

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Свешникова Елена Ивановна

**Нелинейные квазипоперечные волны в
слабоанизотропных упругих средах**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Кукуджанов

доктор физико-математических наук,
профессор А.И. Потапов

доктор технических наук,
профессор Ю.А. Демьянов

Ведущая организация: Институт механики сплошных сред
УрО РАН, г. Пермь

Защита состоится 7 ноября 2008 года в 16 часов 20 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан ” ____ ” _____ 2008 года.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
доктор физико-математических наук

С. В. Шешенин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время во многих задачах науки и техники требуется знание свойств динамического поведения материалов, обладающих небольшой анизотропией, в том числе вызванной предварительными деформациями в процессе обработки. Наличие анизотропии, хотя бы очень малой, характерно для всех реальных сред. Особо важен учет анизотропии и вызываемых ею особенностей для процессов, в которых материалы обнаруживают нелинейное поведение. Такими являются процессы, происходящие с большим изменением напряжений (например, при взрывных, ударных волнах) или нелинейные динамические процессы, протекающие длительное время (например, в сейсмологии). Даже если приобретенная или присущая материалу от природы анизотропия очень мала, она снимает симметрию свойств и вносит коррективы в поведение объектов. Взаимное действие нелинейности и анизотропии во многих случаях приводит к заранее непредсказуемому динамическому поведению. Это делает необходимым создание теоретической основы для расчета нелинейных динамических процессов в предварительно напряженных материалах или средах с малой естественной анизотропией.

Изучению нелинейных плоских одномерных волн в упругих средах посвящены работы Д.Бленда, А.Г.Куликовского, Э.В.Ленского, Г.Я.Галина, А.Ханыги, Ж.Бейзера, А.Н.Гузя, А.А.Буренина, З.Весоловского, Ж.Можена и многих других. В этих работах отмечалось, что более сложное нелинейное поведение обнаруживают поперечные волны, требующие более точных подходов и методов исследования.

Как нелинейность, так и анизотропия (и они вместе) делают волны квазипродольными и квазипоперечными, каждая несет изменение всех компонент деформации и напряжения. Скорости всех трех волн становятся различными, что снимает вырожденность, присущую изотропным средам, где вследствие свойств симметрии скорости двух линейных поперечных волн совпадают. Изучение нелинейного поведения квазипродольных волн (в частности, в работах вышеназванных авторов) показало, что качественно оно повторяет свойства газодинамиче-

ских волн, которые достаточно хорошо исследованы. В то же время изучение квазипоперечных волн оказалось много сложнее ввиду малого различия в их скоростях, что требует их исследования в совокупности, учитывая взаимодействие при движении. Для этого потребовалась разработка новых подходов, чему и посвящена данная работа.

Цель работы. Основной целью работы является исследование распространения плоских одномерных волн в нелинейно упругих средах при наличии малой анизотропии начального состояния в плоскостях, параллельных фронту (волновой анизотропии). Исследование состоит в отыскании в рамках модели нелинейной теории упругости непрерывных решений в виде волн Римана и изучении возможных разрывов в виде ударных волн, а также в определении условий для их реализации. При этом было необходимо выяснить влияние на полученные решения присутствия малой волновой анизотропии, а также влияние вида анизотропии и нелинейности при задании упругой среды ее упругим потенциалом. Отобранные и исследованные непрерывные и ударные волны используются для построения решений классических автомодельных задач механики сплошной среды.

Научная новизна. Впервые выполнено полное исследование поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде с малой волновой анизотропией. При этом обнаружен ряд качественных особенностей, которые не присущи изотропным средам.

Показано, что поведение квазипоперечных волн небольшой интенсивности в случае анизотропии и уравнений состояния общего вида и в модели с тригональной симметрией свойств определяется двумя упругими постоянными κ и g , из которых первая задает вид нелинейности, а вторая характеризует волновую анизотропию. Выяснено, как знак упругой константы κ качественным образом влияет на поведение всех нелинейных волн.

Для моделей упругой среды с различными видами анизотропии и нелинейности найдены и исследованы непрерывные решения уравнений нелинейной теории упругости в виде волн Римана. Найдены характеристические скорости и интегральные кривые. Указаны условия, приводящие к опрокидыванию волн.

Построены и исследованы ударные адиабаты для ударных волн в средах с различными нелинейностью и анизотропией. Под ударной адиабатой понимается множество за разрывами, на которых выполнены соотношения, вытекающие из законов сохранения, если состояние среды перед ними фиксировано. Выделены те ударные волны, которые удовлетворяют требованиям неубывания энтропии и эволюционности.

Установлено, что для волн небольшой интенсивности условия эволюционности дают более строгие ограничения, чем условие неубывания энтропии.

Для ударных волн небольшой интенсивности при разном виде волновой анизотропии решена задача о существовании стационарной структуры на базе модели вязко-упругой среды. Установлено, что все эволюционные волны обладают структурой и никаких дополнительных соотношений из исследования структуры не возникает.

Для всех исследованных моделей обнаружено, что на ударной адиабате кроме обычных ударных волн, которые при уменьшении интенсивности совпадают с непрерывными решениями, существуют такие ударные переходы, интенсивность которых не может быть сделана как угодно малой.

Указана возможность существования сдвоенных скачков из быстрой и медленной ударных волн, движущихся с одинаковой скоростью.

Показано, что все возникшие качественные особенности поведения как волн Римана, так и разрывных решений являются следствием присутствия малой волновой анизотропии.

Для слабонелинейной среды с малой анизотропией общего вида построено решение двух классических автомодельных задач – о поршне и о распаде произвольного начального разрыва – в виде последовательностей центрированных волн Римана и эволюционных ударных волн.

Обнаружено, что для обеих задач существуют целые конечного размера области задания граничных условий, для которых решение задачи о поршне оказывается неединственным (двузначным). Ответственным за такое, впервые встречающееся в классической теории упругости явление, опять оказывается присутствие анизотропии, причем как угодно малой. Это свойство не пропадает при уменьшении анизотропии, но

вместе с ее исчезновением исчезает разница между решениями.

Предложен некоторый способ, позволяющий предвидеть появление неединственности по конкретному виду условий эволюционности, не проводя полного построения решения автомодельной задачи.

Научная и практическая значимость. Полученные результаты по изучению нелинейных квазипоперечных волн создают математическую основу для построения решений конкретных динамических задач в упругих средах с малой волновой анизотропией. Подобная анизотропия присуща практически всем реальным материалам и должна учитываться при постановке задач, а нестандартное поведение ударных волн проявит себя в построении решений. Полученное в работе решение для задачи о распаде произвольного начального разрыва и возможность появления неединственности должны учитываться при построении алгоритмов численных методов и программ численного моделирования. Результаты исследования могут быть использованы как основа для изучения упругих характеристик среды по измерению параметров нелинейных волн.

Методы исследования и достоверность результатов. В работе использованы известные аналитические и качественные методы и исследованы зависимости результатов от всех входящих в постановку параметров. Это определяет достоверность результатов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре кафедры гидромеханики механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством академика А.Г.Куликовского, проф. В.П.Карликова и проф. А.А.Бармина, на научном семинаре Института проблем механики РАН под руководством проф. В.Н.Кукуджанова, акад. А.Г.Куликовского и проф. И.В.Симонова, на научных семинарах кафедры пластичности, кафедры волновой и газовой динамики, кафедры теории композитов и кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова; на Международном симпозиуме IUTAM по нелинейным волнам деформации (Таллин, 1982); на V, VI, VII Всесоюзных съездах по теоретической и прикладной механике (Алма-Ата 1981, Ташкент 1986, Москва 1991); на

V, VI и VII Всесоюзных конференциях по механике полимерных и композитных материалов (Рига 1983, 1986, 1990); на Всесоюзном семинаре по нелинейной сейсмологии (Москва 1983); на I Всесоюзном симпозиуме по математическим методам в механике твердого деформируемого тела (Москва 1984); на Республиканской конференции "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред" (Горис Арм ССР 1984); на Международном симпозиуме "Нелинейная сейсмология" (Суздаль 1986); на Международной конференции "Современные математические проблемы механики и их приложения" (Москва 1987); на Республиканской конференции "Проблемы электродинамики и механики сплошных сред" (Рига 1988); на Третьей Международной конференции INRIA по математическим и численным аспектам распространения волн (Манделье Франция 1995); на 11-ой Зимней международной школе по механике сплошных сред (Пермь 1997); на 16-ом Международном Симпозиуме по нелинейной акустике (Москва 2002); на Всероссийской научной школе "Нелинейные волны - 2002" (Нижний Новгород 2002); на VIII, IX Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Пермь 2001, Нижний Новгород 2006); на Всероссийской конференции "Волновая динамика машин и конструкций" (Нижний Новгород 2004); на 14-ой Зимней школе по механике сплошной среды (Пермь 2005); на Всероссийской конференции "Современные проблемы механики сплошной среды" (Москва 2007); на XVIII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Саратов 2007); на научной конференции "Ломоносовские чтения" (Москва, МГУ 2003, 2004, 2005, 2006, 2007).

