

Sadržaj

4 Linearni funkcionali	152
4.1 Geometrijski smisao linearnih funkcionala	165
4.2 Hahn-Banachov teorem	165
4.3 Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala	169
4.4 Konjugovani prostori	171
4.5 Slaba konvergencija	174

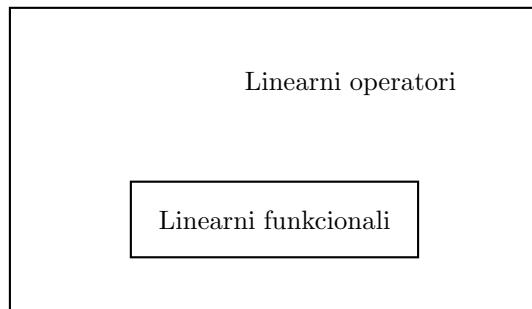
Poglavlje 4

Linearni funkcionali

Nakon uvodjenja mnoštva pojmova neophodnih za funkcionalnu analizu, u ovom poglavlju napokon su navedeni neki od najznačajnijih rezultata ove oblasti. U prvom dijelu studenti/ce se trebaju upoznati sa pojmom funkcionala, te znati utvrditi da li su odredjeni funkcionali linearni i ograničeni, i naći njihovu normu. U drugom dijelu naveden je Hahn-Banachov teorem i njegove posljedice, pa je neophodno njihovo razumijevanje kako bi se isti mogli primjeniti u zadacima iz ove sekcije. U završnom dijelu poglavlja zbog svoje su značajnosti navedeni rezultati koji nam daju informaciju o obliku svih linearnih ograničenih funkcionala na pojedinim Banachovim prostorima, te je uveden iznimno zanimljiv pojam slabe konvergencije.

Funkcionali su samo posebna vrsta operatora. Naime:

Definicija 4.0.1 (FUNKCIONAL) *Neka je X proizvoljan linearan vektorski prostor. Funkcional je proizvoljno preslikavanje $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*



Dakle, funkcional je "lijepa" vrsta operatora, koja proizvoljne prostore uvijek slika u polje skalara, tj. $Y = \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Stoga, sve što vrijedi za operatore, vrijedi i za funkcionale. Tako se analogno definiraju pojmovi poput linearan, ograničen ili neprekidan funkcional, te norma funkcionala, a važe i svi rezultati iz prethodnog poglavlja. Te definicije će sada samo biti nešto jednostavnije, jer je norma u $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ uobičajena Euklidska norma, tj. za sve $x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ vrijedi $\|x\| = |x|$. Tako, ako bismo htjeli naprimjer definirati ograničen funkcional imali bismo sljedeću definiciju

Definicija 4.0.2 (OGRANIČEN FUNKCIONAL) *Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ linearan funkcional. f je ograničen funkcional ako vrijedi*

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X) : |f(x)| \leq M\|x\|.$$

Infimum svih brojeva M za koje važi navedena relacija je norma operatora f , u oznaci $\|f\|$.

ZADATAK 4.0.1 *Dokazati da su sljedeća preslikavanja linearni funkcionali:*

- a. $X = \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, gdje je $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan i fiksiran.
- b. $X = C[a, b]$, $f(x) = \int_a^b x(t) dt$
- c. $X = C[a, b]$, $f(x) = x(t_0)$, gdje je $t_0 \in [a, b]$ proizvoljan i fiksiran.
- d. $X = l_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), $f(x) = \xi_k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan i fiksiran.

Rješenje:

- a. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer je $f(x)$ definiran kao konačna suma realnih brojeva. Uvjerimo se i u linearost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \in \mathbb{R}^n$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i=1}^n a_i (\alpha x_i^{(1)} + \beta x_i^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i^{(1)} + \beta \sum_{i=1}^n a_i x_i^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \end{aligned}$$

pa je f zaista linearan funkcional.

- b. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in \mathcal{C}[a, b]$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer je svaka neprekidna funkcija integrabilna. Uvjerimo se i u linearost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathcal{C}[a, b]$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \int_a^b (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) dt \\ &= \alpha \int_a^b x_1(t) dt + \beta \int_a^b x_2(t) dt \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \end{aligned}$$

pa je f zaista linearan funkcional.

- c. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in \mathcal{C}[a, b]$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer x realna funkcija. Uvjerimo se i u linearost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathcal{C}[a, b]$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= (\alpha x_1 + \beta x_2)(t_0) \\ &= \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \end{aligned}$$

pa je f zaista linearan funkcional.

- d. Da je funkcional f zaista dobro definiran, tj. da za sve $x \in l_p$ vrijedi $f(x) \in \mathbb{R}$, jasno je jer x niz realnih brojeva. Uvjerimo se i u linearost ovako definiranog funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, x_2 = (x_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in l_p$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_k^{(1)} + \beta x_k^{(2)} = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),$$

pa je f zaista linearan funkcional.



