

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕЧАТИ

---

---

**Е. В. Никульчев**

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИЙ  
РЕКОНСТРУИРОВАННЫХ АТТРАКТОРОВ**

**Учебное пособие**

Москва 2010

УДК 519.711.3

ББК 22.18

Н 65

Рецензенты:

**А. И. Дивеев**, д. т. н., профессор  
(Вычислительный центр РАН);

**Е. Е. Ковшов**, д. т. н., профессор  
(МГТУ «СТАНКИН»).

Н 65 *Никульчев Е. В.*

Идентификация динамических систем на основе симметрий реконструированных аттракторов : учеб. пособие / Е. В. Никульчев. — М. : МГУП, 2010. — 100 с.

ISBN 978–5–8122–1081–6

Учебное содержит изложение качественной теории нелинейной динамики и ее приложения для идентификации нелинейных динамических систем.

Во введении проведен обзор методов идентификации. В первой главе приведены современные методы нелинейной динамики — реконструкции аттракторов по временным рядам. Третья глава посвящена разработанным алгоритмам поиска симметрий в реконструированном аттракторе динамических систем. Четвертая глава посвящена методу восстановления динамических уравнений, использующего найденные симметрии. Пособие целостно излагает суть оригинального разработанного автором подхода и заканчивается примером построения модели реального объекта — трафика корпоративной сети. В качестве задания на самостоятельную работу рекомендуется построить модели различных объектов.

Пособие предназначено для дисциплины «Исследование систем управления» по направлению «Менеджмент», также может быть полезно магистрантам и аспирантам физико-математических и технических направлений, изучающим современные методы моделирования нелинейных систем.

*Учебное пособие подготовлено при частичной финансовой поддержке  
РФФИ (проект №07-08-00433а)*

ISBN 978–5–8122–1081–6

© Е. В. Никульчев, 2010

© Московский государственный  
университет печати, 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ</b> .....	5
<b>2. МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b> .....	12
2.1. ОБЗОР ПОДХОДОВ.....	12
2.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....	15
2.2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУБЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ .....	23
2.3. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ .....	29
2.4. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК .....	43
2.5. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕКОНСТРУКЦИИ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ .....	46
2.6. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ .....	51
<b>3. ВЫЯВЛЕНИЕ СИММЕТРИЙ В РЕКОНСТРУИРОВАННОМ АТТРАКТОРЕ</b> .....	64
3.1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ .....	64
3.2. ПРЕДОБРАБОТКА ДАННЫХ .....	67
3.3. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ ПОДБОР РЕШЕНИЙ.....	75
3.4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ .....	80
<b>4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</b> .....	85
<b>5. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ</b> .....	92
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	96

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

---

Системный анализ в целом, и теория управления в частности, является одной из областей науки, остро реагирующих на новые математические и физические подходы. Часто специалисты в области исследования управляемых объектов формируют не только новые технические знания, но определяют многие научные направления в технической физике, вычислительной математике и др. Невозможно себе представить задачи теории управления без собственно «математической теории управления».

Требования к качеству управлению современными сложными процессами определяет требования к математическим моделям, и, следовательно, к методам идентификации.

В представленном учебном пособии изложен авторский метод построения идентифицируемых моделей аффинных систем на основе современных представлений нелинейной динамики. Последовательно излагаются методы оценки инвариантных характеристик по экспериментальным данным, реконструкции аттракторов по временным рядам, поиска симметрий в фазовых траекториях, параметрической идентификации. Вместе с тем в пособии в первой главе изложены основные классические подходы к идентификации, что дает ясное представление о роли и месте разработанного подхода.

Пособие будет полезно студентам технических и физико-математических специальностей, а также аспирантам, ведущим свои исследования в области управления, вычислительной техники и информатики.

Д. А. Новиков  
чл.-корр. РАН, д. т. н., профессор,  
зам. директора по научной работе  
Института проблем управления  
им. В. А. Трапезникова РАН

# 1. ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

---

Проблема идентификации является в настоящее время одной из основных проблем системного анализа и его приложений в различных областях. При идентификации предполагается экспериментальное изучение и сопоставление входных и выходных процессов, и задача идентификации состоит в выборе соответствующей математической модели. Модель должна быть такой, что ее реакция и реакция объекта на один и тот же входной сигнал должны быть, в известном смысле, близкими. Результаты решения задачи идентификации являются исходными данными для проектирования систем управления, оптимизации, анализа параметров систем и т. д.

Статические математические модели систем получают тремя способами: экспериментально-статистическими, детерминированными и смешанными.

Экспериментально-статистические способы требуют проведения активных или пассивных экспериментов на действующем объекте. Стохастические модели используют для решения различных задач, связанных с исследованием и управлением процессами [1–6]. В большинстве случаев эти модели получают в виде линейных уравнений регрессии.

Исходя из свойств реальных процессов, можно утверждать, что уравнения взаимосвязи переменных процесса должны иметь иную, возможно, более сложную структуру. Чем более «далека» структура уравнений регрессии от «истинной», тем меньше будет точность прогноза с увеличением диапазона изменения переменных процесса. Это ухудшает качество управления и, следовательно, уменьшает качество функционирования объекта в оптимальном режиме.

Детерминированные модели составляют «на основании физических закономерностей и представлений о процессах». Следовательно, их можно получать еще на стадии проектирования процесса. В настоящее время на базе детерминированного подхода разработано несколько методов построения математических моделей непрерывных процессов [7, 8]. Так, например, при математическом моделировании ряда процессов в химической технологии применяется метод многомерного фазового пространства. Сущность метода заключается в том, что протекание моделируемого технологического процесса рассматривает-

ся как движение некоторых «изображающих точек» в многомерном фазовом пространстве. Это пространство определено как пространство декартовой системы координат, по осям которого отложены пространственные координаты аппарата и внутренние координаты реагирующих твердых частиц. Каждая точка в многомерном фазовом пространстве описывает определенное состояние моделируемого процесса. Число этих точек равно числу частиц в аппарате. Протекание технологического процесса характеризуется изменением потока изображающих точек.

Метод многомерного фазового пространства наиболее широко применяется для построения математических моделей [9]. Однако этот метод имеет и недостатки, которые ограничивают область его применения:

- многомерное координатное (фазовое) пространство хорошо определяет состояние процесса, но никак не определяет его движения, т. е. возможных изменений переменных процесса, поэтому метод хорошо применим для процессов, начальное и конечное состояние которых заранее известно;
- допущение о том, что координаты можно считать независимыми часто является слишком грубым;
- применение этого метода вызывает определенные трудности, когда необходимо учитывать различное время взаимодействия подсистем.

Таким образом, из-за перечисленных особенностей метода многомерного фазового пространства, использовать его для построения математических моделей технологических процессов на основании сведений, получаемых без проведения экспериментов на промышленных объектах, весьма затруднительно.

Как правило, в результате теоретического анализа процесса удается получить математическую модель, параметры которой необходимо уточнять в процессе управления технологическим объектом. На рис. 1 приведена общая схема решения задач идентификации.

Несмотря на большое количество публикаций по параметрической идентификации динамических объектов [7, 10–13] вопросам идентификации нестационарных параметров уделяется недостаточное внимание. При рассмотрении известных подходов к нестационарной параметрической идентификации можно выделить две группы.

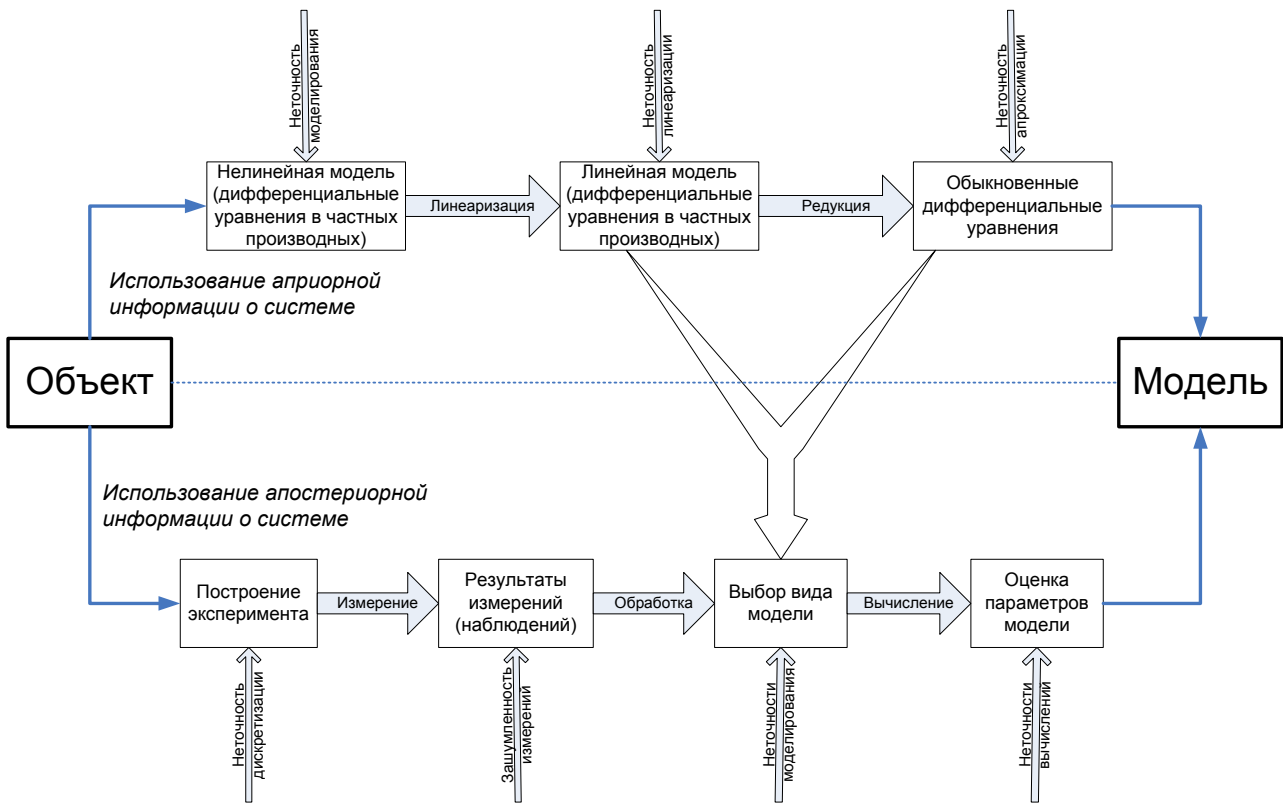


Рис. 1.1. Идентификация динамических систем

К первой группе относятся работы, в которых существенным образом используется априорная информация об идентифицируемых параметрах. В основе первого подхода данной группы лежит гипотеза о том, что идентифицируемые параметры являются решениями известных однородных систем разностных уравнений или же представляются в виде случайного процесса, порожденного марковской моделью, т. е. являются решениями известных систем дифференциальных или разностных уравнений с возмущениями типа белого шума, характеризующегося гауссовским распределением, известными средними значениями и интенсивностью. Такой подход правомерен при наличии большого объема априорной информации об искомым параметрах и при несоответствии реальных параметров принятой модели приводит к потере сходимости алгоритма.

Второй подход, относящийся к первой группе, базируется на параметризации нестационарных параметров и использует гипотезу о возможности точного представления нестационарных идентифицируемых параметров на всем интервале или отдельных подинтервалах идентификации в форме конечной, как правило, линейной комбинации известных функций времени с неизвестными постоянными весовыми коэффициентами, в частности в виде конечной суммы членов ряда Тейлора, гармонического ряда Фурье, обобщенного ряда Фурье по системам ортогональных функций Лагерра, Уолша [12].

Простейшим случаем параметризации является представление нестационарных параметров постоянными величинами на последовательности отдельных подинтервалов, покрывающих интервал идентификации [14].

При текущей идентификации рекомендуют переходить к скользящему интервалу времени  $[t - T, t]$  длительности  $T$  и считать на этом интервале искомые параметры постоянными или же точно представимыми в виде интерполяционного полинома конечной степени, или указанной конечной линейной комбинации. К данному подходу могут быть отнесены работы [15, 16], базирующиеся на использовании итерационного метода наименьших квадратов. В этих работах из-за использования экспоненциального (с отрицательным показателем) весового множителя в минимизируемом квадратичном функционале, определенном на текущем интервале времени  $[0, t]$ , с течением времени происходит «стирание» старой информации о координатах объекта. Такое положение, по существу, соответствует идее постоянства идентифицируемых параметров на некотором скользящем интервале времени при учете информации о состоянии объекта на этом интервале с экспоненциальным весом.

Данный подход позволяет непосредственно распространить методы идентификации стационарных параметров на случай идентификации нестационарных параметров. Однако на практике основополагающая гипотеза этого подхода не выполняется и можно говорить лишь о приближенном представлении (аппроксимации) искомых параметров конечной линейной комбинацией известных функций времени с неизвестными постоянными весовыми коэффициентами. Такое положение приводит к возникновению методической ошибки идентификации, которая принципиально изменяет существо обсуждаемого подхода, так как при этом длительность  $T$  интервала аппроксимации и число членов линейной комбинации становятся параметрами регуляризации. Данная методическая ошибка, как правило, не принимается во внимание. В частности, в предположении о прямолинейном законе изменения искомых параметров на больших, значительно превосходящих  $T$ , подинтервалах времени и ряде ограничений на статистические характеристики координат регрессионной модели объекта и действующей помехи был предложен адаптивный алгоритм коррекции параметра  $T$ . Пренебрежение методической ошибкой приводит к тому, что рассматриваемый подход оказывается, по существу, совершенно не исследованным, область его работоспособности в условиях нестационарности идентифицируемых параметров не определена и можно говорить о применимости этого подхода только в частном случае точного выполнения указанной гипотезы.



**Ко второй группе** относятся методы, использующие значительно меньший объем информации об искомых параметрах, причем данная информация используется лишь на этапе выбора параметров алгоритма идентификации.

Первый подход, относящийся к этой группе, базируется на применении градиентных самонастраивающихся моделей. Такой подход обсуждался в работах по параметрической идентификации линейных и нелинейных динамических объектов [10, 17]. Основное достоинство этого подхода состоит в том, что он приводит к замкнутой системе идентификации и, тем самым, обладает определенными преимуществами в плане помехоустойчивости по сравнению с разомкнутыми методами идентификации. Недостатки указанного подхода связаны с необходимостью измерения компонент градиента критерия настройки, представляющих собой функциональные производные, требующие достаточно точной априорной информации о начальных значениях идентифицируемых параметров (для выбора начальных значений параметров модели, гарантирующих устойчивость работы системы идентификации) и отсутствием полного теоретического анализа динамики работы системы идентификации данного типа. Последнее объясняется сложностью системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающих процессы в контуре самонастройки, вследствие чего теоретический анализ проводится лишь в предположении медленного изменения параметров объекта и модели. В связи с этим не удается достаточно полно оценить область устойчивости, быстродействие и точность работы градиентных самонастраивающихся моделей, а тем самым четко определить область применимости систем указанного типа при текущей идентификации нестационарных параметров. Следует, однако, отметить, что с увеличением степени нестационарности искомых параметров значительно возрастают методические погрешности определения компонент градиента критерия настройки, в результате чего увеличивается ошибка идентификации за пределы зоны глобального экстремума минимизируемого критерия.

Особенно усиливается такой эффект с повышением числа идентифицируемых параметров из-за взаимосвязи каналов идентификации. Поэтому применение градиентных самонастраивающихся моделей принципиально ограничено случаем медленного изменения искомых параметров.

Второй подход базируется на использовании алгоритма Качмажа [12]. Известно, что основной алгоритм этого типа обладает слабой помехоустойчивостью и низким быстродействием. Такое положение побудило к созданию различных модификаций данного алгоритма, характеризующихся повышенным быстродействием. Тем не менее, быстродействие указанных модификаций по-

прежнему является невысоким, что априори ограничивает область применимости второго подхода случаем идентификации медленно изменяющихся параметров.

Ко второй группе также могут быть отнесены методы, предназначенные для идентификации только линейных динамических объектов и характеризуются дополнительными ограничениями (необходимость использования тестовых входных сигналов в виде совокупности гармоник или псевдослучайного периодического бинарного сигнала конечность интервала идентификации, наличие полной информации о входных и выходных сигналах объекта на всем интервале идентификации и возможность идентификации коэффициентов только левой части дифференциального уравнения). Благодаря этому возможны значительные ошибки идентификации на отдельных конечных подинтервалах времени, при этом также необходимо решать сложную краевую задачу.

Ряд методов (представление параметров в виде решений известных систем дифференциальных или разностных уравнений) может найти применение только в частных случаях, а другие методы (градиентные самонастраивающиеся модели, алгоритм Качмажа) априори характеризуются значительными ограничениями степени нестационарности искомых параметров. Отмеченные недостатки порождаются самой природой упомянутых методов и поэтому вряд ли существует возможность заметного снижения данных недостатков. Методы, основанные на параметризации нестационарных параметров, как отмечалось выше, являются совершенно не исследованными и в представленном виде могут найти ограниченное практическое применение. Однако в отличие от других методов, последний подход не содержит внутренних ограничений на степень нестационарности идентифицируемых параметров и оказывается принципиально применимым для идентификации на длительных интервалах времени широкого класса динамических объектов в режиме их нормального функционирования.

Перечисленные сложности идентификации реальных функционирующих систем определяют наиболее ориентированный на широкое использование подход к моделированию нелинейных объектов, заключающийся в выборе вида математической модели в виде эволюционного уравнения и последующей идентификации параметров, либо непараметрической идентификации модели. Модель считается адекватной, если оценка заданного критерия адекватности, вычисленная как зависимость невязки модели от экспериментальных данных находится в допустимых пределах.

В основе изучаемого в настоящем пособии подхода лежат работы автора [18], а также кандидатов технических наук, выполнявших диссертационные

исследования под научным руководством — к. т. н., доцента МГУПИ М. Е. Волочича, к. т. н., доцента МАТИ А. В. Челпанова, к. т. н., доцента МГУП Ю. Ю. Борисова, к. т. н. Козлова О.В., к. т. н., ст. пр. МГУП С. В. Паяина.

Автор выражает искреннюю благодарность всем, кто в разные годы обсуждал, и тем, кто продолжает обсуждать результаты научных исследований. Хочется особо отметить оказавших большое влияние на формирование полученных результатов, это: к. ф.-м. н., доцент А.В. Татаринцев (МИРЭА), д. т. н., профессор В. А. Головешекин (МГУПИ), к. т. н., доцент А. П. Хныкин (МГАПИ), к. т. н., доцент А. А. Моисеев (МГАПИ), д. т. н., профессор С. Н. Музыкин (МГАПИ), д. т. н., профессор Б. М. Михайлов (МГАПИ), д. т. н., профессор М. В. Ульянов (МГУП), к. ф.-м. н., доцент В. Б. Барахнин (ИВТ СО РАН), к. м. н. А. К. Лабуцкий (СГА), д. т. н., профессор М. А. Щербаков (ПГУ), д. т. н., профессор Е. И. Веремей (СПбГУ), д. ф.-м. н. В. А. Антонец (ИПФ РАН), д. т. н., профессор Б. В. Павлов (ИПУ РАН), д. т. н., профессор А. И. Дивеев (ВЦ РАН), к. т. н., доцент В. А. Серов (МГУПИ), д. т. н., профессор В. П. Хранилов (НГГТУ), д. т. н., профессор А. Н. Пылькин (РГРТУ), д. т. н., профессор В. Н. Белов (РГРТУ), д. т. н., профессор А. П. Горяшко (МГУП), д. ф.-м.н., профессор Ю. В. Рудяк (МГУП), д. т. н., профессор Ю. П. Голинков (МГУП), к. ф.-м. н., доцент В. Н. Петрушин (МГУП) и многие другие, а также аспиранты разных вузов страны, интересовавшиеся и обсуждавшие по электронной почте публикации.

Вместе с тем, все недостатки и недочеты пособия и разрабатываемого метода принадлежат только автору.

## 2. МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

---

### 2.1. ОБЗОР ПОДХОДОВ

В работе рассматриваются модели с управлением в виде системы дифференциальных уравнений со сосредоточенными параметрами с независимыми функциями (управлениями) или их дискретные аналоги, описываемые конечно-разностными уравнениями. Выбор класса объектов для моделирования обусловлен практической значимостью и разработанностью методов и средств управления для этих моделей. Например, моделирование распределенных систем с использованием разработанного аппарата представляется возможным, но, сколько-нибудь общие, инструментальные и методические средства синтеза управления для этого класса систем отсутствуют.

Моделирование динамической системы состоит из выделения трех компонентов:

- 1) определение фазового пространства в условиях ограничений;
- 2) выбор дискретности или непрерывности времени;
- 3) закона эволюции, т. е. отображение любой заданной точки в фазовом пространстве и любого значения времени в однозначно определенное состояние системы [19].

При этом для дискретного времени ищется закон эволюции в виде

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \psi(x, t, u), \\ y &= h(x(t)), \quad t \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

для непрерывного времени:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t), \\ y &= \tilde{h}(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^1,\end{aligned}$$

где  $x$  — вектор состояний;  $y$  — измеряемые процессы (далее, если это не определено особенностями задачи будем предполагать, что наблюдению доступны все состояния);  $t$  — время;  $f, \psi, h, \tilde{h}$  — в определенном смысле непрерывные и гладкие вектор-функции.

### **Построение инвариантных характеристик по наблюдаемым данным.**

Значительный интерес для практического применения представляют методы вычисления инвариантных характеристик и реконструкции аттрактора по временному ряду, полученному в ходе экспериментального исследования нелинейных систем (Ф. Такенс, Д. Рюэль, Н. Паккард, А. Вольф, Г. Г. Малинецкий, В. С. Анищенко, и др.) [20, 21].

Анализ публикаций по использованию инвариантных характеристик показывает, что доведено до практического применения в основном моделирование на основе нейросетевых и нечетких моделей [22]. В области управляемых систем такие модели ограничивают методы управления адаптивным подходом, что не позволяет в полной мере использовать нелинейную теорию динамических систем.

**Реконструкция систем по экспериментальным данным.** Проблема определения вида динамической системы по ее одномерной реализации относится к классу некорректных задач. В отличие от задачи анализа данная проблема неоднозначна, т. к. существует бесконечное множество динамических систем различного вида и различной сложности, способных воспроизвести имеющийся сигнал с заданной степенью точности. К настоящему моменту разработаны лишь общие рекомендации для случаев, когда исходная система не является слишком сложной.

Метод глобальной реконструкции уравнений динамической системы по ее одномерной реализации был предложен в [23, 24]. Алгоритм состоит в следующем. По одномерной реализации процесса в некоторой системе, которая считается «черным ящиком», восстанавливается фазовый портрет, по теореме Такенса, топологически эквивалентный аттрактору исходной системы [25]. По априорно заданным уравнениям, методом наименьших квадратов находится набор неизвестных коэффициентов.

В настоящее время имеется значительное количество работ, развивающих и совершенствующих предложенный метод. Например, в работах Р. Брауна и др. [26] для воссоздания динамических уравнений по экспериментальному временному ряду с широкополосным сплошным спектром использовалась дополнительная информация о динамических и статистических свойствах исходной системы, содержащаяся в реализации. При получении уравнений учитывались значения показателей Ляпунова [27] и плотности вероятности, рассчитанные по исходному временному ряду. Однако результирующие эволюционные уравнения имели очень громоздкий вид, неудобный для применения. В работе [28] для записи модельных уравнений использовались скрытые переменные. В [26] опи-

сывается метод синхронизации модели с исходными данными. В ряде работ О. Л. Аносова предложен алгоритм восстановления скалярного дифференциального уравнения для систем с задержкой.

Однако особенностью многих работ является то, что предлагаемые методы проиллюстрированы на примерах простых маломерных модельных систем, когда заранее известно, каким должен быть результат глобальной реконструкции. При этом не показаны существенные преимущества, даваемые каким-либо усовершенствованным методом по сравнению с [23]. Описываемые в доступных публикациях алгоритмы тестируются на ряде известных модельных систем, имеющих малую размерность и достаточно простой вид правых частей [23]. Например, в обзоре, приведенном в [21] аргументация в пользу новых сложных алгоритмов представляется неубедительной, т. к. работоспособность методов не продемонстрирована на примере сложных временных рядов, генерируемых реальными «черными ящиками».

К настоящему времени существует незначительное количество публикаций, в которых описывается применение данных методик к сигналам, порожденным реальными системами, об операторе эволюции которых ничего не известно. Все это, с одной стороны, создает предпосылки для разработки методологических основ моделирования нелинейных явлений по экспериментальным данным, с другой — нерешенной остается задача создания математических методов и моделей, позволяющих описывать качественное динамическое поведение реальных технических систем с заранее неизвестными структурами моделей.

Сложность задачи состоит в необходимости работать с зашумленными данными при обработке экспериментальных временных рядов. С одной стороны, более желательным является использование метода последовательного дифференцирования для восстановления фазовой траектории, поскольку при этом можно получить модель, содержащую в общем случае приблизительно в  $n$  раз меньше коэффициентов при различных нелинейностях, чем при использовании метода задержки. Но дифференцирование неизбежно будет приводить к усилению шумовой компоненты в производных высокого порядка. Без предварительной фильтрации зависимость от времени уже второй производной может оказаться шумоподобным процессом. Кроме того, традиционные методы вложения имеют очевидные недостатки при анализе существенно неоднородных реализаций, т. е. сигналов, в которых участки с быстрым движением чередуются с участками медленных движений.

Произвольный выбор нелинейностей, как правило, не позволяет осуществить удачную реконструкцию динамических уравнений для реальных систем. В частности, в работе [29] указывается на наличие трех типичных случаев:

1. Восстановленные уравнения локально описывают фазовую траекторию исходной системы. При этом реконструированная модель неустойчива в том смысле, что решение полученных уравнений воспроизводит исследуемый сигнал только в течение короткого промежутка времени.

2. Имеет место плохая локальная предсказуемость фазовой траектории, однако наблюдается визуальное сходство фазовых портретов. Решение восстановленных уравнений устойчиво по Пуассону. В этом случае аттрактор реконструированной модели имеет метрические характеристики, близкие к характеристикам исходного аттрактора.

3. Имеет место хорошая локальная предсказуемость фазовой траектории с любой ее точки при значениях времени, превышающих характерное время корреляции. Фазовый портрет реконструированной модели идентичен исходному, а сама система является устойчивой по Пуассону.

Алгоритм глобальной реконструкции в последнее время стал использоваться не только для получения математической модели, но и для классификации динамических режимов. Метод классификации предполагает переход из фазового пространства исходной динамической системы в пространство коэффициентов восстановленных уравнений. Особенность данного подхода состоит в том, что применение к экспериментальным данным алгоритма реконструкции не нацелено на получение модели, способной воспроизводить исходный режим. Коэффициенты в получаемых уравнениях являются количественными характеристиками, несущими информацию о линейных и нелинейных корреляциях в исходном сигнале. В результате аппроксимации коэффициентов по участкам реализации динамической системы исследователь получает множество точек в пространстве коэффициентов. Разным классам динамических систем отвечают непересекающиеся в данном пространстве области, что и дало основание использовать описанную методику в целях классификации.

## **2.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Проведем выбор системы допущений к формальному описанию нелинейных моделей, реконструируемых по экспериментальным данным с учетом требуемых свойств и ограничений, связанный с классом управляемых систем.

Предположим, что данные, полученные в результате функционирования управляемых систем, являются выходными процессами нелинейной аффинной динамической системы, определяемой преобразованием  $D \times U \rightarrow T_x X$ :

$$\dot{x} = f(x(t), t) + h(x(t))u(t), \quad (2.1)$$

где  $x$  — вектор состояний системы из  $\mathbb{R}^n$ ;  $u(t)$  —  $p$ -мерный вектор управлений из множества допустимых управлений  $U \subseteq \mathbb{R}^p$  ( $p \leq n$ ); многообразие  $X$ , обычно отождествляемое с  $\mathbb{R}^n$ , либо с  $\mathbb{R}^{n+1}$ , в последнем случае многообразие включает независимую переменную  $t$  (время);  $\dot{x} \in T_x X$ ;  $T_x X$  — касательное пространство к  $X$  в точке  $x$ , определяемое допустимыми управлениями;  $f(\cdot) = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $h(\cdot) = (h_1, \dots, h_n)$  —  $\mathbb{C}^r$ -гладкие ( $r \geq 1$ ) вектор-функции, определенные в некоторой области  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , которая рассматривается как фазовое пространство (ограниченное, неограниченное или совпадающее с евклидовым пространством  $\mathbb{R}^n$ ).

На правую часть уравнения управляемой системы наложены ограничения:

1.  $x \mapsto f(x)$  — гладкое векторное поле на  $X$  при любом фиксированном  $u \in U$ ;
2.  $(x, u) \mapsto f(x) + h(u)$  — непрерывное отображение  $x \in X, u \in U$ ;
3.  $(x, u) \mapsto \partial[f(x) + h(u)]/\partial x$  — непрерывное отображение в любых локальных координатах на  $X$  при  $x \in X, u \in U$ .

Допустимые управления — измеримые локально ограниченные отображения

$$u : t \mapsto u(t) \in U.$$

Пусть допущением является то, что в зависимости от выбора управляющих сигналов, система (2.1) может быть преобразована к эквивалентной автономной, т. е. при наличии управления параметризует автономную систему.

