, скільки осіб доживе до закінчення терміну дії договору і скільки з них щороку може померти.

Математика і статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, у тому числі смертність населення. Як установлено науковими дослідженнями, так званий процес вимирання покоління підпорядкований закону великих чисел.

Демографічною статистикою розроблена спеціальна методологія складання так званих таблиць смертності. Вона містить розрахункові показники, що характеризують смертність населення в окремих вікових групах і дожиття при переході від одного віку до наступного. Табл. 10.1 показує, як покоління одночасно народжених (умовно прийняте за 100 000) зі збільшенням віку поступово зменшується.

Такими таблицями (власними чи складеними на основі переписів населення) користуються страхові компанії для розрахунків тарифних ставок зі страхування життя.

У цій таблиці прийняті позначення: l_x – число осіб, що доживає до кожного наступного віку, яке показує, скільки зі 100 000 одночасно народжених доживає до 1 року, 5 років,..., 20, ..., 50 років тощо; d_x – число вмираючих при переході від віку x до віку $(x + 1)$ років. Вони показують, скільки з доживаючих до кожного віку вмирає, не доживши до наступного віку. Сума чисел умираючих від нульового і до граничного віку дорівнює вихідному числу таблиці смертності, тобто 100 000; q_x – імовірність померти протягом майбутнього року життя, не до-живши до наступного віку $(x + 1)$ років. Ця ймовірність показує, яка частка тих, що дожили до даного віку, помирає, не доживши до наступного, і є відношенням числа вмираючих при переході від віку x до віку $(x + 1)$ до числа тих, що доживають до даного віку x

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \tag{10.1}$$

Величина ймовірності померти звичайно виражається стотисячними частками одиниці. Наприклад, імовірність померти у віці 40 років дорівнює 0,00358. Це означає, що в середньому на кожні 100 000 осіб у віці 40 років припадає 358 осіб, що помирають протягом найближчого року. Показник імовірності померти можна виразити також у проміле чи відсотках. Для 40-річних він дорівнюватиме 3,58‰ чи 0,358%; P_x – імовірність дожити до $x + 1$ років.

Наведена таблиця показує, що з абстрактної сукупності 100 000 народжених через рік залишається в живих 98 719 осіб, оскільки 1 281 особа. помирає на першому році життя. До 20 років з них залишиться в живих 97 464 особи, до 30 років – 95 982, до 40 – 93 597 тощо. Первісна сукупність народжених 100 000 чол. щороку скорочується і поступово вимирає.

Для того, щоб читати таблицю смертності, беремо, наприклад, рядок для віку 40 років, тобто коли $x = 40$, $l_x = 93\,597$ (це означає, що зі 100 000 народжених до 40 років доживе 93 597 осіб); $d_{40} = 335$. Отже, у віці 40 років, або на 41-у році життя, помирає 335 осіб. До 41 року доживе тільки 93 262 (93 597 – 335), або $l_{40} - d_{40} = l_{41}$; $q_{40} =$

= 0,00358 й означає відношення числа осіб, що помирають на 41-му році життя (d_{40} = 335), до числа осіб, що дожили до 40 років: l_x = 93 597.

Таблиця 10.1. Зразок таблиці смертності

Вік у роках	Число тих, що доживають до віку *x* років	Число вмираючих при переході від *x* до (*x* + 1) років	Імовірність померти протягом наступного року життя	Імовірність дожити до (*x* + 1) років
0	100 000	1281	0,012 81	0,987 19
1	98 719	172	0,001 74	0,998 26
2	98 547	93	0,000 94	0,999 06
3	98 454	69	0,000 70	0,999 30
4	98 385	59	0,000 60	0,999 40
5	98 326	53	0,000 54	0,999 46
6	98 273	48	0,000 49	0,999 51
7	98 225	45	0,000 46	0,999 54
8	98 180	42	0,000 43	0,999 57
9	98 138	39	0,000 40	0,999 60
10	98 099	37	0,000 38	0,999 62
11	98 062	36	0,000 37	0,999 63
12	98 026	38	0,000 39	0,999 61
13	97 988	43	0,000 44	0,999 56
14	97 945	51	0,000 52	0,999 48
15	97 894	61	0,000 62	0,999 38
16	97 833	73	0,000 75	0,999 25
17	97 760	86	0,000 88	0,999 12
18	97 674	99	0,001 01	0,998 99
19	97 575	111	0,001 14	0,998 86
20	97 464	122	0,001 25	0,998 75
…	…	…	…	…
30	95 982	179	0,001 86	0,998 14
…	…	…	…	…
40	93 597	335	0,003 58	0,996 42
41	93 262	360	0,003 86	0,996 14
42	92 902	390	0,004 20	0,995 80
43	92 512	422	0,004 56	0,995 44
44	92 090	259	0,004 98	0,995 02
45	91 631	298	0,005 43	0,994 57
…	…	…	…	…

Показники ймовірності померти є основними в таблиці смертності, від них залежать усі інші числа. У них сконцентрована закономірність процесу вимирання покоління. А вся таблиця детально характеризує цей процес.