Публикации. По теме диссертации опубликовано более 35 работ, в том числе монография и ее вариант на английском языке в издании CRC Press. Список основных публикаций приведен в конце. Из совместных публикаций в диссертацию включены результаты, полученные непосредственно автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 74 названий и содержит 208 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении дано описание исследуемого явления распространения нелинейных волн по упругой среде с предварительной деформацией. Указана необходимость учета анизотропии деформационного фона, которая практически всегда сопровождает реальные среды. Дан краткий обзор литературы по нелинейным упругим волнам, прежде всего в средах с анизотропией. Перечислены основные вопросы, исследуемые в работе – построение моделей сред с разным видом анизотропии и характером нелинейности, исследование в этих средах волн Римана и ударных волн, построение решений классических автомодельных задач. Указаны обнаруженные новые особенности поведения нелинейных упругих волн, вызванные учетом анизотропии. Отмечено, что вся работа выполнена аналитическими и качественными методами.

В Главе 1 дана постановка задачи о плоских одномерных нелинейных волнах в упругой среде. Среда задается своим упругим потенциалом $\Phi = \rho_0 U(\varepsilon_{ij}, S)$, где U – внутренняя энергия единицы массы, ε_{ij} – компоненты тензора конечных деформаций, S – энтропия, ρ_0 – плотность среды в начальном состоянии. Среда считается однородной $\rho_0 = \text{const}$ и далее положено $\rho_0 = 1$. Рассмотрение ведется в лагранжевых переменных в декартовой системе координат начального состояния. Ось x_3 ортогональна фронту волны, оси x_1, x_2 – в плоскости фронта.

Вместо компонент тензора деформаций в лагранжевом подходе обычно используются компоненты тензора градиентов перемещения $u_{ij} = \partial w_i / \partial x_j$. При прохождении плоской волны вдоль оси $x_3 = x$ претерпевают изменения только три компоненты $\partial w_i / \partial x = u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$. Остальные компоненты деформации постоянны $\partial w_i / \partial x_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, 2$ и входят в задание предварительной деформации, определяющей фон, по которому идет волна. При этом продольная компонента u_3 характеризует сжимаемость среды, а компоненты u_1 и u_2 – деформации, вызванные сдвигом плоскостей, параллельных фронту. Таким образом, упругий потенциал будет задаваться функцией $\Phi(u_i, S)$. Предполагается, что среда обладает малой волновой анизотропией, т.е. деформационное состояние фона в плоскостях, параллельных фронту,

в направлении осей x_1 и x_2 различно. Эта анизотропия может иметь как естественное происхождение, так и вызвана предварительным деформированием в исходно изотропном материале.

В диссертации проведено построение нескольких моделей упругих сред с различным видом анизотропии и характером нелинейности.

Основная часть работы посвящена волнам небольшой интенсивности, для которых при исследовании можно пользоваться методом разложения по малым амплитудам деформаций, сохраняя в них столько членов, чтобы в поведении волн проявились свойства нелинейности и анизотропии среды. Принятая при задании упругого потенциала степень точности соблюдается далее во всех выражениях. Упругий потенциал изотропной среды представляется разложением по инвариантам тензора конечных деформаций (за начало отсчета деформаций принято ненапряженное состояние)

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + \delta I_1^3 + \xi I_2^2 \\ & + \eta I_1 I_3 + \zeta I_1^2 I_2 + \omega I_1^4 + \rho_0 T_0 (S - S_0) + \text{const.} \end{aligned} \quad (1)$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

Нелинейность в поперечных упругих волнах проявляется в более слабой степени, чем в продольных, и, как показали предшествующие исследования [1], для обнаружения нелинейного поведения всех волн в разложении упругого потенциала следует удерживать члены, по крайней мере, до четвертого порядка по деформациям включительно. Учет изменения энтропии в упругих волнах необходим только при изучении движений с разрывами. Изменение же энтропии в ударных волнах согласно общей теории гиперболических систем [2] не менее, чем на два порядка меньше, чем амплитуд основных величин. Это подтверждено и для упругой среды в работе [1]. Это позволило в разложении упругого потенциала учесть изменение энтропии в виде линейного слагаемого. Последующее прямое вычисление подтвердило справедливость такого действия. Тем не менее в диссертации рассмотрена модель, содержащая в упругом потенциале перекрестные члены энтропия-деформация и квадратичные по изменению энтропии, а также модель, в которой разложение функции Φ проведено до членов шестого порядка по ам-

плитудам деформаций. Как показало исследование как непрерывных решений, так и ударных волн, эти уточнения не привели к обнаружению новых качественных особенностей по сравнению с основной, принятой выше моделью. Учет перекрестных членов лишь позволил вычислить изменение температуры при прохождении ударной волны.

Следует заметить, что в разложении функции Φ присутствуют все компоненты тензора деформаций, в том числе и те, которые не претерпевают изменений при прохождении плоской волны. При этом, если главные значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ деформаций в плоскостях, параллельных фронту, различны ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$), то даже в исходно изотропной среде имеется волновая анизотропия. Присутствие анизотропии такого рода можно ожидать в любом реальном материале. В то же время, она может быть как угодно малой.

Разложение упругого потенциала по ε_{ij} можно пересчитать в разложение по u_i . Но можно сразу потенциал среды самого общего вида, заданный в виде $\Phi(u_i, S)$, разложить в ряд по компонентам u_i . Будем считать, что компоненты деформаций и их начальные значения U_i , определяющие фон, имеют порядок малости ε , и разложение вести до членов порядка ε^4 – первых, главных членов выявляющих анизотропию и нелинейность

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) + \frac{1}{2}du_3^2 + au_3^3 + \\ & b(u_1^2 + u_2^2)u_3 + \frac{1}{4}h(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0(S - S_0), \end{aligned} \quad (2)$$

Нелинейность для поперечных волн нужна четвертого порядка по ε , и главный ее член является изотропным, а анизотропный член с коэффициентом g взят только как самый младший, квадратичный. Для изотропной среды разложение (2) справедливо, если оси x_1, x_2 – в плоскости фронта выбраны так, что они служат главными осями для компонент тензора предварительной деформации в плоскости фронта, т.е. $\varepsilon_{12} = 0, \varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2$ – главные компоненты сжатия-растяжения в плоскости фронта. При этом несложно установить связь новых коэф-

коэффициентов разложения с упругими модулями из представления (1)

$$f = \mu + O(\varepsilon), \quad d = \lambda + 2\mu + O(\varepsilon), \quad g = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(\mu + \frac{3}{4}\gamma \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$a = \frac{1}{2}\lambda + \mu + \beta + \gamma + \delta, \quad b = \frac{1}{2}\lambda + \mu + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{4}\gamma, \quad h = \frac{1}{2}\lambda + \mu + \beta + \frac{3}{2}\gamma + \xi$$

Малые добавки у коэффициентов состоят из компонент ε_1 и ε_2 .

В линейной изотропной среде в положительном направлении оси x распространяются одна продольная волна со скоростью $c_3^0 = \sqrt{d} = \sqrt{\lambda + 2\mu}$ и две поперечные с одинаковыми скоростями (т.е. единым фронтом) $c_{1,2}^0 = \sqrt{f} = \sqrt{\mu}$. Очевидно, такая среда обладает определенной вырожденностью, которая может быть снята присутствием волновой анизотропии даже в линейном приближении. При этом волны становятся квазипродольными и квазипоперечными. Скорости $c_{1,2}^0 = \sqrt{f \mp g}$ становятся различными. К такому же эффекту ведет и учет нелинейности среды. Естественно, наиболее интересна для изучения ситуация, когда нелинейность и анизотропия присутствуют одновременно и имеют одинаковые степени своего проявления.