Таким образом, вспомогательным объектом являются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанные в виде

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.2)$$

Дифференцируемое отображение  $\varphi : \tau \rightarrow D$ , где  $\tau$  — интервал на оси  $t$ , называется решением  $x = \varphi(t)$  системы (2.1), если

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)) \quad \text{для любого } t \in \tau. \quad (2.3)$$



По предположению, условия теоремы Коши выполняются, следовательно, для любых значений  $x_0 \in D$  и  $t_0 \in \mathbb{R}^1$  существует единственное решение  $\varphi$ , удовлетворяющее начальному условию

$$x_0 = \varphi(t_0). \quad (2.4)$$

Решение определено на некотором интервале  $(t_+, t_-)$ , содержащем значение  $t = t_0$ . Вообще, граничные точки  $t_+$  и  $t_-$  могут принимать как конечные, так и бесконечные значения. Решения системы (2.2) обладают следующими свойствами:

1. Если  $x = \varphi(t)$  — решение системы (2.2), то очевидно, что  $x = \varphi(t + C)$  также является решением, определенным на интервале  $(t_+ - C, t_- - C)$ .
2. Решения  $x = \varphi(t)$  и  $x = \varphi(t + C)$  можно рассматривать как решения, соответствующие одной начальной точке  $x_0$ , но различным начальным моментам времени  $t_0$ .
3. Решение, удовлетворяющее условию (2.4), можно записать в виде  $x = \varphi(t - t_0, x_0)$ , где  $\varphi(0, x_0) = x_0$ .
4. Если  $x_1 = \varphi(t_1 - t_0, x_0)$ , то  $\varphi(t - t_0, x_0) = \varphi(t - t_1, x_1)$ . Обозначая  $t_1 - t_0$  через новое  $t_1$ , а  $t - t_2$  — через  $t_2$ , получаем так называемое групповое свойство решений:

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1 + t_2, x_0).$$

Известно, что решение  $x_1 = \varphi(t_1 - t_0, x_0)$  задачи Коши (2.3) для  $C^r$ -гладкой системы (2.1) является гладким ( $C^r$ ) относительно времени и начальных данных  $x_0$ . Первая производная  $\eta(t - t_0, x_0) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$  — удовлетворяет так называемому уравнению в вариациях  $\dot{\eta} = f'(\varphi(t - t_0, x_0))\eta$  с начальным условием:  $\eta(0, x_0) = I$  ( $I$  — единичная матрица). Уравнение в вариациях — это линейная неавтономная система, полученная формальным дифференцированием выражения (2.2).

В связи с тем, что теория управления, с одной стороны, изучает динамические модели, с другой — многие вопросы и результаты качественной теории не являются общепринятыми и однозначно определенными. Приведем основные результаты качественной теории нелинейных систем в соответствии с [19, 30], а также с их современными эквивалентными представлениями в [31].

Рассмотрим траекторию  $\Lambda$ , отличную от состояния равновесия, которая соответствует такому решению  $\varphi(t)$  системы (2.2), что  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$ .

Тогда  $\varphi(t)$  определено для всех значений  $t$  и периодически, а  $\Lambda$  — гладкая замкнутая кривая. Если  $\tau$  — наименьший период  $\varphi(t)$ , то параметрическое уравнение траектории  $\Lambda$  принимает вид  $x = \varphi(t)$ , где  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ , причем в данном интервале различные значения  $t$  соответствуют различным точкам траектории  $\Lambda$ . Траекторию  $\Lambda$ , соответствующую периодическому решению  $\varphi(t)$ , называют периодической.

Любая другая траектория, не являющаяся ни положением равновесия, ни периодической траекторией, есть незамкнутая кривая [19]. Отсюда следует, что незамкнутая траектория не имеет точек самопересечения.

Любые два решения, которые отличаются лишь выбором начального момента времени  $t_0$ , соответствуют одной и той же траектории. И наоборот: два различных решения, отвечающие одной и той же траектории, совпадают с точностью до сдвига по времени  $t \rightarrow t + C$ . Таким образом, решения, отвечающие одной и той же периодической траектории, периодичны и имеют равные периоды [30]. Как известно, любая траектория, лежащая в ограниченной области, является целой, т. е. для нее определено решение для  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

Для траекторий, отличных от положений равновесия, можно задать положительное направление движения, совпадающее с направлением возрастания  $t$ . В каждой точке такой траектории направление определяется при помощи соответствующего касательного вектора. Вместе с системой (2.1) в нелинейной динамике принято рассматривать соответствующую «обращенную во времени» систему

$$\dot{x} = -f(x). \quad (2.5)$$

Здесь векторное поле системы получается из векторного поля системы (1.1) при изменении направления каждого касательного вектора на противоположное. При этом решение  $x = \varphi(t)$  системы (2.1) соответствует решению  $x = \varphi(-t)$  системы (1.5) и наоборот. Очевидно, что системы (2.1) и (2.5) имеют одни и те же фазовые кривые с точностью до замены времени  $t \rightarrow -t$ .

Важным свойством является возможность при рассмотрении фазовых портретов перемасштабирование времени. Для системы (1.1), траектории вида  $x = \varphi(t - t_0, x_0)$ , проходящей через точку  $x_0$  при  $t = t_0$ , при параметризации в соответствии с правилом

$$d\tilde{t} = \frac{dt}{f(\varphi(t - t_0, x_0))}$$

или

$$d\tilde{t} = t_0 + \int_{t_0}^t \frac{d\theta}{f(\varphi(\theta - t_0, x_0))}$$

имеется траектория системы

$$\dot{x} = f(x)F(x). \quad (2.6)$$

Здесь  $C^r$ -гладкая функция  $F(x): D \mapsto \mathbb{R}^1$  не обращается в нуль в  $D$ . Следовательно, системы (2.1) и (2.6) имеют одни и те же фазовые кривые с точностью до замены времени. Траектории обеих систем имеют одинаковое направление при  $F(x) > 0$  и противоположное при  $F(x) < 0$ .

С точки зрения динамики, целые траектории или траектории, которые можно определить, по крайней мере, для всех положительных  $t$  на бесконечном промежутке времени, представляют особый интерес. Системы, решения которых могут быть определены на бесконечном промежутке времени, были названы Биркгофом [19] динамическими.

Общепринятое определение динамической системы состоит из ее трех компонентов:

- 1) фазового пространства  $D$ ;
- 2) типа времени  $t$ : непрерывного ( $t \in \mathbb{R}^1$ ) или дискретного ( $t \in \mathbb{Z}$ );
- 3) закона эволюции, т. е. отображение заданной точки  $x \in D$  и любого  $t$  в однозначно определенное состояние  $\varphi(t, x) \in D$ , удовлетворяющее теоретико-групповым свойствам:

1.  $\varphi(0, x) = x$ .
2.  $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$ .
3.  $\varphi(t, x)$  непрерывно по  $(x, t)$ .

Если переменная  $t$  непрерывна, приведенные условия определяют непрерывную динамическую систему, являющейся с точки зрения геометрии потоком, т. е. однопараметрической группой гомеоморфизмов фазового пространства  $D$ . Фиксируя  $x$  и изменяя  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получаем ориентируемую кривую, называемую фазовой траекторией. Принята следующая классификация фазовых траекторий [30]:

- состояния равновесия;
- периодические траектории;
- незамкнутые траектории.

Заметим, что в качестве фазового пространства  $D$ , как правило, используют область в  $\mathbb{R}^n$ , либо на  $n$ -мерном торе

$$\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{k \text{ раз}},$$

гладкой поверхности или многообразии. При этом соответствие между гладким потоком и векторным полем путем определения поля скоростей определяется соотношением

$$f(x) = \left. \frac{d\varphi(t, x)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Для дискретной динамической системы

$$x(k+1) = \psi(x(k)), \quad (2.7)$$

Последовательность  $\{x(k)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$  называется траекторией точки  $x_0$ . Существует три типа траекторий:

1. Точка  $x(0)$ . Эта точка является неподвижной точкой гомеоморфизма  $\psi(x)$ , т. е. отображается при помощи  $\psi(x)$  в себя.
2. Цикл  $(x(0), \dots, x(k-1))$ , где  $x(i) = \psi(x(i-1))$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ ;  $x_0 = \psi^k(x_0)$ ;  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Здесь число  $k$  является периодом; каждая точка  $x_i$  — периодической точкой с периодом  $k$ .
3. Бесконечная в обе стороны траектория, т. е. последовательность  $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ , где  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Как и в случае потоков, такую траекторию называют незамкнутой.

В соответствии с качественной теорией нелинейных систем [30, 31] введем некоторые понятия.

Множество  $A$  называется инвариантным относительно динамической системы, если  $A = \varphi(t, A)$  для любого  $t$ . В этом выражении  $\varphi(t, A)$  обозначает множество  $\bigcup_{x \in A} \varphi(t, x)$ . Из данного определения следует, что если  $x \in A$ , то траектория  $\varphi(t, x)$  лежит в множестве  $A$ .

По определению, аттрактор  $Atr$  — это замкнутое инвариантное множество, имеющее такую окрестность (поглощающую область)  $U(Atr)$ , что траектория  $\varphi(t, x)$  произвольной точки  $x$ , принадлежащей  $U(Atr)$ , удовлетворяет условию

$$\rho(\varphi(t, x), Atr) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \quad (2.8)$$

где

$$\rho(x, Atr) = \inf_{x_0 \in Atr} \|x - x_0\|.$$

Примерами аттракторов являются состояния равновесия, устойчивые периодические траектории и устойчивые инвариантные торы, содержащие квазипериодические траектории.

Для странных аттракторов хаотических систем, являющихся инвариантными замкнутыми множествами, состоящими только из неустойчивых траекторий выполняется условие квазимиимальности.

Исследование моделей систем, представленных в виде уравнений (2.1) включает поиск решения, т. е. интегрирование системы. Эта цель достижима только для линейных систем с постоянными коэффициентами и для некоторых очень специальных уравнений, которые можно проинтегрировать в квадратурах. Поэтому для многих задач уместно использование нелинейной динамики, которая исследует качественные свойства: устойчивость, количество состояний равновесия, существование периодических траекторий и т. д.

Качественное исследование включает два этапа:

- определение возможных типов траекторий, имеющих различное поведение и «формы»;
- описание для каждой группы топологически схожих траекторий.

Первый этап заключается в определении траектории движения при  $(t \rightarrow +\infty)$  и при  $(t \rightarrow -\infty)$ . При этом делается положение, что траектория  $L$ , задаваемая уравнением  $x = \varphi(t)$ , остается в некоторой ограниченной области фазового пространства при  $t \geq t_0 (t \leq t_0)$ .

Для полноты изложения имеет смысл введение следующих понятий.

Точку  $x^*$  называют  $\omega$ -предельной точкой траектории  $L$ , если для последовательности  $\{t_k\}$ , где  $t_k \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = x^*.$$

Точку  $x^*$  называют  $\alpha$ -предельной, если  $t_k \rightarrow -\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Обозначим множество всех  $\omega$ -предельных точек, принадлежащих траектории  $L$ , через  $\Omega_L$ , а множество  $\alpha$ -предельных точек — через  $A_L$ . Состояние равновесия является единственной предельной точкой самого себя. В случае если траектория  $L$  — периодическая, все ее точки являются  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельными:  $L = \Omega_L = A_L$ . Если  $L$  — незамкнутая устойчивая по Пуассону траектория, то множества  $\Omega_L$  и  $A_L$  совпадают с ее замыканием  $\bar{L}$ . Множество  $\bar{L}$  является либо минимальным (если  $L$  — рекуррентная траектория), либо квазимиимальным множеством, если времена возвращения Пуанкаре траектории  $L$

не ограничены. Все состояния равновесия, а также периодические и устойчивые по Пуассону траектории самопредельны.

Структура множеств  $\Omega_L$  и  $A_L$  подробно исследована для двумерных систем [4] на плоскости. Пуанкаре и Бендиксон установили, что множество  $\Omega_L$  может быть только одного из трех приведенных ниже топологических типов:

- (1) состояние равновесия;
- (2) периодическая траектория;
- (3) контур, образованный состояниями равновесия и траекториями, стремящимся к данным состояниям равновесия при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Используя указанную общую классификацию, можно перечислить все типы положительных полутраекторий систем на плоскости:

- состояния равновесия;
- периодические траектории;
- полутраектории, стремящиеся к состоянию равновесия;
- полутраектории, стремящиеся к периодической траектории;
- полутраектории, стремящиеся к предельному множеству типа (3).

Для многомерных систем классификация значительно сложнее, т. к. кроме состояний равновесия и периодических траекторий, предельные множества могут быть минимальными или квазiminимальными множествами различных топологических типов — таких, например, как странные аттракторы, которые могут быть гладкими или негладкими многообразиями или фрактальными множествами с локальной структурой прямого произведения диска на канторово множество, и даже еще более экзотическими множествами [31].

В качественной теории динамических систем [32] для построения фазовых портретов используется понятие топологической эквивалентности.

Как известно [31], две системы называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм соответствующих фазовых пространств, отображающий траектории одной системы в траектории второй. Следовательно, состояния равновесия, а также периодические и незамкнутые траектории одной системы соответственно отображаются в состояния равновесия, периодические и незамкнутые траектории другой системы.

Понятие топологической эквивалентности двух динамических систем определяет методы разбиения фазового пространства на области существования траекторий различных топологических типов. Такие структуры должны быть инвариантны относительно всех возможных гомеоморфизмов фазового пространства.

Пусть  $N$  — ограниченная область фазового пространства, а  $H = \{h_i\}$  — множество гомеоморфизмов в  $N$ . Вводя метрику

$$\text{dist}(h_1, h_2) = \sup_{x \in N} \|h_1 x - h_2 x\|,$$

получим, что траекторию  $L (L \subset N)$  можно назвать особой, если для достаточно малого значения  $\varepsilon < 0$  для всех гомеоморфизмов  $h_i$ , переводящих траектории в траектории и удовлетворяющих условию  $\text{dist}(h_i, I) < \varepsilon$ , где  $I$  — тождественное отображение, выполняется условие

$$h_i L = L.$$

Все изолированные состояния равновесия и периодические траектории являются особыми траекториями. Незамкнутые траектории также могут быть особыми. Например, все траектории двумерной системы, стремящиеся к седловым состояниям равновесия при  $t \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$ , являются особыми. Такие траектории называют сепаратрисами [99].

Будем использовать следующее понятие топологической эквивалентности [32]. Две траектории  $L_1$  и  $L_2$  эквивалентны, если любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие переводящие траектории в траектории гомеоморфизмы  $h_1, h_2, \dots, h_{m(\varepsilon)}$ , что

$$L_2 = h_{m(\varepsilon)} \cdots h_1 L_1,$$

где  $\text{dist}(h_k, I) < \varepsilon (k = \overline{1, m(\varepsilon)})$ .

Заметим, что метод исследования, изложенный в классической монографии [30] не применим для общего случая многомерных систем. Множество особых траекторий в трехмерной системе может быть бесконечным или континуальным. Таким образом, решение задач нахождения полного топологического инварианта не является реальным.

## 2.2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУБЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Для построения методов моделирования приведем сведения о построении топологически эквивалентных линейных системах и классификации грубых состояний нелинейных систем. Приведенные исследования соответствуют [31] и приводятся для обоснованности разработанных методов моделирования.

Поскольку разработанный геометрический метод моделирования использует модели вида

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad (2.9)$$

рассмотрим соответствующую линеаризованную систему

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.10)$$

В соответствии с качественной нелинейной теорией опишем технику оценки топологической эквивалентности системы поведения системы (2.9) поведению линеаризованной системы (2.10).

Как известно, две  $n$ -мерные системы

$$\dot{x} = F_1(x) \text{ и } \dot{x} = F_2(x),$$

определенные в областях  $D_1$  и  $D_2$ , соответственно, топологически эквивалентны в подобластях  $U_1 \subseteq D_1$  и  $U_2 \subseteq D_2$ , если существует гомеоморфизм

$$\eta: U_1 \rightarrow U_2,$$

под действием которого, траектория (полутраектория, отрезок траектории) первой системы отображается в траекторию (полутраекторию, отрезок траектории) второй системы, с сохранением ориентации (направления движения).

Заметим, что эквивалентности нелинейной системы (2.9) и линеаризованной (2.10) в состоянии равновесия не имеет смысла, если есть хотя бы один характеристический показатель на мнимой оси. Таким образом, вопрос о топологической эквивалентности в окрестности негрубого состояния равновесия не имеет смысла.

Приведем два важных примера из [31], которые иллюстрируют это утверждение и демонстрируют основные типы траекторий для случая систем на плоскости.

Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y + g_1(x, y), \\ \dot{y} &= \omega x + g_2(x, y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где функции  $g_1$  и  $g_2$ , а также их первые производные обращаются в нуль в начале координат. Состояние равновесия имеет пару чисто мнимых показателей  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ).

Общее решение соответствующей линеаризованной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega t) - y_0 \sin(\omega t), \\ y &= y_0 \cos(\omega t) + x_0 \sin(\omega t), \end{aligned}$$

фазовые траектории которой являются замкнутыми кривыми, в центре которых лежит начало координат (рис. 2.1). Такое состояние равновесия называется центром.



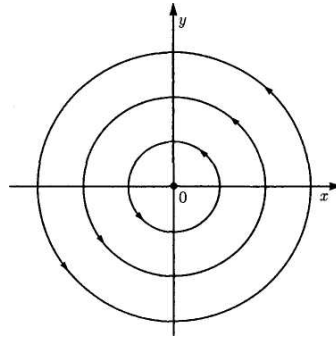


Рис. 2.1. Состояние типа «центр»

Для нелинейной системы фазовый портрет может значительно отличаться от заданного. Например, если  $g_1 = -x(x^2 + y_2)$ ,  $g_2 = -y(x^2 + y_2)$ , то общее решение уравнения (2.11) в полярных координатах имеет вид:

$$r^2 = \frac{1}{2t + r_0^{-2}}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0.$$

В данном случае все фазовые траектории принадлежат к типу «седло» (см. рис. 2.2).

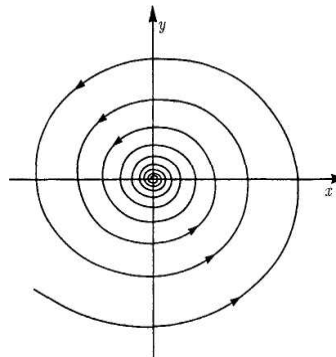


Рис. 2.2. Пример фазового портрета нелинейной системы

Таким образом, в любой малой окрестности такого состояния равновесия невозможно отыскать гомеоморфизм, при помощи которого траектории данной системы отображаются в траектории линеаризованной системы, в связи с тем, что гомеоморфизм отображает замкнутые кривые в замкнутые кривые. Заметим, что в случае систем с управлением, рассматривая семейство систем с независимой управляющей функцией, преобразование может быть найдено в заданном классе.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g_1(x, y), \\ \dot{y} &= \lambda y + g_2(x, y).\end{aligned}$$

При условии, что один характеристический показатель  $\lambda_1$  равен нулю, а второй отрицательный. Здесь предполагается, что функции  $g_1$  и  $g_2$  вместе со своими первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

По решению линеаризованной

$$x = x_0, \quad y = e^{-\lambda t} y_0.$$

Построим фазовый портрет, показанный на рис. 2.3. Ось  $Ox$  целиком состоит из состояний равновесия линеаризованной системы, каждое из которых притягивает только пару траекторий. Очевидно, что нелинейная система может содержать континуум состояний равновесия только при очень специальном выборе функций  $g_1$  и  $g_2$ . Следовательно, между исходной и линеаризованной системами топологической эквивалентности не существует.

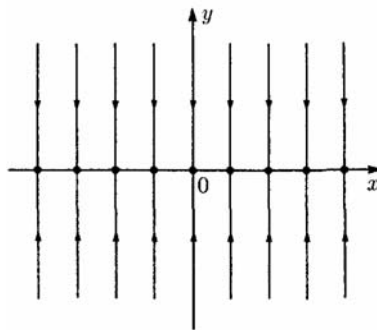


Рис. 2.3. Пример фазовых траекторий линеаризованной системы

На рис. 2.4 показан фазовый портрет для случая, когда  $g_1 = x^2$  и  $g_2 = 0$ . Из рисунков видно, что два локальных фазовых портрета (так называемый «седло-узел») не могут быть топологически эквивалентными.

Задача исследования локальной топологической эквивалентности грубых состояний равновесия сформулирована в теореме Гробмана-Хартмана [191], которую можно изобразить следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} f : & U_1 & \rightarrow U_2 \\ & \downarrow h & \downarrow h \\ Df_0 : & V_1 & \rightarrow V_2 \end{array}$$

Здесь  $f$  непрерывное дифференцируемое отображение открытого множества  $U \subset \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ ;  $U_1, U_2, V_1, V_2$  — окрестности гиперболической неподвижной точки  $O \in U$ .

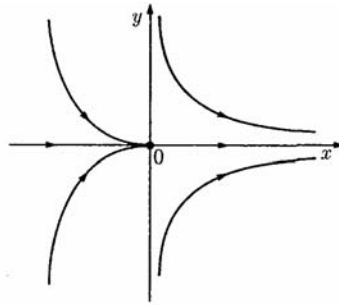


Рис. 2.4. Негрубая точка типа «седло-узел»

Таким образом, существуют окрестности  $U_1$  и  $U_2$ , в которых исходная и линеаризованная системы топологически эквивалентны.

Изложим результаты о топологической эквивалентности линейных систем. Топологический тип грубого состояния равновесия определяется двумя числами  $(k, n - k)$ , где  $k$  — количество характеристических показателей, лежащих слева от мнимой оси, а  $(n - k)$  — справа от нее.

Известно [33], что линейные системы с состояниями равновесия одного типа топологически эквивалентны. Использование этого результата конструктивно в том смысле, что гомеоморфизм  $\eta: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  можно построить в явном виде.

Например, для двух линейных систем, первая из которых в начале координат имеет фокус:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -x - y, \end{aligned} \tag{2.12}$$

а вторая — узел

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{3}y. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Эти системы топологически эквивалентны, так как гомеоморфизм

$$(x, y) \mapsto (x \cos(\tau) - y^3 \sin(\tau), y^3 \cos(\tau) - x \sin(\tau)),$$

где  $\tau(x, y) = -\ln(x^2 + y^6)/2$ , отображает траектории системы (2.12) в траектории системы (2.13).

Следовательно,  $n$ -мерная система может иметь не более  $(n + 1)$  различных топологических типов грубых состояний равновесия. В частности, любая система с грубым состоянием равновесия типа  $(k, n - k)$  локально топологически эквивалентна системе

$$\dot{x} = A_k x,$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix};$$

$I_i$  — единичная матрица размерности  $i$ .

Вводя обозначения

$$x = \begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix},$$

где  $s \in \mathbb{R}^k$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ , система (2.12) преобразуется в вид:

$$\dot{s} = -z$$

$$\dot{z} = s,$$

с общим решением

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-I_k t} s_0, \\ z(t) &= e^{I_{n-k} t} z_0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Рассмотрим  $k = n$ . При  $t \rightarrow +\infty$  все траектории системы (2.14) стремятся к состоянию равновесия, т. е. любая траектория из достаточно малой окрестности состояния равновесия типа  $(n, 0)$  нелинейной системы также стремится к состоянию равновесия. Такое состояние равновесия принято называть устойчивым топологическим узлом, или стоком. В условиях, когда траектория, начинающаяся в малой окрестности состояния равновесия типа  $(0, n)$ , стремится к нему при  $t \rightarrow -\infty$ , и выходящая за окрестность при  $t \rightarrow +\infty$ , состояние равновесия называется неустойчивым топологическим узлом, или источником.

Остальные грубые состояния равновесия являются топологическими седлами. Из теоремы Гробмана-Хартмана следует, что топологическое седло исходной нелинейной системы имеет локально устойчивое и локально неустойчивое многообразия  $W_{loc}^*$  и  $W_{loc}^0$  размерности  $k$  и  $(n - k)$ , соответственно. Таким образом, если  $h$  — локальный гомеоморфизм, под действием которого траектории линеаризованной системы отображаются на траектории нелинейной системы, то образы  $hE^*$  и  $hE^0$  устойчивого и неустойчивого инвариантных подпространств линеаризованной системы как раз являются устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Аналогично линейному случаю, положительная по-

лутраектория, выходящая из любой точки многообразия  $W_{loc}^*$ , лежит в нем полностью и стремится к состоянию равновесия  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Подобным образом и отрицательная полутраектория, начинающаяся в любой точке многообразия  $W_{loc}^0$ , лежит в нем полностью и стремится к состоянию равновесия  $O$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Траектории точек вне  $W_{loc}^* \cup W_{loc}^0$  покидают любую окрестность седла при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Многообразия  $W_{loc}^*$  и  $W_{loc}^0$  являются инвариантными, т. е. включают в себя все траектории (до тех пор, пока траектории остаются в некоторой окрестности топологического седла).

Очевидно, что если две системы  $X_1$  и  $X_2$  топологически эквивалентны, то при помощи гомеоморфизма, осуществляющего топологическую эквивалентность, состояния равновесия системы  $X_1$  отображаются на состояния равновесия системы  $X_2$ . Если  $O_1$  — состояние равновесия системы, а  $O_2$  — образ  $O_1$  относительно гомеоморфизма, то траектория, асимптотическая к  $O_1$  при  $t \rightarrow +\infty$  (или, соответственно,  $t \rightarrow -\infty$ ), отображается в траекторию, асимптотическую к  $O_2$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Следовательно, устойчивые (неустойчивые) многообразия локально топологически эквивалентных седел имеют равные размерности. Таким образом, для цели исследования важно, что в соответствии с [31] два грубых состояния равновесия локально топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же топологическому типу.

Топологический подход позволил решить задачу классификации грубых состояний равновесия. Отметим, что метод не позволяет определить гладкость инвариантных многообразий, поэтому этот вопрос требует дополнительных исследований.

В заключение приведем результат о экспоненциальной устойчивости узла. В [31] показано, что при малом  $\delta > 0$  для любого  $x_0$  ( $\|x_0\| < \delta$ ) траектория  $x(t)$  системы (2.9) с начальной точкой  $x_0$  при любых значениях  $t \geq 0$  удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq C e^{(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t} \|y_0\|,$$

где  $\varepsilon(\delta) > 0$  — константа;  $C > 0$  — множитель, зависящий от выбора базиса в  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

Оценка показателей Ляпунова предлагается как обобщение подхода к исследованию устойчивости нелинейных систем на случай траектории общего

вида [21, 34, 35]. При исследовании временных рядов восстанавливаются линейризованные модели нестационарной неавтономной системы. Поэтому некоторые усредненные аналоги собственных значений при исследовании позволяют получить ряд существенных оценок. Как и в случае неподвижной точки, набор показателей Ляпунова не всегда полностью характеризует устойчивость соответствующей траектории. Тем не менее, он несет существенную информацию о системе.

Пусть задана непрерывная динамическая система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

или ее дискретный аналог

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \psi(x_k), \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Исследуем изменение  $x(t)$  (соответственно,  $x_k$ ), если начальным данным дать бесконечно малое приращение  $\delta x$ , т. е. рассмотреть бесконечно близкую траекторию  $x(t) + \delta x(t)$  или разность  $\delta x(t)$  (соответственно,  $\delta x_k$ ). Для широкого класса систем решение дифференцируемо по начальным данным для конечных значений  $t$ , поэтому

$$\delta x(t) = \Phi(t)\delta x,$$

где  $\Phi(t)$  — матрица производных решения по начальным данным:

$$\Phi(t)_{ij} = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_{0j}}.$$

Для линейных систем  $\Phi(t)$  совпадает с нормированной фундаментальной матрицей.

По заданному начальному возмущению  $\delta x$  можно найти  $\delta x(t)$ , решая соответствующую линейную систему

$$\begin{aligned}\delta dx/dt &= Df(x(t))\delta x, \\ \delta x(0) &= \delta x_0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= D\psi(x_k)\delta x_k, \\ x_0 &= \delta x\end{aligned}$$

В силу линейности амплитуда решения несущественна, важен только «коэффициент прироста» решения за время  $t$ , поэтому от бесконечно малых величин  $\delta$  можно перейти к конечным и (можно, например, считать, что  $\delta x = \varepsilon s$ , а бесконечно малая амплитуда  $\varepsilon$ , входящая множителем, как в правую, так и в

левую части уравнений, сокращается). Таким образом, исследование устойчивости приводит к линейным системам

$$ds/dt = A(t)s, \quad A(t) = Df(x(t)), \quad s(0) = S$$

и

$$s_{k+1} = B_k s_k, \quad B_k = D\psi(x_k), \quad s_0 = S.$$

Начальное возмущение  $S(\delta x = \varepsilon S)$  определяет направление, в котором выбираем бесконечно близкую траекторию в точке  $X$ .

Заметим, что, строго говоря, векторы  $x$  и  $s$  принадлежат к разным пространствам:  $x$  принадлежит фазовому пространству динамической системы, а  $s$  — касательному пространству в точке  $x$ .

Для заданных систем, определенных на  $\mathbb{R}^n$ , решение удобно выразить через нормированную фундаментальную матрицу  $\Phi$ , которая удовлетворяет уравнениям

$$d\Phi/dt = A(t)\Phi, \quad \Phi(0) = I$$

и

$$\Phi_{k+1} = B_k \Phi_k, \quad \Phi_0 = I.$$

Тогда  $s(t) = \Phi(t)S$  ( $s_k = \Phi_k S$ ). В общем случае для одних направлений  $S$  близкие траектории будут экспоненциально удаляться, для других — экспоненциально сближаться, для третьих расстояние остается примерно тем же или меняется медленнее, чем экспоненциально. Для неподвижной точки, когда  $A(t) = A = \text{const}$  ( $B_k = B = \text{const}$ ), эти случаи соответствуют собственным значениям с  $\text{Re } \nu > 0$ ,  $\text{Re } \nu < 0$ ,  $\text{Re } \nu = 0$  ( $|\mu| > 1$ ,  $|\mu| < 1$ ,  $|\mu| = 1$ ), где  $\nu$  и  $\mu$  — собственные значения соответственно  $A$  и  $B$ . Для того, чтобы охарактеризовать ситуацию в общем случае, А. М. Ляпунов ввел так называемый характеристический показатель решения  $s(t)$ :

$$\lambda(s) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln |s(t)|.$$

Рассмотрим, чему будут равны значения  $\lambda(s)$  в случае неподвижной точки для системы  $dx/dt = f(x)$ ,  $x(t) = X = \text{const}$ . Предположим, что все собственные значения  $\nu_i$  матрицы  $A$  вещественны, различны и пронумерованы в порядке убывания:  $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$ . Обозначим соответствующие им собственные вектора через  $r^{(i)}$ , а  $r^{(i)} = \nu_i r^{(i)}$ ,  $\|r^{(i)}\| = 1$ . Тогда  $r^{(i)}$  образуют базис в касательном пространстве в точке  $X$ , в общем случае неортогональный. Любое решение линейной системы  $Ds/Dt = Df(x(t))$  —  $s(t)$  можно представить как комбинацию ба-

зисных решений  $s_i(t) = e^{\nu_i t} r^{(i)}$ , отвечающих начальным данным  $s_i(0) = r^{(i)}$ . Если  $s = \sum_i c_i r^{(i)}$ , то

$$s(t) = \sum_i c_i s_i(t) = \sum_i c_i e^{\nu_i t} r^{(i)}.$$

Пусть  $j$  — номер, такой что  $c_1 = c_2 = \dots = c_{j-1} = 0$ ,  $c_j \neq 0$ . Тогда очевидно, что

$$s(t) = \sum_{i=j} c_i e^{\nu_i t} r^{(i)} = e^{\nu_j t} \left( c_j r^{(j)} + \sum_{i=j+1} c_i e^{(\nu_i - \nu_j)t} r^{(i)} \right)$$

и

$$\lambda(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|s(t)\| = \nu_j + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left\| c_j r^{(j)} + \sum_{i=j+1} c_i e^{(\nu_i - \nu_j)t} r^{(i)} \right\| = \nu_j.$$

Таким образом, характеристический показатель может принимать только  $N$  различных значений  $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$  в зависимости от начальных данных.