Маючи показники ймовірності померти, страховик із достатнім ступенем упевненості може очікувати, що протягом найближчого року з числа застрахованих у віці 40 років може померти 0,36%, у віці 41 року – 0,39%, 50 років – 0,71%. У окремі роки ці числа можуть бути трохи більшими чи меншими, але ймовірність занадто великих відхилень є надзвичайно низькою, і чим більша величина відхилення, тим менша ймовірність того, що воно може відбутися.

Таблиця смертності дає можливість також із достатнім ступенем упевненості стверджувати, що із 40-літніх осіб до 45 років не доживуть 1966, тобто

$$(d_{40} + d_{41} + \ldots + d_{44}), \text{ чи } (l_{40} - l_{45}), \text{ тобто } (l_x - l_{x+n}) = \sum_{i=x}^{x+n-1} di.$$

Показники з таблиці смертності використовуються для розрахунків тарифних ставок зі страхування життя.

Маючи таблицю смертності, страхова компанія одержує для кожного періоду, який її цікавить, необхідні відомості про найбільш імовірну кількість помираючих і осіб, що доживають, з числа застрахованих, тобто вона може довідатися, скільком приблизно особам у якомусь певному році необхідно буде виплатити страхові суми за випадками смерті чи дожиття, у скількох осіб припиняться тимчасові страхування на випадок смерті чи рентні страхування і т. ін.

Вибір таблиці смертності для кожної страхової компанії є дуже важливою проблемою, тому що від цього залежать розміри тарифних ставок, утворення резерву страхових внесків, фінансова стійкість операцій.

У міжнародній страховій практиці відомі загальні, усічені і збірні таблиці смертності.

У загальних таблицях наводяться повікові показники ймовірності померти, що виявилися протягом першого року після укладання договору страхування окремо для кожного року страхування, в усічених таблицях – повікові показники ймовірності померти тільки тих осіб, що вже були застраховані протягом кількох років, і дані медичного огляду вже не діють. Узагалі медичний огляд осіб, прийнятих на страхування, не дає тривалого ефекту.

У збірних таблицях містяться повікові показники ймовірності померти для всіх застрахованих незалежно від терміну страхування.

Користуючись різними таблицями, страхові компанії прагнуть зміцнити фінансову стійкість операцій. Справа в тому, що в тих країнах, де страхуванням охоплена значна частина населення і діє багато його різновидів, відбувається процес стихійного самодобору застрахованих.

За умови значної різноманітності видів страхування життя доцільним є застосування загальних, усічених і збірних таблиць смертності.

Багато страхових компаній здійснюють власні статистичні спостереження і на їх основі будують таблиці смертності. Ураховуються також причини випадків смерті з метою введення тих чи інших пільг або обмежень в умовах страхування.

Сьогодні побудова тарифних ставок ґрунтується на даних державної статистики, заснованих на матеріалах переписів населення. Це цілком правомірно, оскільки в країні переважає змішане страхування, що поєднує в собі страхування на дожиття і на випадок смерті.

Отже, використовуючи таблицю смертності, можна встановити ймовірну кількість виплат за договорами страхування, а в разі знання страхових сум – розмір фонду, який повинна мати страхова компанія, щоб виплатити страхові суми, тобто розмір страхового фонду.

Однак, перш ніж визначити частку участі кожного зі страхувальників у створенні такого фонду, тобто обчислити розмір страхових внесків, необхідно взяти до уваги ще один показник – норму прибутковості.

10.3. НОРМА ПРИБУТКОВОСТІ

Операції зі страхування життя відрізняються довготерміновістю. Договори можуть укладатися, наприклад, на 5, 10, 15, 20 років. Протягом усього часу їх дії страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум провадяться в більшості випадків після закінчення цих термінів, а також (набагато рідше) – після втрати застрахованим працездатності чи його смерті протягом терміну дії договору.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховими компаніями та використовуються в економіці. У разі розміщення їх у банку на ці кошти страховим компаніям нараховуються складні відсотки річного доходу. На величину одержуваного доходу страхові компанії зменшують тарифні ставки.

Нормою прибутковості називається розмір принесеного за рік кожною одиницею грошової суми доходу, що нараховується на кошти зі страхування життя, тимчасово використовувані банками як кредитні ресурси.

Норму прибутковості прийнято позначати символом i. Так, вираз $i = 0{,}03$ означає, що кожна грошова одиниця за рік приносить 3% доходу, $i = 0{,}05 = 5\%$ тощо. У страхуванні дохід розраховується відносно однієї грошової одиниці, а не сотні одиниць, як це робиться в інших випадках.

Абсолютний розмір доходу, одержуваного страховими компаніями, крім норми прибутковості, залежить ще й від розміру тієї суми, яку вони розміщують у економіці, і від часу, протягом якого ця сума була в обігу.

