Drgania w obwodzie RLC

Zachowanie obwodu RLC opisuje równanie różniczkowe:

$$LC\frac{d^2U(t)}{dt^2} + RC\frac{dU(t)}{dt} + U(t) = 0 \qquad (1)$$

Ze względu na różnorodność zastosowań, to równanie jest jednym z najważniejszych równań różniczkowych.

Analogia do drgań mechanicznych:
$U \leftrightarrow x$;
$L \leftrightarrow m$;
$\frac{1}{C} \leftrightarrow k$ (stała sprężystości);
$R \leftrightarrow \beta$ (stała tłumienia)
$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} - kx - b\frac{dx(t)}{dt} = 0,\ gdzie\ \frac{b}{m} = 2\beta$

Jest to równanie typu: $\boldsymbol{y'' + py' + qy = 0}$**,**

czyli równanie różniczkowe

- **zwyczajne,**
- **drugiego stopnia,**
- **liniowe,**
- **jednorodne,**
- **stałych współczynnikach**

Zbiór wszystkich funkcji U(t) spełniających równanie różniczkowe nazywamy **całką ogólną**.
Ma ona postać:

$$U(t) = C_1e^{a_1t} + C_2e^{a_2t}$$

Z doświadczenia obserwujemy tylko jedną funkcję U(t) → **całkę szczególną**, uzyskaną z całki ogólnej poprzez dobór stałych całkowania C_1 i C_2 tak, by były spełnione warunki początkowe (w chwili t=0):

- wartość funkcji U(t) = U_0 (początkowa wartość napięcia kondensatora)
- wartość jej pochodnej $\frac{dU}{dt} = 0$ (początkowa wartość prądu w obwodzie)

Zarówno współczynniki a_1 i a_2, jak i stałe całkowania C_1 i C_2 mogą być liczbami zespolonymi. Po rozwiązaniu równania w postaci funkcji zespolonej, jako rozwiązanie fizycznie ważne bierzemy jego część rzeczywistą. Podstawiamy $U(t) = C_1e^{a_1t} + C_2e^{a_2t}$ do równania (1) i otrzymujemy:

$$La_{1,2}^2 + Ra_{1,2} + \frac{1}{C} = 0$$

Jest to równanie kwadratowe, którego delta wynosi: $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$

W przypadku, gdy $\Delta = 0$, opór wynosi $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ - jest to **rezystancja krytyczna**.

Możemy rozróżnić trzy przypadki rozwiązań:

1. $R < R_C$, występuje gdy Δ< 0; - drgania tłumione

(a_1 i a_2 są wówczas parą liczb zespolonych sprzężonych):

$a_1 = -\beta + i\omega$
$a_2 = -\beta - i\omega$

gdzie β - współczynnik tłumienia: $\beta = \frac{R}{2L}$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0 - \beta^2}$

ω - częstość drgań tłumionych jest nieco mniejsza od nietłumionych (ω_0)

faza: $\delta = -\text{arc tg}\,\frac{\beta}{\omega}$

amplituda: $A = \frac{U_0}{\cos\delta}$

wówczas rozwiązanie równania ma postać:

$$U(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t}$$

Korzystając z wzoru Eulera: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, oraz uwzględniając warunki początkowe otrzymujemy:

$$U(t) = A \cdot e^{-\beta t} \underbrace{\cos(\omega t + \delta)}_{\text{drgania niegasnące o częstości } \omega}$$