В общем случае у матрицы  $A$  могут быть кратные и комплексные собственные значения. В этом случае соответствующих вещественных собственных векторов может не быть, а будут минимальные инвариантные подпространства  $\mathbb{R}^j$  (для любого  $u \in \mathbb{R}^j$ ,  $Au \in \mathbb{R}^j$ ) размерности

$$d_j = \text{Dim } \mathbb{R}^j \quad (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{s=1}^m d_s = n.$$

Действительную матрицу  $A$  можно при помощи преобразований подобия  $A' = SAC^{-1}$  привести к блочно-диагональному виду. У такой матрицы  $k$ -мерное инвариантное пространство, но всего один собственный вектор.

Каждому подпространству  $\mathbb{R}^j$  будут отвечать собственные значения  $\nu$  с одинаковыми действительными частями  $\text{Re } \nu$ , и для всех  $s \in \mathbb{R}^j$  характеристический показатель будет равен именно этому значению  $\lambda = \text{Re } \nu$ . Размерность  $d_j = \dim \mathbb{R}^j$  называют кратностью соответствующего показателя  $\lambda$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что в ряду показателей каждый из них встречается столько раз, какова его кратность, так что всего показателей ровно  $n$  штук, а упорядочены они по убыванию:  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ . Если  $s$  имеет ненулевые проекции на несколько  $\mathbb{R}^j$ , то  $\lambda(s)$  будет равен наибольшему среди показателей для этих подпространств, т. е. показателю  $\lambda_i$  с наименьшим номером  $i$ . Заметим, что кратность показателей может быть больше кратности собственных значений матрицы  $A$ , поскольку показатели действительные, а собственные значения, вообще говоря, комплексные.



В данном случае также можно выбрать базис линейно независимых векторов  $r^{(i)}$ , так чтобы каждый вектор принадлежал одному из  $\mathbb{R}^j$  (но не все из них могут быть собственными векторами  $A$ ), а для решений с начальными данными  $s_i(0) = r^{(i)}\lambda(s_i) = \lambda_i$ .

Рассмотрим случай линейных систем общего вида с переменными коэффициентами:

$$ds/dt = A(t)s, s \in \mathbb{R}^j, \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \|A(\tau)\| d\tau < \infty.$$

Вместо выделения инвариантных подпространств Ляпунов ввел понятие нормальной системы линейно независимых решений: система решений  $\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$  называется нормальной, если для любой другой линейно независимой системы  $\{s'_i(t)\}$   $\lambda(s'_i(t)) \geq \lambda(s_i(t))$ . Сам набор показателей  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (среди них могут быть совпадающие, т. е. кратные показатели), не зависит от выбора нормальной системы решений и является характеристикой данной системы. Для любого решения  $s(t) \neq 0$  показатель  $\lambda(s)$  может принимать только одно из этих значений.

В случае отображений вместо  $Rev$  будет использоваться  $|\mu|$  для собственных значений матрицы  $B$ . Аналогично для циклов систем ОДУ показатели Ляпунова равны логарифмам модулей множителей Флоке [21].

Среди всего набора показателей Ляпунова важен старший показатель —  $\lambda_1$  [36]. Поскольку для почти всех начальных данных  $S$  будет иметь ненулевую проекцию на направление  $r^{(1)}$ , то типичной ситуацией будет  $\lambda(s) = \lambda_1$ . Чтобы получить меньшее значение показателя  $\lambda(s) = \lambda_i$  необходим специальный выбор начальных данных.

Кроме обычных показателей  $\lambda(s)$ , характеризующих одно решение, т. е. растяжение или сжатие в одном направлении, используют показатели порядка  $m > 1$ , характеризующие изменение  $n$ -мерных фазовых объемов ( $m \leq n$ ). Пусть  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)$  — линейно независимые решения, а  $\text{Vol}(s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t))$  — объем образуемого ими  $n$ -мерного параллелепипеда,

$$\text{Vol}(s_1, \dots, s_m) = \sqrt{\det \begin{vmatrix} (s_1, s_1) & \dots & (s_1, s_m) \\ \dots & \ddots & \dots \\ (s_m, s_1) & \dots & (s_m, s_m) \end{vmatrix}}.$$

Тогда показателем Ляпунова порядка  $m$  называется

$$k_m(s_1, \dots, s_m) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \text{Vol}(s_1, \dots, s_m).$$

Подобно тому, как типичным значением  $\lambda(s)$  является  $\lambda_1$ , типичным значением  $k_m$  является  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ . Чтобы добиться иных значений, необходим специальный выбор начальных данных.

Среди всех  $k_m$  выделяется показатель  $n$ -го порядка, для которого можно получить дополнительные результаты. Дело в том, что любой набор  $n$  линейно независимых решений образует фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$ . Объем  $\text{Vol}(s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)) = |W(t)|$ , где  $W(t)$  — определитель Вронского, для которого  $d \ln|W|/dt = \text{tr} A(t)$ . Отсюда получаем, что

$$k_n = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\text{tr} A(\tau)) d\tau.$$

Если существует точный предел, то  $k_n = \langle \text{tr} A \rangle$ , т. е. среднему по времени от следа матрицы  $A$ .

В случае отображения фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению  $\Phi_{k+1} = B_k \Phi_k$ , откуда  $W_{k+1} = W_k \times \det B_k$ . Поэтому

$$k_n = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \ln |\det B_k|,$$

т. е. как правило  $k_n = \langle \ln |\det B| \rangle$ .

В соотношения для  $k_n$  параметр  $s$  не входит, поэтому этот показатель можно рассматривать как характеристику всей линейной динамической системы в целом. Согласно его значению динамические системы подразделяют на консервативные, сохраняющие  $n$ -мерные фазовые объемы ( $k_n = 0$ ) и диссипативные ( $k_n < 0$ ).

Для нелинейной системы  $dx/dt = F(x)$  и ее траектории  $x(t)$  набор показателей Ляпунова для систем будет характеризовать устойчивость траектории соответствующей ей линейной системы. В этой связи выделяют класс так называемых правильных по Ляпунову систем. Система  $ds/dt = A(t)s$  является правильной, если существует предел

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr} A(\tau) d\tau = k_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Аналогично, дискретная система является правильной, если существует предел

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \ln |\det B_k| = k_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Для неправильных систем предел может не существовать или может нарушаться равенство. Однако на практике неправильные по Ляпунову системы обычно не встречаются и соотношения эти всегда полагаются справедли-

выми. Для правильных систем доказано, что если  $\lambda_1 < 0$ , то траектория  $x(t)$  асимптотически устойчива, если  $\lambda_1 > 0$  — неустойчива.

Набор показателей Ляпунова иногда называют спектром показателей Ляпунова соответствующей динамической системы.

Отметим важное свойство показателей Ляпунова. Если уравнения движения динамической системы инвариантны относительно некоторого преобразования, характеризующегося непрерывно изменяющимся инвариантом, то у системы обычно есть нулевой показатель Ляпунова, связанный с этим преобразованием.

Пусть  $x(\alpha, t)$  — однопараметрическое семейство траекторий, причем  $\varphi^t(x)$  явно от  $\alpha$  не зависит. Тогда  $x(\alpha, t) = \varphi^t(x(\alpha, 0))$ , а

$$\partial x(\alpha, t) / \partial \alpha = D\varphi^t(x(\alpha, 0)) \cdot \partial x(\alpha, 0) / \partial \alpha = \Phi(t) \cdot \partial x(\alpha, 0) / \partial \alpha,$$

т. е.  $s(t) = \partial x(\alpha, t) / \partial \alpha$  — решение линеаризованной системы для начальных данных  $S = \partial x(\alpha, 0) / \partial \alpha$ . Если справедливо соотношение

$$c_1 \leq \left\| \frac{\partial x(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right\| \leq c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  не зависят от времени, то характеристический показатель для этого решения будет равен нулю. Следовательно, в спектре показателей Ляпунова динамической системы должен быть нулевой показатель.

Частным случаем этой ситуации является сдвиг по времени для автономных систем  $dx/dt = F(x)$ . Если  $x(t)$  решение, то  $x(t + \alpha)$  — тоже решение. Так как  $\partial x / \partial \alpha = dx/dt = F(x)$ , то условие существования нулевого показателя сводится просто к требованиям, чтобы на траектории не было неподвижных точек. Таким образом, для аттракторов ОДУ, отличных от неподвижных точек, должен быть по крайней мере один нулевой показатель Ляпунова.

С точки зрения не линеаризованной, а исходной динамической системы показатели Ляпунова характеризуют скорость разбегания бесконечно близких траекторий, а показатели высших порядков — скорость изменения бесконечно малых фазовых объемов.

Динамические системы, для которых  $n$ -мерный фазовый объем уменьшается, называются диссипативными. Если фазовый объем сохраняется, то такие системы носят название консервативных. У консервативных систем всегда существует хотя бы один закон сохранения. Наличие закона сохранения часто влечет существование соответствующего ему нулевого показателя Ляпунова.

Для диссипативных динамических систем сумма показателей Ляпунова всегда отрицательна,  $k_n < 0$ .

Если от системы дифференциальных уравнений  $Dx/Dt = F(x)$  с набором показателей Ляпунова  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  перейти к отображению  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $x_k = x(t)$ ,  $x_{k+1} = x(t+\tau) \equiv \varphi^\tau(x(t))$ , то показателями Ляпунова для этого отображения будут  $\lambda'_i = \lambda_i \tau$ . Аналогично, если от отображения перейти к некоторой его степени  $f^m(x)$ , то для нового отображения показатели будут в  $m$  раз больше,  $\lambda_i = m\lambda_i$ .

Если от системы дифференциальных уравнений перейти к сечению Пуанкаре и соответствующему отображению на единицу меньшей размерности, то в спектре показателей для отображения не будет нулевого показателя, «ответчающего» за сдвиг вдоль траектории, остальными показателями будут  $\lambda'_i = \lambda_i \langle \tau \rangle$ , где  $\langle \tau \rangle$  — среднее время возвращения на плоскость Пуанкаре.

При обращении времени (но для той же самой инвариантной меры  $\mu_i$ ) «типичными» показателями Ляпунова будут  $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$ . Однако при этом вместо аттрактора, к которому притягиваются траектории при  $t \rightarrow \infty$ , нужно рассматривать неустойчивое множество — репеллер, к которому траектории притягиваются при  $t \rightarrow -\infty$ .

По показателям Ляпунова можно многое сказать о динамической системе, о наблюдаемом режиме, о размерности аттрактора, если таковой имеется, и об энтропии динамической системы. Динамическому хаосу отвечает неустойчивость каждой отдельной траектории, т. е. наличие хотя бы одного положительного показателя Ляпунова. Для странного нехаотического аттрактора  $\lambda_1 = 0$ .

Регулярные периодические или квазипериодические режимы не имеют в спектре положительных показателей, а для  $k$  независимых частот имеют  $k$  (для ОДУ) или  $k-1$  (для отображений) нулевых показателей. Поэтому для случая дифференциальных уравнений у цикла один нулевой показатель, у тора — два, у 3-тора — три и т. д. Для отображений у цикла нулевых показателей обычно нет, у тора — 1, у 3-тора — 2 и т. д. Эта закономерность легко объяснима: когда аттрактором является «хорошее множество»,  $m$ -мерное многообразие,  $n$ -мерный фазовый объем должен сохраняться. Притяжение к аттрактору требует, чтобы фазовые объемы больших размерностей сжимались. Это и отражено в ляпуновском спектре.

Тем не менее, количество независимых частот можно выяснить не всегда, так как нулевые показатели могут быть связаны и с наличием сохраняющихся величин. Для диссипативных систем наличие законов сохранения, вообще говоря, нетипично, однако соответствующие примеры существуют.

Знание показателей Ляпунова позволяет оценить и фрактальную размерность аттрактора

$$k_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

Пусть  $k$  — такое число, что  $k_1, k_2, \dots, k_k \geq 0$ , а  $k_{k+1} < 0$ , т. е.  $k$ -мерный фазовый объем не уменьшается, а  $k+1$ -мерный — сокращается. Для аттракторов-многообразий фазовый объем, отвечающий размерности аттрактора, сохраняется. Для хаотических аттракторов обычно получается так, что  $k_k > 0$ , а  $k_{k+1} < 0$ , и целой размерности, обладающей таким свойством, не существует. Однако можно попытаться найти подходящую дробную размерность. Для этого аппроксимируем зависимость  $k_j = k(j)$  кусочно-линейной функцией  $k(j) = aj + b$ . Эта функция обязательно обратится в ноль в некоторой промежуточной точке  $j = d_L$ ,  $k < d_L < k + 1$ . Это значение и принимается за оценку размерности аттрактора, которая получила название ляпуновская размерность [90]. Получим для нее выражение. Как говорилось выше

$$ak + b = k_k, \quad a(k + 1) + b = k_{k+1},$$

т. е.  $a = -|\lambda_{k+1}|$ ,  $b = k_k + k|\lambda_{k+1}|$ , а для ляпуновской размерности получаем соотношение

$$|\lambda_{k+1}|d_L + k_k + k|\lambda_{k+1}| = 0$$

или

$$d_L = k + \frac{k_k}{|\lambda_{k+1}|}.$$

Доказано несколько теорем [37–39], согласно которым  $d_L$  дает оценку сверху для хаусдорфовой размерности аттрактора, правда иногда вместо обычных показателей Ляпунова используют так называемые «глобальные показатели Ляпунова», которые больше или равны обычным. Соответствующая оценка размерности также будет больше.

Пусть у динамической системы  $j$  строго положительных показателей  $\lambda_i > 0$ . Для энтропии  $K_1$  существует строгая оценка

$$K_1 \leq \sum_{i=1}^j \lambda_i.$$

Однако на практике обычно считают, что выполняется точное равенство

$$K_1 = \sum_{i=1}^j \lambda_i.$$

Для прочих энтропии  $K_q$  аналогичных оценок нет, но поскольку чаще всего все  $K_q$  при не слишком больших  $q$  близки, то приближенно можно пользоваться точным равенством.

### Методы оценки показателей Ляпунова

Пусть задана система  $x_{k+1} = f(x_k)$ . После линеаризации получаем линейную систему  $s_{k+1} = B_k s_k$ . Тогда набор показателей Ляпунова будет зависеть от базовой траектории  $x(t)$ , т. е. будет характеризовать траекторию, а не аттрактор. Фундаментальное значение показателям Ляпунова придала мультипликативная эргодическая теорема, доказанная В. И. Оселедцем [40]. Согласно ей, показатели Ляпунова совпадают почти для всех траекторий по инвариантной мере  $\mu$ . Этот факт использовался во многих методах [37, 41, 42].

Обозначим  $x_0 = x$ , и пусть  $\Phi_k$  — фундаментальная матрица линеаризованной системы. Мультипликативная эргодическая теорема предполагает, что траектория  $x_k$  может быть продолжена до бесконечности в обе стороны, т. е. при  $k \rightarrow \infty$ , и при каждом  $x_k$  существует  $\Phi_k = Df^k(x)$ . Это, вообще говоря, справедливо не для всех точек  $x$ . Поэтому будем предполагать, что  $x$  принадлежит инвариантному множеству, которое является носителем некоторой инвариантной меры  $\mu$ , т. е. преобразование  $f$  сохраняет меру  $\mu$ . Матрицы  $\Phi_k$  предполагаются невырожденными, а матрицы  $B_k = Df(x_k)$  будем полагать ограниченными. В этих условиях: (1) для почти всех  $x$  по мере  $\mu$  существуют точные значения показателей Ляпунова всех порядков при  $t \rightarrow \pm\infty$ , т. е. линеаризованная система является правильной по Ляпунову; (2) значения показателей  $\lambda_i$  совпадают для почти всех  $x$  по мере  $\mu$ ; (3) касательное пространство  $T_x M(x_k)$  в каждой точке  $x_k$  распадается на прямую сумму подпространств  $R_i(x_k)$ , так что если

$$s(0) \in R_i(x_0),$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{|t|} \ln \|u(t)\| = \pm \lambda_i.$$

Подпространства инвариантны в том смысле, что если  $x_{k+1} = f(x_k)$ , то  $R_i(x_{k+1}) = B_k R_i(x_k)$ .

Таким образом, почти для всех точек  $x$  по мере  $\mu$  линеаризованная система оказывается правильной по Ляпунову. Такие точки также называют правильными. Согласно теореме, это свойство оказывается типичным по инвариантной мере.

Показатели Ляпунова являются средними по мере от некоторого функционала, зависящего от  $x$ . Предположим, что все показатели различны, т. е. все

подпространства  $R_i(x_k)$  одномерны. Тогда в касательных пространствах можно выбрать базисы  $\{R^{(i)}(x_k)\}$ , причем так, что они тоже будут инвариантными:

$$r^{(i)}(x_{k+1}) = \frac{B_k r^{(i)}(x_k)}{\|B_k r^{(i)}(x_k)\|}.$$

Такой базис называют базисом Оселедца.

Рассмотрим решение линеаризованной системы  $s_{k+1} = B_k s_k$ , начальные данные для которой  $S_0 = R^{(i)}(x_0)$ . Тогда, последовательно подставляя  $R^{(i)}(x_{k+1}) \|B_k R^{(i)}(x_k)\|$  вместо  $B_k R^{(i)}(x_k)$ , получим

$$\begin{aligned} u_k &= B_{k-1} B_{k-2} \dots B_1 B_0 r^{(i)}(x_0) = B_{k-1} B_{k-2} \dots B_1 r^{(i)}(x_1) \cdot \|B_0 r^{(i)}(x_0)\| = \\ &= B_{k-1} r^{(i)}(x_{k-1}) \cdot \|B_{k-2} r^{(i)}(x_{k-2})\| \cdot \dots \cdot \|B_1 r^{(i)}(x_1)\| \cdot \|B_0 r^{(i)}(x_0)\|, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{k} \ln \|u_k\| = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln \|B_j r^{(i)}(x_j)\|.$$

Поскольку линеаризованная система является правильной почти для всех  $x_0$  по мере  $\mu$ ,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln \|B_j r^{(i)}(x_j)\| = \left\langle \ln \|Df(x_j) r^{(i)}(x_j)\| \right\rangle = \left\langle \ln \|Df(x) r^{(i)}(x)\| \right\rangle_{\mu}.$$

Однако инвариантные подпространства  $W_i = \text{span}\{R^{(1)}(x), \dots, R^{(i)}(x)\}$ , численно найти удастся при помощи алгоритма Бенеттина [91]. В нем получают другие вектора  $e^{(i)}(x)$ , такие что образуемые ими подпространства оказываются теми же самыми,

$$\text{span}\{R^{(1)}(x), \dots, R^{(i)}(x)\} = \text{span}\{e^{(1)}(x), \dots, e^{(i)}(x)\}.$$

Они оказываются тесно связаны с другим вариантом мультипликативной эргодической теоремы, предложенным Д. Рюэллем [43].

Переменные  $s_k$  можно выразить через фундаментальную матрицу  $\Phi_k = Df^k(x)$  и начальные данные  $S$ :  $s_k = \Phi_k S$ . Выражение, входящее в определение показателя Ляпунова, можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{2k} \ln(u_k, u_k) = \frac{1}{2k} \ln(U, \Phi_k \Phi_k^* U) = \ln \left( (U, \Phi_k^* \Phi_k U)^{1/2k} \right).$$

Как показал Рюэлль, если преобразование  $f(x)$  сохраняет меру  $\mu$ , а на  $Df(x)$  наложены те же условия, что и в теореме Оселедца, то для почти всех  $x$  по мере  $\mu$  существует предельная матрица

$$G_{\infty}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \Phi_k^* \Phi_k \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Логарифмы собственных значений этой матрицы  $\lambda_i = \ln l_i$  — это набор показателей Ляпунова, отвечающих точке  $x$ , (т. е. для почти всех  $x$  собственные значения  $l_i$  совпадают). Собственные вектора  $g^{(i)}(x)$  этой матрицы образуют ортонормированный базис в касательном пространстве к точке  $x$ . Их связь с векторами  $r^{(i)}(x)$  довольно очевидна: они получаются, если векторы  $\{r^{(i)}(x)\}$  ортонормировать, начиная с последнего:

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= r^{(n)}(x), \\ g^{(n-1)}(x) &= c_{n-1,n-1}r^{(n-1)}(x) + c_{n-1,n}r^{(n)}(x), \\ &\dots\dots\dots, \\ g^{(j)}(x) &= \sum_{i=j}^n c_{j,i}r^{(i)}(x), c_{j,j} \neq 0, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $c_{ij}$  определяются из условия ортонормированности базиса  $\{g\}$ . Если ортонормировать начиная с первого, то начальным данным  $S = g^{(i)}$  в общем случае будет отвечать показатель не  $\lambda_i$ , а  $\lambda_1$  поскольку будет ненулевая проекция на направление  $r^{(1)}(x)$ .

Если отображение  $f$  обратимо, то для обратного отображения  $f^{-1}$  и траектории, продолженной в обратную сторону до бесконечности ( $x_{k-1} = f^{-1}(x_k)$ ,  $S_{k-1} = Df^{-1}(x_k)S_k$ ), можно построить аналогичную матрицу

$$G_{-\infty}(x) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \left( \Phi_k^* \Phi_k \right)^{\frac{1}{2|k|}}.$$

Ее собственные значения  $l'_i = l_i^{-1} = e^{-\lambda_i}$ , а собственные вектора  $e^{(i)}(x)$  получаются ортогонализацией Грамма-Шмидта системы  $\{r^{(i)}(x)\}$ , но начиная с первого.

Существующие в настоящее время алгоритмы оценки можно разделить на 2 класса: матричные методы и методы аналога.

**Матричные методы** [44, 45]. Алгоритмы, связанные с восстановлением в каком-либо виде уравнений движения, аппроксимацией матрицы  $Df$  и расчетом показателей называют матричными. Алгоритмы основаны на построении локальных матриц Якоби (матрица  $B_k$  в системе  $s_{k+1} = B_k s_k$ ) для каждой точки реконструированного аттрактора, после чего для нахождения показателей (можно попытаться оценить весь спектр) используют численные методы, например метод Беннетина.

1. Задаем  $n$  ортонормированных векторов  $v^{(i)}_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , присваиваем  $\sigma^{(i)}_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $s^{(i)}_0 = v^{(i)}_0$ , а также определяем шаг перенормировки  $\Delta t$ .

2. Находим  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $s^{(i)}_k = Df(x_k)s^{(i)}_{k-1}$ .



3. Ортогонализуем систему векторов  $s_{k+1}^{(i)}$  и получаем  $s'_{k+1}{}^{(i)}$ :

$$s'_{k+1}{}^{(1)} = s_{k+1}^{(1)},$$

$$s'_{k+1}{}^{(2)} = s_{k+1}^{(2)} + a_{ij} s_{k+1}^{(1)}, (s'_{k+1}{}^{(j)}, s_{k+1}^{(i)}) = 0,$$

.....

$$s'_{k+1}{}^{(i)} = s_{k+1}^{(i)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} s_{k+1}^{(j)}, a_{j,j} \neq 0, (s'_{k+1}{}^{(j)}, s_{k+1}^{(i)}) = 0, i < j.$$

4. Увеличиваем  $\sigma^{(i)}$  на логарифм нормы соответствующего вектора:

$$\delta\sigma_{k+1}^{(i)} = \ln \|u_{k+1}^{(i)}\|, \sigma_{k+1}^{(i)} = \sigma_k^{(i)} + \delta\sigma_{k+1}^{(i)}; \text{увеличиваем } t: t_{k+1} = t_k + \Delta t. \text{ В качестве}$$

текущей оценки показателя Ляпунова можно использовать  $\lambda'_i(t) = \sigma_{k+1}^{(i)} / t_{k+1}$ .

5. Нормируем систему векторов  $s'_{k+1}{}^{(i)}$ , получаем ортонормированный

базис на следующем шаге  $v_{k+1}^{(i)} = u_{k+1}^{(i)} / \|u_{k+1}^{(i)}\|$  и заносим его снова в вектора  $s$ :

$$s'_{k+1}{}^{(i)} = v_{k+1}^{(i)}.$$

6. Повторяем пункты 2–5 заданное число раз.

7. Получаем окончательную оценку показателя Ляпунова.

Ортогонализация осуществляется процедурой Грамма–Шмидта, которая в матричном виде называется QR-разложением на ортогональную матрицу  $Q$ , столбцы которой образуют ортонормированный базис  $\{v_k^{(i)}\}$ , и верхнюю треугольную матрицу  $R$ , тогда  $\delta\sigma_k^{(i)} = \ln R_{i,k}$ . Поскольку,  $v_k^{(i)} \rightarrow e^{(i)}(x_k)$  то с использованием векторов  $e^{(i)}(x_k)$  можно написать выражение для показателей Ляпунова:

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \left| \left( e^{(i)}(x_{k+1}), Df(x_k) e^{(i)}(x_k) \right) \right|.$$

В описанном методе не обязательно вычислять все показатели. Если использовать  $m < n$  векторов  $s^{(i)}$  (или  $v^{(i)}$ ), то будут получены  $m$  наибольших показателей.

**Методы аналога** [см. 21, 35].

**1. Метод Волфа [46].** Первым шагом произвольная точка траектории  $z_0$  (в реконструированном фазовом пространстве) принимается за начальную и ищется соседняя ближайшая к ней точка  $z_0^0$ . Расстояние между этими двумя точками  $\|L_0^0\|$ .

При хаотической динамике со временем это расстояние растёт. Если следующее значение  $\|L_1^0\| > \|L_0^0\|$ , то оно отбрасывается и ищется новая точка  $z_1^1$ , соседствующая с  $z_1$  и лежащая по возможности в том же направлении, что и  $z_0^0$ . Для поиска точки, удовлетворяющей этому условию можно определить скалярное произведение

$$S = \left( \frac{L_1^0}{\|L_1^0\|}, \frac{L_1^1}{\|L_1^1\|} \right),$$

величина которого должна быть как можно ближе к единице.

Так как  $L_j^i$  описывает поведение малого возмущения, его длина должна быть по возможности малой, чтобы линеаризованная вдоль траектории система хорошо описывала эволюцию. С другой стороны, она не должна быть настолько малой, чтобы стать сравнимой с уровнем шумов. Кроме того, необходимо чтобы  $z_0$  и  $z_0^0$  принадлежали разным траекториям, иначе не будут получены положительные первые показатели Ляпунова  $\lambda_1$ .

Если эти условия выполняются, то старший показатель Ляпунова определяется из выражения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{j=0}^{M-1} \log \left( \frac{L_{j+1}^j}{L_j^j} \right),$$

где  $(M-1)$  число смен соседних траекторий.

Если выбрать основание для логарифма равное двум, то первый показатель  $\lambda_1$  измеряется в единицах бит/шаг во времени.

Методы аналога не требуют смены траекторий. Наибольшую известность получили методы Канца и Розенштейна.

**2. Метод Розенштейна** [47] прост для реализации и показывает хорошую скорость расчета, однако, результатом его работы является не численное значение  $\lambda_1$ , а некоторая функция от времени:

$$y(i, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle, \quad d_j(i) = \min_{x_j'} \|x_j - x_j'\|,$$

где  $x_j$  — рассматриваемая точка, а  $x_j'$  — один из ее «соседей». Алгоритм основан на связи  $d_j$  и показателей Ляпунова:  $d_j(i) \approx e^{\lambda_1(i\Delta t)}$ . Для оценки используется ближайший сосед рассматриваемой точки. Старший показатель Ляпунова предлагается вычислить как угол наклона ее наиболее линейного участка. Нахождение такого участка, оказывается нетривиальной задачей, а иногда такой участок и вовсе указать не удается.

**3. Метод Канца** [37] основан на соотношении  $d_j(i) \approx e^{\lambda_1(i\Delta t)}$  и вычислении показателей Ляпунова по углу наклона наиболее линейного участка некоторой функции вида:

$$S(\varepsilon_0, j) = \left\langle \ln \left( \frac{1}{N_n} \sum_{x_j' \in S_n} \|x_j - x_j'\| \right) \right\rangle.$$

Усреднение берется по всем ближайшим соседям  $x_j$  в окрестности точки равной  $\varepsilon$ .

## 2.4. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для практического использования, кроме приведенных выше характеристических показателей выбраны инвариантные характеристики, для которых разработаны соответствующие расчетные алгоритмы.

**Выбор временного интервала.** Используется методика, основанная на теории информации и использовавшая первый минимум взаимной информации для  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$ . Для этого по временному ряду формируются гистограммы, аппроксимирующие распределение  $x(t)$  (оно же будет и для  $x(t + \tau)$ ) и совместное распределение  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$ . Далее по построенным гистограммам рассчитываются энтропии и взаимная информация.

$$S = -\sum_{ij} p_{ij}(\tau) \ln \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j},$$

где  $p_i$  — вероятность нахождения точки в  $i$ -м интервале, а  $p_{ij}(\tau)$  — совместная вероятность, попадания  $x(t)$  в  $i$ -й интервал и попадания  $x(t + \tau)$  в  $j$ -й.

