АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2010, том 56, № 6, с. 767–772

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.29; 534.138

РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ ПРИ РАССЕЯНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛЯ НА ВКЛЮЧЕНИИ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

© 2010 г. Б. П. Шарфарец

Институт аналитического приборостроения РАН

190103 Санкт-Петербург, Рижский просп. 26

E-mail: sharb@mail.ru

Поступила в редакцию 23.12.09 г.

Рассчитано радиационное давление в идеальной жидкости на включения сложной формы в первичном поле произвольной конфигурации. Решение ищется в рамках задачи рассеяния в линейном приближении. Приводятся выражения для компонент радиационного давления в произвольном первичном поле, в которых фигурирует результирующая амплитуда рассеяния. Полученные выражения упрощаются для ряда частных случаев. Полученные результаты весьма полезны для включений с непростыми амплитудами рассеяния, а приведенные выражения значительно расширяют диапазон полей и рассеивателей, для которых возможен расчет радиационного давления. Приводится пример расчета.

Вопросам акустического расслоения различных частиц в ультразвуковом поле по-прежнему уделяется большое внимание. Актуальным в этом круге проблем является расчет радиационного давления на сложные конгломераты частиц, связанных между собой вследствие, например процессов агглютинации. В ставших уже классическими работах [1–3] приводятся выражения для радиационного давления в случае твердой [1] и жидкой [2] сферической частицы в поле бегущей и стоячей плоской волны. В работе [3] даны выражения для радиационного давления на малой сферической частице, описываемой только монопольным и дипольным моментами, находящейся в произвольном падающем поле. Ранее в работе [4] рассматривались выражения для сил радиационного давления на сложные конгломераты частиц с произвольной амплитудой рассеяния в поле плоской бегущей и стоячей волн, распространяющихся вдоль оси OZ. В этом случае силы оказались зависимыми только от зональных гармоник в разложении амплитуды рассеяния препятствия по сферическим функциям. В работах [5, 6] уже было рассмотрено сложное внешнее поле, однако при расчетах рассматривались случаи, не выходящие за рамки влияния на радиационные силы только зональных гармоник в разложении результирующей амплитуды рассеяния включения. Вследствие этого не возникала необходимость рассмотрения общих выражений, связывающих силы радиационного давления со всеми коэффициентами в разложении амплитуды рассеяния включения по сферическим функциям. Поэтому специально для этого случая в работе [4] был введен эквивалентный точечный мультипольный источник, создающий поле, угловое распределение которого в волновой зоне совпадало с суммой только зональных гармоник в разложении по сферическим функциям результирующей амплитуды рассеяния реального включения. В работе [7] было получено выражение для мультипольного источника, создающего поле, угловое распределение которого в волновой зоне совпадает с амплитудой рассеяния реального включения, т.е. включает все гармоники в разложении амплитуды рассеяния по сферическим функциям. На основе результатов работ [4, 7] в настоящей работе получены выражения для составляющих силы радиационного давления для общего случая, когда нельзя обойтись только зональными коэффициентами в разложении амплитуды рассеяния по сферическим функциям.

Вначале проанализируем, при каких условиях необходимо учитывать все гармоники в разложении амплитуды рассеяния по сферическим функциям. Для этого воспроизведем выражения для радиационного давления в идеальной жидкости, представленные через амплитуду рассеяния включения [4].

Сила радиационного давления $\overline{\mathbf{F}}$ в случае произвольного падающего поля в квадратичном приближении может быть представлена в виде суммы двух отличных от нуля слагаемых: перекрестного слагаемого с входящими в него первичным и рассеянным полями, а также слагаемого, квадратичного по рассеянному полю. Рассмотрим вклад обоих слагаемых. Перекрестное слагаемое (индекс is) определяется выражением

$$\overline{F}_i^{(\text{is})} = -\frac{\rho}{4}\int\limits_V \left(v_{\text{inc}_i}(\mathbf{x})\left(\Delta + k^2\right)\psi_s^*(\mathbf{x}) + \text{к.с.}\right)dV = \\ = \frac{-1}{4\rho\omega^2}\int\limits_V \left(\frac{\partial p_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\left(\Delta + k^2\right)p_s^*(\mathbf{x}) + \text{к.с.}\right)dV, \tag{1}$$