ZADATAK 4.0.2 *Dokazati da je sa*

a. $f(x) = 2\xi_1 - \xi_3 + 5\xi_5 \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1)$

b. $f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i} \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1)$

c. $f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\xi_i}{i} \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1)$

dobro definiran linearan neprekidan funkcional u l_1 , te naći njegovu normu.

Rješenje:

- a. Neka je $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_1 , to znači da

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$\begin{aligned} |y| &= |f(x)| \\ &= |2\xi_1 - \xi_3 + 5\xi_5| \\ &\leq |2\xi_1| + |- \xi_3| + |5\xi_5| \\ &\leq 2|\xi_1| + |\xi_3| + 5|\xi_5| \\ &\leq 5(|\xi_1| + |\xi_3| + |\xi_5|) \\ &\leq 5 \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

pa je zaista $y \in \mathbb{R}$. Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= 2(\alpha \xi_1^{(1)} + \beta \xi_1^{(2)}) - (\alpha \xi_3^{(1)} + \beta \xi_3^{(2)}) + 5(\alpha \xi_5^{(1)} + \beta \xi_5^{(2)}) \\ &= \alpha(2\xi_1^{(1)} - \xi_3^{(1)} + 5\xi_5^{(1)}) + \beta(2\xi_1^{(2)} - \xi_3^{(2)} + 5\xi_5^{(2)}) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu već ustanovljene relacije

$$|f(x)| \leq 5 \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| = 5\|x\|.$$

Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \leq 5.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in l_1 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_1$. Izaberimo x_0 na sljedeći način

$$x_0 = e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots).$$

Kako vrijedi $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1 < \infty$, x_0 je zaista u l_1 , i imamo

$$|f(x_0)| = |2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 1| = |5| = 5,$$

$$\|x_0\| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{5}{1} = 5.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 5 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 5,$$

pa je $\|f\| = 5$.

- b. Neka je $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_1 , to znači da

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_{2i}| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\alpha \xi_{2i}^{(1)} + \beta \xi_{2i}^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i}^{(1)} + \beta \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i}^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu sljedeće relacije

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i} \right| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_{2i}| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

(Primjetite da je relacija $|\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$ dokazana u nekom od ranijih zadataka, pa je ovdje taj dokaz izostavljen, ali ga je inače neophodno obrazložiti!) Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \leq 1.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in l_1 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_1$. Izaberemo li x_0 kao bilo koji element u l_1 čije su neparne koordinate nule dobiti ćemo da je $\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = 1$, naprimjer

$$x_0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2^2}, 0, \frac{1}{2^3}, 0, \dots).$$

Kako vrijedi $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2^i} \right| = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 < \infty$, x_0 je zaista u l_1 , i imamo

$$|f(x_0)| = \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_{2i}^{(0)} \right| = \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \right| = 2,$$

$$\|x_0\| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2^i} \right| = 2.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{2}{2} = 1.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 1,$$

pa je $\|f\| = 1$.

- c. Neka je $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_1 , to znači da

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\xi_i}{i} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{\xi_i}{i} \right| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\alpha \frac{\xi_i^{(1)}}{i} + \beta \frac{\xi_i^{(2)}}{i} \right) \\ &= \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\xi_i^{(1)}}{i} + \beta \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\xi_i^{(2)}}{i} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu sljedeće relacije

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\xi_i}{i} \right| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{\xi_i}{i} \right| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

(Primjetite da je relacija $|\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$ dokazana u nekom od ranijih zadataka, pa je ovdje taj dokaz izostavljen, ali ga je inače neophodno obrazložiti!) Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \leq 1.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in l_1 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_1$. Izaberemo li $x_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, jasno je da je $x_0 \in l_1$ jer $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1 < \infty$. Dalje imamo

$$|f(x_0)| = \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\xi_i^{(0)}}{i} \right| = \left| \frac{1}{1} + 0 + 0 + \dots \right| = 1,$$

$$\|x_0\| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 1,$$

pa je $\|f\| = 1$.

▲

ZADATAK 4.0.3 Neka je $0 < \delta < 1$, i preslikavanje f definirano sa

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty).$$

Dokazati da je f ograničen linearan funkcional na l_∞ , i izračunati $\|f\|$.