**Оценка корреляционной размерности по временному ряду.** Для динамической системы очень важным является исследование структуры аттракторов. Странные аттракторы нелинейных динамических систем имеют самоподобную структуру, поэтому для них удобно применять качественное оценивание, идентификацию масштабных свойств, которые могут быть измерены с помощью фрактальных размерностей. Это позволяет оценить геометрическую структуру аттракторов и ввести меру для числа степеней свободы динамической системы [49].

Корреляционная размерность является частным случаем так называемой генеральной размерности, для определения которой пространство вложения, имеющее размерность  $ED$ , разбивается на ячейки  $V_i$  размером  $\varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Пусть вероятность того, что какая-то точка аттрактора находится в ячейке  $V_i$  есть  $p_i$ . Тогда генеральная размерность определяется:

$$D_q = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \log_2 \left( \sum_{i=1}^N p_i^q \right) \frac{1}{\log_2(\varepsilon)}, \quad \text{для } q = 0,$$

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(m)}{\log(1/\varepsilon)}, \quad \text{для } q \rightarrow 1.$$

Здесь информационная размерность  $D_1$  и информация  $I(\varepsilon)$  определяются соотношениями:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)};$$

$$I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i).$$

Для  $q = 2$  получается выражение для так называемой корреляционной размерности, используемой для определения размерности объектов, трудно поддающихся или не поддающихся аналитическому описанию (например, аттракторы, построенные методом задержек по опытным данным):

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 C(\varepsilon)}{\log_2 \varepsilon},$$

где  $C(\varepsilon)$  — корреляционный интеграл:

$$C(\varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m H(\varepsilon - \|z_i - z_j\|);$$

$\varepsilon$  — радиус сферы, для которого определяется число точек  $M(\varepsilon)$ , оказавшихся внутри сферы;  $H$  — функция Хевисайда.

При условии достаточно большого времени наблюдения  $T$  значениями

$$C(\varepsilon) \approx \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m H(\varepsilon - \|z_i - z_j\|),$$

$$D_2 \approx \frac{\log_2 C(\varepsilon)}{\log_2 \varepsilon}$$

определяется число точек  $M(\varepsilon)$  фазовой траектории, реконструированной из временного ряда, оказавшихся внутри сферы радиусом  $\varepsilon$ .

**Пример вычислений.** Рассмотрим временной ряд, порожденный системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = 0.375 \cdot (y - y^2) - 0.23 \cdot z \end{cases}$$

1. Расчет времени задержки иллюстрирует рис. 2.5. Расчетное значение  $\tau = 37$ .

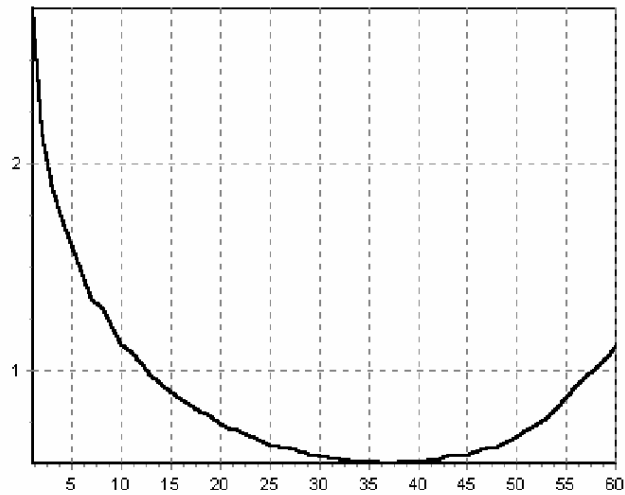


Рис. 2.5. Расчет времени задержки

2. Оценка старшего показателя Ляпунова проводится с использованием 3-х методов. Результаты для значений старшего показателя Ляпунова следующие: по методу Вольфа: 0,008912; по методу Канца: 0,009171, по метод Розенштейна: 0,009653.

Окончательный результат получен как усреднение по всем трем методам

$$\lambda_{\max} \approx 0,009245.$$

3. Оценка спектра показателей Ляпунова с использованием алгоритма, основанного на методе Беннетина, значение с первого по третий показатели Ляпунова имеют соответствующее значения: 0,008675; 0,000059;  $-0,028752$ .

4. Вычисление энтропии системы показано на рис. 2.6.

5. Оценка корреляционной размерности приведена на рис. 2.7.

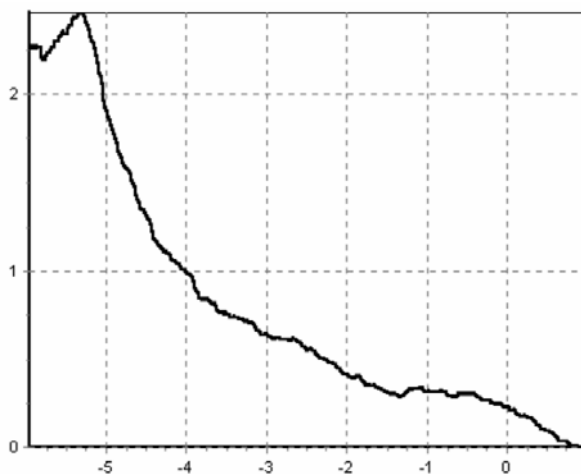


Рис. 2.6. Результат вычисления энтропии

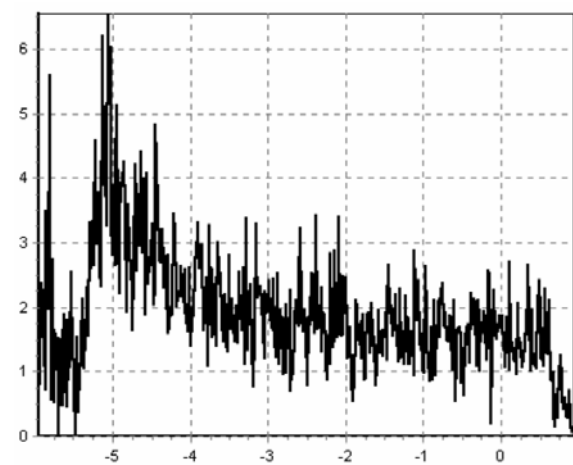


Рис. 2.7. Вычисление корреляционной размерности

## 2.5. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕКОНСТРУКЦИИ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ

Первой работой по реконструкции странного аттрактора по временным рядам была публикация результатов по гидродинамике [49]. В статье показано, что можно получить удовлетворительную геометрическую картину странного аттрактора небольшой размерности, если вместо переменных  $x$ , входящих в уравнения динамической системы  $dx/dt = F(x)$ , использовать  $m$ -мерные вектора, получаемые из элементов временного ряда по тому же принципу, что и в задачах авторегрессии

$$z_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}.$$

В том же году Ф. Такенс доложил о своей теореме, опубликованной годом позже [50]. Именно она лежит в основе всех алгоритмов анализа временных рядов методами нелинейной динамики.

Пусть  $M^k$  —  $k$ -мерное многообразие. Когда такое многообразие реализуется в виде поверхности  $L^k$  в  $n$ -мерном пространстве, которая не пересекается сама с собой, то говорят, что оно вложено в  $\mathbb{R}^n$ . Само вложение можно представить себе как дифференцируемую векторную функцию  $F$ , определенную на  $M^k$ , для которой отображение  $M^k \rightarrow L^k$  является взаимно однозначным и существует обратная дифференцируемая функция  $F^{-1}$ , отображающая  $L^k$  обратно в  $M^k$ . То есть  $L^k = F(M^k)$ . Функция  $F^{-1}$  определена только на  $L^k$ , в противном случае она не будет однозначной. Выбирая разные  $F$  и  $n$ , можно получить различные представления одного и того же многообразия.

Пусть на многообразии  $M^k$  (или на какой-либо поверхности  $L^k$  диффеоморфной ему) определена векторная функция, нужное количество раз дифференцируемая и отображающая  $M^k$  в  $m$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $M^k$  — как минимум дважды дифференцируемое многообразие, а  $g(x)$  — некоторая дважды дифференцируемая функция, отображающая  $M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которой матрица производных  $\partial g_i / \partial x_j$  имеет ранг  $k$ . Последнее условие необходимо, чтобы при отображении не получился объект меньшей размерности; скажем, плоскость не отображалась в одномерную кривую, т. е. ранг отображения должен быть равен  $k$ . Такое отображение будет давать погружение многообразия  $M^k$  в  $\mathbb{R}^n$  при условии, что  $m \geq 2k + 1$  (теорема Уитни [см. 51]). Погружение локально аналогично вложению, но может содержать самопересечения, а потому глобально невозможно определить обратное отображение. Например, если в качестве многообразия рассматривать окружность, то на плос-

кости эллипс будет вложением, а восьмерка — только погружением. Точке пересечения восьмерки будут соответствовать две различные точки окружности. Поэтому теоремы Уитни оказалось недостаточно для обоснования методов обработки временных рядов.

Пусть задана динамическая система  $\varphi^t(x)$  с фазовым пространством  $P$ . Будем считать, что числа, образующие временной ряд, являются значениями некоторой «наблюдаемой» — скалярной функции состояния динамической системы  $x(t)$ :

$$x_i = h(x(t_i)) = h(\varphi^t(x_0)).$$

В качестве многообразия  $M$ , фигурирующего в теореме Уитни, может использоваться либо само фазовое пространство  $P$ , либо какое-либо инвариантное многообразие  $M^d$  из  $P$ .

Пусть временной шаг между элементами временного ряда равен  $\tau$ , а вектора  $x(t_i)$  будем обозначать  $x_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} x_i &= h(x_i) \equiv \Phi_0(x_i), \\ x_{i+1} &= h(x_{i+1}) = h(\varphi^\tau(x_i)) \equiv \Phi_1(x_i), \\ x_{i+2} &= h(x_{i+2}) = h(\varphi^{2\tau}(x_i)) \equiv \Phi_2(x_i), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{i+m-1} &= h(x_{i+m-1}) = h(\varphi^{(m-1)\tau}(x_i)) \equiv \Phi_{m-1}(x_i), \\ x_{i+m} &= h(x_{i+m}) = h(\varphi^{m\tau}(x_i)) \equiv \Phi_m(x_i). \end{aligned}$$

Все компоненты вектора  $z$  связаны с одним и тем же состоянием динамической системы  $x_i$ . Следовательно, существует векторная функция, которую, следуя Такенсу, обозначим  $\Lambda$ , отображающая вектора  $x_i \in M^d$  в точки  $m$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^m$

$$z_i = \Lambda(x_i), x_i \in M^d, z_i \in \mathbb{R}^m.$$

В теореме предполагается, что  $M^d$ ,  $h$  и  $\varphi^t$  по крайней мере дважды дифференцируемы, а для всех неподвижных точек и циклов с периодами  $k\tau$ ,  $k < d$ , предполагается, что у них все собственные значения простые и не равны 1, а  $h(x)$  для них различны. Тогда теорема Такенса утверждает, что случаем общего положения, т. е. типичным свойством отображения  $\Lambda$  будет то, что при  $m \geq 2d + 1$  оно будет давать вложение  $M^k$  в  $\mathbb{R}^m$ . Образ  $M^k$  в  $\mathbb{R}^m$  будем обозначать  $L^d$ :  $L^d = \Lambda(M^d)$ , и, согласно теореме, в типичном случае у него не должно быть самопересечений.

«Вложение» в данном случае будет означать, что:

1. Функция  $\Lambda$  будет дифференцируема и будет иметь обратную дифференцируемую  $\Lambda^{-1}$ , определенную на  $L^D$ :  $M^d = \Lambda^{-1}(L^d)$ .

2. Каждой траектории динамической системы будет соответствовать ее образ в  $z$ -пространстве. Причем для образов будут иметь место те же свойства, что и для исходных траекторий, в частности, через каждую точку  $L^d$  будет проходить одна и только одна  $z$ -траектория.

3. На  $L^d$  можно определить динамическую систему.

$$x_i = \Lambda^{-1}(z_i), x_{i+1} = \varphi^\tau(x_i),$$

$$z_{i+1} = \Lambda(x_{i+1}) = \Lambda(\varphi^\tau(\Lambda^{-1}(z_i))) \equiv \Psi(z_i), z_i \in L^d.$$

Отображение  $\Psi$  переводит  $L^d$  в  $L^d$ , а вне поверхности  $L^d$  —  $\Psi$  не определено. Если оставить только последнюю компоненту этого соотношения, получим другой вариант, который можно записать в виде «отображения с запаздыванием» или «нелинейной авторегрессии»

$$x_i = F(x_{i-1}, \dots, x_{i-m}).$$

Таким образом, имеется два отображения:

$$x_{i+1} = \varphi^\tau(x_i) \equiv \Phi(x_i), x_i \in M^d, \Phi: M^d \rightarrow M^d$$

и

$$z_{i+1} = \Psi(z_i), z_i \in L^d, \Psi: L^d \rightarrow L^d.$$

Их можно рассматривать как отображения, связанные невырожденной и обратимой заменой переменных  $z = \Lambda(x)$  или как различные представления одного и того же отображения. Следовательно, характеристики, инвариантные относительно невырожденной замены, у обеих систем должны совпадать. К ним относятся фрактальные размерности аттрактора, набор обобщенных энтропии и все  $d$  показателей Ляпунова. Поэтому указанные свойства можно пытаться определять по экспериментальным данным, не зная всех переменных динамической системы. Можно пытаться восстановить (аппроксимировать) и саму функцию  $\Phi(z)$ .

Таким образом, теорема Такенса подводит строгую математическую основу под идеи нелинейной авторегрессии. Практическая реализация идей реконструкции часто сталкивается с проблемами. Возникают они из-за того, что длина обрабатываемого ряда всегда ограничена, во-первых, возможностями хранения информации, во-вторых, скоростью обработки, и, в-третьих, стационарностью исследуемого объекта — важно знать, в течение какого времени мы можем полагать, что исследуем одну и ту же динамическую систему (как толь-



ко изменится  $\varphi^l(x)$ , вектора  $z$  начнут строиться по-другому). Пусть имеется временной ряд из  $N$  чисел, которые являются значениями некоторой наблюдаемой, характеризующей одну и ту же динамическую систему. Тогда реконструированные  $z$ -вектора дадут  $(N - m)$  точек на поверхности  $L^d \in \mathbb{R}^n$ , по которым надо будет судить о динамической системе  $\Psi$  и ее аттракторе. Объем информации, который можно извлечь из этого множества точек, вообще говоря, зависит от свойств поверхности (насколько она искривлена, закручена и т. п.) и от свойств функции  $\Psi(z)$  (насколько велики ее производные). Так как точек конечное число, то существует некоторое характерное расстояние  $l$  между точкой и ее ближайшим соседом. Меньшие масштабы будут неразрешимы для данного временного ряда. Если на масштабах порядка  $l$  поверхность  $L^d$  сильно искривлена, а функция  $\Psi(z)$  сильно изменяется, то методы нелинейной динамики будут, скорее всего, бесполезны. Эта же проблема в несколько ином виде встречается, например, в задачах цифровой обработки сигналов (теорема Котельникова). Считается, что если временной интервал между отсчетами равен  $\Delta t$ , то частоты больше чем  $1/2\Delta t$  разрешить невозможно. Однако в задачах реконструкции свойства  $L^d$  и  $\Psi(z)$  априорно неизвестны, поэтому аналогичных оценок (скажем, кривизна или производная, не превышающие  $\sim l^{-1}$ ) сделать невозможно. Можно только разумно распорядиться несколькими свободными параметрами. Чаще всего это  $m$  и  $\tau$ .

Свойства  $L^d$  и  $\Psi(z)$  зависят от динамической системы  $\varphi$ , наблюдаемой  $h$ , задержки  $\tau$  и размерности векторов  $m$  («размерность вложения»).

Метод восстановления аттрактора системы был модифицирован автором применительно к системам, допускающим группы симметрий. На основании теоремы Кинга-Стеварта [52] о вложениях, для систем, допускающих симметрии, наблюдаемый выход был векторной, а не скалярной функцией состояния системы  $s(t)$ :

$$y(t) = W(s(t)), \quad (2.15)$$

отображая пространство состояний идентифицируемой системы в  $m$ -мерное евклидово пространство. Состояние системы может аналогично представлено вектором координат фазового пространства на основании соответствующих временных интервалов задержек

$$x(t) = \left[ y(t + T_1), \dots, y(t + T_{n_e}) \right]^T,$$

где размерность вложенного пространства  $n = m n_e$ . Так как вид эволюционных уравнений неизвестен, то возможность построения функции  $W$  можно установить на базе преобразований симметрий [18].

Линеаризуем выход (2.15) в окрестности неизменяемого во времени состояния  $\bar{s}$ , и, обозначая смещение  $\Delta y(t) = G(s(t)) - G(\bar{s})$ , получим

$$\Delta y(t) = C(s(t)),$$

где матрица  $C$  — определена таким образом, что  $C = D_s G(\bar{s})$ .

Динамическая система или пара  $(A, C)$  должна быть наблюдаемой, т. е. в течение любого времени начальное состояние  $\Delta s(t_i) = \Delta s_i$  может быть определено из измерения управляющих возмущений  $\Delta u(t)$  и выхода  $\Delta y(t)$ .

Группа симметрий  $T$ , в соответствии с определениями, введенными во второй главе, может быть определена базисным набором преобразований в виде:

$$T = p_1 T^1 \oplus p_2 T^2 \oplus \dots \oplus p_q T^q, \quad (2.16)$$

где  $n = p_1 d_1 + p_2 d_2 + \dots + p_q d_q$ ;  $p_r$  — число эквивалентных представлений  $T_r$  в декомпозиции, и  $q$  — общее число инфинитезимальных образующих в базисе. Аналогично (2.16) может быть разложено само касательное пространство  $T_x X$  на сумму инвариантных подпространств  $\mathcal{L}_L^\alpha$ , таких, что

$$T(g)x \in \mathcal{L}_L^\alpha, \forall x \in \mathcal{L}_L^\alpha \text{ и } \forall g \in L^1; \\ T_x X = \mathcal{L}_L^1 \oplus \mathcal{L}_L^2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_L^q, \quad (2.17)$$

где  $\mathcal{L}_L^\alpha = \mathcal{L}_L^1 \oplus \mathcal{L}_L^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_L^{p_\alpha}$ ;  $\alpha = \overline{1, p_r}$  — индексы возможных инвариантных подпространств, которые вписываются в группу  $T^r$ .

На основании группового анализа систем, редуцированных на центральное многообразие впервые получен следующий результат.

**Теорема 4.1** [18]. *Если в системе нет случайных вырождений, и группа  $T$  содержит не более одной копии каждого элемента декомпозиции (2.17) представления группы симметрий, то для реконструкции динамических систем в окрестности состояния  $s(t)$  необходимо, чтобы число ( $m$ ) измеряемых скалярных выходных сигналов  $y_i(t)$ , равнялось размерности конечнопараметрической алгебры  $A_0$ , отвечающей группе симметрий графиков фазовых траекторий.*

Динамическая система или пара  $(A, C)$  называется наблюдаемой [53] если, в течение любого времени, начальное состояние  $\Delta s(t_i) = \Delta s_i$  может быть определено из измерения управляющих возмущений  $\Delta u(t)$  и выхода  $\Delta y(t)$ . Как из-

вестно, понятие наблюдаемости дуальное к понятию управляемости — условие наблюдаемости для пары  $(A, C)$  эквивалентно условию управляемости для пары  $(A^*, C^*)$ . Наличие группы симметрий непосредственно подразумевает, что свойства симметрии матриц  $A$  и  $A^*$  по существу идентичны (одинаковы структуры спектров собственных значений, жордановых нормальных форм, и т. п.). В результате, известное ранговое условие управляемости линейных систем, накладываемое на матрицу  $B$  должно также удовлетворяться и для матрицы  $C^*$ . Иными словами наблюдаемость линеаризованной системы является эквивалентом наблюдаемости собственных векторов матрицы Якоби исходной системы.

## 2.6. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для вычислений использовалась система **TISEAN 3.0.0** для MATLAB [54, 55].

Ниже приведен текст вычислений инвариантных характеристик для ряда, порожденного уравнением Иведы:

$$z(n+1) = 1 + c \cdot z(n) \cdot e^{i \cdot a - \frac{i \cdot b}{1 + |z(n)|}}.$$

```
addpath('tools');
tisean_path = 'C:\chaos_tools\Tisean_3.0.0\bin\';
ruby_path = 'C:\Ruby191\bin\';
data_path = 'D:\workspace\matlab\data\converted\';
```

```
ts_filename = 'ikedata.dat';
tsFile = [data_path,ts_filename];
ikedata = load(ts_filename);
```

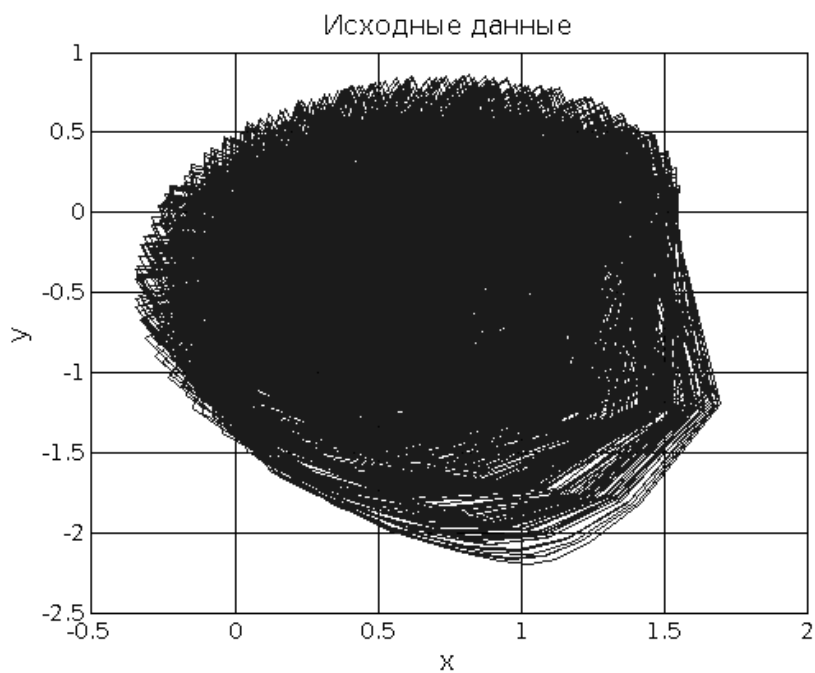
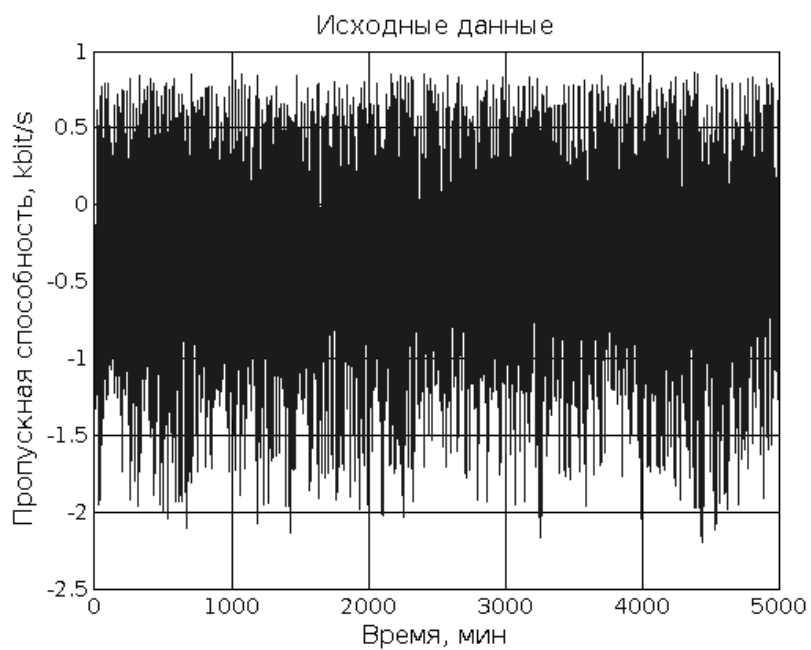
```
ts = ikedata(:,2);
save('ts.dat', 'ts', '-ascii');
```

```
N = length(ts);
Исходные данные
p_figure('Title','Исходные данные',...
'XLabel','Время, мин',...
'YLabel','Пропускная способность, kbit/s',...
'XLim', [0 length(ts)]);
```

```
plot(ts);
```

```
p_figure('Title','Исходные данные',...  
        'XLabel','x',...  
        'YLabel','y');
```

```
plot(ikeda(:,1),ts);
```

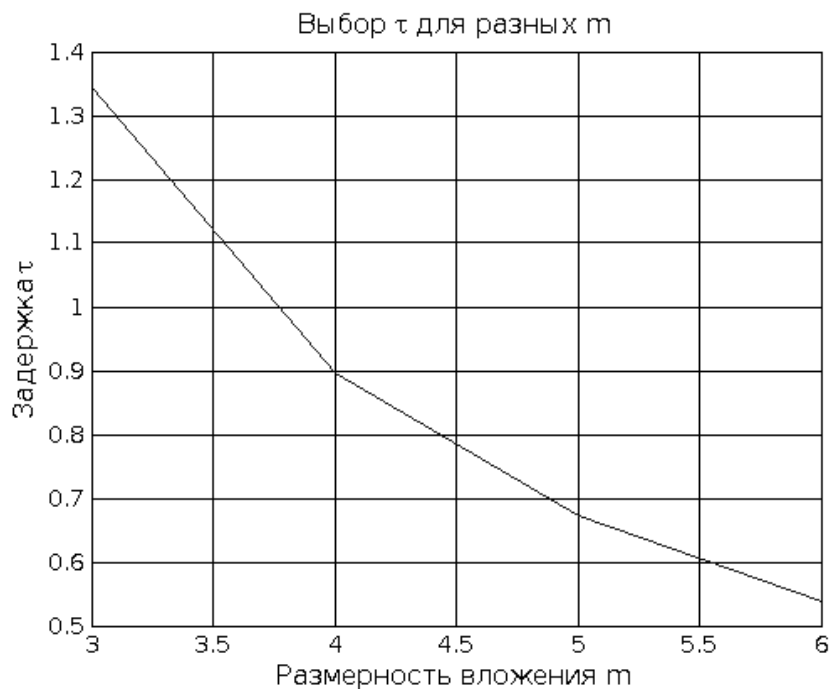


```
% Выбор задержки  
std_dev_x = std(ts);  
std_dev_dx = std(diff(ts));
```

```
% Расчетное значение длины окна реконструкции
w_rated = (sqrt(12)*std_dev_x)/std_dev_dx;
```

```
m=3:6;
tau = w_rated./(m-1);
```

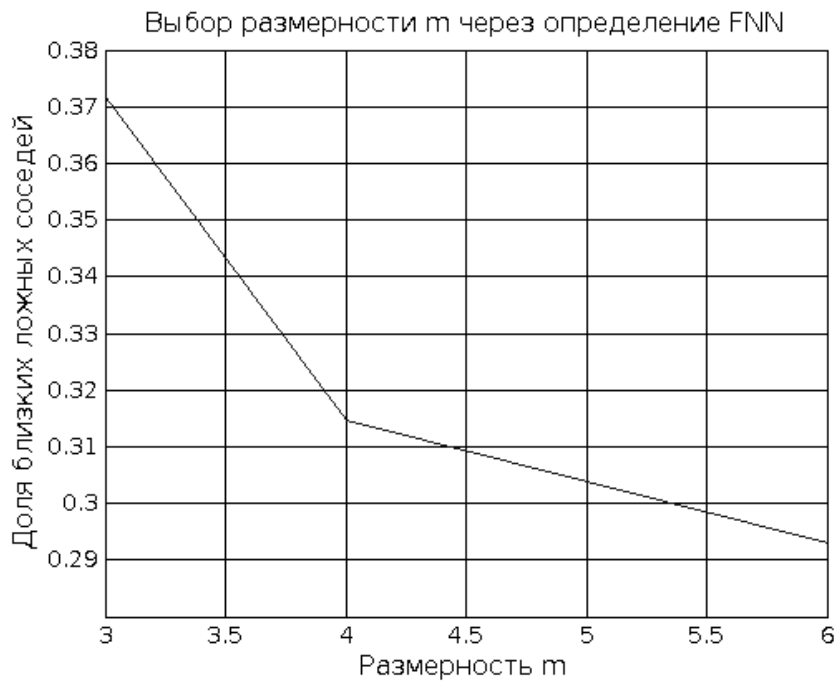
```
p_figure('Title','Выбор \tau для разных m',...
'XLabel','Размерность вложения m',...
'YLabel','Задержка \tau');
plot(m,tau);
```



```
%Выбор размерности
min_emb = 3;
max_emb = 6;
delay = 1;
tai_window = round(w_rated);
system([tisean_path,'false_nearest ts.dat',...
'-m', int2str(min_emb), ... % Минимальная размерность вложения
'-M1,', int2str(max_emb),... % Макс. размерность вложения
'-d', int2str(delay),... % Задержка
'-t', int2str(tai_window),... % окно реконструкции (Тайлера)
'-V0 -o']);
```

```
fnn = load('ts.dat.fnn');
```

```
p_figure('Title','Выбор размерности m через определение FNN',...
'XLabel','Размерность m',...
'YLabel','Доля близких ложных соседей');
plot(fnn(:,1),fnn(:,2));
```