Квазипродольные и квазипоперечные волны изучаются приближенно с оговоренной степенью точности отдельно друг от друга, учитывая, что изменение "чужой" компоненты деформации в волне, меньше, чем основной. Для квазипродольных волн в разложении (2) достаточно ограничиться кубическими членами. Как оказалось при исследовании квазипоперечных волн Римана и ударных волн, изменение компоненты u_3 , характеризующей изменение объема, можно выразить через изменения компонент сдвига u_1 и u_2

$$u_3 - U_3 = -\frac{b}{d-f}(u_1^2 + u_2^2 - U_1^2 - U_2^2) \quad (3)$$

Тогда вместо упругого потенциала (2) можно ввести его выражение через две компоненты деформации сдвига. Для единообразия новый вид упругого потенциала будем по-прежнему обозначать буквой Φ

$$\Phi(u_1, u_2, S) = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4}\varkappa(u_1^2 + u_2^2)^2 + \rho_0 T_0(S - S_0) \quad (4)$$

Строение полученной функции (4), показывает, что это есть упругий потенциал некоторой несжимаемой упругой среды, в которой $u_3 = \text{const} = 0$. Будем называть ее эквивалентной несжимаемой средой, для которой можно провести исследование изменения в поперечных волнах двух деформаций сдвига u_1 и u_2 , а затем с помощью формулы (3) найти изменение третьей компоненты.

Выражение (4) для упругого потенциала содержит три постоянные, задающие упругие свойства среды. Коэффициент f , как было видно выше, мало отличим от модуля сдвига μ и совпадает с квадратом скорости линейных изотропных волн. Коэффициент \varkappa выражается через упругие модули разложения (1) формулой

$$\varkappa = \frac{\mu}{2} + \frac{(\mu + \beta - 3\gamma/2)^2}{2(\lambda + \mu)} - \xi$$

Этот коэффициент определяет характер нелинейности и может иметь любой знак. Знак \varkappa определяет при $g = 0$ направление выпуклости графика зависимости касательного напряжения от модуля деформации сдвига $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Когда $\varkappa > 0$, этот график обращен выпуклостью вверх, при $\varkappa < 0$ – вниз. Замечателен тот факт, что параметр \varkappa включает в себя как динамическую, так и геометрическую нелинейность среды. Из приведенного выражения для \varkappa видно, что и для динамически линейной среды Гука с двумя упругими модулями, и для пятиконстантной модели Мурнагана $\varkappa \neq 0$, и нелинейность поведения у поперечных волн проявляется из-за геометрической нелинейности. Для этих моделей $\varkappa > 0$. В диссертации рассмотрены среды с любым знаком \varkappa .

Коэффициент g стоит при анизотропном слагаемом. Можно назвать его параметром анизотропии. В диссертации рассматривается наиболее интересная ситуация, когда анизотропия и нелинейность имеют одинаковые степени проявления. Для этого следует положить, что коэффициент g имеет порядок ε^2 . Для изотропных сред это означает, что анизотропия предварительной деформации в плоскости фронта мала $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sim \varepsilon^2$. Для сред с естественной анизотропией (например, волокнистых, слоистых, ортотропных и др.), обладающих свойствами симметрии, требование малости коэффициента g означает близость направления распространения волны к направлению оси симметрии.

Среда с упругим потенциалом (4) является основной в данной работе, именно для нее в Главе 4 построены решения автомодельных задач.

Однако может оказаться, что для среды самого общего вида в разложении упругого потенциала в ряд по u_i квадратичных анизотропных слагаемых нет. Тогда следует вести разложение до следующих, кубических членов. В качестве примера такой модели рассмотрена среда со свойствами кубического кристалла, в которой направление распространения волн совпадает с направлением главной диагонали куба. В этом случае упругий потенциал эквивалентной несжимаемой среды для изучения квазипоперечных волн имеет вид

$$\Phi(u_1, u_2) = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) + g(3u_1u_2^2 - u_1^3) - \frac{\varkappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2, \quad g \sim \varepsilon \quad (5)$$

Такая среда обладает свойствами тригональной симметрии, т.е. ее свойства инвариантны относительно поворота осей x_1, x_2 на угол 120° . В выражении упругого потенциала (5) второе слагаемое является носителем как свойств анизотропии, так и нелинейности. В этом случае влияние члена с четвертыми степенями по ε сказывается только на достаточном удалении от начала координат на плоскости переменных u_1, u_2 . Поэтому в диссертации рассматривается также более простая среда с малой нелинейностью и анизотропией одного порядка и потенциалом

$$\Phi(u_1, u_2) = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) + g(3u_1u_2^2 - u_1^3) \quad (6)$$

Кроме того рассмотрена модель, не использующая степенного разложения и пригодная для изучения волн конечной (не малой) амплитуды, но с малой анизотропией. В этой модели предполагается, что среда несжимаема и $u_3 = \text{const} = 0$. Упругий потенциал состоит из слагаемого с изотропной нелинейностью достаточно общего вида $F(u_1^2 + u_2^2, S)$ и некоторой функции $p(u_1, u_2)$, представляющей волновую анизотропию с малым коэффициентом g . Для волн с наиболее интересным, нестандартным в присутствии волновой анизотропии поведением зависимость от энтропии может быть взята в виде аддитивного слагаемого.

$$\Phi = F(u_1^2 + u_2^2) + gp(u_1, u_2) + \psi(S)$$

Функция $p(u_1, u_2)$, представляющая анизотропию, для конкретности взята в том же виде, что и для выше рассмотренных моделей $p(u_1, u_2) =$

$u_2^2 - u_1^2$. Таким образом

$$\Phi = F(r) + g(u_2^2 - u_1^2) + \psi(S) \quad (7)$$

Функция $F(r)$, очевидно, является четной функцией от r , а ее производная $dF/dr = \varphi(r)$, имеющая механический смысл касательного напряжения, будет функцией нечетной. Зависимость касательного напряжения от деформации сдвига, $\varphi(r)$ взята в наиболее общем виде – в виде кривой с точкой перегиба при некотором $r = r^\sim$. Для конкретности принято, что левее точки перегиба (при $r < r^\sim$) выпуклость графика функции $\varphi(r)$ направлена вверх, а правее (при $r > r^\sim$) – вниз. Для волн малой интенсивности участки левее точки перегиба $r < r^\sim$ качественно соответствуют моделям слабонелинейной среды с $\varkappa > 0$, а участки правее точки перегиба $r > r^\sim$ – средам с $\varkappa < 0$. С переходом через точку перегиба в процессе прохождения волн конечной (не малой интенсивности) как непрерывных, так и ударных, происходит изменение характера нелинейности, что отражается на свойствах таких волн.

В диссертации рассматриваются непрерывные и ударные волны в моделях упругой среды с упругим потенциалом, заданным выражениями (4), (5), (6), (7).

В Главе 2 для одномерных дифференциальных уравнений теории упругости в лагранжевых переменных

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (8)$$

(где $v_i = \partial w_i / \partial t$ – компоненты скорости) для всех предложенных видов упругого потенциала Φ отыскивается и исследуется решение в виде волн Римана (простых волн). Найдены характеристические скорости и интегральные кривые для квазипродольных и квазипоперечных волн. Поведение квазипродольных волн аналогично газодинамическим и далее не рассматривается. Характеристические скорости двух пар квазипоперечных волн, идущих в каждую из сторон оси x , различны, и в соответствии с их величинами волны названы медленными (c_1) и быстрыми (c_2). Различие в скоростях обусловлено двумя факторами: нелинейностью и волновой анизотропией среды.

Для волн небольшой интенсивности при анизотропии общего вида на основе упругого потенциала (4) получены характеристические скорости

$$c_{1,2} = \sqrt{f} \left(1 - \frac{\varkappa}{f} (u_1^2 + u_2^2) \mp \frac{1}{2} \left| \frac{\varkappa}{f} \right| \sqrt{\left(u_2^2 - u_1^2 - \frac{g}{\varkappa} \right)^2 + 4u_1^2 u_2^2} \right)$$

Выражения показывают, что различие между характеристическими скоростями быстрой и медленной волн мало $c_2 - c_1 \sim \varepsilon^2$, а это значит, что волны при движении могут взаимодействовать и их изучение должно проводиться совместно.