Rješenje: Neka je $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora l_∞ , to znači da je niz x ograničen, tj. da vrijedi

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \xi_i \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i = \frac{1}{1 - \delta} \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i (\alpha \xi_i^{(1)} + \beta \xi_i^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \xi_i^{(1)} + \beta \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \xi_i^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Da je f neprekidan, odnosno ograničen, jednostavno zaključujemo na osnovu sljedeće relacije

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \xi_i \right| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\delta^i \xi_i| \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \\ &= \|x\| \frac{1}{1-\delta}. \end{aligned}$$

(Primjetite da je relacija $|\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$ dokazana u nekom od ranih zadataka, pa je ovdje taj dokaz izostavljen, ali ga je inače neophodno obrazložiti!) Na osnovu posljednje relacije i definicije norme funkcionala, takodjer možemo zaključiti da

$$\|f\| \leq \frac{1}{1-\delta}.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in l_\infty \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$$

za bilo koji $x_0 \in l_\infty$. Izaberemo li $x_0 = (1, 1, 1, 1, \dots)$, jasno je da je $x_0 \in l_\infty$ jer $\sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1 < \infty$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \xi_i^{(0)} \right| = \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta^i \right| = \frac{1}{1-\delta}, \\ \|x_0\| &= \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(0)}| = 1. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\frac{1}{1-\delta}}{1} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq \frac{1}{1-\delta} \quad \wedge \quad \|f\| \geq \frac{1}{1-\delta},$$

pa je $\|f\| = \frac{1}{1-\delta}$. \blacktriangleleft

ZADATAK 4.0.4 Neka je $X = \{x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} : \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty\}$, i na njemu definirana norma $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|$. Dokazati da je sa

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X)$$

definiran lineran funkcional na X , ali da f nije ograničen.

Rješenje: Primjetimo prvobitno da je skup X ustvari definiran kao l_1 . Medjutim, na X ne posmtramo uobičajenu normu za l_1 , već supremum normu, pa stoga i posebno uvodjenje prostora X . Ako bismo posmatrali l_1 , jednostavno se utvrdjuje da je navedeni funkcional ograničen, što nam potvrđuje da zaista ima smisla na l_1 kao uobičajenu normu uzimati $\|\cdot\|_1$. Predjimo sada na dokazivanje dobre definiranosti funkcionala f . Neka je $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ proizvoljan. Na osnovu definicije prostora X , to znači da vrijedi

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Da bi dokazali da je f dobro definiran funkcional, treba pokazati da je i $y = f(x) \in \mathbb{R}$, tj. da je $y < \infty$.

$$y = f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| < \infty.$$

Kako bi se uvjerili da je f linearan funkcional, posmatrajmo proizvoljne $x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in X$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\alpha \xi_i^{(1)} + \beta \xi_i^{(2)}) \\ &= \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i^{(1)} + \beta \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i^{(2)} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Jasno je da f nije ograničen, jer nema razloga zašto bi uvijek vrijedilo

$$|f(x)| = \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i \right| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|.$$

U to se uvjeravamo posmatrajući npr. niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u X , pri čemu je opći član niza element u X koji na prvih n mjestu ima jedinice, a na svim ostalim nule,

tj.

$$\begin{aligned}x_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\x_2 &= (1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\&\vdots \\x_n &= (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots) \\&\vdots\end{aligned}$$

Prvobitno je neophodno provjeriti da je navedeni niz zaista u X , tj. da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}} \in X$. To je zadovoljeno jer

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i^{(n)} = n < \infty.$$

Dalje imamo

$$|f(x_n)| = \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i^{(n)} \right| = |n| = n,$$

$$\|x_n\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(n)}| = 1,$$

pa sigurno ne vrijedi

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X) : |f(x)| \leq M \|x\|,$$

tj. f nije ograničen. \blacktriangle

ZADATAK 4.0.5 Dokazati da je f , definiran sa

$$f(x) = x_1 - x_2 \quad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2),$$

linearan neprekidan funkcional na \mathbb{R}^2 . Odrediti normu funkcionala f ako je norma definirana na \mathbb{R}^2

- a. $\|\cdot\|_1$
- b. $\|\cdot\|_2$
- c. $\|\cdot\|_\infty$

Rješenje: Jasno je da je f dobro definiran jer ustvari $f(x)$ predstavlja razliku dva realna broja, pa je i sam realan. Dokažimo da je f lineran funkcional (linearnost funkcionala zavisi od aglebarske strukture Banachovog prostora, a ne metričke, kao što je to već nekoliko puta naglašeno, pa linearnost ne

zavisi od norme na prostoru). Posmatrajmo proizvoljne $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \end{aligned}$$

Dakle, f je zaista linearan funkcional. Dokažimo ograničenost, te izračunajmo normu funkcionala. Neka je $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

a. Kako je $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, imamo

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1| + |x_2| \\ &= \|x\|_1. \end{aligned}$$