funkcja wykładnicza opisująca zjawisko tłumienia

2. $R = R_C$, występuje gdy Δ = 0; przebieg aperiodyczny krytyczny

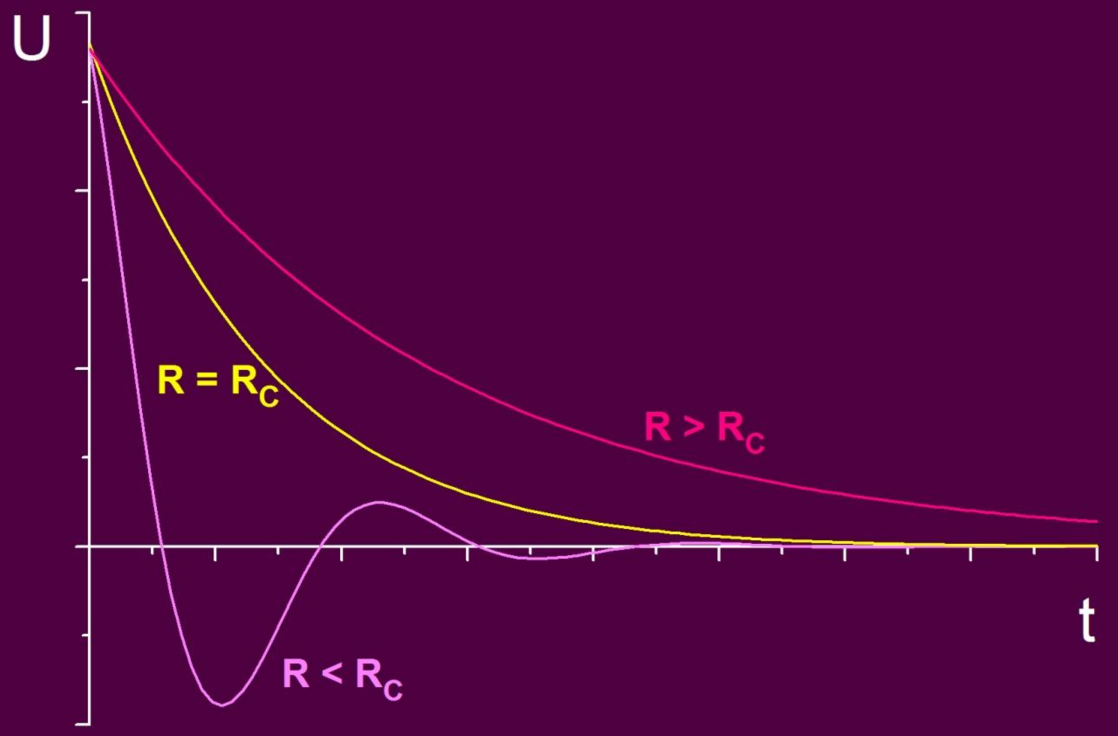
Równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek podwójny: $a_{1,2} = \beta = \frac{R}{2L}$

W takim przypadku całka ogólna dana jest wzorem:
$U(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}$

Natomiast całką szczególną spełniającą warunki początkowe jest:

$$U(t) = U_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}$$

Dla oporu $R = R_C$ funkcja U(t) najszybciej maleje do zera. Gdy zależy nam na szybkim tłumieniu drgań (np. w samochodzie), wówczas należy tak dobierać stałą tłumienia (tłumik w samochodzie), by uzyskać przebieg aperiodyczny krytyczny.



3.

$R > R_C$, występuje gdy $\Delta > 0$; - przebieg aperiodyczny

Równanie charakterystyczne ma 2 różne pierwiastki rzeczywiste.
Całka ogólna jest kombinacją liniową 2 rzeczywistych, malejących funkcji wykładniczych.

$$U(t) = U_0 \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 t} - \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_1 t}\right]$$

stałe β_1 i β_2 – dwie różne stałe tłumienia.

$\beta_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0}$, $\quad \beta_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\sqrt{\omega_0 - \beta^2} = \omega$

Dominujący jest składnik pierwszy $\frac{U_0 \beta_1}{\beta_1 - \beta_2}$= amplituda (większa, wolniej maleje do zera)

3a.

dla $R \gg R_C$, równanie U(t) można przybliżyć funkcją $U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, gdzie τ = RC .

Mamy wówczas do czynienia ze zjawiskiem ładowania kondensatora C przez opór R (bo przy dużej wartości oporu obwodu wpływ indukcyjności L staje się nieistotny).