а слагаемое, квадратичное по рассеянному полю (индекс ss), выражением

$$\overline{F}_i^{(ss)} = -\frac{1}{2}\rho\int\limits_S |v_s|^2 \cos\theta_i dS = \\ = -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho c^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\theta,\varphi)|^2 \cos\theta_i \sin\theta d\varphi d\theta, \tag{2}$$
$$i = \overline{1,3}.$$

Здесь $\mathbf{x} = (x,y,z) = (R,\theta,\varphi)$; v_i, ψ — компоненты колебательной скорости и ее потенциал; нижние индексы inc и s говорят о принадлежности величины соответственно к падающей или рассеянной волне; $\cos\theta_i$ — направляющий косинус радиус-вектора точки на сфере относительно i-й оси координат $\cos\theta_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $\cos\theta_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta_3 = \cos\theta$ ($i = 1$ — координата x, $i = 2$ — координата y, $i = 3$ — координата z); $f(\theta,\varphi)$ — результирующая амплитуда рассеяния на включении; ρ, c — плотность и скорость звука в жидкости; θ и φ — углы в сферической системе координат.

Рассмотрим, как и в [7], разложение

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\Big[A_l^0 P_l(\cos\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{l}\left[A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)\Big], \tag{3}$$

с коэффициентами

$$\begin{Bmatrix} A_l^m \\ B_l^m \end{Bmatrix} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0m})}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\times \\ \times\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\sin\theta d\theta d\varphi, \tag{4}$$

где P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра.

Поле давления $p_s(\mathbf{x})$, рассеянное на включении, имеет асимптотику

$$p_s(R,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R} + O\left(\frac{1}{kR^2}\right).$$

Вне рассеивателя совершенно идентичное поле может быть создано системой мультиполей, сосредоточенных в одной точке внутри рассеивателя. Получим выражение для мультипольного источника $\delta_{f(\theta,\varphi)}$, создающего поле с амплитудой рассеяния $f(\theta,\varphi)$ из (3). Для этого кратко приведем рассуждения из [7].

Если в исходном равенстве

$$\left(\Delta + k^2\right)\frac{e^{ikR}}{4\pi R} = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

дифференцировать с помощью оператора $D^{|\alpha|} = \left(D_x^{\alpha_1}, D_y^{\alpha_2}, D_z^{\alpha_3}\right)$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, α_i — натуральные числа; $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $D_z = \dfrac{\partial}{\partial z}$) слева только экспоненту, а справа полностью, то видно, что мультиполь

$$-4\pi\frac{1}{(ik)^{|\alpha|}}\delta^{(\alpha_1)}(x)\delta^{(\alpha_2)}(y)\delta^{(\alpha_3)}(z)$$

создает поле с амплитудой рассеяния

$$f^{|\alpha|}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi)^{\alpha_1}(\sin\theta\sin\varphi)^{\alpha_2}\cos^{\alpha_3}\theta.$$

Искомое выражение для мультипольного источника $\delta_{f(\theta,\varphi)}$, создающего поле с амплитудой рассеяния $f(\theta,\varphi)$ из (3), можно получить определенным воздействием на дельта-функцию $-\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ операторами D_x, D_y, D_z. Если воспользоваться равенствами

$$\left[\frac{1}{ik}\left(D_x + iD_y\right)\right]^m e^{ikR} = \sin^m\theta e^{im\varphi}e^{ikR} = \\ = \sin^m\theta(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)e^{ikR}$$

и

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\frac{d^m}{(d\cos\theta)^m}P_l(\cos\theta)$$

то, как показано в [7], источник

$$\delta_{f(\theta,\varphi)} = -4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\Bigg\{A_l^0 P_l\left(\frac{1}{ik}D_z\right) + \\ + \sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{ik}\right)^m\Big(A_l^m \operatorname{Re}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right] + \\ + B_l^m \operatorname{Im}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right]\Big)\frac{d^m}{du^m}P_l(u)\Bigg|_{u=\frac{1}{ik}D_z}\Bigg\}\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{5}$$

будет удовлетворять уравнению

$$\left(\Delta + k^2\right)p_s(\mathbf{x}) = \delta_{f(\theta,\varphi)},$$

где решение $p_s(\mathbf{x})$ и будет иметь искомую асимптотику с амплитудой рассеяния $f(\theta,\varphi)$ из (3).