Dakle, f je ograničen, odnosno neprekidan operator, a na osnovu definicije norme funkcionala možemo zaključiti i da

$$\|f\| \leq 1.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_1}$$

za bilo koji $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Izaberemo li $x_0 = (1, 0)$, jasno je da je $x_0 \in \mathbb{R}^2$, te da

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= |x_1^{(0)} - x_2^{(0)}| = |1 - 0| = 1, \\ \|x_0\|_1 &= |x_1^{(0)}| + |x_2^{(0)}| = |1| + |0| = 1. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 1 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 1,$$

pa je $\|f\| = 1$.

b. Kako je $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, te na osnovu nejednakosti izmedju aritmetičke i kvadratne brojne sredine, imamo

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1| + |x_2| \\ &= 2 \frac{|x_1| + |x_2|}{2} \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \sqrt{2} \|x\|_2. \end{aligned}$$

Dakle, f je ograničen, odnosno neprekidan operator, a na osnovu definicije norme funkcionala možemo zaključiti i da

$$\|f\| \leq \sqrt{2}.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_2}$$

za bilo koji $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Izaberemo li $x_0 = (1, -1)$, jasno je da je $x_0 \in \mathbb{R}^2$, te da

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= |x_1^{(0)} - x_2^{(0)}| = |1 - (-1)| = 2, \\ \|x_0\|_2 &= \sqrt{(x_1^{(0)})^2 + (x_2^{(0)})^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq \sqrt{2} \quad \wedge \quad \|f\| \geq \sqrt{2},$$

pa je $\|f\| = \sqrt{2}$.

c. Kako je $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, imamo

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1| + |x_2| \\ &\leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|x_1|, |x_2|\} \\ &= 2 \max\{|x_1|, |x_2|\} \\ &= 2\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Dakle, f je ograničen, odnosno neprekidan operator, a na osnovu definicije norme funkcionala možemo zaključiti i da

$$\|f\| \leq 2.$$

Na osnovu teorema o normi operatora, imamo da vrijedi

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_\infty}$$

za bilo koji $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Izaberemo li $x_0 = (1, -1)$, jasno je da je $x_0 \in \mathbb{R}^2$, te da

$$|f(x_0)| = |x_1^{(0)} - x_2^{(0)}| = |1 - (-1)| = 2,$$

$$\|x_0\|_1 = \max\{|x_1^{(0)}|, |x_2^{(0)}|\} = \max\{|1|, |-1|\} = 1.$$

Stoga je

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$\|f\| \leq 2 \quad \wedge \quad \|f\| \geq 2,$$

pa je $\|f\| = 2$.

▲

4.1 Geometrijski smisao linearnih funkcionala

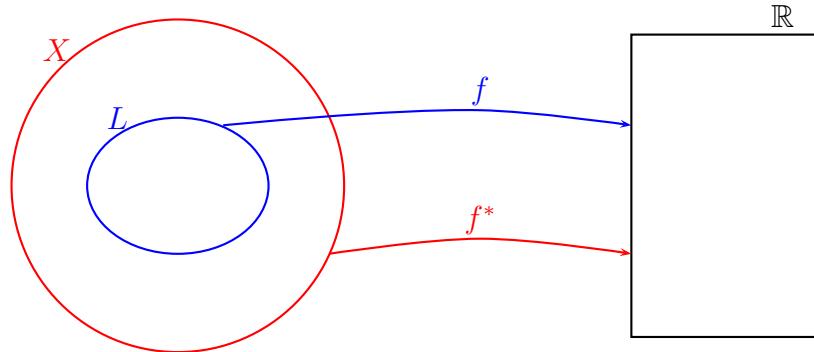
U ovoj sekciji skripte "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/09)", kao što joj i sam naziv kaže, kroz nekoliko rezultata data je geometrijska interpretacija linearnih funkcionala - postoji bijektivno preslikavanje između svih funkcionala $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ i hiperpovrši prostora X . Zbog ograničenosti kursa, zadatke iz ove sekcije ćemo takodjer izostaviti.

4.2 Hahn-Banachov teorem

Hahn-Banachov teorem zasigurno je jedan od važnijih teorema funkcionalne analize. Zbog razumljivosti i ljepote svog dokaza, i njegovih mnogobrojnih posljedica koje su same po sebi veliki rezultati, a takodjer imaju jednostavne dokaze, studentima se preporučuje da posebno obrate pažnju na ovu sekciju skripte "Uvod u funkcionalnu analizu (Predavanja 2008/09)," koja je možda i jedna od najvažnijih i najljepših u kursu.