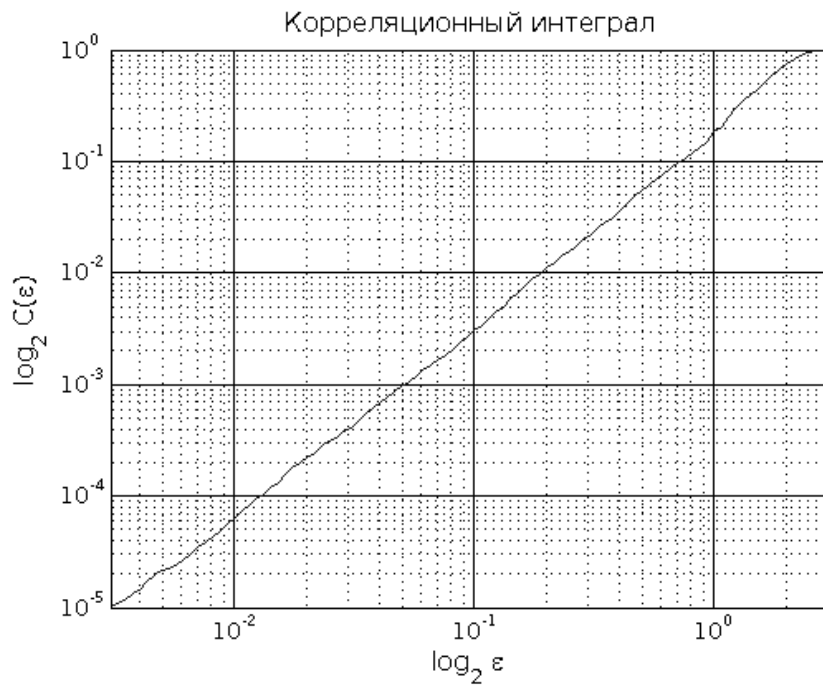
```
m=4;
delay=1;
```

```
system([tisean_path,'d2 ts.dat',...
  '-d', int2str(delay),...
  '-M1,', int2str(m),...
  '-t', int2str(tai_window),...
  '-o -V0']);

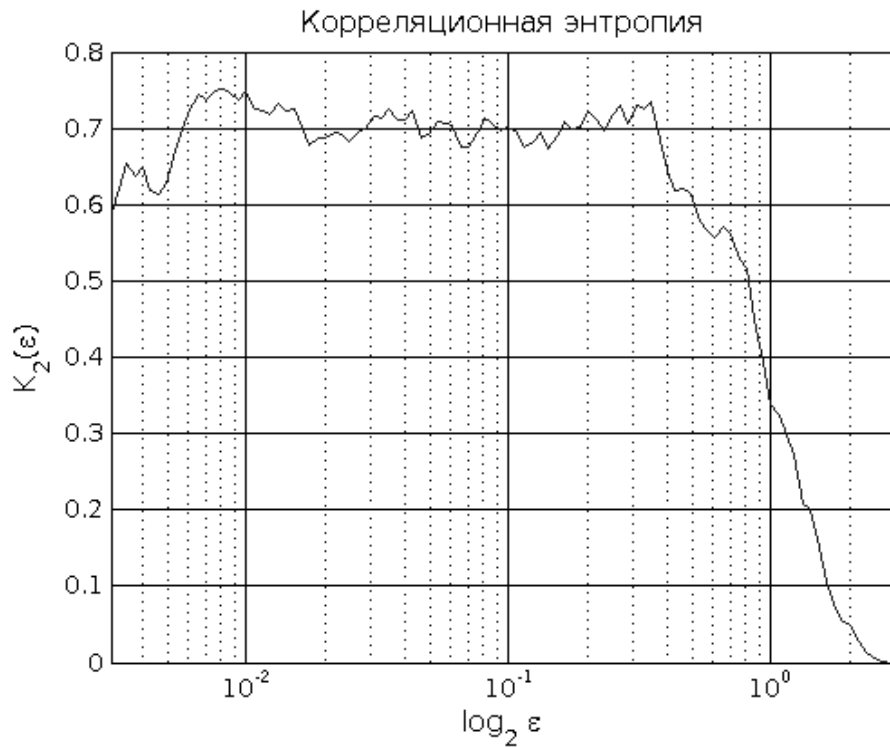
% Корреляционные суммы
system([ruby_path,'ruby prepare_output_structure.rb -f ts.dat.c2']);
% Корреляционная размерность
system([ruby_path,'ruby prepare_output_structure.rb -f ts.dat.d2']);
% Корреляционные энтропии
system([ruby_path,'ruby prepare_output_structure.rb -f ts.dat.h2']);

cor_sums = load(['data_ts.dat.c2\dim_',int2str(m),'.dat']);
cor_dims = load(['data_ts.dat.d2\dim_',int2str(m),'.dat']);
cor_entropies = load(['data_ts.dat.h2\dim_',int2str(m),'.dat']);

%Корреляционный интеграл
p_figure('Title','Корреляционный интеграл',...
  'XLabel',{'log2 \epsilon'},...
  'YLabel',{'log2 C(\epsilon)'},...
  'XScale','log',...
  'YScale','log',...
  'XLim',[min(cor_sums(:,1)) max(cor_sums(:,1))]);
plot(cor_sums(:,1),cor_sums(:,2));
```



```
% Корреляционная энтропия
p_figure('Title','Корреляционная энтропия',...
        'XLabel','{\log_2 \epsilon}',...
        'YLabel','{K_2(\epsilon)}',...
        'XScale','log',...
        'XLim',[min(cor_entropies(:,1)) max(cor_entropies(:,1))]);
plot(cor_entropies(:,1),cor_entropies(:,2));
```



```
% Корреляционная размерность
p_figure('Title','Корреляционная размерность',...
        'XLabel','{\log_2 \epsilon}',...
```

```

'YLabel',{'D_2(\epsilon)'},...
'XScale','log',...
'XLim',[min(cor_dims(:,1)) max(cor_dims(:,1))]);
plot(cor_dims(:,1),cor_dims(:,2));

print(gcf,'-r200','-dpng','images\кopp_размерность.png');

```



```

%Корреляционная размерность (Такенс)
system([tisean_path,'c2t ts.dat.c2 -o -V0']);
system([ruby_path,'ruby prepare_output_structure.rb -f ts.dat.c2_t']);

cor_dims_takens = load(['data_ts.dat.c2_t\dim_',int2str(m),'.dat']);
max_eps = round(cor_dims_takens(length(cor_dims_takens),1));

p_figure('Title','Корреляционная размерность (решатель Такенса)',...
'XLabel',{'log_2 \epsilon'},...
'YLabel',{'D_2(\epsilon)'},...
'XScale','log',...
'XLim',[0 max_eps]);
hold on;

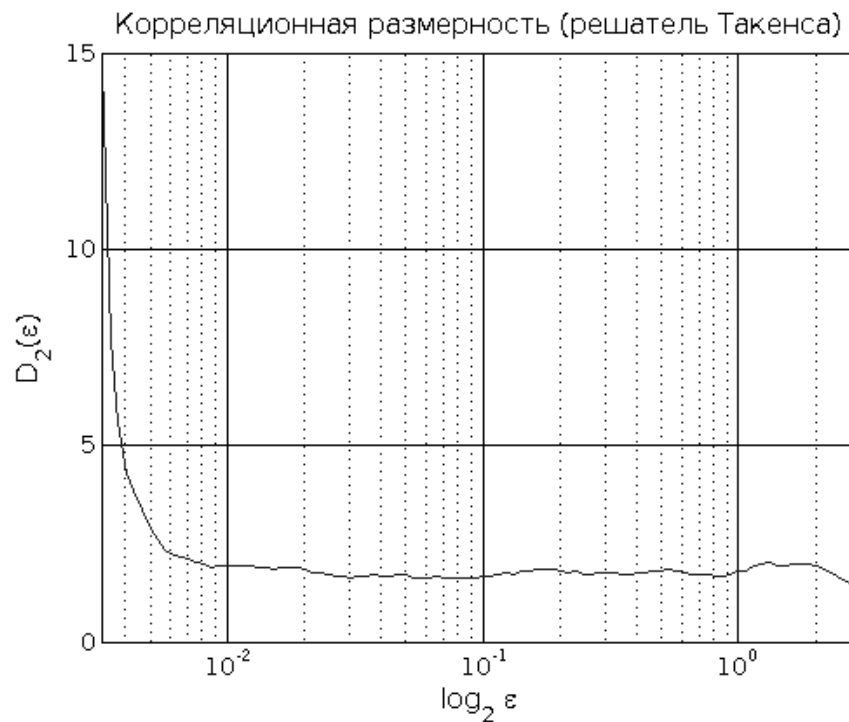
plot(cor_dims_takens(:,1),cor_dims_takens(:,2));

hold off;

print(gcf,'-r200','-dpng','images\кopp_размерность_такенс.png');

```





```

%Корреляционная размерность (Гаусс)
system([tisean_path,'c2g ts.dat.c2 -o -V0']);
system([ruby_path,'ruby prepare_output_structure.rb -f ts.dat.c2_g']);

cor_dims_gauss = load(['data_ts.dat.c2_g\dim_',int2str(m),'.dat']);
max_eps = round(cor_dims_gauss(length(cor_dims_gauss),1));

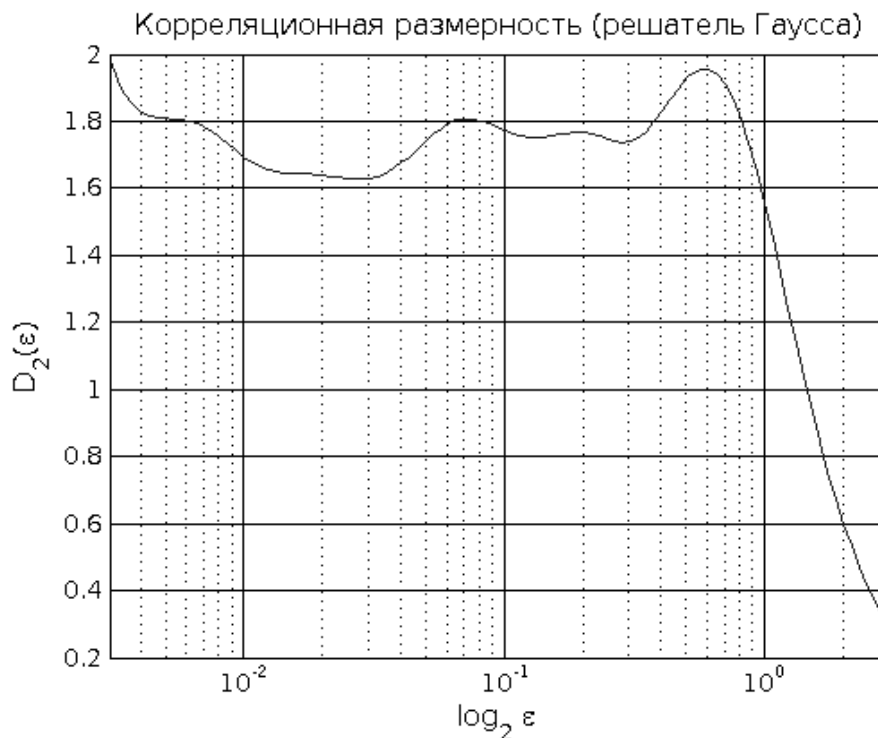
p_figure('Title','Корреляционная размерность (решатель Гаусса)',...
        'XLabel',{'log_2 \epsilon'},...
        'YLabel',{'D_2(\epsilon)'},...
        'XScale','log',...
        'XLim',[0 max_eps]);
hold on;

plot(cor_dims_gauss(:,1),cor_dims_gauss(:,3));

hold off;

print(gcf,'-r200','-dpng','images\кopp_размерность_гаусс.png');

```



%Показатель Ляпунова по алгоритму Канца

n\_iter = 100;

n\_epsilons = 5;

system([tisean\_path,'lyap\_k ts.dat',...

'-m',int2str(m),...

'-M',int2str(m),...

'-d',int2str(delay),...

'-t',int2str(tai\_window),...

'-s',int2str(n\_iter),...

'-#',int2str(n\_epsilons),...

'-o -V0']];

system([ruby\_path,'ruby prepare\_output\_structure\_lyap.rb -f ts.dat.lyap']);

epsilons = load('data\_ts.dat.lyap\epsilons.dat');

p\_figure('Title','Показатель Ляпунова по алгоритму Канца',...

'XLabel',{'Итерации, n'},...

'YLabel',{'\lambda\_1'});

hold on;

n\_fnn = zeros(1,n\_epsilons);

for index=1:n\_epsilons

data = load(['data\_ts.dat.lyap\dim\_',int2str(m),'\_',int2str(index),'.dat']);

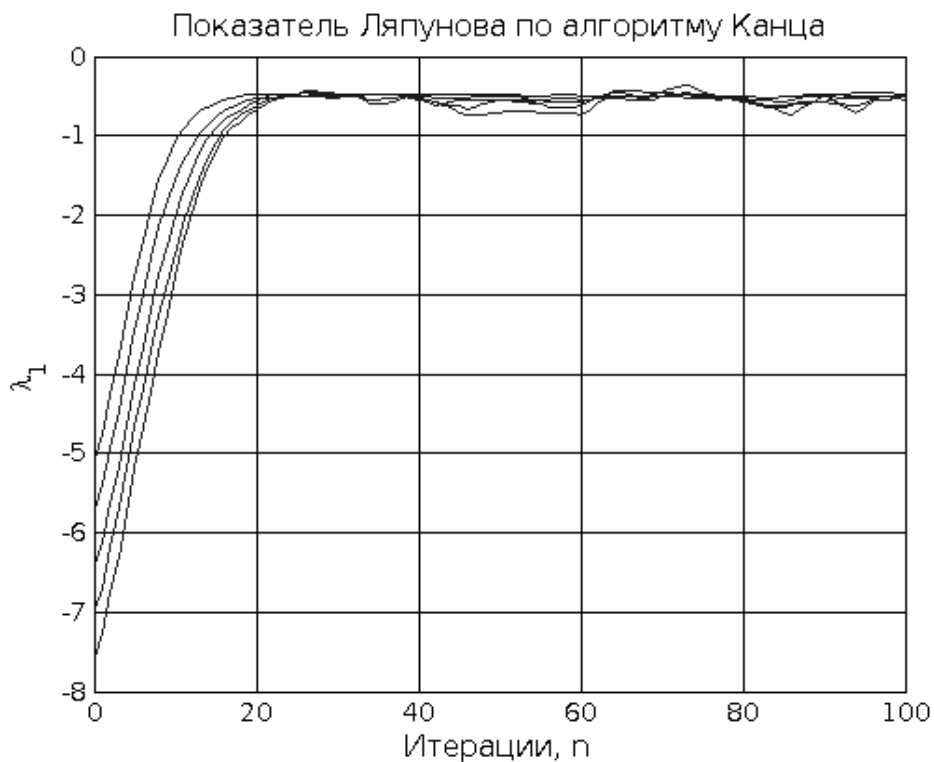
```

if (~isempty(data))
    plot(data(:,1),data(:,2));
    n_fnn(index) = data(1:1,3);
else
    n_fnn(index) = inf;
end
end

print(gcf,'-r200','-dpng','images\ляпунова_kantz.png');

```

```
hold off;
```

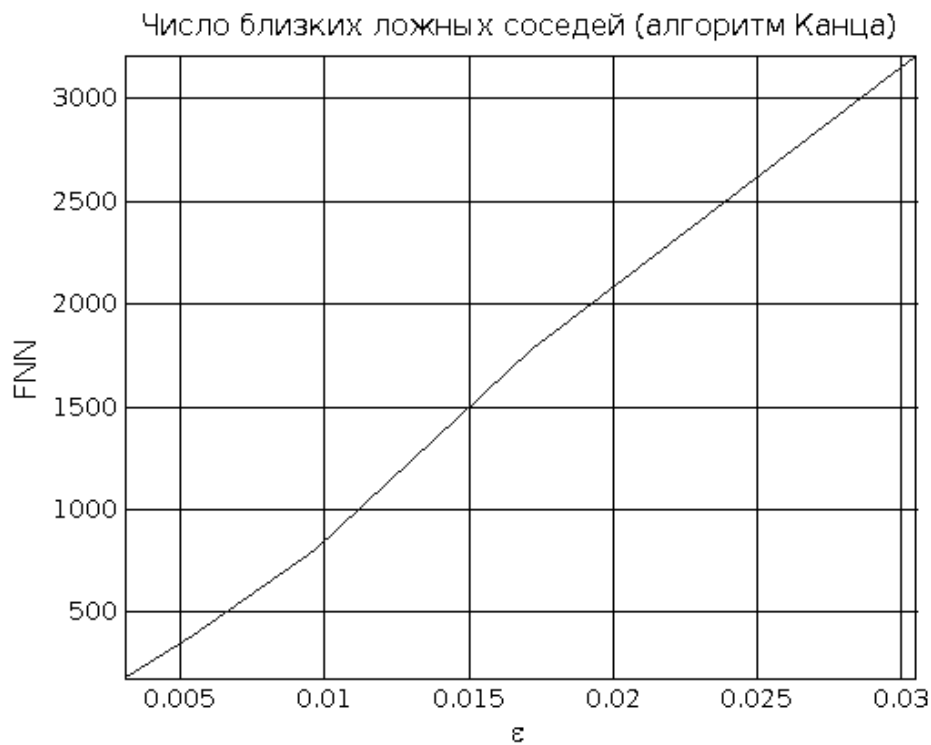


```

%Число FNN при вычислении показателя Ляпунова по алг. Канта
p_figure('Title','Число близких ложных соседей (алгоритм Канта)',...
'XLabel','{\epsilon}',...
'YLabel','{FNN}',...
'XLim',[min(epsilons(:,2)) max(epsilons(:,2))],...
'YLim',[min(n_fnn) max(n_fnn)]);

```

```
plot(epsilons(:,2),n_fnn(:));
```



% Показатель Ляпунова по алгоритму Розенштейна

n\_iter = 100;

system([tisean\_path,'lyap\_r ts.dat',...

'-m',int2str(m),...

'-d',int2str(delay),...

'-t',int2str(tai\_window),...

'-s',int2str(n\_iter),...

'-o -V0']];

lyap\_ros = load('ts.dat.ros');

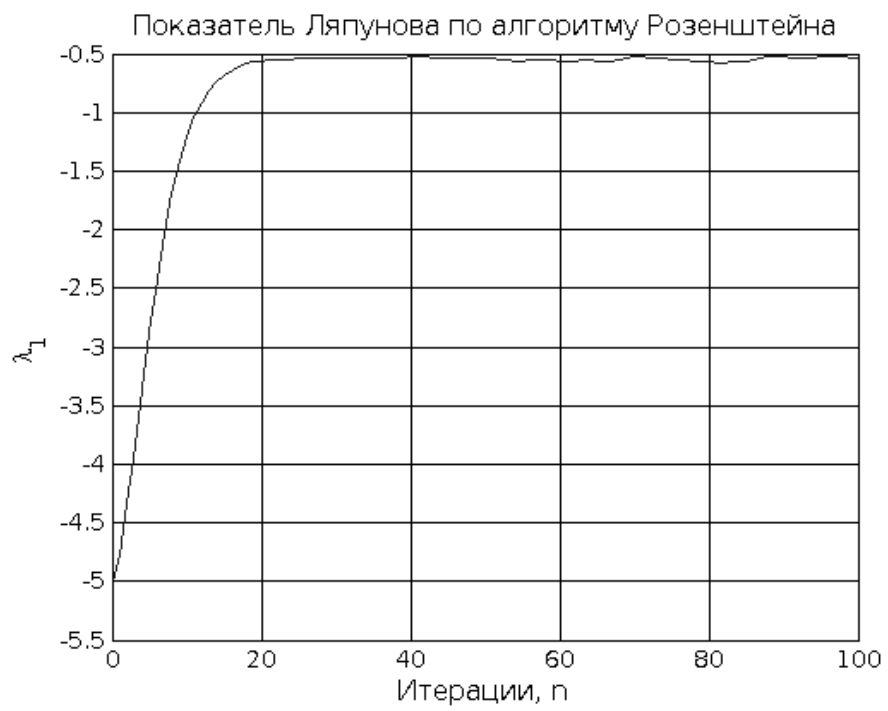
p\_figure('Title','Показатель Ляпунова по алгоритму Розенштейна',...

'XLabel','{Итерации, n}',...

'YLabel','{\lambda\_1}');

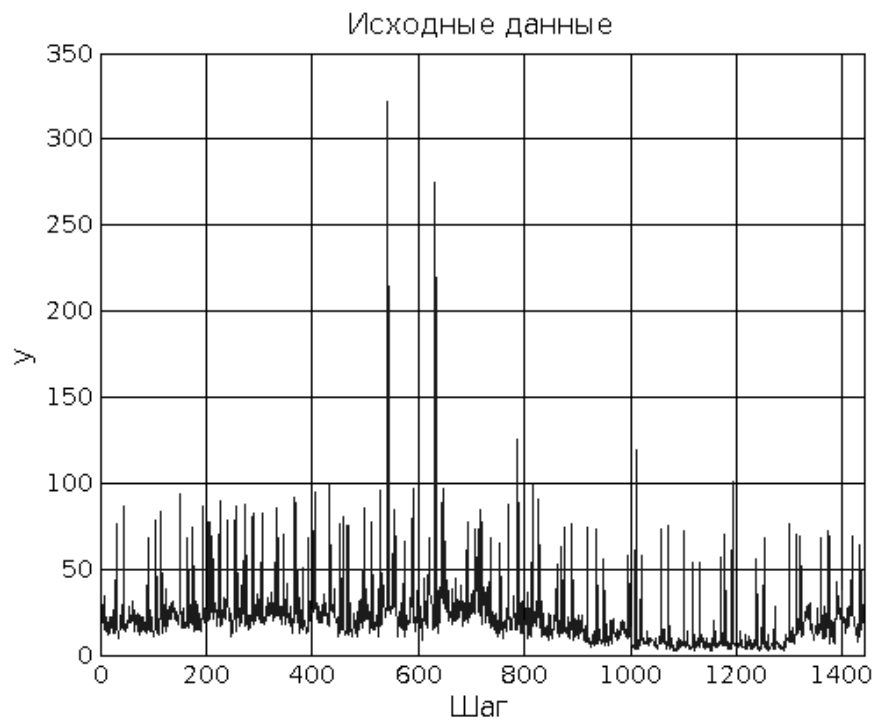
plot(lyap\_ros(:,1),lyap\_ros(:,2));

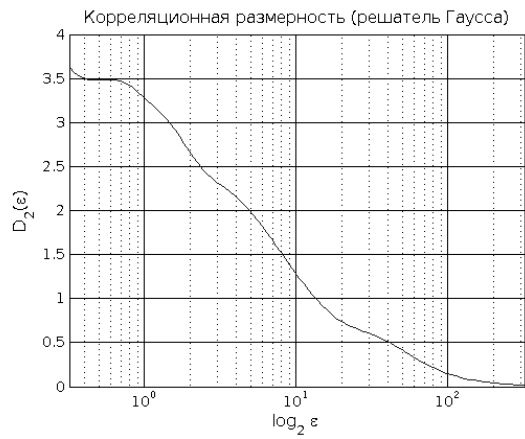
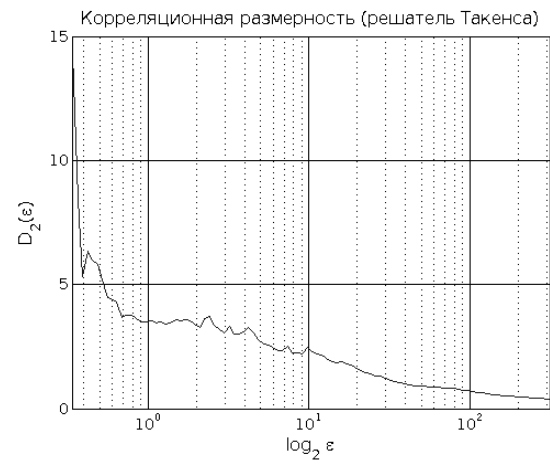
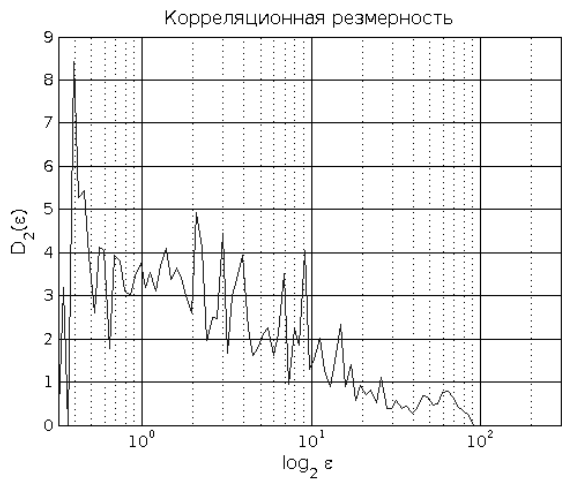
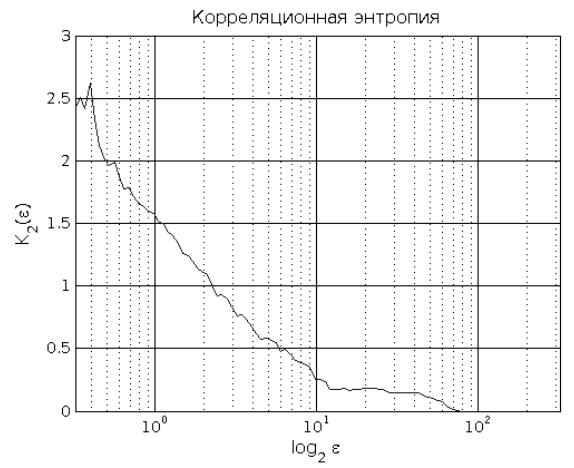
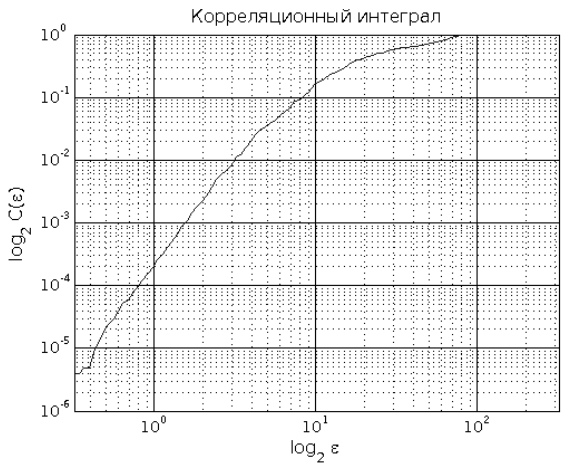
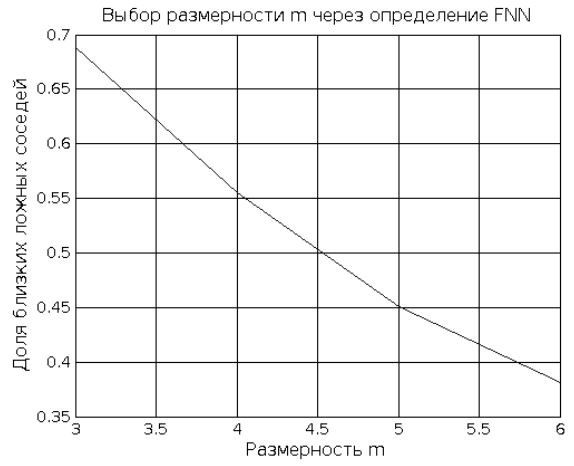
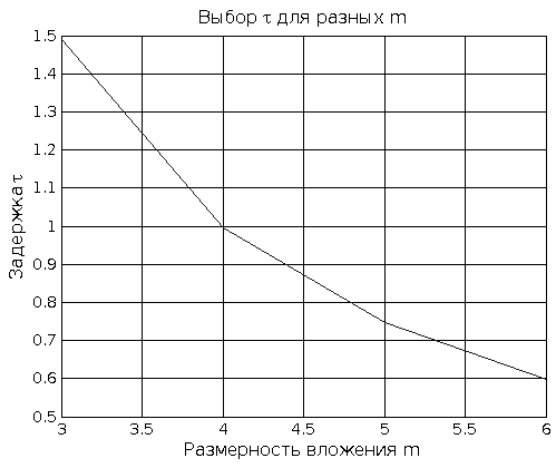
print(gcf,'-r200','-dpng','images\ляпунова\_rose.png');



close all;

%Вычисление инвариантных характеристик для  
 % экспериментальных данных (трафика) загрузки канала  
 % связи корпоративной сети.



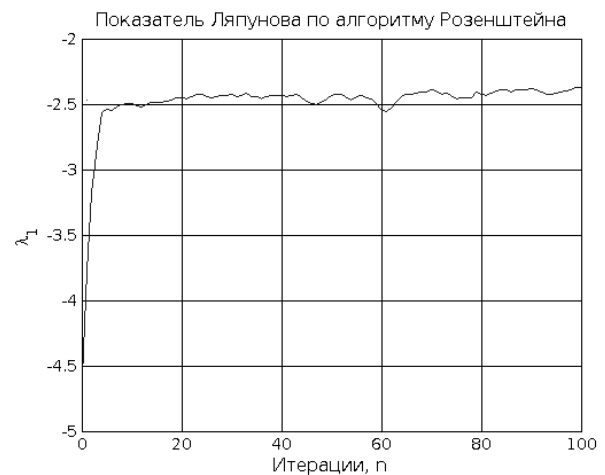
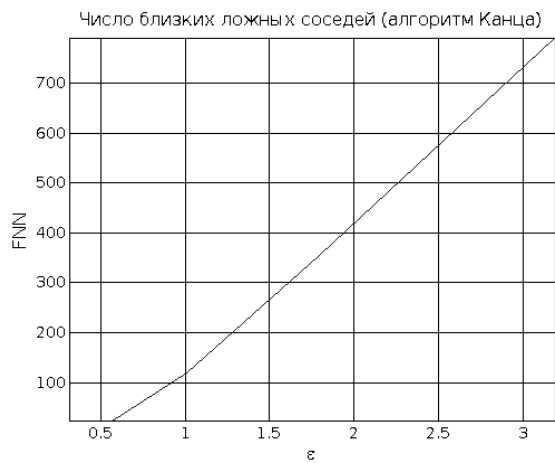
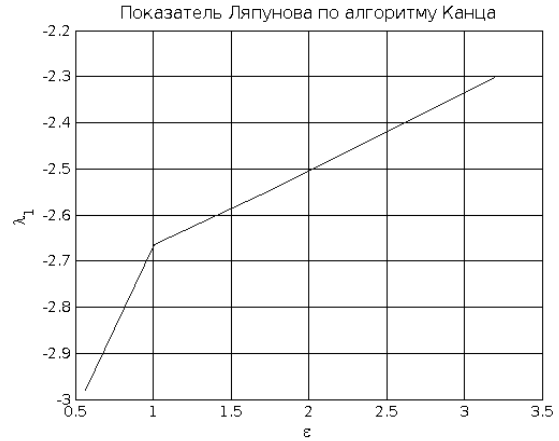
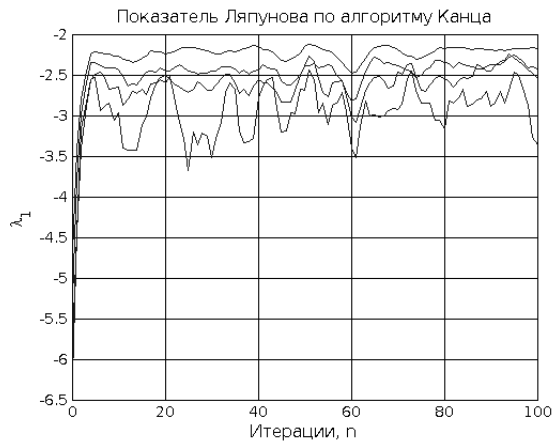


Средний показатель Ляпунова по алгоритму Канца = -2.9809 для  $\epsilon=0.5674$

Средний показатель Ляпунова по алгоритму Канца = -2.6648 для  $\epsilon=1.0090$

Средний показатель Ляпунова по алгоритму Канца = -2.5411 для  $\epsilon=1.7943$

Средний показатель Ляпунова по алгоритму Канца = -2.3017 для  $\epsilon=3.1907$



Средний показатель Ляпунова по алгоритму Розенштейна = -2.4656

Используя приведенные тексты примеров можно исследовать любые временные ряды.