Обратимся к анализу перекрестного слагаемого радиационного давления (1). Учитывая очевидное равенство

$$\int\limits_V \psi(\mathbf{x})\prod_{i=1}^{3} D_{x_i}^{(n_i)}\delta(\mathbf{x})dV = (-1)^n \left.\frac{\partial^n\psi(\mathbf{x})}{\prod\limits_{i=1}^{3}(\partial x_i)^{n_i}}\right|_{\mathbf{x}=0}, \quad n = \sum_{i=1}^{3} n_i,$$

и подставляя (5) в (1), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned}\overline{F_i}^{(is)} &= \frac{-1}{4\rho\omega^2}\int\left(\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i}(\delta_{f(\theta,\varphi)}(\mathbf{x}))^* + \text{к.с.}\right)dV = \\ &= \frac{\pi}{\rho\omega^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\left(A_l^0\right)^* P_l\left(-1\frac{i}{k}D_z\right) + \right. \\ &\quad + \sum_{m=1}^{l}(-1)^m\left(\frac{i}{k}\right)^m\left(\left(A_l^m\right)^*\mathrm{Re}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(B_l^m\right)^*\mathrm{Im}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right]\right)\times \\ &\quad \left.\times\frac{d^m}{du^m}P_l(u)\Big|_{u=-1\frac{i}{k}D_z}\right\}\left.\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.}, \\ &\qquad i = 1,2,3.\end{aligned} \tag{6}$$

Стоящий слева в (6) дифференциальный оператор воздействует на функцию $\frac{\partial p_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{i\rho\omega}v_{\text{inc}_{x_i}}(\mathbf{x})$, после чего получившаяся функция рассматривается в точке $\mathbf{x} = 0$. Здесь $v_{\text{inc}_{x_i}}(\mathbf{x})$ — x_i — составляющая вектора колебательной скорости.

Проведем анализ выражения (6) для перекрестного слагаемого $\overline{\mathbf{F}}^{(is)}$ силы радиационного давления $\overline{\mathbf{F}}$ для некоторых частных случаев.

1. Все компоненты вектора колебательной скорости в падающей волне отличны от нуля в точке $\mathbf{x} = 0$ и являются функциями (бесконечно или конечно дифференцируемыми) только переменной z в окрестности этой точки

$$v_{\text{inc}_x} = v_{\text{inc}_x}(z), \quad v_{\text{inc}_y} = v_{\text{inc}_y}(z), \quad v_{\text{inc}_z} = v_{\text{inc}_z}(z).$$

Тогда, как видно из (6), для компонент перекрестной составляющей силы радиационного давления справедливы следующие выражения

$$\overline{F_i}^{(is)} = \frac{\pi}{\rho\omega^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l^0\right)^* P_l\left(-1\frac{i}{k}D_z\right)\left.\frac{\partial p_{\text{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \tag{7}$$

Следовательно, в этом случае компоненты силы радиационного давления определяются только зональными гармониками в разложении (3).

В еще более частном случае, когда только одна из компонент вектора колебательной скорости в падающей волне $v_{\text{inc}_{x_i}}$ отлична от нуля в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ и зависит только от z (как, например, для плоской стоячей или бегущей волны), то отличной от нуля будет лишь соответствующая составляющая силы радиационного давления $\overline{F}_{x_i}^{(is)}$ из (7).

2. Все компоненты вектора колебательной скорости в падающей волне отличны от нуля в точке $\mathbf{x} = 0$ и являются функциями (бесконечно или конечно дифференцируемыми) только переменных x и y в окрестности этой точки.

$$v_{\text{inc}_x} = v_{\text{inc}_x}(x,y), \quad v_{\text{inc}_y} = v_{\text{inc}_y}(x,y),$$
$$v_{\text{inc}_z} = v_{\text{inc}_z}(x,y).$$

Тогда, как видно из (6), для компонент перекрестной составляющей силы радиационного давления справедливы выражения

$$\begin{aligned}\overline{F_i}^{(is)} &= \frac{\pi}{\rho\omega^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(-1)^m\left(\frac{i}{k}\right)^m c_l^m \times \\ &\quad \times\left(\left(A_l^m\right)^*\mathrm{Re}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(B_l^m\right)^*\mathrm{Im}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right]\right)\left.\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.}\end{aligned} \tag{8}$$