Параметр анизотропии удобно использовать в виде безразмерной комбинации $G = g/\varkappa$. Коэффициент \varkappa , выступающий в роли упругого модуля нелинейной среды, имеет конечную величину и любой знак. Знаком параметра волновой анизотропии g можно распоряжаться, используя выбор нумерации осей. Изменение знака равносильно повороту на угол $\pi/2$ вокруг оси u_3 в пространстве $\{u_i\}$. Всюду далее считается $G = g/\varkappa > 0$.

Интегральные линии волн Римана на фазовой плоскости компонент деформации сдвига u_1, u_2

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2^2 - u_1^2 - G \pm \sqrt{(u_2^2 - u_1^2 - G)^2 + 4u_1^2 u_2^2}}{2u_1 u_2} \quad G = \frac{g}{\varkappa}$$

представлены двумя взаимно ортогональными семействами кривых, симметричных относительно осей u_1, u_2 . Одно из семейств представляет собой овалы, стремящиеся на бесконечности к окружностям, другое семейство – линии, похожие на гиперболы, уходящие на бесконечность вдоль лучей. Оба семейства огибают две особые точки $(0, \pm\sqrt{G})$, в которых величины характеристических скоростей совпадают. Вид интегральных кривых универсален, а принадлежность к семейству быстрых или медленных волн определяется знаком параметра нелинейности \varkappa . При $\varkappa > 0$ овалы представляют семейство быстрых волн, при $\varkappa < 0$ – медленных.

В изотропной среде одно из семейств интегральных кривых представлено лучами (плоскополяризованные волны), другое – концентрическими окружностями, вдоль которых модуль деформации сдвига не

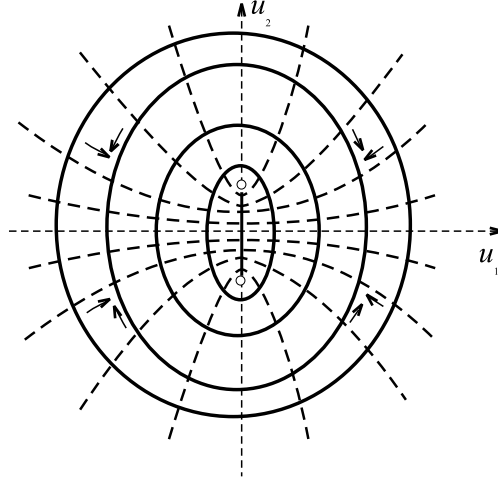


Рис. 1:

меняется. Эти вращательные волны имеют своим аналогом в магнитной гидродинамике волны Альфвена [3].

Зная характеристические скорости вдоль своих интегральных кривых, можно указать направления процесса изменения компонент u_1, u_2 в волне Римана, которые приведут к опрокидыванию профиля и образованию разрыва. На рис. 1 стрелками указаны направления, ведущие к опрокидыванию для сред с $\varkappa > 0$. При $\varkappa < 0$ указанные направления меняются на противоположные.

Аналогичное исследование проведено для среды с тригональной симметрией и упругим потенциалом (5). Характеристические скорости двух квазипоперечных волн имеют вид

$$c_{1,2}^2 = f - 2\varkappa(u_1^2 + u_2^2) \mp |\varkappa| \sqrt{(u_1^2 - u_2^2 + 2Gu_1)^2 + 4u_2^2(u_1 - G)^2}$$

а уравнения интегральных кривых

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_1^2 - u_2^2 - 2Gu_1 \pm \sqrt{(u_1^2 - u_2^2 + 2Gu_1)^2 + 4u_2^2(u_1 - G)^2}}{2u_2(u_1 - G)}$$

позволяют построить на фазовой плоскости u_1, u_2 интегральные линии двух взаимно ортогональных семейств, которые, как и прежде, являются универсальными, а принадлежность к быстрому и медленному семейству определяется знаком \varkappa . Кривые огибают четыре особые точки, в которых характеристические скорости совпадают. На бесконечности (что означает переход к изотропной среде) оба семейства превращаются в окружности и лучи.

Одна из особых точек находится в начале координат. Интегральные кривые в ее окрестности представляют волны Римана для среды с упрощенным упругим потенциалом (6). Они состоят из двух семейств линий, похожих на гиперболы с асимптотами под углом 120° . Жирными

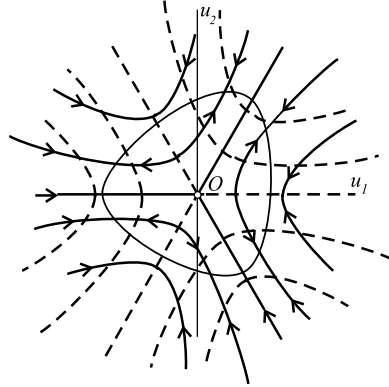


Рис. 2:

сплошными линиями изображены кривые быстрого семейства, штрихованными – медленного. Тонкая линия, огибающая начало координат, – линия перемены знаков у производных от $c_{1,2}$ вдоль интегральных кривых. Стрелками указаны направления, ведущие к опрокидыванию.

Волны Римана конечной амплитуды рассматриваются в среде с упругим потенциалом (7). Характеристические скорости в изотропной среде имеют вид φ' и φ/r . На графике зависимости $\varphi(r)$ имеется точка $r = r_*$, в которой направление касательной к графику совпадает с направлением секущей, проведенной в эту точку из начала координат. В этой точке $\varphi' = \varphi/r$, т.е. характеристические скорости совпадают. Левее точки $r = r_*$ характеристические скорости медленных и быстрых волн даются выражениями $c_1 = \sqrt{\varphi'}$, $c_2 = \sqrt{\varphi/r}$ соответственно, правее особой точки r_* – наоборот, $c_1 = \sqrt{\varphi/r}$, $c_2 = \sqrt{\varphi'}$. Добавки к характеристическим скоростям с малым коэффициентом g , вызванные анизотропией среды, имеются в полном тексте диссертации, но здесь не приводятся, так как носят довольно сложный характер (так же как и уравнения интегральных кривых).

Интегральные кривые на плоскости u_1, u_2 симметричны относительно осей координат и имеют три пары особых точек, в которых $c_1 = c_2$. Вблизи начала координат линии семейства быстрых волн имеют вид овалов, медленных – похожи на гиперболы и оба семейства огибают

особые точки $(0, \pm\sqrt{-2g/\varphi_0''})$. В узкой области $\sim g$, прилежащей к критической окружности $r = r_*$, они меняют свое направление на угол $\pi/2$ и на бесконечности интегральные кривые медленных волн приближаются к окружностям, быстрых – к лучам (рис. 3). Направления

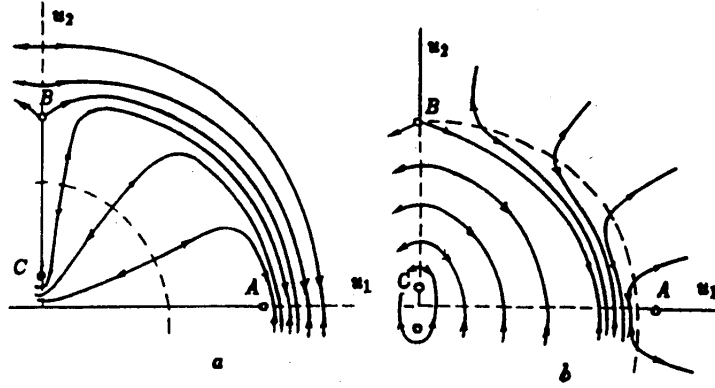


Рис. 3:

изменения u_i , ведущие к опрокидыванию, определяются производными от c_i вдоль своих интегральных кривых и меняются в точках экстремума c_i . Для медленных волн линия экстремумов близка к окружности $r = r^*$, для быстрых волн это овал, близкий к критической окружности $r = r_*$ и целиком лежащий внутри нее, и отрезки осей координат от начала до указанного овала. На рис. 3 линии экстремумов изображены пунктиром, направления, ведущие к опрокидыванию, – стрелками.

Опрокидывание волн Римана ведет к образованию разрывов, которые исследуются далее.