Teorem 4.2.1 (HAHN-BANACH) Neka je X realan Banachov prostor, i L vektorski podprostor od X . Neka je na L definiran linearan ograničen funkcional $f : L \rightarrow \mathbb{R}$. Tada postoji linearan ograničen funkcional $f^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ takav da

- a. $(\forall x \in L) : f^*(x) = f(x),$
- b. $\|f^*\| = \|f\|.$



Dakle, na osnovu Hahn-Banachovog teorema imamo da svaki linearan ograničen funkcional f definiran na bilo kojem podprostoru $L \subseteq X$ ima svoju ekstenziju f^* definiranu na cijelom prostoru X , te da je pri tome očuvana norma. To je vrlo lijep rezultat, što nam takodjer potvrdjuju i mnogobrojne posljedice Hahn-Banachovog teorema, poput:

Teorem 4.2.2 Neka je $0 \neq x_0 \in X$. Tada postoji ograničen linearan funkcional $f^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ takav da

- a. $f^*(x_0) = \|x_0\|$
- b. $\|f^*\| = 1.$

Teorem 4.2.3 Neka je X Banachov prostor, $L \subset X$ njegov podprostor, i $x_0 \in X \setminus L$. Tada postoji ograničen linearan funkcional $f^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ takav da

- a. $(\forall x \in L) : f^*(x) = 0$
- b. $f^*(x_0) = d(x_0, L)$
- c. $\|f^*\| = 1.$

Što se tiče zadataka iz ove sekcije, oni mogu biti čak iskazani u obliku spomenutih posljedica Hahn-Banachovog teorema, jer su im dokazi sasvim jednostavni i razumljivi. Naravno, zbog široke primjene ovog teorema i njegovih posljedica, mnoštvo je i drugih tipova zadataka. Ovdje ćemo navesti samo nekoliko takvih.

ZADATAK 4.2.1 Neka je X Banachov prostor, i $x, y \in X$. Ako za svaki linearan ograničen funkcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = f(y),$$

onda je $x = y$. Dokazati!

Rješenje: Posmatrajmo element $x - y \in X$. Na osnovu prve navedene posljedice Hahn-Banachovog teorema, zaključujemo da postoji linearan ograničen $f^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ takav da

$$f^*(x - y) = \|x - y\|,$$

što je, zbog linearnosti funkcionala f^* , ekvivalentno sa

$$f^*(x) - f^*(y) = \|x - y\|.$$

Kako $f(x) = f(y)$ vrijedi za sve linearne ograničene funkcionale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, onda vrijedi i $f^*(x) = f^*(y)$, pa imamo

$$0 = \|x - y\|,$$

odnosno, zbog osobine (N2) norme,

$$x - y = 0,$$

tj. $x = y$, što je i trebalo dokazati. ▲

Ovaj vrlo lijep rezultat još jednom nam ukazuje na značaj fukcionala. Naime, sada nam je omogućeno da jednakost dva elementa u proizvoljnem prostoru X posmatramo preko jednakosti u nama bliskom skupu \mathbb{R} , jer je dokazano da je dovoljan uslov za jednakost dva elementa jednakost vrijednosti svih linearnih ograničenih funkcionala u tim tačkama.

ZADATAK 4.2.2 Neka normiran linearan vektorski prostor X sadrži n linearno nezavisnih vektora. Dokazati da postoji n linearno nezavisnih linearnih ograničenih funkcionala $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Rješenje: Neka je $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ skup od n linearne nezavisnih vektora u X . Posmatrajmo skupove

$$L_i = \mathcal{L}(A_i), \text{ pri čemu je } A_i = A \setminus \{e_i\} \quad (i \in \overline{1, n}).$$

Neka je $i \in \overline{1, n}$ proizvoljan i fiksiran. Kako su po pretpostavci e_1, e_2, \dots, e_n linearne nezavisne vektori, onda skup A_i sigurno ne može generirati cijeli prostor X , tj. vrijedi

$$L_i \subset X,$$

a zbog iste činjenice zaključujemo i da

$$e_i \notin L_i.$$

Na osnovu druge navedene posljedice Hahn-Banachovog teorema, sada znamo da postoji ograničen linearan funkcional $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ takav da

- a. $(\forall x \in L_i) : f_i(x) = 0$
- b. $f_i(e_i) = d(e_i, L_i)$
- c. $\|f_i\| = 1$.