### 3. ВЫЯВЛЕНИЕ СИММЕТРИЙ В РЕКОНСТРУИРОВАННОМ АТТРАКТОРЕ

---

---

#### 3.1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Необходимо выделить на исходной последовательности набор участков таким образом, чтобы при приведении их к единому масштабу, положению и углу поворота они были бы максимально схожи между собой, а также получить численные показатели преобразований, переводящих один фрагмент в другой без учета нарушений симметрии, дать численную оценку степени нарушения симметрии. На рис. 3.1 приведена схематическая иллюстрация постановки задачи.

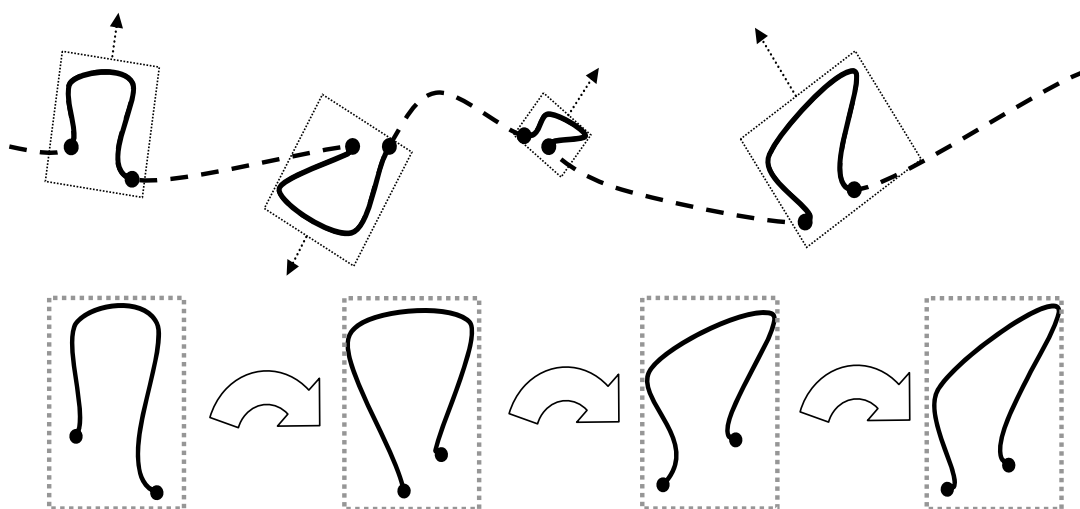


Рис. 3.1. Схематическая иллюстрация постановки задачи.

Задача выделения набора схожих фрагментов в контуре определяется следующим образом:

**Вход:** последовательность из  $n$  точек  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ , функция  $Dist(V_1, V_2)$ , дающая оценку схожести двух любых фрагментов исходной последовательности  $V_i = \langle v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+p} \rangle$ .



**Выход:** набор непересекающихся фрагментов исходной последовательности  $S = (V_1, V_2, \dots, V_k)$  такой, что для любого другого набора фрагментов  $S' = (V_1, V_2, \dots, V_h)$  выполняется условие:

$$\forall S' \neq S : \max_{V_i, V_j \in S'} \left( \frac{1}{1 + \text{Dist}(V_i, V_j)} \right) \cdot \sum_{i=1}^k |V_i| \cdot \frac{1}{m} \geq \max_{V_i, V_j \in S} \left( \frac{1}{1 + \text{Dist}(V_i, V_j)} \right) \cdot \sum_{i=1}^h |V_i| \cdot \frac{1}{m}.$$

Количество различных фрагментов, которые можно выделить в исходной последовательности:

$$m = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Количество произвольных наборов фрагментов, определяется размером множества всех подмножеств набора  $\langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle$ :

$$u = P(m) = 2^m.$$

Исходя из этого сложность задачи  $T(n) = \Theta(2^{n^2})$ .

Сформулируем следующую *задачу разрешения*, изменив требования к выходу задачи: существует ли решение  $S$ , такое что

$$\max_{V_i, V_j \in S} \left( \frac{1}{1 + \text{Dist}(V_i, V_j)} \right) \cdot \sum_{i=1}^h |V_i| \cdot \frac{1}{m} \leq k, \quad (3.1)$$

где  $k$  - априори заданная величина, то есть существует ли набор фрагментов, в котором произведение максимального нормированного расстояния между фрагментами и суммарной нормированной длины фрагментов не больше  $k$ ?

Для реализации проверяющего алгоритма  $A(S)$ , который возвращает 1, в случае если  $S$  удовлетворяет поставленному условию, и 0 в противном случае, необходимо произвести  $\Omega(n)$  действий по расчету максимального расстояния и суммарной длины фрагментов, следовательно поставленная задача принадлежит к классу NP, задачам проверяемым за полиномиальное время.

Представим вход задачи в виде полносвязного графа  $G$ , вершинами в котором будут фрагменты  $V_i$ , а ребрами оценки соответствующих пар фрагментов полученные с помощью функции  $\text{Dist}$  (см. рис. 3.2).

В таком случае задание параметра  $k$  будет выделять в графе  $G$  подграф  $G_k$  не содержащий вершин-фрагментов и ребер, длина которых больше  $k$  (см. рис. 3.3). Все решения  $S$ , удовлетворяющие условию (3.1) являются кликами (clique), полносвязными компонентами графа  $G_k$ , т. е. решениями не содержащими вершин, ребра между которыми исключены. И хотя обратное утверждение неверно — не все клики являются корректными решениями, задача вы-

деления набора схожих фрагментов в контуре (NEAR-FRAGMENTS-SET) таким образом, сводится к задаче поиска клика графа  $G_k$  (CLIQUE):

$$\text{CLIQUE} \leq_p \text{NEAR-FRAGMENTS-SET}.$$

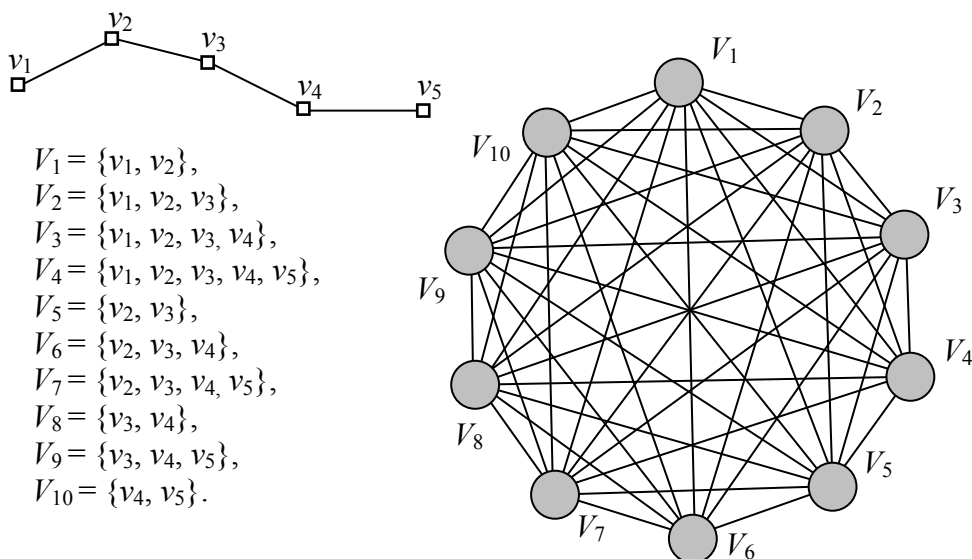


Рис. 3.2. Исходная последовательность точек (слева-сверху), набор всех возможных фрагментов (слева-снизу) и граф  $G$ , ребрами которого являются оценки  $Dist(V_i, V_j)$

- $C_1 = \{V_1\},$
- $C_2 = \{V_1, V_3\},$
- $C_3 = \{V_1, V_5\},$
- $C_4 = \{V_1, V_{10}\},$
- $C_5 = \{V_1, V_3, V_5\},$
- $C_5 = \{V_1, V_3, V_{10}\},$
- $C_5 = \{V_1, V_5, V_{10}\},$
- $C_5 = \{V_1, V_5, V_3\},$
- $C_6 = \{V_1, V_3, V_5, V_{10}\},$
- $C_7 = \{V_3\},$
- $C_8 = \{V_3, V_5\},$
- $C_9 = \{V_3, V_{10}\},$
- ...
- $S_2 = \{V_1, V_5\},$
- $S_2 = \{V_5, V_{10}\},$
- $S_5 = \{V_3, V_{10}\}.$

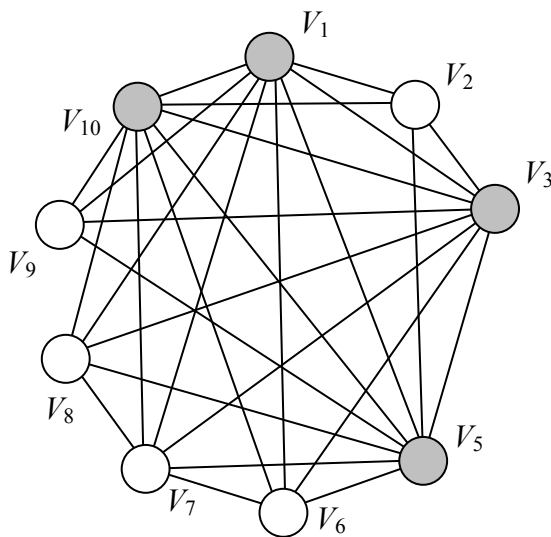


Рис. 3.3. Пример графа  $G'$  (справа), набор его клик (слева-сверху) и список корректных решений.

Задача CLIQUE является NP-полной задачей, следовательно, задача NEAR-FRAGMENTS-SET также является NP-полной.

## 3.2. ПРЕДОБРАБОТКА ДАННЫХ

**Получение исходных данных.** Исходный  $n$ -мерный контур является реконструированным аттрактором, но контур может быть получен любым способом. В некоторых случаях требуется провести предварительное сглаживание и фильтрацию шумов.

**Маркировка.** В простейшем случае для отбора фрагментов траектории удовлетворяющих решению необходимо рассмотреть фрагменты, расположенные между всеми возможными парами точек контура. В большинстве задач такой подход не представляется возможным из-за ограниченных ресурсов ЭВМ. Поэтому имеет смысл рассматривать в качестве начала/конца фрагмента только некоторые точки контура, например, экстремумы функций каждой из координат и равномерно распределенные по длине маркеры на слабо изменяющихся участках (рис. 3.4). Такой подход обеспечивает достаточно рациональное разбиение контура, хотя и страдает некоторой избыточностью.

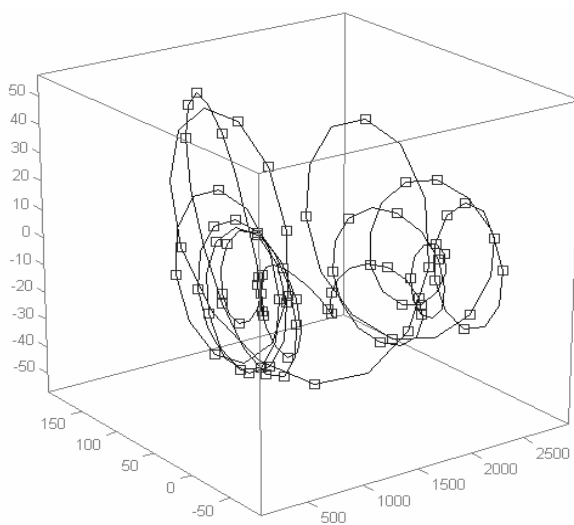


Рис 3.4. Расстановка маркеров в точках экстремумов

Алгоритм разбиения может быть любым, главное исключить монотонные участки и выделить маркерами характерные участки контура.

**Извлечение фрагментов.** Для выделения фрагментов контура для исследования в простейшем случае можно воспользоваться прямым перебором пар маркеров. В таком случае, количество требующих рассмотрения фрагментов:

$$F_{\text{полн}} = \frac{n^2 - n}{2},$$

где  $n$  — количество маркеров на контуре.

Имеет смысл ограничить длину фрагмента в точках исходного контура как сверху так и снизу, так как фрагменты, по длине приближающиеся к исходному контуру, не представляют интереса для выявления закономерностей распределения симметрий, а слишком маленькие фрагменты не отражают специфики поведения исследуемой системы. Кроме того, при введении ограничения на длину сверху — рост количества фрагментов для рассмотрения становится линейным, в отличие от квадратичного, при полном переборе.

Отобранные фрагменты для возможности сравнения между собой необходимо интерполировать таким образом, чтобы все они описывались одним и тем же фиксированным числом точек (рис. 3.5).

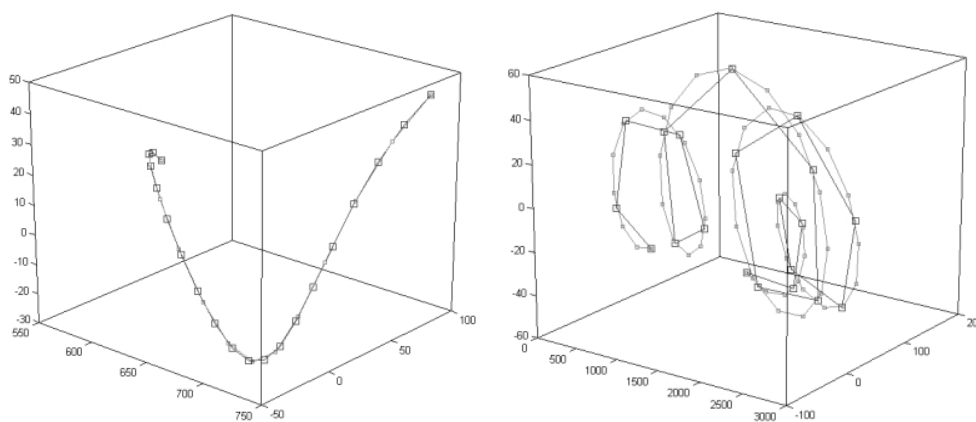


Рис. 3.5. Интерполяция отобранных фрагментов

**Нормализация.** После приведения к одному количеству точек каждый из фрагментов необходимо подвергнуть процедуре нормализации. Целью процедуры является преобразование фрагмента в дескриптор — образ, инвариантный относительно переноса, поворота и масштабирования исходного фрагмента, а также получение численных показателей этого преобразования (рис. 3.6).

Предлагаемая процедура нормализации представляет собой последовательность следующих действий:

Выделение во фрагменте так называемых «осей» — пар точек, расстояние между которыми максимально в текущем пространстве-проекции.

Поворот фрагмента таким образом, чтобы его оси стали параллельны координатным осям.

Построение ограничивающего фрагмент  $n$ -мерного параллелепипеда и сдвиг фрагмента таким образом, чтобы центр этого параллелепипеда совпал с центром координат.

Масштабирование фрагмента таким образом, чтобы длина его главной оси стала равна 1.

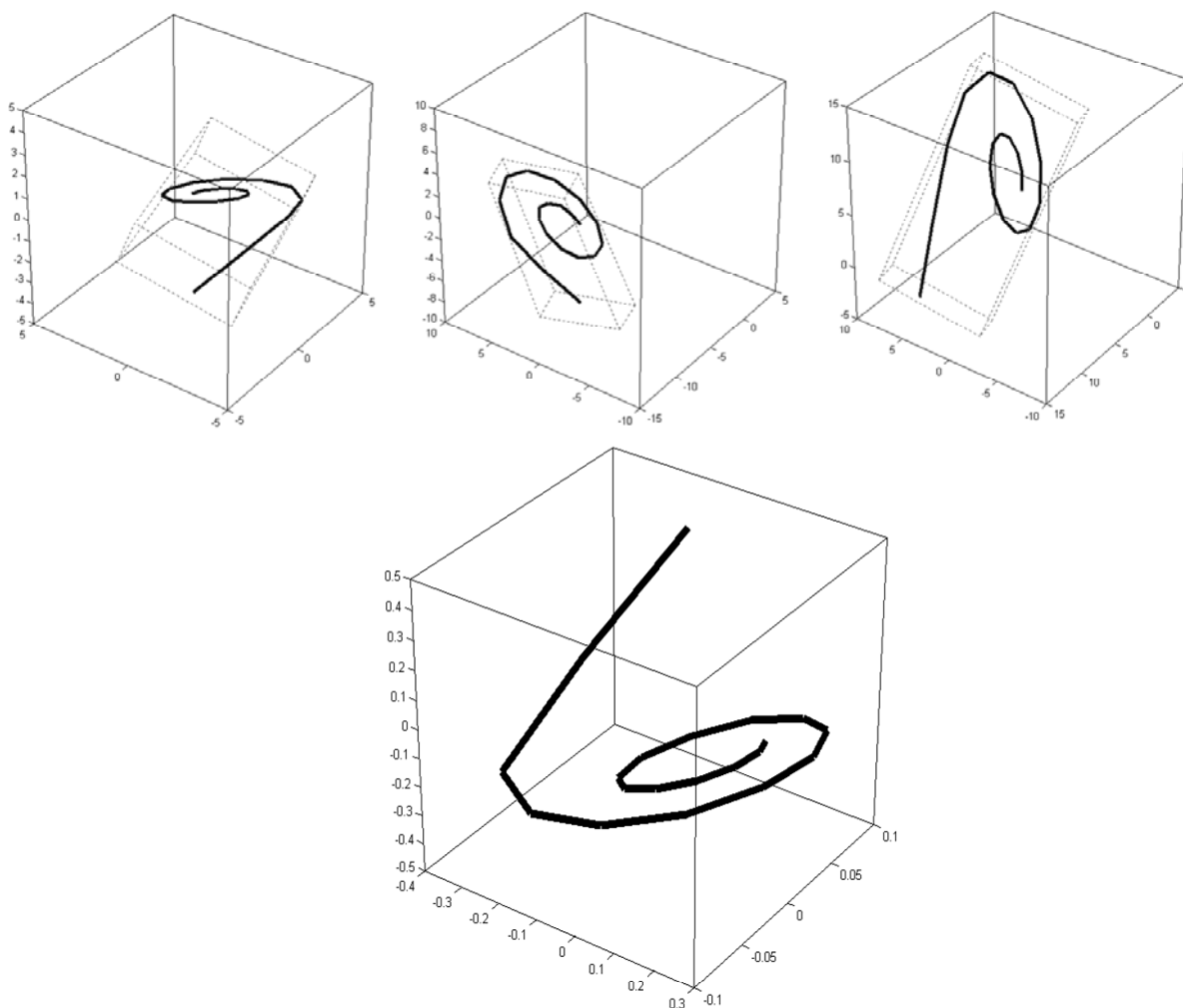


Рис. 3.6. Три исходных симметричных 3-мерных фрагмента (сверху) и их общий дескриптор (снизу)

Фрагмент  $n$ -мерного контура  $F$  состоящий из  $m$  действительных точек, представляется в виде матрицы  $m \times n$ .

$$F_{исх} = [X_1 X_2 \dots X_n],$$

где  $X_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}]^T$ .

Всего в фрагменте можно выделить  $n-1$  осей. В трехмерном случае (рис. 3.4) осей будет две: пара наиболее удаленных точек в пространстве  $OX_1X_2X_3$  (главная ось  $A^1$ ) и пара наиболее удаленных точек в проекции фрагмента на плоскость  $P$  перпендикулярную  $A^1$  (ось второго порядка  $A^2$ ).

Чтобы  $A^1$  стала параллельна координатной оси  $OX_1$ , необходимо произвести  $n-1$  поворотов в плоскостях  $OX_1X_n, OX_1X_{n-1} \dots OX_1X_2$ . После этого преобразования  $A^2$  находится простым перебором точек в пространстве-проекции  $OX_2 \dots X_n$  и выборе точке с максимальным расстоянием от оси  $OX_1$ . В приве-

денном трехмерном случае это означает, что плоскость  $P$  совпадет с плоскостью  $OX_2X_3$ . Для того, чтобы  $A^2$  стала параллельной координатной оси  $OX_2$ , необходимо произвести  $n - 2$  поворотов в плоскостях  $OX_1X_{n-1} \dots OX_2X_3$  и т. д.

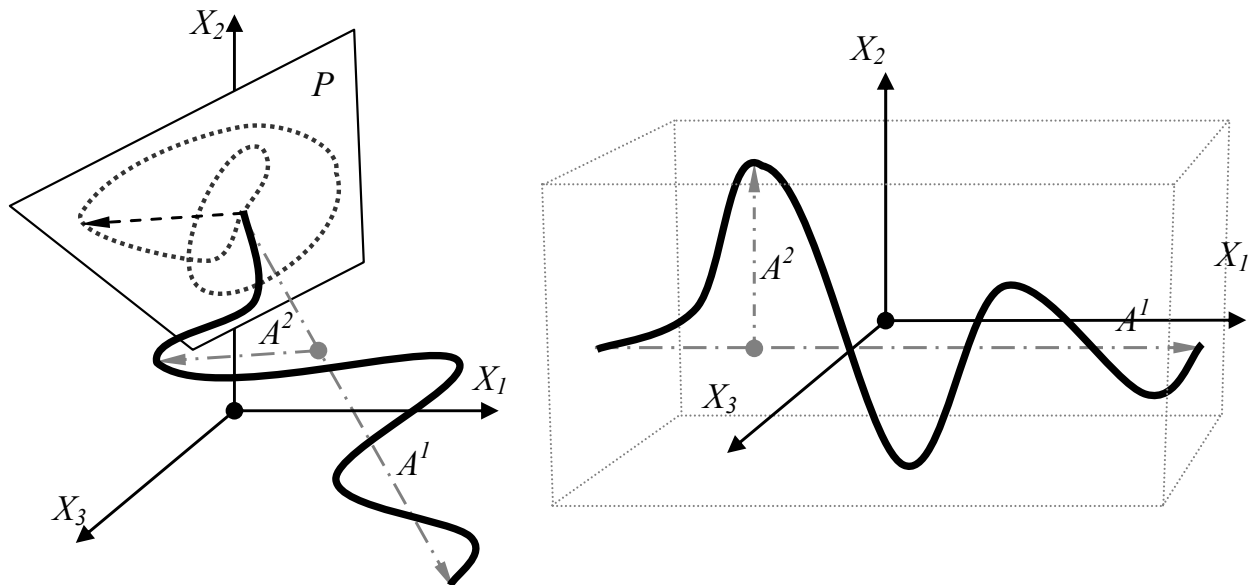


Рис. 3.7. Исходный трехмерный фрагмент с выделенными осями (слева) и его дескриптор с ограничивающим параллелепипедом (справа)

Для компактного описания преобразований фрагмента в виде единой матрицы приведем его к однородным координатам. Подробно метод однородных координат и механизм матричных преобразований описан в работе [56]. Получим:

$$F_{расш} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n \ 1] \quad (3.2)$$

В процессе нормализации используется три типа преобразований: сдвиг, масштабирование и поворот. Преобразование сдвига в матричной форме имеет вид:

$$M_{сдвиг} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ -g_{сдвиг,1} & -g_{сдвиг,2} & \dots & -g_{сдвиг,n} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

где  $g_{сдвиг,i}$  сдвиг по оси  $X_i$ .

Преобразование масштабирования:

$$M_{\text{масш}} = \begin{bmatrix} g_{\text{масш}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_{\text{масш}} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & g_{\text{масш}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

где  $g_{\text{масш}}$  — коэффициент масштабирования.

Преобразование поворота является, по сути, поворотом каждой точки в плоскости  $OX_i X_j$ , остальные координаты остаются неизменными:

$$M_{\text{пов}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \cos(g_{\text{пов}}) & \sin(g_{\text{пов}}) & \vdots & \\ \vdots & & -\sin(g_{\text{пов}}) & \cos(g_{\text{пов}}) & \vdots & \\ 0 & 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

где  $g_{\text{пов}}$  — угол поворота, а значащие элементы матрицы расположены в ячейках  $(i, i)$ ,  $(i, j)$ ,  $(j, i)$  и  $(j, j)$ .

Алгоритм нормализации имеет следующий вид.

1. Инициализация общей матрицы преобразования нормализации:

$$M_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Установка текущего порядка нормализации  $k = 1$ .
3.  $F^k = F_{\text{расш}}$ .
4. Нахождение оси фрагмента  $A^k$  - наибольшего отрезка соединяющего две точки фрагмента  $F^k$  в пространстве  $OX_k \dots X_n$ . С помощью простого перебора пар точек фрагмента  $F^k$  ищется пара с наибольшим расстоянием:

$$A^k = \begin{bmatrix} x_{i,1} & x_{i,2} & \dots & x_{i,n} & 1 \\ x_{j,1} & x_{j,2} & \dots & x_{j,n} & 1 \end{bmatrix} \ni \sqrt{\sum_{d=k}^n (x_{d,j} - x_{d,i})^2} = \max.$$

5. Перенос  $A^k$  таким образом, чтобы ее первая точка совпала с началом координат. Преобразование осуществляется перемножением с матрицей  $M_{\text{сдвиг},k}$  переноса вида (3) с коэффициентами  $g_{\text{сдвиг},i} = A^k(1,i)$ :

$$A_{\text{сдв}}^k = A^k \times M_{\text{сдвиг},k}.$$

6. Дополнение общей матрицы нормализации текущим преобразованием:

$$M_{\text{норм}} = M_{\text{норм}} \times M_{\text{сдвиг},k}.$$

7. Поворот  $A_{\text{сдв}}^k$  таким образом, чтобы она совпала с направлением оси  $X_k$ .

- a. Инициализация матрицы поворота оси  $k$ :

$$M_{\text{пов},k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- b. Установка текущей плоскости поворота  $p = n$ .

c.  $A_{\text{пов},p}^k = A_{\text{сдв}}^k$ .

- d. Вычисление угла между проекцией  $A_{\text{пов},p}^k$  на плоскость  $OX_1X_p$  и осью  $X_1$  по формуле:

$$\Phi_{k,p} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{A^k(2,k)}{A^k(2,p)}\right), & A^k(2,k) > 0, A^k(2,p) > 0; \\ -\arctan\left(\frac{A^k(2,k)}{A^k(2,p)}\right) + \frac{\pi}{2}, & A^k(2,k) \leq 0, A^k(2,p) > 0; \\ \arctan\left(\frac{A^k(2,k)}{A^k(2,p)}\right) + \pi, & A^k(2,k) \geq 0, A^k(2,p) \leq 0; \\ -\arctan\left(\frac{A^k(2,k)}{A^k(2,p)}\right) + \frac{3\pi}{2}, & A^k(2,k) > 0, A^k(2,p) \leq 0. \end{cases}$$

- e. Поворот  $A_{\text{пов},p}^k$  с помощью матрицы  $M_{\text{пов},p}$  вида (5) на угол  $g_{\text{пов}} = -\Phi_{k,p}$ :

$$A_{\text{пов},p-1}^k = A_{\text{пов},p}^k \times M_{\text{пов},p}.$$

- f. Дополнение матрицы поворота текущим преобразованием:

$$M_{\text{пов},k} = M_{\text{пов},k} \times M_{\text{пов},p}.$$

- g. Установка следующей плоскости поворота  $p = p - 1$ .



h. Если  $p \geq 1$ , тогда перейти к шагу {d}.

8. Дополнение общей матрицы нормализации текущим преобразованием:

$$M_{\text{норм}} = M_{\text{норм}} \times M_{\text{пов},k}.$$

9. Преобразование фрагмента с помощью текущей матрицы нормализации:

$$F^{k+1} = F^k \times M_{\text{норм}}.$$

10. Установка следующего порядка нормализации  $k = k + 1$ .

11. Если  $k < n$ , тогда перейти к шагу {4}.

12. Формирование ограничивающего фрагмент параллелепипеда  $B$  описываемого матрицей  $2 \times n$ :

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \end{bmatrix},$$

$$b_{1,i} = \min(X_i), b_{2,i} = \max(X_i).$$

13. Перенос фрагмента таким образом, чтобы центр ограничивающего его параллелепипеда совпал с началом координат. Преобразование осуществляется перемножением с матрицей  $M_{\text{сдвиг}}$  переноса вида (3) с коэффициентами  $g_{\text{сдвиг},i} = -(B(1,i) + B(2,i))/2$ :

$$F_{\text{центр}} = F^k \times M_{\text{масш}}.$$

14. Масштабирование фрагмента таким образом, чтобы ограничивающий его параллелепипед вписался в единичный куб. Преобразование осуществляется матрицей масштабирования  $M_{\text{масш}}$  вида (4) с коэффициентом  $g_{\text{масш}} = B(2,i) - B(1,i)$ :

$$F_{\text{норм}} = F_{\text{центр}} \times M_{\text{масш}}.$$

15. Дополнение общей матрицы нормализации текущим преобразованием:

$$M_{\text{норм}} = M_{\text{норм}} \times M_{\text{центр}} \times M_{\text{масш}}.$$

Результатом процедуры нормализации является дескриптор фрагмента  $F_{\text{норм}}$ , матрица  $M_{\text{норм}}$  осуществляющая преобразование фрагмента в его дескриптор, а также набор показателей и матриц всех промежуточных преобразований:  $n - 1$  матриц  $M_{\text{сдвиг},k}$ ,  $(n^2 - n)/2$  матриц  $M_{\text{пов},p}$  и одна матрица  $M_{\text{масш}}$ .

