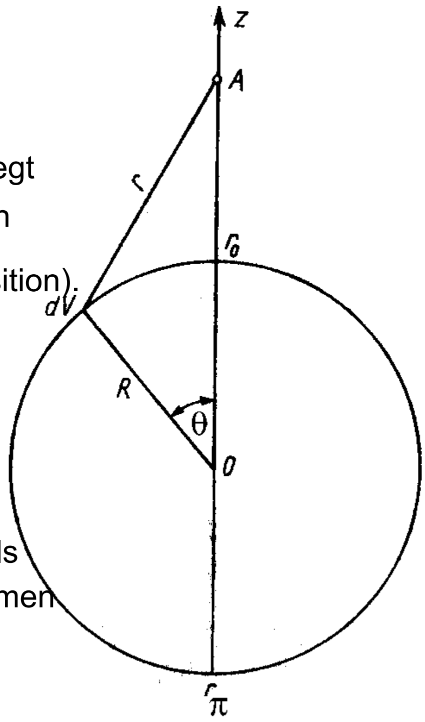
Inneres und äußeres Gravitationsfeld einer Kugel mit zentralsymmetrischer Masseverteilung



Das Gravitationspotential $\varphi(\vec{r})$ einer Masseverteilung $\rho(\vec{r})$ unterliegt der POISSON-Gleichung $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$. Eine Probemasse wird darin beschleunigt mit $\vec{g} = -grad\varphi$ und φ = – G $\varphi = -G\int\frac{\rho dV}{r}$ (Superposition). Beispielsweise ist mit der Punktmasse $\rho(\vec{r}) = M\delta(\vec{r})$ verbunden $\varphi = -\frac{GM}{r}$ und $\vec{g} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ (NEWTON). Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes einer zentralsymmetrischen Masseverteilung liegt es nahe, das Feld einer Kugelschicht (dünne Hohlkugel) im Aufpunkt A zu untersuchen (s. Skizze) und durch Integration mittels Kugelkoordinaten $dV = R^2 \sin\theta dRd\theta d\varphi$ das Gesamtfeld zu bestimmen.

$$\varphi(A) = -G\rho R^2 dR \cdot \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta d\theta d\phi}{r} = -2\pi G\rho R^2 dR \cdot \int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{r}.$$

Wegen des Kosinussatzes $r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta$ und $d\left(r^2\right) = 2rdr = 2Rz\sin\theta d\theta$ gilt

$$\varphi(A) = -2\pi G\rho R^2 dR \cdot \int_{r_0}^{r_\pi}\frac{rdr}{Rz} = -2\pi G\rho RdR\frac{r_\pi - r_0}{z}.$$

1) Außerhalb des Kugelringes $z > R$ gilt $r_\pi - r_0 = 2R$ oder $\varphi = -4\pi G\rho R^2 dR\frac{1}{z} = -\frac{GdM}{z}$, wegen des Superpositionsprinzips also: Das Außenfeld einer zentralsymmetrischen Massenverteilung ist so, als ob die gesamte Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre.

2) Innerhalb eines Kugelringes $z < R$ gilt $r_\pi - r_0 = 2z$ oder $\varphi = -4\pi G\rho RdR = -\frac{GdM}{R}$ herrscht also ein konstantes Potential; die Gravitationskraft ist dort null.

3) Damit läßt sich das Feld im Innern einer Vollkugel bestimmen – im Abstand z vom Zentrum (z_0 sei der Radius der Gesamtkugel). Sie wird zerlegt in eine innere Vollkugel $0\cdots z$ und eine äußere Hohlkugel $z\cdots z_0$. Es zählt, siehe oben, nur der Beitrag der inneren Vollkugel: $g(z) = \frac{GM(z)}{z^2} = g(z_0)\frac{z}{z_0}$. Im Innern einer homogenen Vollkugel steigt die Gravitationskraft also proportional zum Abstand vom Zentrum (Tunnel - Aufgabe).