Želimo pokazati da $d(e_i, L_i) \neq 0$. To jednostavno slijedi iz činjenice da je L_i zatvoren kao konačnodimenzionalni vektorski prostor (generiran je sa $n - 1$ linearne nezavisnih vektora, pa je dimenzije $n - 1$). Naime, prisjetimo se da je

$$d(e_i, L_i) = \inf\{d(e_i, y) : y \in L_i\},$$

a kako je $e_i \notin L_i$, i L_i zatvoren, sigurno se neće desiti da ovaj infimum bude nula. Konačno, pokažimo da su ovako dobijeni funkcionali f_1, f_2, \dots, f_n upravo traženih n linearne nezavisnih funkcionala. U tu svrhu posmatrajmo njihovu linearnu kombinaciju, i neka

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j = 0.$$

Navedena suma je jedan funkcional, pa posmatrajmo njegovo djelovanje u vektorima e_i :

$$0 = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right)(e_i) = \alpha_i f(e_i) = \alpha_i d(e_i, L_i).$$

Kako je $d(e_i, L_i) > 0$ mora vrijediti $\alpha_i = 0$, i to za proizvoljan $i \in \overline{1, n}$. Dakle, dobili smo da

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j = 0 \quad \Rightarrow \quad (\forall i \in \overline{1, n}) : \alpha_i = 0,$$

pa su f_1, f_2, \dots, f_n linearne nezavisne. (Relacija c. iz posljedice nam je bila suvišna za ovaj zadatak, ali možemo primjetiti da smo čak pronašli n linearne nezavisne normirane funkcionalne.) \blacktriangleleft

4.3 Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala

Ova je sekcija svakako jedna od najznačajnijih i "najopipljivijih" u kursu funkcionalne analize. Naime, postoji nekoliko "ogromnih" rezulata kada su u pitanju ograničeni linearni funkcionali na pojedinim poznatim Banachovim prostorima, poput $l_p, c_0, C[a, b], L_p$. Pokazuje se tačno kakav oblik moraju imati svi funkcionali na odredjenom prostoru, te kolika je tačno njegova norma, što je iznenadjujuće lijep rezultat. Upravo zbog toga ćemo ovdje navesti neke od tih rezulata u obliku primjera, a dokazi istih nalaze se u "Uvod u realnu i funkcionalnu analizu", S. Aljančić.

ZADATAK 4.3.1 Neka je $f : l_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi

$$(\exists! y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty) (\forall x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1) : f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.2 Neka je $f : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional ($1 < p < \infty$). Tada vrijedi

$$(\exists! y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) (\forall x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_p) : f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.3 Neka je $f : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi

$$(\exists!y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1)(\forall x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0) : f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.4 Neka je $f : l_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi

$$(\exists!y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty)(\forall x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1) : f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \xi_i,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.5 Neka je $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi

$$(\exists!y \in V[a, b], y(a) = 0)(\forall x \in C[a, b]) : f(x) = \int_a^b x(t) dy(t),$$

i pri tome je $\|f\| = V_a^b y$.

ZADATAK 4.3.6 Neka je $f : L_p(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional ($1 < p < \infty$). Tada vrijedi

$$(\exists!y \in L_q(a, b), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)(\forall x \in L_p(a, b)) : f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

ZADATAK 4.3.7 Neka je $f : L_1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ograničen linearan funkcional. Tada vrijedi

$$(\exists! y \in L_\infty(a, b)) (\forall x \in L_1(a, b)) : f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

i pri tome je $\|f\| = \|y\|$.

4.4 Konjugovani prostori

Skup svih ograničenih linearnih funkcionala $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ označavati ćemo sa X^* , i nazivati ga dualni/adjungovani/konjugovani prostor prostora X . Dakle, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, a kako smo ranije pokazali da je za normirani vektorski prostor X i Banachov prostor Y i $\mathcal{L}(X, Y)$ Banachov, jasno je da je za normirani vektorski prostor X dualni prostor X^* Banachov.

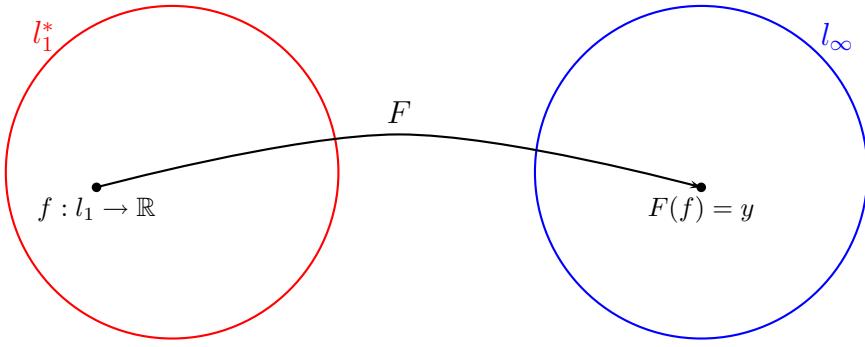
Ponovno ćemo imati iznimno lijepo rezultate o dualnim prostorima pojedinih Banachovih prostora - pokazati će se tačno kakvu strukturu ima prostor X^* . Te tvrdnje upravo su posljedica rezultata iz prethodne sekcije. Naime, iz ranijih zadataka zaključujemo da postoji dobro definirano preslikavanje F između odgovarajućih prostora X^* i Y , a lako se pokazuje da je F izomorfizam i izometrija. Pokažimo to na prvom primjeru, a dokazi za ostale prostore su analogni.