В (8) по сравнению с общим выражением (6) исчезает дифференцирование по z, а константы c_l^m появляются вместо оператора дифференцирования $\left.\frac{d^m}{du^m}P_l(u)\right|_{u=-1\frac{i}{k}D_z}$ вследствие того, что последний содержит эти константы как коэффициенты при нулевой степени $u = -1\frac{i}{k}D_z$ при изменении m (т.е. c_l^m суть коэффициенты при нулевой степени u в разложении полинома $\frac{d^m}{du^m}P_l(u)$ по степеням u; все остальные степени в разложении $\frac{d^m}{du^m}P_l(u)$ по степеням u аннулируются вследствие независимости колебательной скорости от z). Константы легко подсчитываются и равны для четного l:

$$c_l^m = \begin{cases} (-1)^{\frac{l-m}{2}} \dfrac{(l+m)!}{2^l\left(\dfrac{l-m}{2}\right)!\left(\dfrac{l+m}{2}\right)!}, & m - \text{четное} \\ 0, & m - \text{нечетное} \end{cases}$$

и

$$c_l^m = \begin{cases} 0, & m - \text{четное} \\ (-1)^{\frac{l-m}{2}} \dfrac{(l+m)!}{2^l\left(\dfrac{l-m}{2}\right)!\left(\dfrac{l+m}{2}\right)!}, & m - \text{нечетное} \end{cases}$$

для нечетного l; $l = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots, l$.

В еще более частном случае, когда одна из компонент вектора колебательной скорости в падающей волне $v_{\mathrm{inc}_{x_i}}$ отлична от нуля в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ и зависит только от x или только от y (как, например, для плоской стоячей или бегущей волны), то отличной от нуля будет лишь соответствующая составляющая силы радиационного давления $\overline{F}_{x_i}^{(is)}$ из (8).

Так, например, в случае

$$v_{\mathrm{inc}_x} = v_{\mathrm{inc}_x}(x), \ v_{\mathrm{inc}_y} = 0, \ v_{\mathrm{inc}_z} = 0$$

выражение (8) упрощается и принимает вид

$$\overline{F}_x^{(is)} = \frac{\pi}{\rho\omega^2} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(-1)^m\left(\frac{i}{k}\right)^m c_l^m\left(A_l^m\right)^*(D_x)^m \left.\frac{\partial p_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x}\right|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \quad (8а)$$

$$\overline{F}_y^{(is)} = \overline{F}_z^{(is)} = 0.$$

3. Амплитуда рассеяния (3) зависит только от угла падения θ, и, следовательно, выполняется условие

$$A_l^m = B_l^m = 0, \ l = 1, 2, \ldots, \ m = 1, 2, \ldots, l. \quad (9)$$

В этом случае основное выражение (6) упрощается, сводясь к выражению типа (7)

$$\overline{F}_i^{(is)} = \frac{\pi}{\rho\omega^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l^0\right)^* P_l\left(-1\frac{i}{k}D_z\right)\left.\frac{\partial p_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \quad (7а)$$

При этом функции $\dfrac{\partial p_{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ могут иметь произвольную зависимость от декартовых координат. Дальнейшие частные случаи при выполнении условия (9) анализируются так же, как в рассмотренном выше случае 1.

Выше были рассмотрены некоторые частные случаи общего выражения (6) для силы радиационного давления. В каждом конкретном частном случае достаточно просто получить упрощение, если оно возможно, апеллируя к общему выражению (6). Однако ситуация, когда радиационное давление определяется только зональными коэффициентами в разложении (3), исчерпывается, по-видимому, только случаями, описываемыми выражениями (7) и (7а), рассмотренными в п.п. 1 и 3.

Перейдем к слагаемому, квадратичному по рассеянному полю. Анализ выражений (2) и (4) показывает, что составляющие $\overline{F}_i^{(ss)}$ равны

$$\overline{F}_1^{(ss)} = cA_1^1, \ \overline{F}_2^{(ss)} = cB_1^1, \ \overline{F}_3^{(ss)} = cA_1^0, \ c = -\frac{4\pi}{6}\frac{1}{\rho c^2}. \quad (10)$$