Для прикладу підрахуємо у що перетвориться грошова сума у 100 грн через 10 років.

Ту грошову суму, що буде давати дохід (у нашому прикладі 100 грн), позначимо як A; час, протягом якого вона знаходиться в обігу (10 років), – n, норму прибутковості (3%) – літерою i. Розрахунок провадиться за формулою складних відсотків, тобто наприкінці кожного року дохід, що утворився за цей рік, приєднується до грошової суми на початок року, тому в наступному році дохід дає вже нова, нарощена сума.

За норми прибутковості i через рік, кожна грошова одиниця, наприклад 1 грн, перетвориться в $(1 + i)$, тобто якщо $i = 0{,}03$, то 1 грн 03 коп. (1 грн + 0,03 грн).

Якщо одна грошова одиниця перетворилася в $(1 + i)$, то A таких одиниць – в $A(1 + i)$, чи 103 грн.

Суму, що утвориться до кінця першого року (103 грн), позначимо літерою B_1, тоді $B_1 = A(1 + i)$.

Через 10 років первісна грошова сума A дасть нарощену суму $B_{10} = A(1 + i)^{10}$, *а* через n років перетвориться в

$$B_n = A(1 + i)^n. \qquad (10.2)$$

Величина $(1 + i)$ називається відсотковим множником, який за n років становитиме $(1 + i)^n$.

У нашому прикладі сума в 100 грн через 10 років за $i = 0{,}03$ дорівнюватиме:

$B_{10} = 100(1 + 0{,}03)^{10} = 100\ 1{,}03^{10} = 134$ грн 39 коп.

Практикою страхової справи напрацьовані спеціальні таблиці, що полегшують повсякденні актуарні розрахунки. Серед них є таблиця зі значеннями чисел $(1 + i)^n$ при заданій нормі прибутковості. Наведемо таку таблицю, яка для прикладу вмістить кілька термінів (табл. 10.2).

Звіримо отриманий у наведеному прикладі результат 134 грн 39 коп. з даними таблиці. Для цього знайдемо, у що перетворюється за 10 років кожна гривня за i = 0,03. Відповідно до таблиці – у 1,34392 грн, а 100 грн – у 134 грн 39 коп.

Очевидно, що вища норма прибутковості, то швидше зростає початкова сума. Так, грошова сума збільшується вдвічі за 5% норми прибутковості приблизно за 14 років, за 4% – за 18, за 3% – за 23 роки.

*Таблиця 10.2.*Таблиця відсоткових множників

Кількість років, n	Значення чисел $(1 + i)^n$ за:		
	i = 0,3	i = 0,4	i = 0,5
1	1,030 00	1,040 00	1,050 00
2	1,060 90	1,081 60	1,102 50
3	1,092 73	1,124 86	1,157 63
4	1,125 51	1,169 86	1,215 51
5	1,159 27	1,216 65	1,276 28
10	1,343 94	1,488 24	1,628 89
14	1,512 59	1,731 68	1,979 93
15	1,557 97	1,800 94	2,078 93
18	1,702 43	2,025 82	2,406 62
20	1,806 11	2,191 12	2,653 30
23	1,973 59	2,464 72	3,071 52
30	2,427 26	3,243 40	4,321 94
50	4,383 91	7,106 68	11,467 40

На основі формули $B_n = A(1 + i)^n$ можна встановити ще одну дуже важливу для розрахунків тарифів залежність.

Використовуючи таблицю смертності, страховик визначає розмір страхового фонду, необхідного для виплат в узгоджений термін страхових сум. Позначимо його як величину B_n. Далі йому потрібно знайти величину A, тобто визначити, яким повинен бути розмір страхового фонду на початок терміну страхування.

$$A = \frac{B_n}{(1+i)^n}. \qquad (10.3)$$

Для спрощення розрахунків вводиться додатковий показник v, який називається дисконтувальним множником:

$$v = \frac{1}{1+i}. \qquad (10.4)$$

Показник, піднесений до ступеня n, є дисконтувальним множником за n років, тобто

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n}. \tag{10.5}$$

Він дозволяє довідатися, скільки потрібно внести сьогодні, щоб через кілька років мати грошовий фонд певного розміру з урахуванням заданої норми прибутковості, тобто визначити сучасну вартість цього фонду.

Тарифні ставки в страхуванні життя обчислюються з урахуванням того, що грошові суми, які надійшли у вигляді страхових внесків, протягом певного проміжку часу, даючи якийсь дохід, збільшаться, тобто вони визначаються на підставі сучасної вартості страхового фонду.