В **Главе 3** рассмотрены ударные волны во всех предложенных в Гл.1 моделях сред. Предполагается, что на фронте скачка нет фазовых переходов и отсутствуют источники массы, импульса и энергии, а прохождение ударной волны сопровождается диссипативными процессами, ведущему к росту энтропии. Исследование базируется на соотношениях на разрыве, полученных из интегральных законов сохранения

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \right] &= \rho_0 W^2 [u_k], & [v_k] &= -W [u_k] \\ [\Phi] &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \right] [u_k] + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \right)^+ [u_k], & [S] &\geq 0, & k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (9)$$

здесь W – скорость фронта разрыва. Поведение квазипродольных удар-

ных волн качественно подобно газодинамическим. В частности, изменение энтропии в квазипродольных упругих ударных волнах имеет порядок ε^3 , как и в газодинамических. Далее в диссертации рассматриваются только квазипоперечные ударные волны.

Так же как и для волн Римана, при изучении разрывных решений в слабонелинейных средах удается ввести в рассмотрение эквивалентную несжимаемую среду с упругим потенциалом (4) в случае анизотропии общего вида и потенциалом (6) для среды с тригональной симметрией. Все исследование ведется на фазовой плоскости двух переменных u_1, u_2 компонент деформаций сдвига. Можно сказать, что это есть проекция параметров ударных волн на плоскость $u_1 u_2$. После решения этой задачи изменение продольной компоненты деформаций в ударной волне определяется по формуле (3). Для волн конечной амплитуды в качестве модели принята несжимаемая среда с упругим потенциалом (7), где все рассмотрение также ведется в зависимости от двух переменных u_1, u_2 .

Для заданного начального состояния (U_1, U_2) перед фронтом ударной волны найдено множество состояний за фронтом, в которые можно попасть скачком из начального с соблюдением законов сохранения (9). Это множество называется ударной адиабатой и на плоскости $u_1 u_2$ имеет вид кривой, проходящей через точку $A(U_1, U_2)$, представляющую состояние перед фронтом. В точке A кривая имеет самопересечение под прямым углом, где она касается интегральных кривых двух семейств волн Римана.

Для слабонелинейной среды с анизотропией общего типа и упругим потенциалом (4) уравнение ударной адиабаты имеет вид

$$(u_1^2 + u_2^2 - R^2)(U_1 u_2 - U_2 u_1) + 2G(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) = 0, \quad (10)$$

где $R^2 = U_1^2 + U_2^2$

Возможные варианты вида этой кривой изображены на рис. 4.

Вычислено изменение энтропии при прохождении ударной волны

$$T_0(S - S_0) = -\varkappa \left((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2 \right) (u_1^2 + u_2^2 - R^2)$$

Оказалось, что для квазипоперечных волн оно имеет порядок ε^4 (как и в изотропной среде [1]). Энтропия постоянна $S = S_0 = S(A)$ на

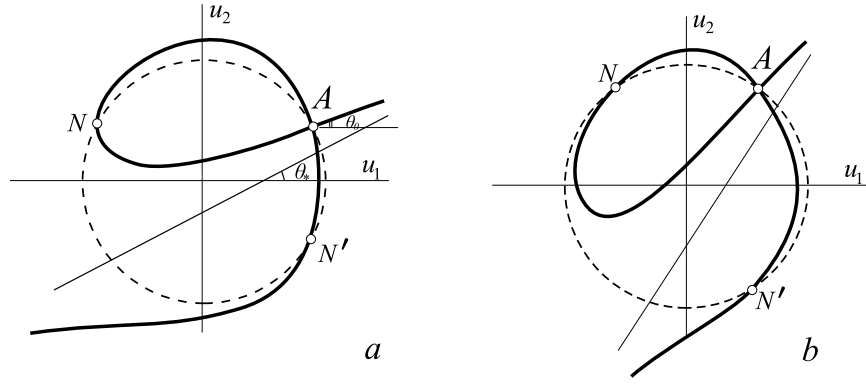


Рис. 4:

окружности $r = R$, проходящей через начальную точку (энтропийная окружность). На рис. 4 она изображена штриховой линией. Для сред с $\varkappa > 0$ термодинамическому требованию неубывания энтропии на разрыве удовлетворяют состояния на тех частях ударной адиабаты, которые лежат внутри энтропийной окружности, а для сред с $\varkappa < 0$ — вне нее.

В изотропной среде ударная адиабата имеет вид окружности и секущей, проходящей через начало координат и точку A . На окружности не меняется модуль деформации сдвига $u_1^2 + u_2^2 = R^2 = \text{const}$ и нет изменения энтропии $[S] = 0$. Это вращательный разрыв, совпадающий с вращательной волной Римана, и аналог вращательного разрыва в магнитной гидродинамике [4].

Кроме термодинамического требования $[S] > 0$, ударные волны должны удовлетворять условиям эволюционности, т.е. корректности выставления граничных условий в задаче о малых линейных возмущениях фронта разрыва при исследовании необходимых условий его устойчивости. Для теории упругости условия эволюционности имеют вид двух систем неравенств, которые позволяют разделить эволюционные ударные волны на медленные (a) и быстрые (b)

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & c_1^- \leq W \leq c_2^-, \quad 0 \leq W \leq c_1^+ \\
 (b) \quad & c_2^- \leq W \leq c_3^-, \quad c_1^+ \leq W \leq c_2^+
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Здесь c_i^+ , c_i^- — характеристические скорости по состоянию непосредственно за скачком ($c_{1,2}^+$) и перед ним ($c_{1,2}^-$). Для выполнения этих неравенств была найдена скорость ударного перехода W во все состояния

на ударной адиабате в виде функции некоторого параметра, монотонно меняющегося вдоль кривой (10). На концах неравенств эволюционности (11) скорость ударной волны W совпадает с одной из характеристических скоростей перед или за фронтом. По аналогии с теорией детонации такие ударные волны названы волнами Жуге. На ударной адиабате (10) найдено положение точек Жуге и жирными сплошными линиями на рис. 5 выделены участки эволюционных ударных волн для сред с $\varkappa > 0$ (a) и для сред с $\varkappa < 0$ (b). Положение эволюционных участ-

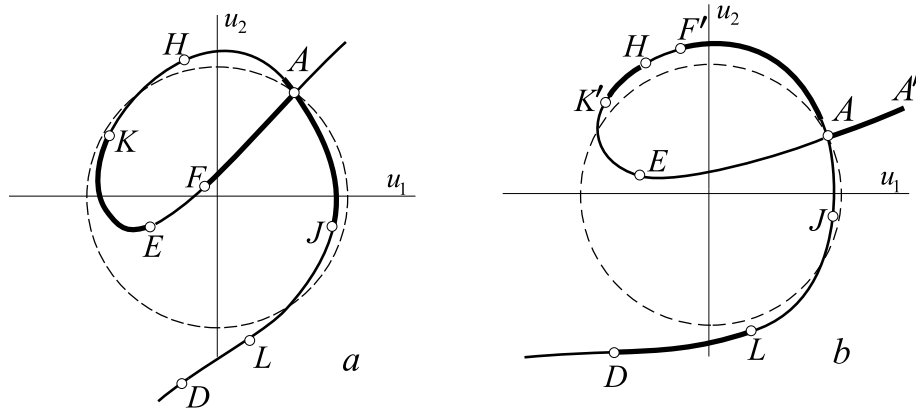


Рис. 5:

ков зависит достаточно сложным образом, описанным в полном тексте диссертации, от соотношения между величинами U_1, U_2 начальной деформации перед фронтом и параметром анизотропии G . Оказалось, что они всегда расположены внутри области, где выполнено термодинамическое требование, т.е. требование эволюционности более жесткое. Особенности использования условий эволюционности в средах с исчезающей анизотропией рассмотрены в [5].

Два участка эволюционных ударных волн всегда примыкают к начальной точке, как и положено по общей теории гиперболических систем [2]. Изменение величин в этих ударных волнах при уменьшении их интенсивности мало отличаются от изменения величин в волнах Римана того же типа. На ударной адиабате имеются еще участки EK для среды с $\varkappa > 0$ и KH и LD для среды с $\varkappa < 0$, соответствующие эволюционным ударным волнам, интенсивность которых не может быть сделана как угодно малой. Они отделены от начальной точки неэволюционными участками конечной величины. Эти волны в работе назва-

ны ударными волнами второго типа. Подобная ситуация встречалась раньше в газовой динамике и теории продольных упругих волн [6–8], но там она возникала при специального вида уравнении состояния. В классической теории упругости ударные волны такого типа обнаружены впервые. Ответственной за их появление является малая волновая анизотропия.