В дальнейшем легко получить матрицу преобразования одного фрагмента в другой:

$$M_{\text{преобр}AB} = M_{\text{норм}A} \times M_{\text{норм}B}^{-1}.$$

**Оценка нарушения симметрии.** После получения дескрипторов двух предположительно симметричных фрагментов  $F_A$  и  $F_B$  можно дать численную оценку расхождения (расстояния) между ними  $D_{AB}$ , для этого предлагается использовать свойства разложения в ряд Фурье, описанные в [57]. Также этот показатель можно использовать в качестве оценки степени нарушения симметрии.

Поочередно переведем оба дескриптора в частотное представление, применив дискретное преобразование Фурье (ДПФ) для каждой точки:

$$s_{d,k} = \sum_{p=1}^m x_{d,p} e^{\frac{-2\pi i}{m}(k-1)(p-1)}, \quad 1 \leq d \leq n.$$

Для  $n$ -мерного дескриптора в данном случае применяется  $n$  одномерных преобразований Фурье независимо для каждой координаты. Результатом преобразования будет спектр следующей структуры:

$$S_d = [s_{d,0} \quad s_{d,1} \quad \cdots \quad s_{d,m}]^T, \quad 1 \leq d \leq n.$$

Пары  $(S_1 \ S_{n-1}), (S_2 \ S_{n-2}), \dots, (S_{(n-1)/2} \ S_{n/2})$  являются комплексно сопряженными числами. Переход от спектра к исходному контуру (дескриптору) осуществляется с помощью обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ) вида:

$$x_{d,k} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m s_{d,p} e^{\frac{2\pi i}{m}(k-1)(p-1)}, \quad 1 \leq d \leq n.$$

Для сравнения контуров преобразование Фурье удобно тем, что осуществляет выделение главных компонент: чем ближе пара сопряженных элементов к середине спектра, тем более мелкие, высокочастотные, особенности контура она описывает. Каждая из пар сопряженных элементов спектра определяет при восстановлении эллипс, а вся восстановленная фигура является суперпозицией этих эллипсов (рис. 3.8). Каждая следующая пара будет прибавлять к восстановленному образу все больше более мелких деталей исходного контура. Самый первый, непарный элемент спектра  $S_{d,0}$  указывает положение центра фигуры и для сравнения контуров не используется.

Для вычисления расстояния между фрагментами предлагается суммировать расхождения соответствующих элементов спектров этих контуров после ДПФ, причем более высокочастотные (пары близкие к центру спектра) элементы спектра имеют меньшее влияние на показатель близости, чем низкочастотные.

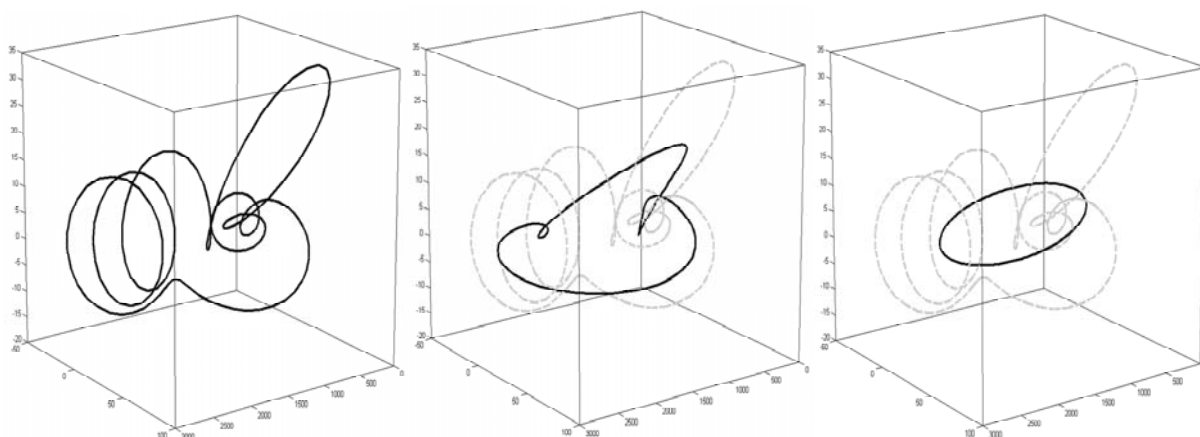


Рис. 3.8. Контур восстановленный из всего спектра (слева) и из спектра с пятью (в центре) и с одним (справа) ненулевыми парами элементов

Соответствующий критерий имеет вид:

$$D_{A,B} = \sum_{i=1}^q \left( \left( \sqrt{\sum_{j=1}^n (\text{Im}(S_{B,i,j}) - \text{Im}(S_{A,i,j}))^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n (\text{Re}(S_{B,i,j}) - \text{Re}(S_{A,i,j}))^2} \right) \cdot \beta_i \right), \quad (3.6)$$

где  $q$  — количество сопряженных пар элементов спектра,  $n$  — размерность фазового пространства,  $\beta_i$  — коэффициенты дисконтирования ( $i = \overline{1, q}$ ), определяющие степень важности составляющих спектра по частотам,  $S_{(\cdot)}$  — соответствующие элементы спектра контуров  $A$  и  $B$ . Коэффициенты  $\beta_i$  выбираются эмпирически, исходя из условий задачи. В работе рассматривалась задача выявления симметрий низкочастотных колебаний, поэтому выбран экспоненциальный вид зависимости  $\beta_i$  от номера члена ряда разложения Фурье.

### 3.3. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ ПОДБОР РЕШЕНИЙ

После того как фрагменты контура отнормированы, необходимо выбрать из множества их последовательностей одну, наиболее удовлетворяющую требованиям задачи — содержащую наиболее симметричные между собой фрагменты. Количество последовательностей (решений), которые можно составить из непересекающихся фрагментов даже для небольших задач с количеством маркеров около 100 очень велико, поэтому прямой перебор в данном случае не подойдет.

Найти необходимые решения можно с помощью генетического алгоритма поиска. В пользу применения генетического отбора говорят следующие факторы.

1. Очень большое пространство решений, экспоненциально увеличивающееся с увеличением размера входа.
2. Решение можно оптимизировать локально.
3. Можно сформулировать критерий оценки решения и время оценки решения сравнительно мало.
4. Сильная пересеченность поверхности пространства решений.
5. Невозможность применения градиентных методов оптимизации.
6. Нет необходимости в нахождении оптимального решения, достаточно решений близких к оптимальным.

Для реализации генетического алгоритма необходимо реализовать следующие механизмы.

1. Генерация случайного решения задачи (хромосомы).
2. Скрещивание решений (кроссинговер).
3. Случайные изменения при скрещивании решений (мутации).
4. Оценка схожести фрагментов входящих в решение.
5. Итеративная процедура генетического отбора решений.

**Генерация случайного решения задачи (хромосомы).** Для создания стартовой популяции необходимо сгенерировать набор случайных решений. Решением может быть не каждая последовательность из отобранных ранее фрагментов. Фрагменты должны быть непересекающимися и, по возможности, максимально покрывать всю длину исходного контура, поэтому закодировать решение битовым полем фиксированной длины, как это традиционно делается в генетических алгоритмах, в данном случае не представляется возможным, решение (хромосома) будет представлено последовательностью номеров фрагментов произвольной длины (рис. 3.9).

Для реализации этого механизма удобно составить матрицу смежности фрагментов, в каждой ячейке которой указывать 1, если фрагмент  $i$  может в одном решении рядом с фрагментом  $j$ , и 0 в противном случае.

Если фрагменты нумеровать по возрастанию точки начала фрагмента, то для задания матрицы смежности достаточно для каждого фрагмента хранить только номер первого смежного соседа и их количество.

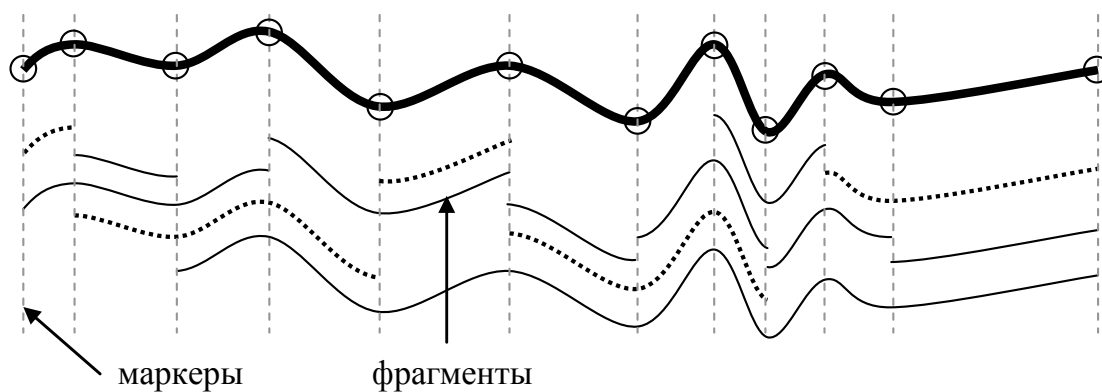


Рис. 3.9. Исходный маркированный контур и набор выделенных из него фрагментов. Пунктиром выделено одно из возможных случайных решений

Алгоритм генерации случайного решения можно сформировать в виде шести шагов.

1. Выбрать случайный стартовый фрагмент: сгенерировать случайное число в диапазоне от 1 до  $n$ . Стартовыми считаются фрагменты, у которых нет смежных предшественников, они находятся в начале сортированного списка фрагментов.
2. Добавить текущий фрагмент в генерируемую цепочку.
3. Для текущего фрагмента извлечь из матрицы смежности показатель  $m$  — количество соседей и  $k$  — номер первого соседа.
4. Если  $m=0$ , фрагмент финишный, генерация цепочки окончена — выход.
5. Сгенерировать случайный номер соседа в диапазоне от 0 до  $m$ .
6. Сделать текущим фрагмент  $k+m$  и перейти к шагу {2}.

**Скрещивание решений (кроссинговер).** В процессе генетического отбора особи обмениваются фрагментами хромосом. Так как не все комбинации фрагментов являются корректными, дочерние решения, получаемые в результате скрещивания двух хромосом не должны терять валидность. Предлагается такой вариант механизма скрещивания: случайным образом на исходном контуре выбирается позиция скрещивания, которая, скорее всего, попадает в середину фрагментов родительских решений. Из двух родителей выбирается один, целостность которого приоритетна: если позиция скрещивания попадает на середину фрагмента, то разделение происходит в точке его окончания. После этого из родительских решений собирается два дочерних, в которых используются их соответствующие части.

**Случайные изменения при скрещивании (мутации).** Для расширения генофонда необходимо, с некоторой вероятностью, подвергать генерируемые

дочерние решения случайным изменениям, иначе популяция выродится, попав в локальный минимум функции приспособленности. Из-за того, что в решении нельзя произвольно заменить один фрагмент на другой, механизм мутаций можно реализовать только в виде случайной замены одного из родителей при скрещивании на новое, случайно сгенерированное решение.

Также следует учитывать тот факт, что описанный ранее алгоритм генерации случайного решения производит «полные» решения, т. е. решения не содержащие пропусков, которые возможно заполнить каким-нибудь фрагментом. Поэтому необходимо предоставить механизм «выпадения» фрагментов из решения при скрещивании и включить его в алгоритм генерации решений.

Мутации при скрещивании определяются двумя параметрами:  $\alpha$  — вероятность замены одного из родителей новой случайной цепочкой при скрещивании и  $\beta$  — вероятность «выпадения» в одном из дочерних решений одного фрагмента.

**Критерии оценки решений.** Для оценки схожести дескрипторов вводится показатель

$$N_{A,B} = \frac{1}{1 + D_{A,B}}, \quad (3.7)$$

где  $D_{A,B}$  — оценка, вычисляемая по формуле (3.6).

Предлагаются следующие критерии оценки решения:

1. Средний показатель схожести пар дескрипторов фрагментов входящих в решение:

$$K_n = \frac{1}{(k^2 - k) / 2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k N_{i,j} \rightarrow \max, \quad (3.8)$$

где  $k$  — количество фрагментов в решении  $n$ , а  $N_{i,j}$  — схожесть фрагментов  $i$  и  $j$ , вычисляемая в соответствии с (3.7).

2. Длина покрытия фрагментами исходного контура:

$$M_n = \sum_{i=1}^{k-1} L_i \rightarrow \max, \quad (3.9)$$

где  $k$  — количество фрагментов в решении  $n$ , а  $L_i$  — длина фрагмента  $i$ .

Задача поиска решения многокритериальна. Предлагается вести однокритериальный поиск последовательными этапами, на каждом из которых длина покрытия фрагментами решений исходного контура ограничена снизу, а в качестве оценки использовать критерий (3.8). Этап завершается при выполнении условий сходимости, количество этапов задается изначально. Это позволяет рав-

номерно исследовать пространство критериев и получить набор Парето-оптимальных решений, как множество компромиссных решений по противоречивым критериям (3.8) и (3.9).

Обобщенный критерий оценки для выбора единственного решения:

$$\Phi_n = K_n \cdot \frac{M_n}{L} \rightarrow \max, \quad (3.10)$$

где  $n$  — номер особи,  $L$  — длина исходного контура.

**Итеративная процедура генетического отбора решений.** Поиск решений осуществляется итеративно. Жизненный цикл популяции повторяется заданное количество раз или до выполнения условий остановки:  $k$  итераций с неизменными средними параметрами решений или  $p$  итераций с неизменным лучшим решением, причем  $p$  на порядок больше  $k$ .

В качестве механизмов отбора рассматривались следующие:

1. *Элитарный* — в следующее поколение переходят  $n$  лучших особей из числа родителей и детей.
2. *Турнирный* — в следующее поколение переходят победители  $n$  турниров, лучших особей из  $k$  случайно выбранных.

Выбран элитарный тип отбора, в силу его свойства сохранения лучших решений и целенаправленности поиска. Скорость сходимости скорректирована выбором типа отбора особей для скрещивания, в качестве которых были рассмотрены:

1. *Панмиксия* — случайный выбор обоих родителей.
2. *Переборно-элитарный* — каждая особь в популяции производит как минимум одно скрещивание со случайно выбранным партнером, у более приспособленных особей большее количество скрещиваний.
3. *Инбридинг* — случайный выбор одного родителя, второй же выбирается таким образом, чтобы его показатель критерия схожести был максимально схож с первым.
4. *Аутбридинг* — случайный выбор одного родителя, второй же выбирается таким образом, чтобы его показатель критерия схожести был максимально далек от первого.

Выбран механизм инбридинга, в силу того, что из набора рассмотренных, он наилучшим образом компенсирует избыточную скорость сходимости элитарного отбора за счет более широкого распределения особей популяции в области поиска.

Дополнительно вводится требование уникальности особей в популяции, что снижает скорость сходимости, но расширяет область поиска решений и, глав-

ное, при изменении условий после схождения (переход к следующему этапу) препятствует вырождению генофонда популяции.

Таким образом, итерация состоит из следующих этапов.

1. Создание начальной популяции из случайных решений (особей).
2. Установка ограничения на область допустимых решений по длине.
3. Оценка всех решений в популяции по критерию (3.8), усечение популяции таким образом, чтобы в ней осталось  $N$  наиболее приспособленных особей.
4. Произведение  $N$  скрещиваний особей, согласно стратегии инбридинга;
5. Мутация дочерних решений с вероятностью  $M$ .
6. Совмещение промежуточной и основной популяции, для сохранения найденных лучших решений.
7. Проверка условий сходимости популяции ( $k$  шагов с неизменными средними параметрами решений или  $p$  шагов с неизменным лучшим решением, причем  $p$  на порядок больше  $k$ ), в случае их невыполнения переход к шагу {3}.
8. Переход к следующему этапу — расширение области допустимых решений по длине, если это еще возможно, то переход к шагу {3}.
9. Выбор из набора полученных решений, наилучшего по критерию (3.10).

### 3.4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**Тестовая синусоидальная функция.** Методика применена для выявления симметричных участков временного ряда, порожденного уравнением  $x_1 = 30 \sin(t / 50) + t \sin(t / 7) / 100$ . На рис. 3.10–3.13 приведены результаты работы программного обеспечения методики.

Исходный набор данных состоит из 1000 точек. Сначала был построен фазовый портрет. Сглаживание не применялось.

Далее контур был подвергнут расстановке маркеров. Общее количество маркеров: 126. После маркировки из 7860 возможных контуров было отобрано 2807, остальные не удовлетворили ограничениям по длине: от 2 до 200 точек исходного контура. Каждый фрагмент был интерполирован 60-ю равномерно расположенными по его длине точками и подвергнут процедуре нормализации. После этого была построена матрица смежности фрагментов.



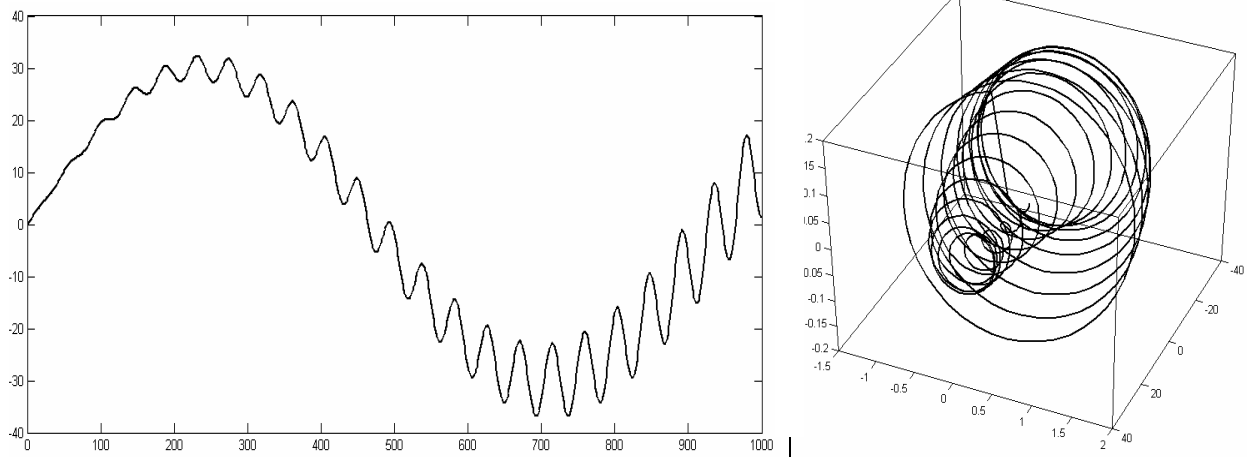


Рис. 3.10. Исходные данные (слева) и фазовый портрет (справа)

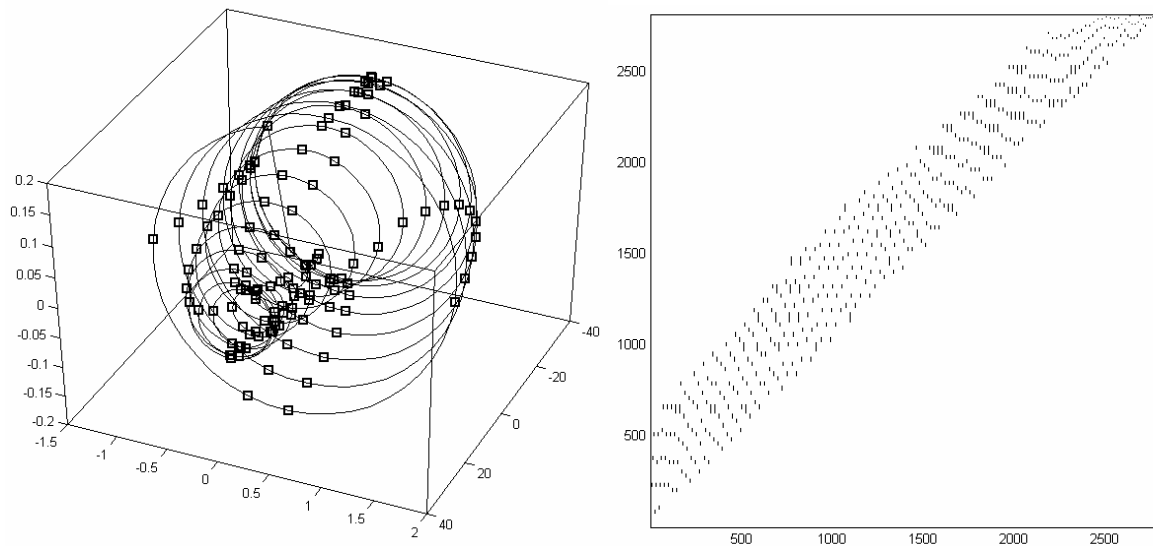


Рис. 3.11. Маркированный контур (слева) и матрица смежности фрагментов (справа)

Был осуществлен эволюционный подбор решения (размер популяции 200, показатели вероятности мутации  $\alpha = 0,3$  и  $\beta = 0,1$ , количество шагов ограничения длины: 8, элитарный отбор в новое поколение, тип выбора родителей — аутбридинг, особи в популяции уникальны) и отобрано решение-победитель.

Экспериментальная машина: Intel® Celeron® 1.3 ГГц, 1 ГБ ОЗУ. Время проведения этапа предобработки: 22 мин. 5 сек. Время этапа генетического подбора решения: 5 мин. 11 сек., популяция сошлась 8 раз за 817 итераций, решение победитель: схожесть фрагментов 0.6271, длина 682.

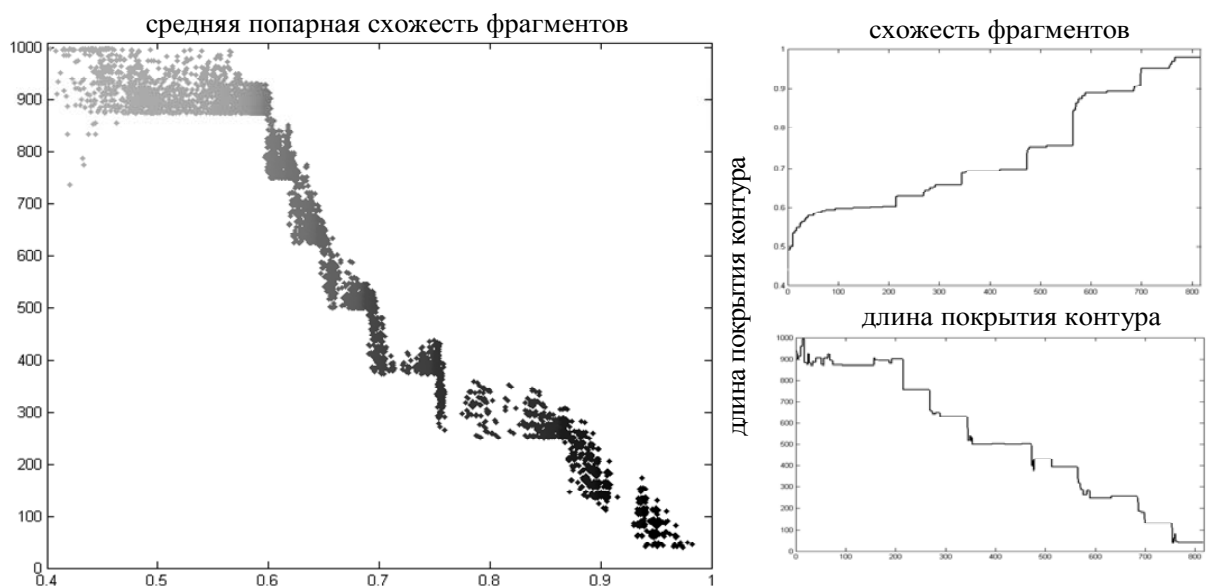


Рис. 3.12. Развитие популяции в пространстве решений (слева) и история развития показателей решения-победителя (справа)

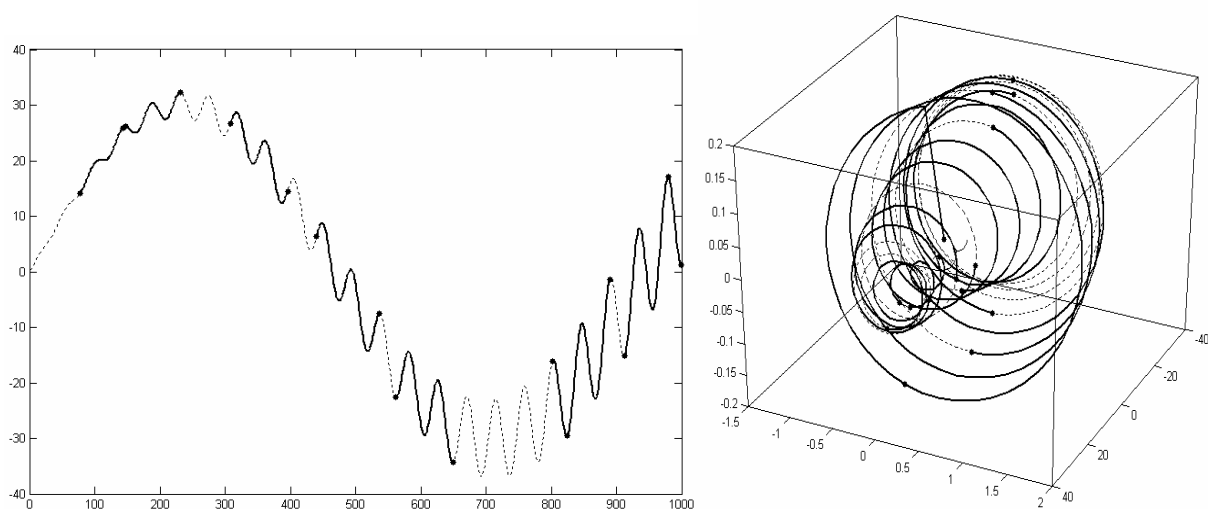


Рис. 3.13. Решение-победитель на исходных данных (слева) и фазовом портрете (справа)

**Система Реслера.** Методика использовалась для выявления симметрий в восстановленном аттракторе системы Реслера (с коэффициентами  $a = 0,2$ ;  $b = 0,2$ ;  $c = 2,6$ ). Графическое представление результатов приведено на рис. 3.14.–3.17.

Исходный набор данных состоит из 300 точек и является результатом восстановления аттрактора по одномерной реализации системы. Сглаживание не применялось.

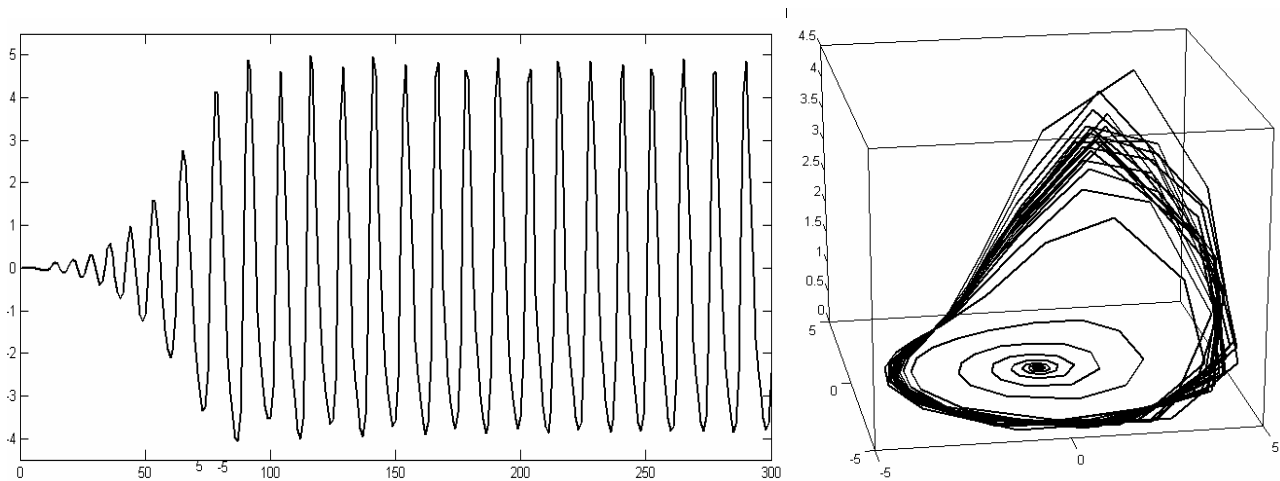


Рис. 3.14. Исходные данные (слева) и фазовый портрет (справа)

Контур был подвергнут расстановке маркеров. Общее количество маркеров: 144. После маркировки из 10238 возможных контуров было отобрано 1375, остальные не удовлетворили ограничениям по длине: от 5 до 50 точек исходного контура. Каждый фрагмент был интерполирован 60-ю равномерно расположенными по его длине точками и подвергнут процедуре нормализации. После этого была построена матрица смежности фрагментов (рис. 3.15).