Із застосуванням показника v^n формула для визначення величини A набуває такого вигляду

$$A = B_n \cdot v^n. \tag{10.6}$$

Таблиця 10.3. Таблиця дисконтуючих множників

Кількість років, n	Дисконтувальні множники за		
	i = 0,3	i = 0,4	i = 0,5
1	0,970 87	0,961 54	0,952 38
2	0,942 60	0,924 56	0,907 03
3	0,915 14	0,839 00	0,863 84
4	0,888 49	0,854 80	0,822 70
5	0,862 61	0,821 93	0,783 53
10	0,744 09	0,675 56	0,613 91
14	0,661 12	0,577 48	0,505 07
15	0,641 86	0,555 26	0,481 02
18	0,587 39	0,493 63	0,415 52
20	0,553 68	0,456 39	0,376 89
23	0,506 69	0,405 73	0,325 57
30	0,411 99	0,308 32	0,231 38
40	0,306 56	0,208 29	0,142 05
50	0,228 11	0,140 71	0,087 20

Абсолютні значення показника v^n містяться в спеціальній таблиці (табл. 10.3), що використовується потім для розрахунку тарифів.

Зі збільшенням норми прибутковості i і терміну страхування n абсолютні значення множників, що дисконтують, зменшуються.

Формула $B_n = A(1 + i)^n$ дає можливість визначати й інші показники, які входять до неї (n, i).

Таким чином, залежність тарифних ставок від рівня смертності застрахованих і норми прибутковості складається об’єктивно і не може довільно змінюватися.

При визначенні тарифів зі страхування життя необхідно враховувати об’єктивні закономірності руху рівня смертності застрахованих, норми прибутковості, їх взаємозв’язок і вплив на величину тарифних ставок.

10.4. ТАРИФНІ СТАВКИ ЗА ЗМІШАНИМ СТРАХУВАННЯМ ЖИТТЯ

Уклавши договір страхування життя, страхувальник і страховик починають виконувати свої фінансові зобов’язання.

Фінансові зобов’язання полягають у сплаті страхових внесків. Якщо страхувальник сплачує їх одразу при укладанні договору, то такий внесок називається одноразовим. Якщо ж він виконує свої зобов’язання протягом усього терміну страхування, застосовуються річні внески, які потім можуть сплачуватись у розстрочку щомісяця.

Умови змішаного страхування життя передбачають виплату страхової суми в разі дожиття, смерті та внаслідок утрати працездатності від нещасного випадку. Для виплат за кожним видом страхової відповідальності страховик повинен створити в себе страховий фонд. Крім того, йому необхідні кошти для компенсації витрат на проведення страхових операцій. Тому тарифна ставка за змішаним страхуванням життя складається:

- з нетто-ставки на дожиття;
- з нетто-ставки на випадок смерті;
- з нетто-ставки на випадок утрати працездатності;
- з навантаження.

Розглянемо послідовно процес побудови тарифних ставок.

Одноразова нетто-ставка на дожиття. Візьмемо конкретний приклад: особа у віці 40 років (x = 40) укладає договір страхування на дожиття терміном на 5 років на суму 100 грн. Яким повинен бути для неї розмір одноразового страхового внеску?

Уявимо, що такі договори страхування уклали всі сорокарічні особи з наведеної вище таблиці смертності. Після закінчення п'яти років страховій компанії необхідно буде виплатити певну кількість страхових сум тим, хто доживе до закінчення терміну дії договору. За допомогою таблиці смертності знаходимо, що до 45 років доживе 91 631 особа. Тобто й виплат буде 91 631. Страхова сума кожного договору – 100 грн. Отже, страховий фонд, призначений для цих виплат, повинен становити

100 грн · 91 631 = 9 163 100 грн.

Однак на початку страхування він може мати менші розміри, ураховуючи, що щороку на нього буде наростати 3% (складних) доходу. Щоб відповідним чином зменшити цей фонд, тобто знайти його сучасну вартість, застосуємо дисконтувальний множник за 5 років, який дорівнює при 3% нормі прибутковості 0,862 61.

9 163 100 грн · 0,862 61 = 7 904 182 грн.

Отже, щоб через 5 років мати кошти для виплати страхових сум з дожиття, страхова компанія на початку страхування повинна мати у своєму розпорядженні фонд у 7 904 182 грн. Цю суму й потрібно одноразово зібрати зі страхувальників. Різниця між сумою збору і сумою виплат буде покрита за рахунок 3% доходу на зібрані кошти. 7 904 182 грн є сучасною вартістю 9 163 100 грн, що будуть виплачені через 5 років.

Щоб визначити розмір внеску кожного із застрахованих у цей загальний фонд, розділимо отриману суму на число осіб на початку страхування (див. таблицю смертності, $x = 40$). Одержимо

7 904 182 грн / 93 597 = 84 грн 45 коп.

Це й буде одноразова нетто-ставка на дожиття. Розмір тарифної ставки було, відповідно, обчислено таким чином:

(91 631 · 0,862 61 : 93 597) · 100 = 84,45.