Для среды с тригональной симметрией и упругим потенциалом (6) ударная адиабата имеет вид, представленный на рис. 6. Росту энтро-

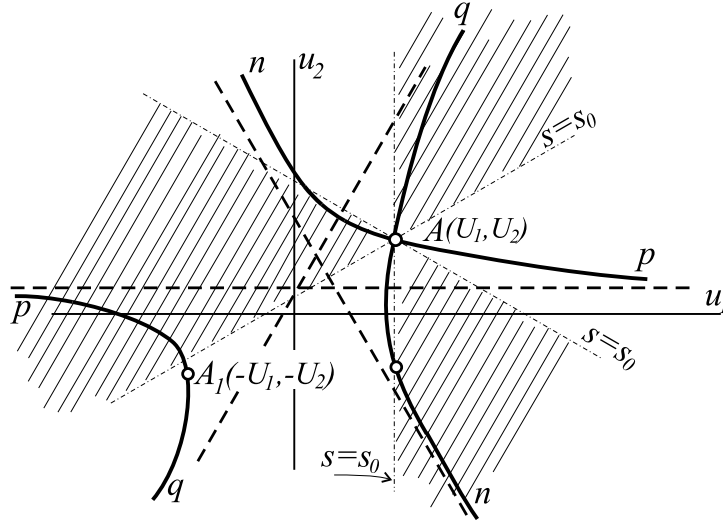


Рис. 6:

пии соответствуют заштрихованные области. Жирной линией выделены эволюционные участки, два из которых прилежат к начальной точке, и имеются еще участки с ударными волнами второго типа.

Для ударных волн конечной амплитуды в среде с упругим потенциалом (7) уравнение ударной адиабаты имеет вид

$$\left(\frac{\varphi}{r} - \frac{\varphi_0}{R} \right) (U_1 u_2 - U_2 u_1) = g(u_1 - U_1)(u_2 - U_2)$$

Вид этой кривой и расположение эволюционных участков на ней зависят от того, на каком участке графика $\varphi(r)$ находится начальная точка φ_0 , представляющая состояние перед фронтом. На рис. 7 (a) начальная точка лежит левее точки перегиба ($R < r^{\sim}$), на рис. 7 (b) – правее ($R > r^{\sim}$). Как и прежде эволюционные участки выделены жирной линией и имеются ударные волны второго типа. Заметим, что для

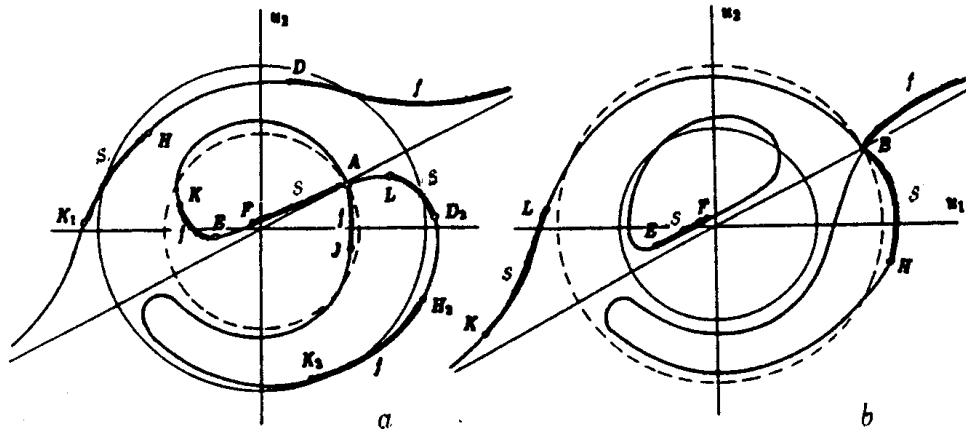


Рис. 7:

волн конечной интенсивности встречаются ситуации, когда на некоторых частях ударной адиабаты требование неубывания энтропии может оказаться более сильным, чем эволюционность. Волны конечной интенсивности в сжимаемых упругих средах с малой анизотропией рассмотрены в [9].

Неединственность решений автомодельных задач, вызванная использованием ударных волн второго типа, в газовой динамике была устранена [8] с помощью исследования структуры ударных волн. Поэтому и для упругих ударных волн проведено исследование их структуры. Для этого в малой области, содержащей фронт скачка, разрыв заменяется непрерывной функцией с большими производными по x . В этой области гиперболическая система теории упругости (8) была дополнена членами с производными более высокого порядка [10]. Конечно, результат решения задачи о структуре зависит от выбора добавленных членов, т.е. от вида усложненной модели. Так как на фронте ударной волны предполагается рост энтропии, ведущий к необратимости, то усложненная модель должна содержать механизм диссипации. В диссертации в качестве такого механизма выбрана вязкость, и структура изучается на базе модели вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта, когда в уравнения импульсов добавляются вторые частные производных по пространству с постоянным скалярным коэффициентом вязкости ν

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (12)$$

Стационарной структурой называют решение этой системы в виде бегущей волны, скорость которой совпадает со скоростью исследуемого разрыва

$$u_\alpha = u_\alpha(\xi), \quad v_\alpha = v_\alpha(\xi), \quad \xi = Wt - x$$

Это переводит систему (12) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой условия на $\pm\infty$ представлены значениями функций u_i впереди и сзади фронта скачка. Для системы уравнений эти состояния служат стационарными точками. Решение в виде стационарной структуры существует, если у системы найдутся такие интегральные линии, которые выходят из стационарной точки, представляющей состояние перед фронтом, и с ростом времени входят в другую стационарную точку, представляющую состояние за фронтом. Для слабонелинейных сред с анизотропией общего типа (4) и с тригональной симметрией (6) такому испытанию были подвергнуты все ударные волны, с любой скоростью W . Оказалось, что для всех эволюционных ударных волн стационарная структура существует, и из задачи о структуре не возникает никаких дополнительных соотношений на разрыве, которые могли бы изменить картину эволюционности. Таким образом, исследование структуры подтвердило, что отобранные выше эволюционные ударные волны имеют право на реализацию.

В **Главе 4** для слабонелинейной среды с упругим потенциалом (4) и анизотропией общего вида дано решение двух классических автомобильных задач: о внезапном изменении напряжений на границе предварительно деформированного упругого полупространства (аналог задачи "о поршне" в газовой динамике) и задачи о распаде произвольного начального разрыва. Решения задач строятся из последовательностей плоских волн, идущих от границы в упругое полупространство в порядке убывания скоростей. Последовательности состоят из автомобильных (центрированных) волн Римана и эволюционных ударных волн, между которыми имеются области однородных состояний.

В задаче о поршне полупространство $x \geq 0$ при $t < 0$ обладает однородной деформацией $U_i = \text{const}$. В момент $t = 0$ на границе $x = 0$ создается и далее остается постоянной при $t \geq 0$ новая деформация с компонентами $u_i^* = \text{const}$. От границы в область $x > 0$ первой идет ква-

зипродольная волна, которая уходит далеко вперед, так как ее скорость на конечную величину отличается от скоростей двух квазипоперечных волн. Состояние за квазипродольной волной легко определимо и далее служит фоном, от которого отсчитываются компоненты U_1, U_2 в задаче о квазипоперечных волнах. Для фиксированного начального состояния U_1, U_2 строится решение задачи при любых граничных состояниях u_i^* , которые можно представить фазовой плоскостью u_1^*, u_2^* . Начальное состояние на этой плоскости представлено точкой $A(U_1, U_2)$.