Здесь A, B – соответствующие коэффициенты разложения вида (3), (4) для функции $|f(\theta,\varphi)|^2$ – квадрата модуля амплитуды рассеяния. Поэтому компоненты силы радиационного давления могут быть равны нулю только при равенстве нулю соответствующих коэффициентов разложения квадрата модуля амплитуды рассеяния в ряд по сферическим функциям вида (3). А это означает отсутствие какого-либо диполя в мультипольном разложении квадрата модуля амплитуды рассеяния $|f(\theta,\varphi)|^2$. Анализ выражения (3) для функции $f(\theta,\varphi)$ и функции $|f(\theta,\varphi)|^2$ показывает, что между коэффициентами A, B в разложении (3) для $f(\theta,\varphi)$ и A, B в разложении (3) для $|f(\theta,\varphi)|^2$ существует связь, подобная той, которая получена в работе [8] для случая независимой от угла азимута амплитуды рассеяния $f(\theta,\varphi) = f(\theta)$ (выражение (8) работы [8]). Так же как и в [8], искомые коэффициенты A_1^0, A_1^1 и B_1^1 равны сумме реальных частей произведений соседних по номерам коэффициентов A_l^m и B_l^m, один из которых комплексно сопряжен. При этом в рядах для A_1^0 и A_1^1 нет смешанных произведений A и B. В ряду же для B_1^1 такие произведения есть. Однако ввиду достаточно большой громоздкости этих соотношений, здесь они не приводятся. Впрочем, достаточно просто величины A_1^0, A_1^1 и B_1^1 могут быть вычислены напрямую из (2). Очевидно также, что эти величины (впрочем, как и все остальные коэффициенты A, и B) являются действительными числами в силу действительнозначности функции $|f(\theta,\varphi)|^2$.

Таким образом, в условиях произвольного падающего поля и амплитуды рассеяния на включении, зависящей от углов падения θ и азимута φ необходимо пользоваться общими выражениями

(6) и (10) соответственно для вычисления компонент векторов силы радиационного давления $\overline{\mathbf{F}}^{(is)}$ для перекрестного слагаемого и $\overline{\mathbf{F}}^{(ss)}$ для квадратичного слагаемого общей силы $\overline{\mathbf{F}}$.

Рассмотрим пример. Пусть падающее поле представляет собой бегущую плоскую волну общего положения, единичный волновой вектор которой имеет составляющие $\hat{\mathbf{k}} = (\sin\theta_0\cos\varphi_0, \sin\theta_0\sin\varphi_0, \cos\theta_0)$:

$$p_{\text{inc}}(x,y,z) = P_0\exp\left[e^{ik(x\sin\theta_0\cos\varphi_0 + y\sin\theta_0\sin\varphi_0 + z\cos\theta_0)}\right].$$

Тогда результирующая амплитуда рассеяния $f(\theta,\varphi)$ равна

$$f(\theta,\varphi) = P_0 f_0(\theta,\varphi),$$

где $f_0(\theta,\varphi)$ – амплитуда рассеяния на включении при падении плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы.

Положим, что в амплитуде рассеяния $f_0(\theta,\varphi)$ отличны от нуля только коэффициенты A_0^0, A_1^0, A_1^1 и B_1^1. Это отвечает одному монополю и трем диполям с осями, сориентированными соответственно вдоль оси z с силой A_1^0, вдоль оси x с силой A_1^1 и вдоль оси y с силой B_1^1. Тогда из (3) имеем для амплитуды рассеяния $f(\theta,\varphi)$

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) = P_0\big(A_0^0 + A_1^0\cos\theta + A_1^1\sin\theta\cos\varphi + \\ +B_1^1\sin\theta\sin\varphi\big). \end{aligned} \tag{11}$$

Вычислим силы $\overline{\mathbf{F}}^{(is)}$ и $\overline{\mathbf{F}}^{(ss)}$, действующие на рассеиватель с амплитудой рассеяния (11). Очевидно, что имеет место общая ситуация и необходимо пользоваться выражением (6), а также (10). Выражение (6) приводится в этом случае к виду

$$\begin{aligned} \overline{F}_i^{(is)} = \frac{\pi P_0}{\rho\omega^2}\bigg(\left(A_0^0\right)^* + \left(A_1^0\right)^*\left(-1\frac{i}{k}D_z\right) + \\ +(-1)\left(\frac{i}{k}\right)\left(\left(A_1^1\right)^* D_x + \left(B_l^m\right)^* D_y\right)\bigg)\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\bigg|_{\mathbf{x}=0} + \text{к.с.} \end{aligned} \tag{12}$$