91 631 – це кількість осіб, що доживають до 45 років, яке позначається символом l_{x+n}, де x – вік на початку страхування, n – термін страхування, 0,862 61 – дисконтний множник, 93 597 – кількість осіб на початку страхування l_x, 100 – страхова сума S.

Звідси отримаємо формулу

$$ {}_nE_x = \frac{(l_{x+n} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}, \tag{10.7} $$

де ${}_nE_x$ – одноразова нетто-ставка зі страхування на дожиття для осіб у віці x років терміном на n років.

Підставляючи в цю формулу відповідні значення, можна обчислити розмір тарифної ставки зі страхування на дожиття для будь-якого віку і терміну. Наприклад, для особи віком 30 років, застрахованої на 10 років, одноразова нетто-ставка зі страхування на дожиття становитиме

$$_{10}E_{30} = \frac{(l_{40} \cdot v^{10})}{l_{30}} S = \frac{93\ 597 \cdot 0{,}744\ 09}{95\ 982} \cdot 100 = 72 \text{ грн } 56 \text{ коп.}$$

Одноразова нетто-ставка на випадок смерті. Припустимо, що особа у віці 40 років укладає договір страхування на випадок смерті терміном на 5 років на 100 грн. Якщо, обчислюючи нетто-ставку на дожиття, необхідно було знайти число осіб, що доживають до 45 років, то тепер слід визначити кількість застрахованих, які не доживуть до 45 років.

За таблицею смертності знаходимо, що у віці 40 років звичайно помирає 335 осіб, у віці 41 року – 360, 42 років – 390, 43 років – 422, 44 років – 459 осіб. Отже, страховій компанії необхідно виплатити внаслідок випадків смерті на першому році страхування 33 500 грн, на другому – 36 000 грн тощо. Перемноживши ці суми на відповідні (для одного року, двох років і т. ін.) дисконтувальні множники знайдемо сучасну вартість майбутніх п’ятирічних виплат за випадками смерті:

33 500 · 0,970 87 + 36 000 · 0,942 60 + 39 000 · 0,915 14 + 42 200 · · 0,888 49 +...+ 45 900 · 0,862 61 = 179 237 грн.

Розділимо отриману суму на число осіб, що вступають у страхування

179 237 : 93 597 = 1 грн 91 коп.

Отже, особи у віці 40 років, уклавши договір страхування на випадок смерті на страхову суму 100 грн, повинні при укладанні договору внести в загальний страховий фонд 1 грн 91 коп.

Розмір тарифної ставки був обчислений за допомогою таких дій

(335 · 0,970 87 + 360 · 0,942 60 + ...+ 459 · 0,862 61) / 93 597 · 100 = = 1,91,

де 335 – число осіб, що помирають у віці 40 років, або d_x;

360 – число осіб, що помирають у віці 41 року, або d_{x+1};

459 – число осіб, що помирають на останньому році страхування, або d_{n+m-1};

0,970 87; 0,942 60, ... і т.д. – дисконтувальні множники, для відповідних років страхування: (v, v^2, …, v^n);

93 597 – число осіб при вступі в страхування l_x;

100 – страхова сума, або S.

Одноразова нетто-ставка зі страхування на випадок смерті для осіб у віці d_x років за терміну страхування n років позначається символом A

$$ {}_nA_x = \frac{(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^n)}{l_x} \cdot S. \qquad (10.8) $$

Користуючись цією формулою, можна обчислити розмір тарифної ставки зі страхування на випадок смерті для осіб будь-якого віку на будь-який термін.

Виводячи формули, ми переконуємося, що одноразові нетто-ставки дорівнюють сучасній вартості взаємних фінансових зобов'язань страховика і страхувальника.

10.5. РІЧНА НЕТТО-СТАВКА

Для більшості страхувальників зручніше робити внески протягом усього періоду страхування. Для цього обчислюються річні нетто-ставки.

Визначаючи розмір річної нетто-ставки, не можна механічно ділити одноразову ставку на число років страхування. Необхідний особливий розрахунок, що враховує як втрату доходу на відсотках, так і зменшення числа застрахованих через смертність. У випадку одноразової сплати більша грошова сума надходить одразу в обіг, і на неї наростають відсотки. У разі ж річних внесків частина доходу, одержаного за рахунок відсотків, втрачається. Крім того, у випадку одноразового внеску всі страхувальники погашають свої внески одразу, а в разі річної сплати за низкою договорів внески не будуть виплачені повністю, оскільки певна кількість застрахованих протягом терміну дії договорів може померти (див. таблицю смертності).

Для обчислення річних ставок застосовуються спеціальні коефіцієнти розстрочки (ануїтети).

Розглянемо конкретний приклад. Уявімо: усі 93 597 осіб 40-річного віку, що значаться в таблиці смертності, зобов'язалися протягом п'яти років наприкінці кожного року вносити страховій компанії по 1 грн. Але, оскільки протягом п'яти років частина застрахованих може померти, страхова компанія одержить відповідно до таблиці смертності: наприкінці першого року – 93 262 грн; другого року – 92 902 грн; третього року – 92 512 грн; четвертого року – 92 090 грн; п'ятого року – 91 631 грн.