Когда состояние u_i^* на границе полупространства находится на интегральной кривой неопрокидывающейся волны Римана, проходящей через точку A , или на эволюционном участке ударной адиабаты с начальной точкой A , то решение в области $x > 0$ состоит соответственно из одной волны Римана или одной ударной волны. Для всех прочих состояний u_i^* строятся последовательности волн. Вся плоскость u_1^*, u_2^* разбивается на области, точкам каждой из которых соответствует своя последовательность волн (рис. 8). Буквами R_1 и R_2 обозначены медлен-

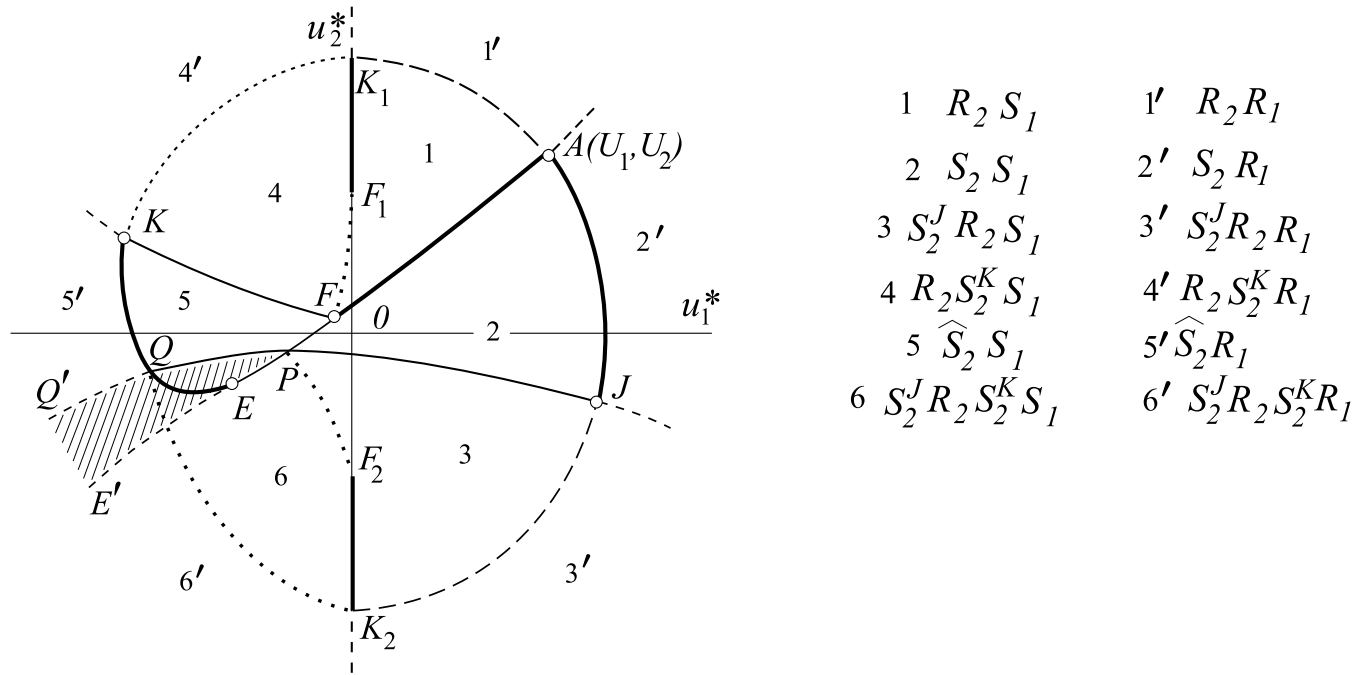


Рис. 8:

ные и быстрые волны Римана, буквами S_1 и S_2 – медленная и быстрая ударные волны, \hat{S}_2 – быстрые ударные волны второго типа, S_2^J, S_2^K – ударные волны Жуге. Последовательности могут содержать от двух

до четырех различных волн. Особая роль в построении решения принадлежит ударным волнам Жуге. Их скорости совпадают с характеристическими скоростями перед или за фронтом, поэтому они могут примыкать спереди или сзади к волнам Римана того же типа, причем непосредственно, без промежутка с однородным состоянием.

При построении решения важным является не только составление последовательностей волн, но и определение границ на плоскости u_1^*, u_2^* между областями с разными решениями. Установлено, что все области точно примыкают одна к другой, не оставляя мест с отсутствием решения. Обнаружено, что имеются области, которые перекрываются с соседними (5-5' и 6-6'). На рис. 8 зона перекрытия заштрихована. Для значений u_i^* из этой области решение автомодельной задачи неединственно (двузначно).

Аналогичное построение и разбиение плоскости u_1^*, u_2^* на области с разной формой решения проведено для среды с $\kappa < 0$. В этом случае тоже обнаружена область неоднозначности.

Конструкция решения может меняться в зависимости от соотношения между величинами начальной деформации U_1, U_2 и параметра анизотропии G . В средах с $\kappa > 0$ при определенных соотношениях (когда $G \gg R^2$) область неединственности пропадает. В средах с $\kappa < 0$ она присутствует всегда.

Существование области неоднозначности автомодельного решения является совершенно новым фактом в классической теории упругости. Ее появление обусловлено наличием у среды малой волновой анизотропии. При этом анизотропия может быть как угодно малой. С ее уменьшением форма всех границ областей с разными формами решения приближается к окружностям и лучам, но область неединственности не уменьшается. Вершина сектора неединственности (и при $\kappa > 0$, и при $\kappa < 0$) приближается к началу координат, а угол раствора сектора остается конечным. И только при полном отсутствии анизотропии оба решения в указанном секторе совпадают между собой и двузначность исчезает.

В диссертации не стоял вопрос о выборе одного из двух решений при выходе на автомодельный режим. Для этого требуется решение

нестационарной задачи. Имеются работы [11, 12], в которых численным образом решалась нестационарная задача с выходом при $t \rightarrow \infty$ на автомодельный режим, принадлежащий области неоднозначности. Исследование показало, что в зависимости от задания начальных условий возможен предельный выход и на одно и на другое автомодельное решение. Но это исследование велось с выходом за пределы модели теории упругости, с использованием вязко-упругой среды, где вязкость затем устремлена к нулю. В рамках классической теории упругости, без привлечения дополнительного усложнения модели провести отбор автомодельного решения нельзя и обнаруженная неоднозначность является неустранимой.

Вторая классическая автомодельная задача – о распаде произвольного начального разрыва – состоит в том, что имеются два упругих полупространства с различными начальными однородными состояниями и, может быть, даже различными упругими модулями. В начальный момент времени они приводятся в соприкосновение, и от плоскости контакта в оба полупространства идут системы плоских волн, которые и подлежат определению. Сначала в более грубом (линейном) приближении решается задача в малой области контактного разрыва и находятся с достаточной точностью значения граничных параметров по обе стороны от него. После этого задача сводится к двум задачам о поршне с последовательностями волн, идущих от плоскости контакта в оба полупространства по разные стороны от границы. Решение обладает теми же особенностями в виде возможности появления областей неоднозначности. Это свойство автомодельных решений необходимо учитывать при построении решений задач, содержащих взаимодействующие ударные волны, а также при создании алгоритмов вычислительных схем, базирующихся на принципе распада произвольного разрыва.

В диссертации предлагается некоторый способ, который позволяет указать достаточные условия появления неединственности при решении автомодельных задач с заданным набором начально-граничных параметров, не проводя достаточного сложного полного исследования задачи, а опираясь на вид ударной адиабаты начального состояния и особенности расположения эволюционных участков на ней.

В **Заключении** кратко изложены результаты и сформулированы **Выводы**

1. Построены упругие потенциалы для моделей сред, описывающих распространение одномерных плоских волн в разных ситуациях и при разных нелинейных и анизотропных свойствах среды. Отмечено, что для нелинейных волн небольшой интенсивности нелинейность у поперечных упругих волн проявляется в более высоком приближении, чем у продольных и газодинамических.

2. Для гиперболической системы квазилинейных одномерных уравнений теории упругости получены решения в виде волн Римана. Найдены характеристические скорости и отмечена их зависимость от нелинейности и анизотропии, в том числе вызванной предварительной деформацией. Построены интегральные кривые быстрых и медленных квазипоперечных волн на фазовой плоскости деформаций сдвига. Они представлены двумя семействами взаимно ортогональных линий с особыми точками, положение которых определяется анизотропией среды.

3. Для движений с разрывами найдено множество состояний, в которые можно совершить переход скачком из фиксированного начального состояния с соблюдением законов сохранения (ударная адиабата). Для квазипоперечных ударных волн построена и исследована проекция ударной адиабаты на фазовую плоскость деформаций сдвига.

На ударной адиабате выделены области, отвечающие соблюдению второго закона термодинамики – принципу неубывания энтропии на разрыве, и состояния, которые одновременно с термодинамическим требованием удовлетворяют условиям эволюционности (необходимым условиям устойчивости разрыва).

Показано, что для квазипродольных ударных волн требование эволюционности и термодинамическое совпадают. Для квазипоперечных ударных волн волн небольшой интенсивности условия эволюционности более строгие и целиком включают в себя термодинамическое.