ZADATAK 4.4.1 Dokazati da vrijedi $l_1^* = l_\infty$.

Rješenje: U prvom zadatku prethodne sekcije pokazano je da svaki linearan ograničen funkcional $f : l_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ima oblik

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1),$$

pri čemu je $y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty$, i $\|f\| = \|y\|$. Posmatrajmo preslikavanje $F : l_1^* \rightarrow l_\infty$ koje svakom ograničenom linearnom funkcionalu $f : l_1 \rightarrow \mathbb{R}$ pridružuje odgovarajući $y \in l_\infty$. Kako je dokazano da vrijedi $\|f\| = \|y\|$, odmah zaključujemo da je F izometrija.



Dokažimo da je F izomorfizam. Lako uočavamo da je F sirjekcija, jer za svaki $y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty$ postoji linearan ograničen funkcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, takav da je $F(f) = y$. Na osnovu definicije preslikavanja F jasno da je da će taj funkcional biti definiran sa

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1).$$

(U dokazu navedenog zadatka iz prethodne sekcije pokaže se da je ovako definirana funkcija f zaista linearan ograničen funkcional na l_1 .) Neka su sada $f_1, f_2 \in l_1^*$ proizvoljni. Na osnovu dokazane tvrdnje, oni moraju biti sljedećeg oblika

$$f_1(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i^{(1)} \xi_i, \quad f_2(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i^{(2)} \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1),$$

pri čemu su $y_1 = (\eta_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}, y_2 = (\eta_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty$ jedinstveno određeni. Na osnovu definicije preslikavanja F , vrijedi $y_1 = F(f_1), y_2 = F(f_2)$. Ako pretpostavimo da $y_1 \neq y_2$, jasno je da je tada $f_1 \neq f_2$. Naime, kako su po pretpostavci y_1 i y_2 različiti, oni se razlikuju u barem k -toj koordinati. Uzmememo li x kao vektor koji ima sve nule, te jedinicu samo kao k -tu koordinatu, jasno je da $x \in l_1$, i da

$$f_1(x) = \eta_k^{(1)} \neq \eta_k^{(2)} = f_2(x),$$

pa su i funkcionali f_1 i f_2 različiti, tj. F je injekcija. Dakle, F je bijekcija, pa je ostalo još da pokažemo da vrijedi

$$F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F(f_1) + \beta F(f_2).$$

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i^{(1)} \xi_i + \beta \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i^{(2)} \xi_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\alpha \eta_i^{(1)} + \beta \eta_i^{(2)}) \xi_i,$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
 F(\alpha f_1 + \beta f_2) &= y \\
 &= (\alpha \eta_i^{(1)} + \beta \eta_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \\
 &= \alpha(\eta_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}} + \beta(\eta_i^{(2)})_{i \in \mathbb{N}} \\
 &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\
 &= \alpha F(f_1) + \beta F(f_2).
 \end{aligned}$$

Dakle, F je izomorfizam i izometrija, pa je $l_1^* = l_\infty$. \blacktriangle

ZADATAK 4.4.2 Dokazati da vrijedi $l_p^* = l_q$, ($1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

ZADATAK 4.4.3 Dokazati da vrijedi $c_0^* = l_1$.

ZADATAK 4.4.4 Dokazati da vrijedi $C[a, b]^* = NV_0[a, b]$, pri čemu je $NV_0[a, b]$ skup svih funkcija iz $V[a, b]$ koje su neprekidne s desne strane (tzv. normalizovane funkcije ograničene varijacije).

ZADATAK 4.4.5 Dokazati da vrijedi $L_p(a, b)^* = L_q(a, b)$, ($1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

ZADATAK 4.4.6 Dokazati da vrijedi $L_1(a, b)^* = L_\infty(a, b)$.

Naravno, jednakosti u prethodnim primjerima nisu jednakosti na kakve smo možda do sada navikli. Posmatramo li samo prvi primjer, primjećujemo da su elementi prostora l_1^* funkcionali, dok su elementi prostora l_∞ nizovi, pa navedena jednakost ne podrazumijeva jednaku prirodu elemenata. Ona ustvari podrazumijeva činjenicu da se radi o prostorima koji su algebarski izomorfni i izometrični, pa ih sa aspekta funkcionalne analize možemo iden-

tificirati.