Сучасна вартість суми, внесеної в першому році, дорівнює 93 262 · 0,970 87 (0,970 87 – дисконтувальний множник за один рік). Сучасна вартість внесків другого року дорівнює 92 902 · 0,942 60 (0,942 60 – дисконтувальний множник за 2 роки) і т.д. Перемноживши суми внесків кожного року на відповідні дисконтувальні множники, знайдемо сучасну вартість загальної суми внесків усіх застрахованих. Розділивши отриману величину на 93 597 (кількість осіб, що вступили у страхування), розраховуємо сучасну вартість річних внесків у розмірі 1 грн, сплачених протягом п'яти років кожним із 40-річних застрахованих. У результаті підрахунку отримаємо 4 грн 53 коп. Це означає, що протягом п'яти років страхувальник буде вносити страховій компанії по 1 грн і всього він внесе 5 грн. Сучасна вартість цих 5 грн у момент укладання договору страхування дорівнює 4 грн 53 коп. Сучасна вартість річних внесків у розмірі 1 грн називається коефіцієнтом розстрочки (ануїтетом) і позначається символом ${}_n a_n$.

Якщо в наведеному розрахунку замінити цифрові значення літерними позначеннями, отримаємо формулу

$$ {}_n a_x = \frac{(l_x + 1 \cdot v + l_x + 2 \cdot v^2 + \ldots + l_x + n \cdot v^{x+n})}{l_x}. \tag{10.9}$$

У ній враховується і норма прибутковості, і природне зменшення через смертність числа застрахованих осіб протягом терміну страхування.

Як відомо, одноразова нетто-ставка дорівнює сучасній вартості взаємних фінансових зобов'язань страховика і страхувальника. Якщо страхувальник погашає свої фінансові зобов'язання річними внесками, одноразова ставка дорівнює сучасній вартості суми річних внесків.

Коефіцієнт розстрочки дорівнює сучасній вартості річних внесків у розмірі 1 грн. Отже, одноразова ставка так відноситься до річної, як коефіцієнт розстрочки до 1 грн. Складемо пропорцію.

Одноразова ставка: ${}_n a_x = \dfrac{\textit{Річна ставка}}{\frac{{}_n P_x}{1}}$.

Звідси річна ставка дорівнює одноразовій, помноженій на 1 грн і поділеній на коефіцієнт розстрочки, або ${}_n P_x$ = *одноразова ставка* / ${}_n a_x$.

Абсолютні значення коефіцієнтів розстрочки близькі до значення *n* – терміну страхування, але трохи нижчі за нього. У результаті розміри річних ставок виходять більш високими, ніж при механічному діленні одноразової ставки на кількість років страхування. Так відшкодовуються втрати на відсотках і враховується зменшення протягом терміну страхування кількості осіб, що роблять внески.

Застосувавши коефіцієнт розстрочки в розмірі 4,53, обчислимо річні ставки для особи у віці 40 років за терміну страхування 5 років.

Річна нетто-ставка на дожиття дорівнює 18 грн 64 коп. (84 грн 45 коп. / 4,53); річна нетто-ставка зі страхування на випадок смерті становитиме 42 коп. (1 грн 91 коп. / 4,53), а зі змішаного страхування (без відповідальності за втрату працездатності) – 19 грн 06 коп.

Таким чином, договір змішаного страхування життя терміном на 5 років для сорокарічної особи характеризується такими даними: 100 грн – страхова сума; 95 грн 30 коп. – сума річних внесків – нетто; 86 грн 36 коп. – одноразовий внесок – нетто.

Формула для обчислення річних нетто-ставок на дожиття

$$ {}_nP_x = \frac{{}_nE_x}{{}_na_x} \cdot S . \tag{10.10} $$

10.6. БРУТТО-СТАВКА

Одержуючи внески в розмірі нетто-ставок, страховик акумулює стільки коштів, скільки йому знадобиться для виплати страхових сум. Але він несе витрати, пов'язані з проведенням страхування, тобто повинен оплатити діяльність працівників з укладання договорів страхування та інші витрати.

Оскільки страхування проводиться за рахунок самих страхувальників, кошти на покриття цих витрат також передбачаються в тарифній ставці. Тому до нетто-ставки приєднується навантаження.

У тарифних ставках зі змішаного страхування життя в навантаження включені лише чисті витрати страхових компаній на проведення страхових операцій. Річна брутто-ставка зі змішаного страхування життя на 100 грн для особи у віці 40 років і терміном на 5 років становить 21 грн 11 коп.

Брутто-ставки обчислюються за формулою

$$ {}_n\Pi_x = \frac{{}_nH_x}{(1-f)}, \tag{10.11} $$

де ${}_n\Pi_x$ – брутто-ставка;

${}_nH_x$ – нетто-ставка;

f – питома вага навантаження у брутто-ставці.