4. Введено понятие ударных волн Жуге (по аналогии с газовой динамикой), у которых скорость разрыва совпадает с характеристической скоростью перед или за фронтом разрыва. Эти состояния служат границами эволюционных участков на ударной адиабате. Соотношения

эволюционности делят все квазипоперечные ударные волны на быстрые и медленные.

На ударной адиабате квазипоперечных волн указано количество и расположение участков, для которых выполнены условия эволюционности (эволюционных участков ударной адиабаты). В соответствии с теорией гиперболических систем Лакса, к начальному состоянию всегда примыкают эволюционные участки быстрой и медленной ударных волн. Изменения величин в этих волнах могут быть сделаны бесконечно малыми, и в пределе они совпадают с изменениями в волнах Римана. Поэтому ударная адиабата в фазовом пространстве деформаций сдвига касается в начальной точке интегральных кривых волн Римана, имея в этой точке самопересечение.

5. Обнаружено, что для всех рассмотренных моделей имеются еще эволюционные участки квазипоперечных ударных волн, не примыкающие к начальной точке. Скачки в такие состояния имеют конечную величину и не могут быть сделаны как угодно малыми. В классической теории упругости ударные волны такого типа обнаружены впервые. Показано, что причиной указанного свойства квазипоперечных ударных волн является наличие у начального состояния анизотропии в плоскостях, параллельных фронту.

6. Показано, что имеются квазипоперечные неэволюционные ударные волны, которые можно рассматривать как две слившиеся эволюционные быструю и медленную, идущие с одинаковыми скоростями.

7. Для волн небольшой интенсивности (как в модели с анизотропией общего вида, так и для сред с тригональной симметрией) исследована задача о структуре всех квазипоперечных разрывов. На основе модели вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта показано, что все эволюционные разрывы обладают стационарной структурой.

8. Построено решение автомодельной задачи о действии внезапного изменения нагрузки на границе однородного упругого предварительно деформированного полупространства. Решение состоит из последовательности автомодельных волн Римана и эволюционных ударных волн, следующих одна за другой в порядке убывания скоростей. При заданном фиксированном начальном состоянии фазовая плоскость заданных

на границе компонент сдвига разбита на области, для каждой из которых указана конструкция решения и положение границы области.

9. На плоскости граничных деформаций обнаружены области, для которых решение автомодельной задачи оказалось неединственным. Показано, что появление областей неединственности связано с наличием у начального состояния среды волновой анизотропии. Области неединственности не исчезают и сохраняют конечные размеры, когда анизотропия становится как угодно малой, но отличной от нуля.

Неединственность решений автомодельных задач в нелинейной теории упругости обнаружена впервые и ставит для дальнейшего вопрос о выборе реализующегося решения. В работе этот вопрос не рассматривается. Разрешить его невозможно без выхода за пределы модели упругого тела и усложнения системы гиперболических уравнений дополнительными членами. В рамках теории упругости обнаруженная неоднозначность неустранима.

10. Для волн небольшой интенсивности построено решение классической задачи о распаде произвольного начального разрыва. Решение состоит из последовательностей простых и эволюционных ударных волн, идущих от границы раздела в каждое полупространство. В решении также может появляться неединственность для некоторых областей условий на контакте.

11. Предложен некоторый достаточный признак, по которому можно предвидеть возможность появления неединственности, не проводя полного построения решения автомодельной задачи, а по виду диаграммы эволюционности. Указанное свойство может быть обобщено на другие гиперболические системы, полученные из законов сохранения.

Я выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю и постоянному соавтору Андрею Геннадьевичу Куликовскому за доброе внимание и помощь в работе.

Список литературы

- [1] Bland D.R. Nonlinear Dynamic Elasticity. Toronto etc.: Waltham, 1969.
= Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
- [2] Lax, P.D. Hyperbolic systems of conservation laws. II // *Communs. Pure Appl. Math.* 1957. V. 10. 4. P. 537–566.
- [3] Куликовский А.Г. О волнах Римана в магнитной гидродинамике // *ДАН СССР.* 1958. т.121, № 6.
- [4] Куликовский А.Г. и Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз. 1962. 246 с.
- [5] Куликовский А.Г. Особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде при малой анизотропии // *Тр. МИАН СССР.* 1989. Т. 186. С. 132–139.
- [6] Галин Г.Я. О распространении возмущений в средах с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций и температуры // *Докл. АН СССР.* 1958. Т.120. N.4. С.730-733.
- [7] Галин Г.Я. Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния // *Докл. АН СССР.* 1958. Т.119. N.6. С.1106-1109.
- [8] Галин Г.Я. К теории ударных волн // *ДАН СССР.* 1959. Т. 127, № 1. С.55-58.
- [9] Куликовский А.Г. Влияние малой анизотропии на свойства ударных волн в сжимаемой упругой среде // *ПММ.* 1995, Т.59. вып.5, С.793-798.
- [10] Куликовский А.Г. Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // *Тр. МИАН СССР.* 1988. Т. 182. С. 261–291.
- [11] Чугайнова А.П. О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // *ПММ.*1988. Т. 52, вып. 4. С. 692-697.

- [12] Чугайнова А.П. О выходе нелинейных волн на автомодельный режим в задаче о действии внезапного изменения нагрузки на границу упругого полупространства // Изв. АН СССР, МТТ.1990. Т. 25, № 3. С. 187-189.

Основные публикации по теме диссертации

1. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах // ПММ. 1980. Т. 44, вып. 3, С. 523–534.
2. Свешникова Е.И. Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642–646.
3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. т.46.вып.5. с.831-840.
4. Свешникова Е.И. Квазипоперечные ударные волны в упругой среде при специальных видах начальной деформации // ПММ. 1983. Т. 47, вып. 4, С. 673–678.
5. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. О некоторых свойствах ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн // ПММ. 1984. т.48. вып.5. с.793-798.
6. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. т.49. вып.2. с.284-291.
7. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства Сб.: Вопросы нелинейной механики сплошной среды Таллинн: Валгус.1985. с.133-145.
8. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. О структуре квазипоперечных упругих ударных волн // ПММ. 1987. т.51. вып.6. с.926-932.

9. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // ПММ. 1988. т.52. вып.1. с.110-115.
10. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. О распаде произвольного начального разрыва в упругой среде // ПММ. 1988. т.52. вып.6. с.1007-1012.
11. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Волны Римана в упругой среде при малой анизотропии // ПММ. 1993. т.57. вып.3. с.90-101.
12. Свешникова Е.И. Ударные волны в слабоанизотропном упругом несжимаемом материале// ПММ. 1994. т.58. вып.3. с.521-530
13. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. О существовании и единственности автомодельных решений при наличии точек Жуге на ударной адиабате // ПММ. 1996. т.60. вып.1. с.66-71.
14. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Ударные волны в упругих средах при исчезающей малой анизотропии Сб. Материалы Междунар. конфер "Чебышевские чтения". М.: МГУ 1996. т.2 с.405-408.
15. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. Лицей, 1998. 412 с.
16. Свешникова Е.И. Особенности эволюции упругих ударных волн при вырожденных начальных условиях // Труды МИАН. 1998. т.223. с.270-275.
17. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Признак несуществования или неединственности решений автомодельных задач // ПММ. 2001. т.65.вып.6. с.971- 982.
18. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., А.П.Чугайнова О неединственности решений нелинейной теории упругости // Труды математического центра им.Лобачевского. Казанское математическое общ-во. 2002, т.16, с.6-25.
19. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Влияние изменения энтропии на форму ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн // ПММ. 2003, т. 67. вып.1, с.77-87. А.Г.Куликовским

20. Авдеева А.Д., Свешникова Е.И. Квазипоперечные ударные волны в упругой среде с усложненным упругим потенциалом // Известия РАН, Механика твердого тела, 2004, № 6, с.102 - 113.
21. Свешникова Е.И. Волны Римана в упругой среде с малой кубической анизотропией // ПММ. 2005, т.69, вып.1, с.75 - 83.
22. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., А.П.Чугайнова Некоторые проблемы нелинейной динамической теории упругости // Труды МИАН, 2005, т.251, С.173-199.
23. A.G.Kulikovskii, A.P.Chugainova, E.I.Sveshnikova Nonuniqueness of solution to nonlinear of the elasticity theory // Journal of Engineering Mathematics. Springer. 2006. Vol.55. No. 1-4. P.97-110.
24. Свешникова Е.И. Ударные волны в упругой среде с кубической анизотропией // ПММ. 2006. Т.70. Вып.4. С.673-683.