NOTA DE CLASE

Capitalización Compuesta Continua

El concepto de capitalización continua supone una frecuencia de capitalización muy grande, tendiendo a infinito o, lo que es lo mismo, que el periodo de capitalización es infinitisesimalmente pequeño, tendiendo a cero. .

Partimos de la fórmula de capitalización compuesta tiempo discreto (2.1)

$$S_n = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\,t}$$

Para el caso de capitalización continua, el monto es:

$$\lim_{m\to\infty} S_n = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\,t} \qquad (2.1.A)$$

Podemos transformar la anterior en:

$$\lim_{m\to\infty} S_n = K_0\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\left(\frac{m}{i}\right)i\,t} \qquad (2.2.A)$$

la cual escribimos como:

$$\lim_{m\to\infty} S_n = K_0 \lim_{m\to\infty} Z^{\,i\,t}$$

donde:

$$Z = \left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\left(\frac{m}{i}\right)}$$

La deducción rigurosa de (2.2.A) es bastante complicada, por lo que nos aproximamos con una serie de ejemplos numéricos.

Supongamos que la tasa de interés anual es del 10 % y que la frecuencia de capitalización es mensual, esto es, m = 12. En este caso tenemos que:

$$Z = \left(1 + \frac{1}{\frac{12}{0.1}}\right)^{\left(\frac{12}{0.1}\right)} = 2.70704149$$

si la frecuencia de capitalización es diaria y m = 365:

$$Z = \left(1 + \frac{1}{\frac{365}{0.1}}\right)^{\left(\frac{365}{0.1}\right)} = 2.71790956$$

Si la capitalización es por segundo, tendremos que m = 365x24x60x60 = 31,536,000 y el valor de Z es:

$$Z = \left(1 + \frac{1}{\frac{31{,}536{,}000}{0.1}}\right)^{\left(\frac{31{,}536{,}000}{0.1}\right)} = 2.71828$$

Con estos resultados numéricos podemos decir que el valor de Z tiende a 2.718281828..., esto es, el número e, la base de los logaritmos naturales. Aceptando lo anterior (sin haberlo demostrado), tenemos:

A. El monto o valor futuro en capitalización compuesta continua

$$\lim_{m \to \infty} S_n = K_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\left(\frac{m}{i}\right) i\, t} = S = K_0\, e^{\, i\, t} \qquad (2.3.A)$$

donde, como siempre, si i es la tasa de interés anual t es el tiempo completo de la operación medido en años.

Ejemplo:
Si se colocara la suma de $ 100,000 en una operación financiera a un año de plazo con cláusula de capitalización continua, el monto al final del año sería:

$$S = 100,000\, e^{\,0.1(1)} = 110,517.09$$

nótese que esta suma no es muy distinta que la que tendríamos en caso de una capitalización mensual. En efecto, con capitalización mensual tendríamos que el monto es de:

$$S = 100,000\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12(1)} = 110,471.30$$

B. Capital inicial o valor presente en capitalización continua

Despejando en (2.1.A), tenemos:

$$K_0 = \frac{S}{e^{\,i\,t}} = S\, e^{-i\,t} \qquad (2.4.A)$$

Ejemplo
Qué suma de dinero tendríamos que depositar hoy para alcanzar la cantidad de $ 100,000 dentro de tres meses, considerando una tasa de interés anual del 12% y capitalización continua.
Datos: S = 100,000; i = 0.12; t = 3/12 = 0.25; K = ¿?

$$K_0 = 100,000\, e^{-0.12(025)} = 97,044.55$$

C. Tasa de interés en capitalización continua

Despejando i en (2.1.A):

$$i = \frac{ln\left(\frac{S}{K_0}\right)}{t} = \frac{ln\ S - ln\ K_0}{t} \qquad (2.5.A)$$

Ejemplo

¿A qué tasa de interés anual habría que colocar la cantidad de \$ 100,000 durante 9 meses para obtener la suma de \$ 106.183.65?

Datos: S = 106,183.65; K_0 = 100,000; t = 9 / 12 = 0.75; i = ¿?

Aplicando (2.5.A):

$$i = \frac{ln\left(\frac{106{,}183.65}{100{,}000}\right)}{0.75} = 0.08 = 8\%$$

D. El plazo en capitalización continua

Si la incógnita de nuestro problema es el tiempo, podemos despejar esa variable en (2.1.A):

$$t = \frac{ln\left(\frac{S}{K_0}\right)}{i} = \frac{ln\ S - ln\ K_0}{i} \qquad (2.6.A)$$

Ejemplo:

¿Cuántos días debería estar invertida la suma de \$ 140,000.00 para alcanzar la cantidad de \$ 157,849.56 si la tasa de interés anual es del 15% y la capitalización es continua?

Datos: S = 157,849.56; K_0 = 140,000 ; i = 0.15 ; t = ¿?

$$t = \frac{ln\left(\frac{157,849.56}{140,000}\right)}{0.15} = 0.8$$

Puesto que estamos usando la tasa de interés anual, la respuesta es =.0.8 años. Si consideramos el año de 365 días, tenemos que 0.8 años es igual a 0.8 x 365 = 292 días.

Debemos enfatizar que la fórmulas de capitalización compuesta continua no se utilizan en la práctica del negocio financiero, porque un periodo de capitalización que tiene una duración tendiendo a cero o, lo que es lo mismo, una frecuencia de capitalización que tiende a infinito es una abstracción, no una modalidad financiera práctica. Sin embargo, las fórmulas de capitalización continua son muy utilizadas en tratamientos teóricos de problemas financieros que por su naturaleza resulta conveniente plantearlos en el contexto de tiempo continuo.