Аналізуючи брутто-ставки, доходимо таких висновків: розмір тарифів збільшується зі збільшенням віку особи, що укладає договір страхування; чим більш тривалим є термін страхування, тим нижча тарифна ставка; одноразовий внесок менший від страхової суми і нижчий ніж сума місячних внесків; перевищення загальної суми сплачених у розстрочку внесків буде тим меншим або його зовсім не буде, чим більш тривалим є термін страхування і молодшою особа, що укладає договір.

10.7. АНАЛІТИЧНІ ЗАКОНИ СМЕРТНОСТІ

У основі актуарних розрахунків лежить щільність імовірностей $f(x)$ й обумовлені нею функції $S(x)$, μ_x та інші характеристики. Ясно, що ці розрахунки будуть більш простими, якщо є відомим аналітичний вигляд функції $f(x)$ з точністю низки параметрів, які можна оцінити за статистичними даними про тривалість життя людей.

Модель де Муавра. У 1729 р. Абрахам де Муавр запропонував вважати, що тривалість життя рівномірно розподілена на інтервалі $[0, \omega]$, де ω – це граничний вік людини, тобто

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} 1/\omega, & x \in [0,\omega], \\ 0, & x \notin [0,\omega]. \end{matrix} \right\}. \qquad (10.12)$$

Це найбільш проста апроксимація кривої життя $f(x)$. У рамках моделі Муавра легко знайти функції виживання $S(x)$, розподіл $F(x)$, інтенсивність смертності μ_x і необхідні числові характеристики (середнє, дисперсія та ін.).

Очевидно, що $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (1/\omega)dt = x/\omega$, при $x \le \omega$,

якщо $x > \omega$, тоді $F(x) = \int_0^\omega (1/\omega)dt + \int_\omega^x 0dt = 1$.

$$F(x) = \left\{ \begin{matrix} x/\omega, & x \in [0,\omega], \\ 1, & x \notin [0,\omega]. \end{matrix} \right\},$$
$$S(x) = 1 - F(x) = \left\{ \begin{matrix} 1-(x/\omega), x \in [0,\omega] \\ 0, x > \omega \end{matrix} \right\}, \qquad (10.13)$$

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}, \quad при \quad x \in (0, \omega].$$

Для інших значень x інтенсивність смертності не визначена. За формулами середнього часу життя та дисперсії тривалості життя одержуємо

$$\overset{0}{e}_0 = \int_0^{\omega} S(x)dx = \frac{\omega}{2},$$
$$EX^2 = 2\int_0^{\omega} x(1 - \frac{x}{\omega})dx = \frac{\omega^2}{3}, \qquad (10.14)$$
$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{12}, \ \sigma = \frac{\omega}{2\sqrt{3}}.$$

На підставі дослідних і статистичних даних про тривалість життя модель Муавра можна вважати дуже грубою. Реально її можна використовувати для апроксимації функції виживання на певному інтервалі часу.

Модель Гомпертца. У 1825 р. Гомпертц запропонував інтенсивність смертності μ_x апроксимувати експонентою

$$\mu(x) = Be^{\alpha x}, \qquad (10.15)$$

де $\alpha > 0, B > 0$ – деякі параметри.

Тоді можна записати формули для функції смертності, виживання, кривої смертей.

Визначимо криву смертності і функцію виживання

$$\int_0^x \mu_x dx = \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1),$$
$$F(x) = 1 - \exp(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)), \qquad (10.16)$$
$$S(x) = \exp(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)).$$

Диференціюванням $F(x)$ знаходимо криву смертей

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=B\exp(\alpha x-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)). \qquad (10.17)$$

Визначимо точку максимуму цієї функції. Оскільки

$$\frac{df(x)}{dx}=B(\alpha x-Be^{\alpha x})\exp(\alpha x-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1))=0 \qquad (10.18)$$

лише при

$$\bar{x}=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha}{B}, \qquad (10.19)$$

і функція $f(x)$ є додатною, $\bar{x}$ – це точка максимуму.

Визначення середнього і дисперсії в моделі Гомпертца призводить до інтегралів, що не беруться, тому можуть бути обчислені наближено. Тому знаходженням виразів для $\overset{0}{e}_0$ та σ^2 нехтуємо.

Модель Мейкхама. У 1860 р. Мейкхам узагальнив модель Гомперца

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}, x > 0. \qquad (10.20)$$

Призначення додаткового доданка A пояснимо нижче.