Još jedan iznimno važan rezultat iskazan je u sljedećem teoremu:

Teorem 4.4.1 *Neka je X proizvoljan normiran linearni vektorski prostor, i X^{**} dualni prostor njegovog dualnog prostora X^* . Tada vrijedi*

$$X \subseteq X^{**}.$$

Jasno, i ovdje nas ne zanima priroda elemenata prostora X i X^* (koja je naravno različita), već samo njihova algebarska i metrička struktura. S obzirom na posljednji teorem, ima smisla sljedeća definicija:

Definicija 4.4.1 (REFLEKSIVAN PROSTOR) *Neka je X Banachov prostor. X je refleksivan prostor ako vrijedi $X = X^{**}$, a u suprotnom, ako vrijedi $X \subset X^{**}$, nazivamo ga irefleksivnim.*

Uzmemo li u obzir prethodne primjere, potpuno je jasno da su prostori l_p i $L_p(a, b)$, ($1 < p < \infty$) refleksivni, a c_0 i $C[a, b]$ irefleksivni. (Zašto?)

4.5 Slaba konvergencija

Još jedan zanimljiv pojam u ovom poglavlju svakako je i pojam slabe konvergencije. Konvergencija na kakvu smo do sada navikli, definiranu preko norme odgovarajućeg prostora, je ustvari jaka konvergencija. Međutim, zanimljivo je posmatrati konvergenciju niza u X i na jedan drugi način, preko funkcionala $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Definicija 4.5.1 (SLABA KONVERGENCIJA) *Neka je X Banachov prostor. Niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ slabo konvergira ka $x_0 \in X$ ako vrijedi*

$$(\forall f \in X^*) : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Pišemo $x_n \rightharpoonup x_0$ ($n \rightarrow \infty$).

Dakle, pojam slabe konvergencije omogućava nam posmatranje "konvergencije" nekog niza u X preko konvergencije nama bližih brojnih nizova, i to tako što posmatramo vrijednosti svih funkcionala f u tačkama početnog niza. To je još jedna u nizu potvrda moći i važnosti funkcionala za funkcionalnu analizu.

ZADATAK 4.5.1 *Jaka konvergencija povlači slabu konvergenciju, ali obrat ne vrijedi. Dokazati!*

Rješenje: Neka niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergira jako, $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Neka je $f \in X^*$ proizvoljan. Kako je f linearan i ograničen, imamo

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| = \|f(x_n - x_0)\| \leq \|f\| \|x_n - x_0\|,$$

pa $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$), odnosno

$$x_n \rightharpoonup x_0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dakle, dobili smo da je svaki jako konvergentan niz slabo konvergentan, a sada pokažimo da obrat ne vrijedi. Posmatrajmo prostor $X = l_2$ i u njemu niz jediničnih vektora $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Jasno je da niz $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ne konvergira jako u l_2 , jer

$$\|x_m - x_n\| = \|e_m - e_n\| = \sqrt{2},$$

pa $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nije ni Cauchyev. S druge strane, posmatramo li proizvoljan $f \in l_2^*$, na osnovu prethodnih sekcija f ima oblik

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i \xi_i \quad (x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}),$$

pri čemu je $y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2$. Dakle, $f(e_i) = \eta_i$. Medjutim, kako je $y \in l_2$, vrijedi $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\eta_i|^2 < \infty$, pa $|\eta_i|^2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), tj.

$$\eta_i \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Stoga za sve funkcionale $f : l_1 \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(e_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0,$$

pa je niz $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ slabo konvergentan. ▲

Primjedba 4.5.1 *Još iz Matematičke analize I poznato je da za niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) i neprekidnu funkciju f vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n),$$

tj. da limes i djelovanje funkcije f mogu mijenjati mesta. Posmatrajmo sada niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ koji je slabo konvergentan, tj. niz za koji vrijedi

$$(\forall f \in X^*) : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Kako je, po definiciji dualnog prostora X^* , f neprekidan funkcional, iskoristimo prethodnu osobinu:

$$(\forall f \in X^*) : f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Prisjetimo se jednog od ranijih zadataka, gdje smo na osnovu posljedice Hahn-Banachovog teorema pokazali da

$$[(\forall f \in X^*) : f(x) = f(y)] \Rightarrow x = y.$$

Na osnovu toga, sada bismo dalje imali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

odnosno da je niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jako konvergentan. Dakle, zaključili smo da je svaki slabo konvergentan niz i jako konvergenta, što sigurno nije tačno na osnovu prethodnog zadatka. Gdje je greška?

Navedeno mijenjanje mjesta limesa i djelovanja funkcije f moguće je, kao što je to uostalom i navedeno na početku primjedbe, samo ukoliko je niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (jako) konvergentan, što ne mora biti slučaj.

Dalje se analogijom mogu uvoditi pojmovi slabo Cauchyevog niza, slabe kompaktnosti, itd.