Непосредственные вычисления по формуле (12) дают для компонент перекрестной составляющей силы радиационного давления величины

$$\begin{aligned} \overline{F}_i^{(is)} = \overline{E}\frac{4\pi}{k}\cos\theta_{0i}\,\text{Im}\big(A_0^0 + A_1^0\cos\theta_{03} + \\ + A_1^1\cos\theta_{01} + B_1^1\cos\theta_{02}\big). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\overline{E} = \dfrac{P_0^2}{2\rho c^2}$ – средняя плотность энергии в падающей волне; θ_{0i} – углы между волновым вектором падающей плоской волны и осями координат, $\cos\theta_{01} = \sin\theta_0\cos\varphi_0$, $\cos\theta_{02} = \sin\theta_0\sin\varphi_0$, $\cos\theta_{03} = \cos\theta_0$.

Вычислим компоненты квадратичной составляющей силы радиационного давления. Найдем из (11) коэффициенты A_1^0, A_1^1 и B_1^1 в разложении (3) для $|f(\theta,\varphi)|^2$. Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} A_1^0 &= |P_0|^2 2\text{Re}\left(A_1^0\left(A_0^0\right)^*\right), \\ A_1^1 &= |P_0|^2 2\text{Re}\left(A_1^1\left(A_0^0\right)^*\right), \\ B_1^1 &= |P_0|^2 2\text{Re}\left(B_1^1\left(A_0^0\right)^*\right). \end{aligned} \tag{14}$$

После подстановки (14) в (10) получаем

$$\begin{aligned} \overline{F}_1^{(ss)} &= -\frac{2}{3}\overline{E}4\pi\text{Re}\left(A_1^1\left(A_0^0\right)^*\right), \\ \overline{F}_2^{(ss)} &= -\frac{2}{3}\overline{E}4\pi\text{Re}\left(B_1^1\left(A_0^0\right)^*\right), \\ \overline{F}_3^{(ss)} &= -\frac{2}{3}\overline{E}4\pi\text{Re}\left(A_1^0\left(A_0^0\right)^*\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Окончательно, используя (13) и (15), вычисляем суммарные компоненты силы радиационного давления $\overline{F}_i$

$$\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(is)} + \overline{F}_i^{(ss)}, \quad i = 1,2,3.$$

Отметим, что выражения (14) и (16) полностью согласуются с результатами работ [4–6] в случае, когда $\theta_0 = 0$ (падающая плоская волна распространяется вдоль оси z), а $A_1^1 = B_1^1 = 0$.

Аналогично может быть решена задача для более общей амплитуды рассеяния и для более сложного падающего поля. В реальности нужно пользоваться вместо ряда (3) конечными суммами, ограничиваясь достаточным конечным числом членов ряда с точки зрения погрешности представления амплитуды рассеяния.

Таким образом, в работе решена задача вычисления радиационного давления в идеальной жидкости на включения сложной формы в первичном поле произвольной конфигурации. Приведены выражения (6) и (10) для компонент радиационного давления в произвольном первичном поле, в которых фигурирует результирующая амплитуда рассеяния. Получены упрощенные выражения (7)–(9), (7а) и (8а) для ряда частных случаев. Приведенные выражения значительно расширяют диапазон полей и рассеивателей, для которых возможен расчет радиационного давления. Приведен пример расчета для монопольно-дипольного рассеивателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *King L.V.* On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc. 1934. A 147. P. 212–240.
2. *Yosioka K., Kavasima Y.* Acoustic radiation pressure on compressible sphere // Acustica 1955. V. 5. P. 167–173.
3. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 88–91.
4. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // Доклады РАН. Физика 2008. Т. 419. № 3. С. 324–327.
5. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н.* Радиационное давление в произвольном падающем поле. Связь с амплитудой рассеяния включения // ДАН. 2008. Т. 421. № 2. С. 186–189.
6. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н.* Радиационное давление на включение с заданной амплитудой рассеяния в произвольном внешнем поле // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 2. С. 147–152.
7. *Шарфарец Б.П.* О возможности эффективного вычисления амплитуды рассеяния на включении в сложном поле // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 166–171.
8. *Князьков Н.Н., Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Радиационное давление на сферу в смешанном поле бегущей и стоячей плоских волн // Доклады РАН. Физика 2009. Т. 424. № 3. С. 751–754.