Легко переконатися, що в рамках моделі Гомпертца виконуються співвідношення

$$S(x)=\exp\left\{-Ax-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right\},$$

$$F(x)=1-\exp\left\{-Ax-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right\}, \qquad (10.21)$$

$$f(x)=\left[A+Be^{\alpha x}\right]\exp\left\{-Ax-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right\}.$$

Розглянемо граничний випадок B = 0. Тоді одержимо експоненціальний закон

$$f(x) = Ae^{-Ax}\ f(x) = Ae^{-Ax}, \tag{10.22}$$

з інтенсивністю смертності A, що не залежить від віку x. Таке можна чекати, якщо смерть спричинена нещасними випадками. Для опису частки таких смертей уведено параметр A, який ураховує ризики, пов'язані з нещасними випадками.

Результатом розрахунків середнього і дисперсії в моделях Мейкхама також є інтеграли, що не беруться.

Модель Вейбулла. У 1939 р. Вейбулл запропонував апроксимувати інтенсивність смертності показниковою функцією

$$\mu x = kx^b,\ k > 0,\ b > 0. \tag{10.23}$$

Відповідно до цієї моделі

$$\begin{aligned} S(x) &= \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}, \\ F(x) &= 1-\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}, \\ f(x) &= kx^b\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Похідна має вигляд

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(kbx^{b-1} - x^{b^2}\right)\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\} = 0 \tag{10.25}$$

при

$$\bar{x} = \left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{b^2}{b-1}}, \tag{10.26}$$

яка є точкою максимуму графіка смертей, якщо $b > 0$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягають особливості побудови тарифів зі страхування життя?
2. Яка структура тарифної ставки у страхуванні життя?
3. Охарактеризуйте таблицю смертності у страхуванні життя.
4. Дайте визначення поняття «норма прибутковості».
5. Що таке відсотковий множник? Наведіть таблицю відсоткових множників.
6. Дайте визначення одноразової нетто-ставки зі страхування на дожиття.
7. Дайте визначення одноразової нетто-ставки на випадок смерті.
8. Охарактеризуйте поняття річної нетто-ставки.
9. Що таке брутто-ставка зі змішаного страхування життя?
10. Охарактеризуйте модель Муавра.
11. Охарактеризуйте модель Гомпертца.
12. Охарактеризуйте модель Мейкхама.
13. Охарактеризуйте модель Вейбулла.

ТЕСТИ

1. Побудова тарифів зі страхування життя має свої особливості:
   а) розрахунки провадяться з використанням демографічної статистики і теорії ймовірності;
   б) у розрахунках застосовуються способи короткострокових фінансових розрахунків;
   в) тарифні нетто-ставки складаються з кількох частин, кожна з яких має сформувати страховий фонд за одним з видів страхової відповідальності, який включений в умови страхування.

2. Тарифні ставки в страхуванні життя складаються з кількох частин:
   а) страхування на дожиття;
   б) страхування на випадок смерті;
   в) страхування від нещасних випадків;
   г) медичного страхування;
   д) ризикового страхування.

3. Таблиця смертності містить показники, що характеризують:
   а) смертність населення в окремих вікових групах;
   б) дожиття при переході від одного віку до наступного;

   в) імовірність померти протягом майбутнього року життя;
   г) дожиття до окремої вікової групи;

4. За допомогою формули $B_n = A(1 + i)^n$ можна визначити:
   а) страховий фонд, необхідний для виплат в визначений термін страхових сум;
   б) страховий фонд на початку терміну страхування;
   в) тарифна ставка при страхуванні життя.

5. Формула ${}_nE_x = \frac{(l_{x+n} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}$ описує:
   а) одноразову нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
   б) одноразову нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
   в) сучасну вартість річних внесків (коефіцієнт розстрочки);
   г) річну нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
   д) річну нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років.

6. Формула ${}_na_x = \frac{(l_x + 1 \cdot v + l_x + 2 \cdot v^2 + ... + l_x + n \cdot v^{x+n})}{l_x}$ описує:
   а) одноразову нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
   б) одноразову нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
   в) сучасну вартість річних внесків (коефіцієнт розстрочки));
   г) річну нетто-ставку зі страхування на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
   д) річну нетто-ставку зі страхування на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років.

7. Яку модель характеризує аналітичний закон смертності (показник інтенсивності смертності)

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}, \quad при \quad x \in (0, \omega):$$

   а) модель де Муавра;

б) модель Гомпертца;
в) модель Мейкхама;
г) модель Вейбулла.

8. Яку модель характеризує аналітичний закон смертності (показник інтенсивності смертності) $\mu_x = A + Be^{\alpha x}$, $x > 0$:
   а) модель Мейкхама;
   б) модель Вейбулла;
   в) модель де Муавра;
   г) модель Гомпертца.

9. Результатом аналізу брутто-ставки є такі висновки:
   а) розмір тарифів збільшується зі збільшенням віку особи, що укладає договір страхування;
   б) чим більш тривалий термін страхування, тим нижча тарифна ставка;
   в) одноразовий внесок є меншим від страхової суми і нижчим від суми місячних внесків;
   г) перевищення загальної суми сплачених у розстрочку внесків буде тим меншим або його зовсім не буде, чим більш тривалим є термін страхування і молодшою особа, що укладає договір.