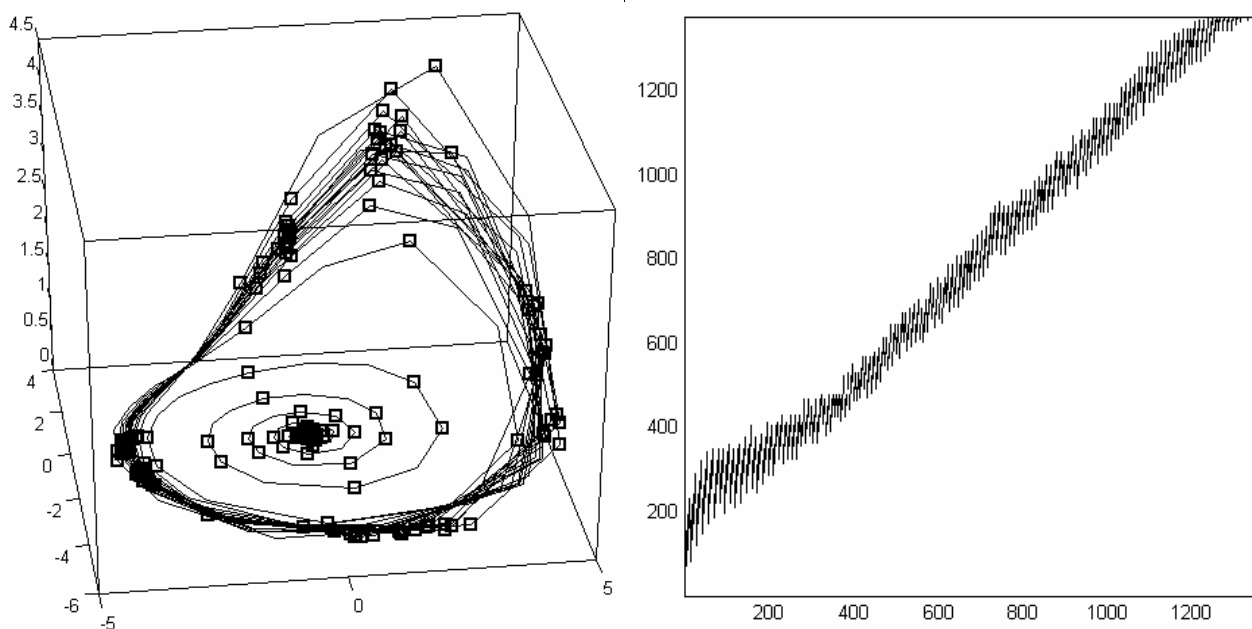


Рис. 3.15. Маркированный контур (слева) и матрица смежности (справа)

Был осуществлен эволюционный подбор решения (размер популяции 200, показатели вероятности мутации  $\alpha = 0,3$  и  $\beta = 0,1$ , количество шагов ограничения

длины: 5, элитарный отбор в новое поколение, тип выбора родителей — аутбридинг, особи в популяции уникальны) и отобрано решение-победитель.

Экспериментальная машина: Intel® Core™2 CPU 6600 - 2.4 ГГц, 2,93 ГБ ОЗУ. Время проведения этапа предобработки: 3 мин. 27 сек. Время этапа генетического подбора решения: 4 мин. 36 сек., популяция сошлась 5 раз за 533 итерации, решение победитель: схожесть фрагментов 0.3917, длина 197.

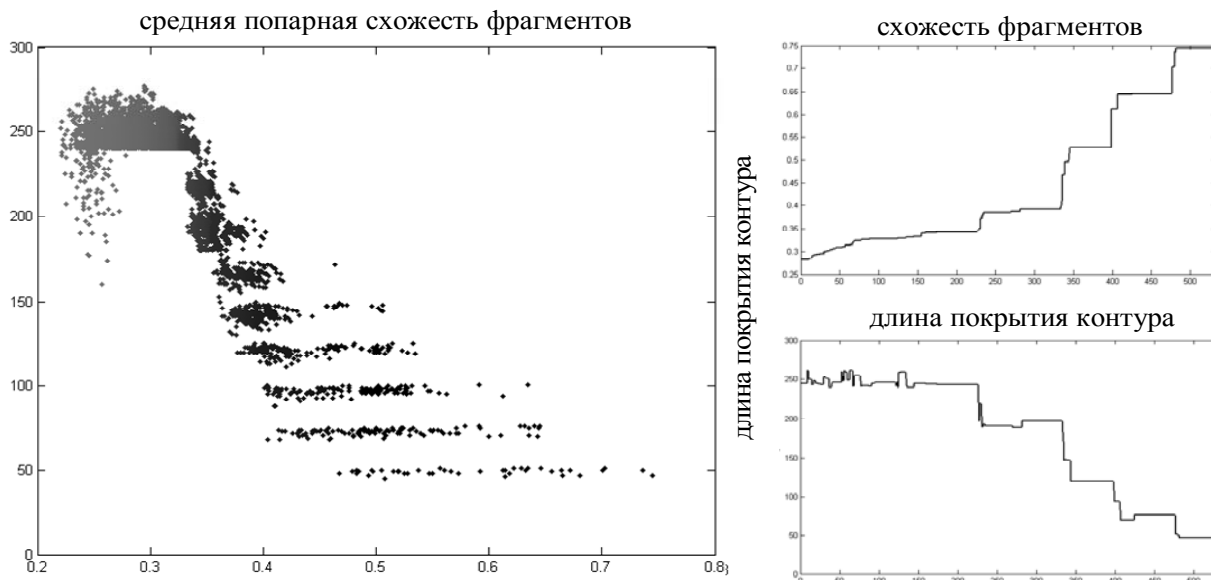


Рис. 3.16. Развитие популяции в пространстве решений (слева) и история развития показателей решения-победителя (справа)

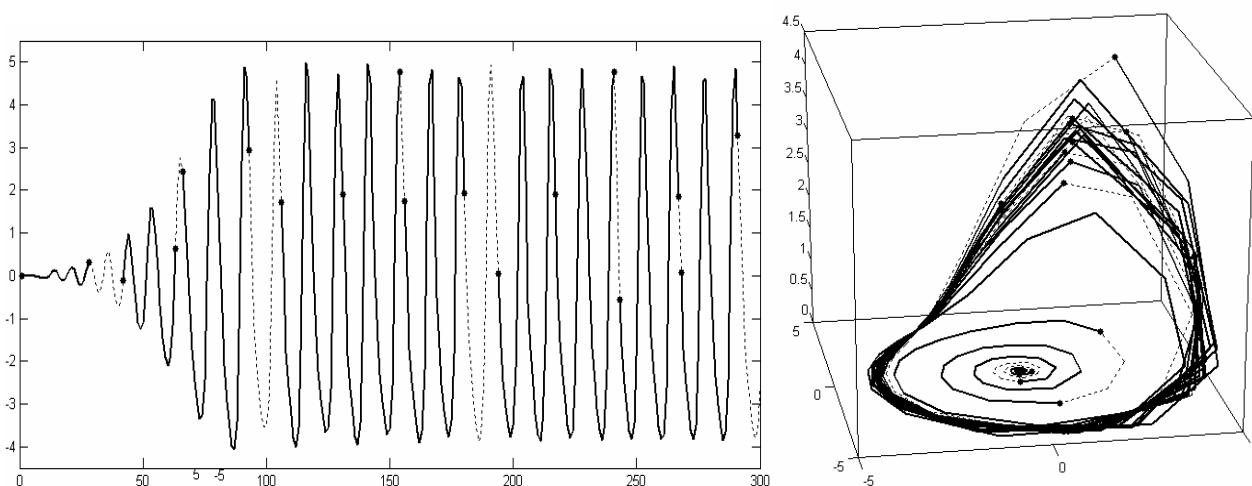


Рис. 3.17. Решение-победитель на исходных данных (слева) и фазовом портрете (справа)

Фрагменты программ, разработанные и реализованные О. В. Козловым, имеются на сайте <http://nikulchev.milara.ru>.

## 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

Полученные автором в работах [18, 58] результаты позволили обосновать метод моделирования нелинейных систем, допускающие группы симметрий, т. е. на основании временного ряда идентифицировать параметры модели, редуцированной на центральное многообразие

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \Psi_0(x, t); \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{4.1}$$

На основе доказанных утверждений разработан оригинальный метод моделирования по экспериментальным данным, представляющий собой реконструкцию систем, редуцированных на центральное многообразие.

Система (3.1), согласно теореме Гробмана-Хартмана [см. 59], и теореме Шильникова-Овсяникова [31], может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= By + f_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= Cz + f_2(x, y, z), \\ \dot{x} &= Ax + \psi_0(x, y, z),\end{aligned}\tag{4.2}$$

где  $\text{spectr } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ,  $\text{Re } \lambda_j = 0$ ,  $(j = \overline{1, m})$ ;  $\text{spectr } B = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k\}$ ,  $\text{Re } \lambda_j < 0$ ,  $(j = \overline{m+1, k})$ ;  $\text{spectr } C = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\text{Re } \lambda_j > 0$ ,  $(j = \overline{k+1, n})$ ;  $x \in \mathbb{R}^m$ ;  $y \in \mathbb{R}^k$ ;  $z \in \mathbb{R}^{n-m-k}$ ;  $\mathbb{C}^r$ -функции  $\psi_0, f_1$  и  $f_2$  вместе со своими первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Предполагаем, что правые части отображения (а также их производные) могут непрерывно зависеть от управлений  $u$ . В этом случае многообразия и слоения будут непрерывно зависеть от  $u$  вместе со всеми их производными.

Если правая часть системы гладко зависит от  $u$ , центральное многообразие также гладко зависит от  $u$ . Таким образом, если функции  $\psi_0, f_1$  и  $f_2$  являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими относительно  $(x, y, u)$ , то многообразие может быть выбрано в ви-

де  $\mathbb{C}^r$ -гладкой функции от  $(x, u)$ . Этот результат получается формальным добавлением к системе (4.1) уравнения  $\dot{u} = 0$ . Если теперь рассматривать  $(x, u)$  в качестве нового состояния  $x$ , то вид расширенной системы будет аналогичен исходной системе.

В соответствии с теоремой Тураева [31] о центральном многообразии, в малой окрестности  $O$  существует локальное центральное многообразие, содержащее множество всех траекторий, остающихся в малой окрестности точки  $O$  при всех значениях времени  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Локальное центральное многообразие задается уравнением  $\{y = 0, z = 0\}$ :

$$\dot{x} = Ax(t) + \Psi_0(x), \quad (4.3)$$

где  $\Psi_0(x, t)$  предлагается определять на основании построения группы симметрий по преобразованиям, найденным по восстановленному аттрактору.

Неоднозначно определяемые функции, представляющие собой центральное многообразие, имеют одинаковые инфинитезимальные образующие, а, следовательно, локально могут быть описаны одной группой симметрий [58]. Это справедливо в каждой точке, траектория которой остается в малой окрестности  $O$  при всех значениях  $t$ . Следовательно, рассматриваемая система может быть идентифицирована на основании инвариантов центрального многообразия — групп преобразований фазовых траекторий.

Аналогичны построения для систем с дискретным временем. Пусть система имеет размерность  $(n + 1)$ ; таким образом, секущая  $n$ -мерна. Пусть  $m$  мультипликаторов периодической траектории лежат на единичной окружности,  $k$  мультипликаторов лежат строго внутри единичной окружности, а остальные  $(n - m - k)$  мультипликаторов строго больше 1 по абсолютной величине. Отображение Пуанкаре вблизи неподвижной точки  $O$  записывается в виде, аналогичном (4.3), с той разницей, что  $\text{spectr } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ,  $|\lambda_j| = 1$ ,  $(j = \overline{1, m})$ ;  $\text{spectr } B = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k\}$ ,  $|\lambda_j| < 1$ ,  $(j = \overline{m+1, k})$ ;  $\text{spectr } C = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k\}$ ,  $|\lambda_j| > 1$ ,  $(j = \overline{m+1, k})$ .

Для дискретной системы, локальное центральное многообразие определяется системой:

$$x(t+1) = Ax(t) + \Psi_0(x), \quad (4.4)$$

где  $\Psi_0(x, t)$  можно определять на основании групп симметрий со состоянием, построенной по восстановленному аттрактору.

Для реконструкции нелинейной системы в виде (4.3), (4.4) в [58] предлагается выделение локальных областей фазовых траекторий, близких к периодическим, и построение конечнопараметрических преобразований переводящих одну область в другую. То есть, построение группы симметрий фазовых траекторий, которая характеризуется преобразованием графиков:

$$\text{graph} \{ \varphi_1(x(t), u(t)) \} \rightarrow \text{graph} \{ \varphi_2(x(t), u(t)) \}.$$

Для управляемых систем с нелинейной динамикой можно воспользоваться классической техникой группового анализа, изложенной, например, в [60]. Основы техники вычисления групп симметрий для дискретных моделей определены в [61].

Приведем примеры реконструкции уравнений по модельным примерам и данным экспериментов реальных технических систем. Для тестирования использовались данные, полученные при компьютерном моделировании известных систем в среде Simulink, так и данные, полученные в результате экспериментального исследования реальных систем.

**Пример 1.** Рассмотрим временной ряд, порожденный линейной системой (модель приведена на рис. 4.1). Источником установившихся колебаний служит единичный сигнал. Сложность классического анализа этой системы заключается в наличии двух чисто мнимых полюсов.

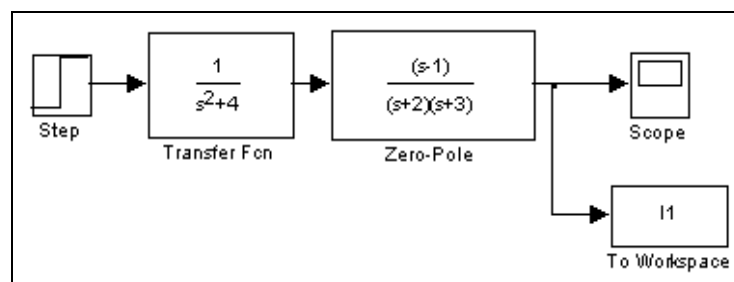


Рис. 4.1. Simulink-модель системы примера 1

Сравнение исходного ряда с динамическим поведением идентифицированной модели приведено на рис. 4.2. По сути, полученная модель представляет собой генератор колебаний с заданными параметрами. Размерность полученной модели равна 4. В качестве функции  $\Psi_0(x, t)$  использовалась линейная функция.

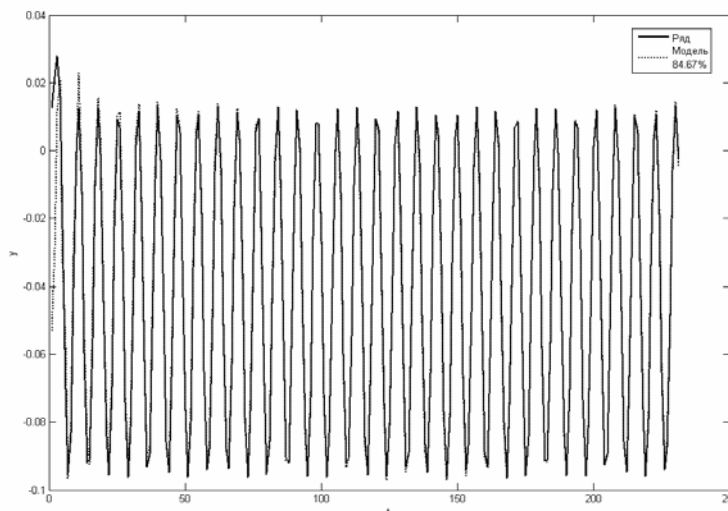


Рис. 4.2. Сравнение исходного ряда с динамическим поведением идентифицированной модели

**Пример 2.** Пусть временной ряд порожден системой:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -x + x^2 - 0,05 \sin 2t.$$

Для идентификации (как «черный ящик») рассмотрим временной ряд, порожденный Simulink-моделью (рис. 4.3) при начальных условиях  $x(0) = 0; y(0) = 0,042$ .

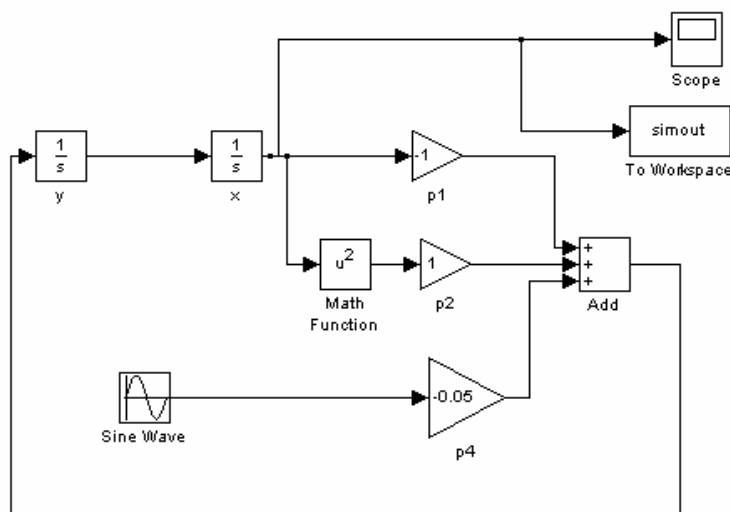


Рис. 4.3. Simulink -модель системы



В результате параметрической идентификации системы (4.3) с помощью Identification Toolbox, в условиях предположении о симметрии сдвига получены следующие матрицы уравнения системы:

$$A = \begin{bmatrix} 0,7707 & -0,3206 & 0,542 & -0,004127 & -0,03038 \\ 0,5014 & 0,8746 & -0,18 & 0,05212 & 0,02569 \\ -0,3528 & 0,2858 & 0,6789 & -0,5847 & 0,1485 \\ -0,2553 & 0,2566 & 0,4667 & 0,7665 & 0,00253 \\ -0,1971 & -0,016 & -0,00074 & -0,0691 & -0,0922 \end{bmatrix};$$

$$\Psi_0 = (0,6757; -0,4970; 0,4360; 0,8414)^T (4t^2 + 3t);$$

$$C = (0,4123; -0,1394; 0,1550; -0,0662).$$

На рис. 4.4 приведено сравнение динамики модели с исходным временным рядом. Адекватность модели 84%, при этом качественное поведение обеих систем совпадает.

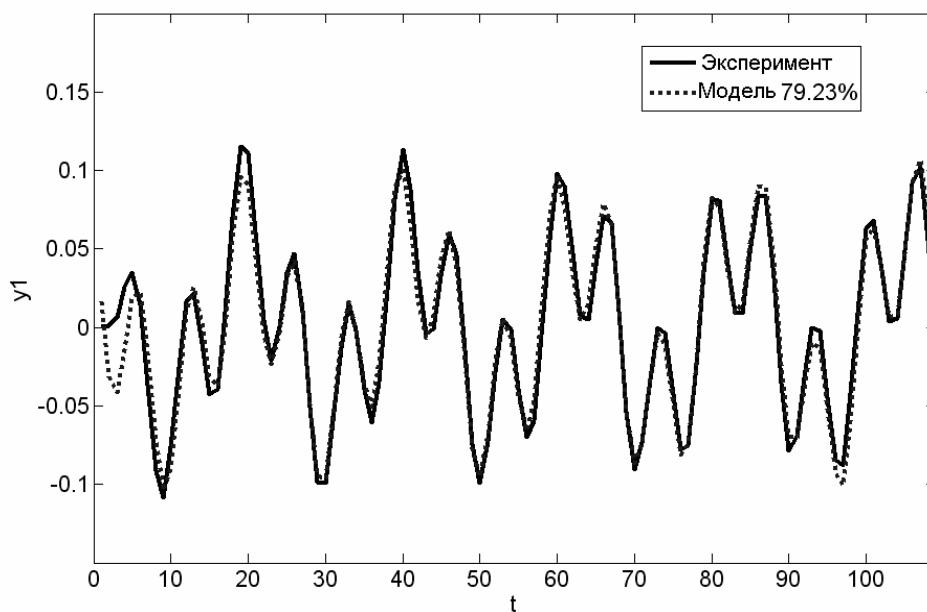


Рис. 4.4. Сравнение динамики модели и системы (сплошная линия — динамика исходной системы, пунктирная — динамика модели)

**Пример 3.** Система Реслера:

$$\dot{x}_1 = -(x_2 + x_3),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 0.2x_2,$$

$$\dot{x}_3 = 0.2 + x_3(x_1 - 5.7),$$

Simulink-модель которой приведена на рис. 4.5. Результат моделирования показан на рис. 4.6. На рис. 4.7а и 4.7б соответственно приведены аттракторы исходной и идентифицированной моделей.

Результаты восстановления аттрактора показывают, что для разработанного метода число наблюдаемых точек может быть сокращено, например для системы Реслера с 1000 до 200.

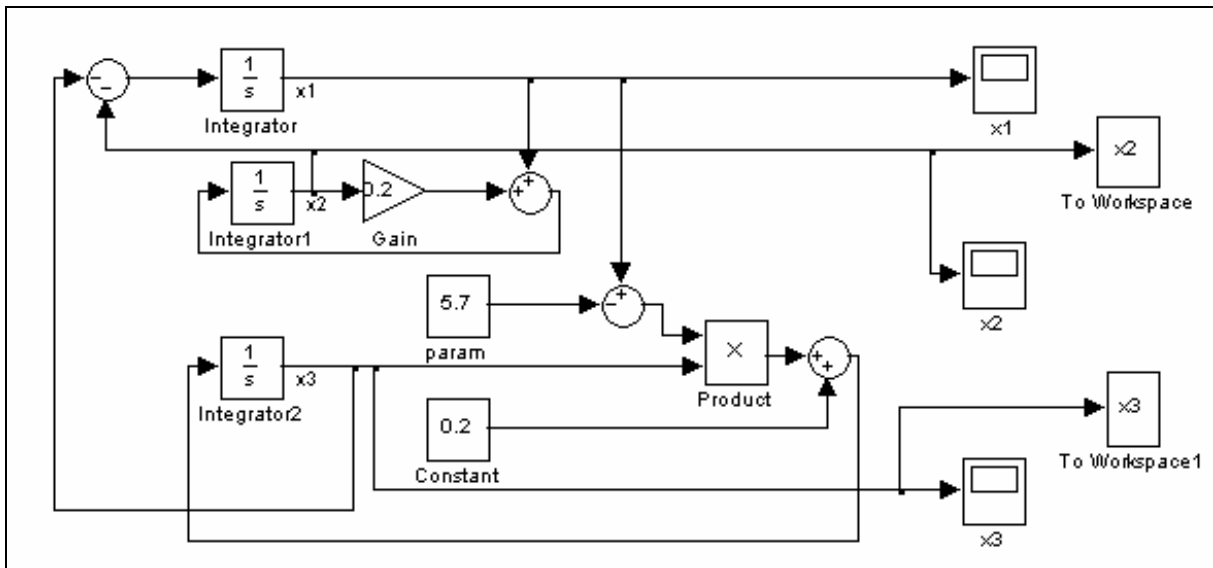


Рис. 4.5. Модель системы Реслера

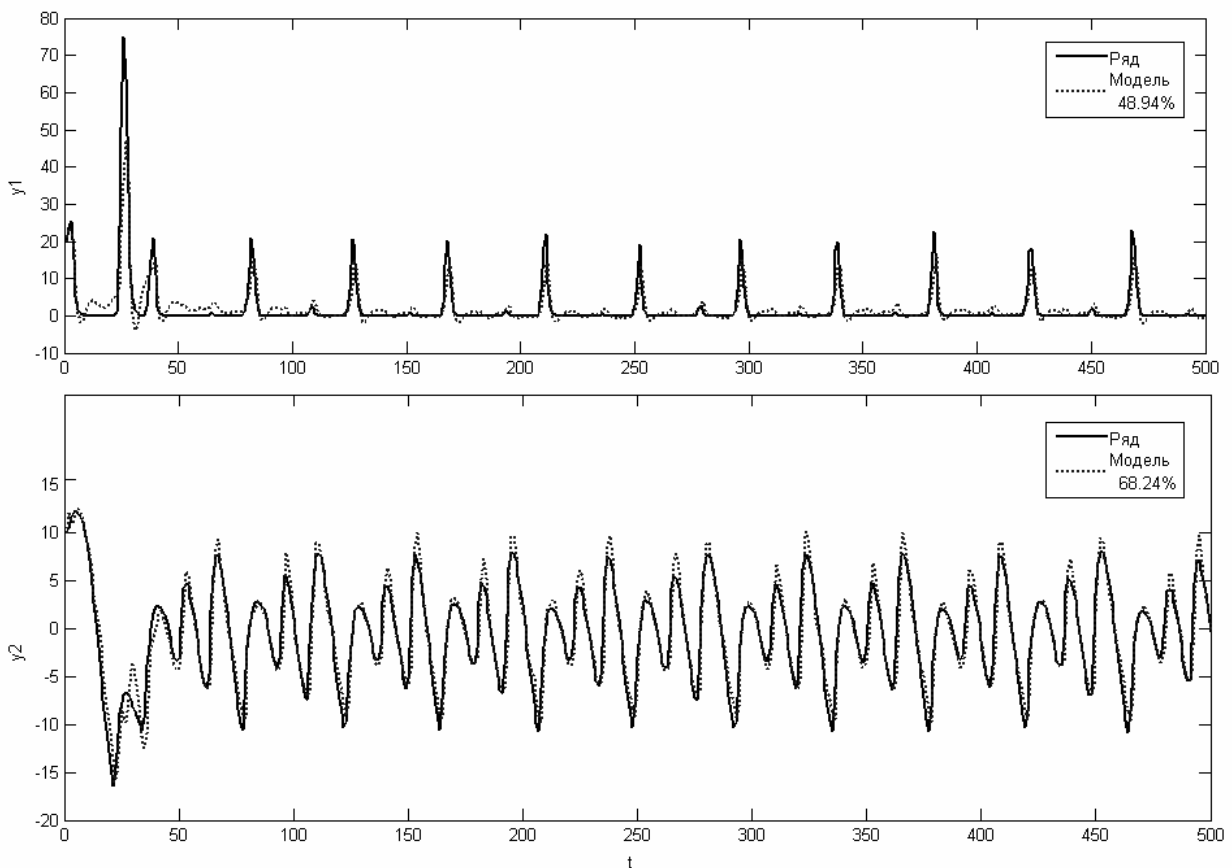


Рис. 4.6. Сравнение динамики исследуемого ряда и построенной модели

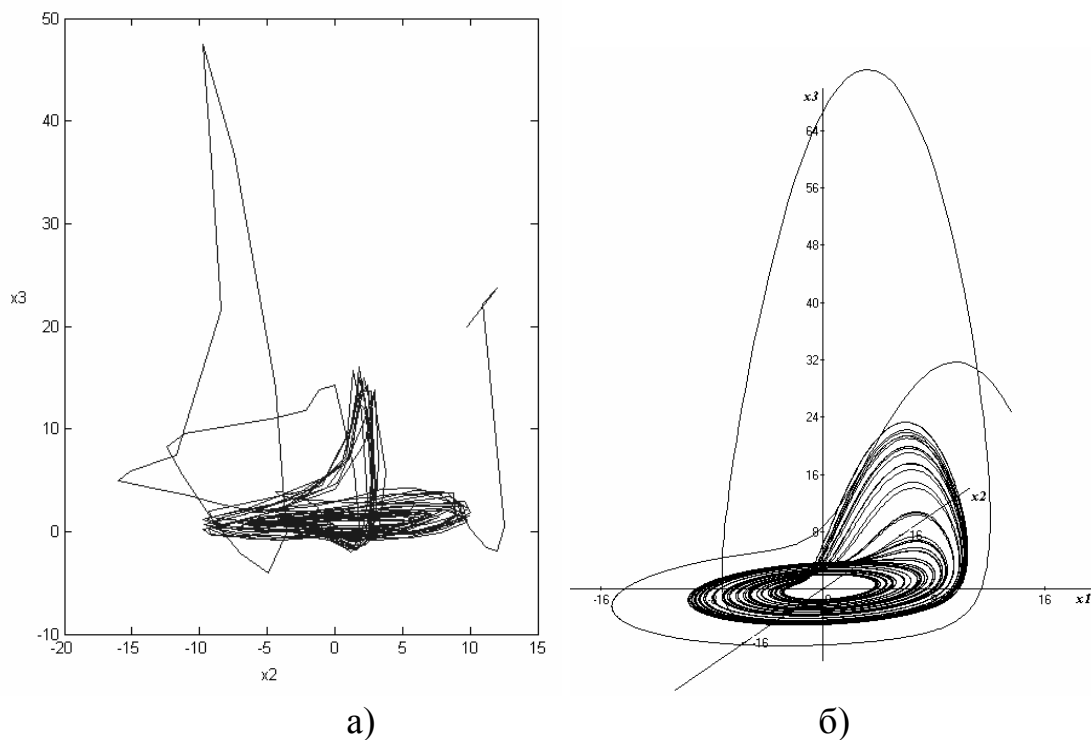


Рис. 4.7. Аттрактор системы Реслера: а) построенный по реконструированной модели; б) построенный по исходной модели

Приведенные примеры идентификации определяют достоверность предложенного метода и эффективность его применения для моделирования различных систем. В монографии [18] приведены примеры, иллюстрирующие применение геометрического метода для технических объектов.

## 5. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

---

*Для выполнения задания возьмите временной ряд (он может быть получен как результат моделирования в среде Simulink ) и постройте модель системы в соответствии с изложенной в учебном пособии методикой. Программные модели поиска симметрий разработаны Козловым О.В. и могут быть скачаны с сайта [nikulchev.milara.ru](http://nikulchev.milara.ru).*

Ниже приведен пример выполнения задания — описано построение математических моделей динамики трафика в режиме нормального функционирования [62].

В качестве исходных данных использован процесс изменения загрузки канала связи. Размерность реконструкции равна 6. Результаты вычисления инвариантных характеристик приведены во втором примере п. 2.6.

Для выявления симметрий реконструированного аттрактора необходимо:

- выделить на исходной последовательности набор участков таким образом, чтобы при приведении их к единому масштабу, положению и углу поворота они были бы максимально схожи между собой;
- получить численные показатели преобразований, переводящих один фрагмент в другой без учета нарушений симметрии;
- дать численную оценку степени нарушения симметрии.

Результаты применения алгоритма, изложенного в 3-й главе приведены на рис. 5.1–5.3.

Исходный набор данных состоит из 200 точек. Сначала был построен фазовый портрет. Сглаживание не применялось.

Далее контур был подвергнут расстановке маркеров. Общее количество маркеров: 192. После маркировки из 18153 возможных контуров было отобрано 2633, остальные не удовлетворили ограничениям по длине: от 15 до 30 точек исходного контура. Каждый фрагмент был интерполирован 60-ю равномерно расположенными по его длине точками и подвергнут процедуре нормализации. После этого была построена матрица смежности фрагментов (рис. 5.1).

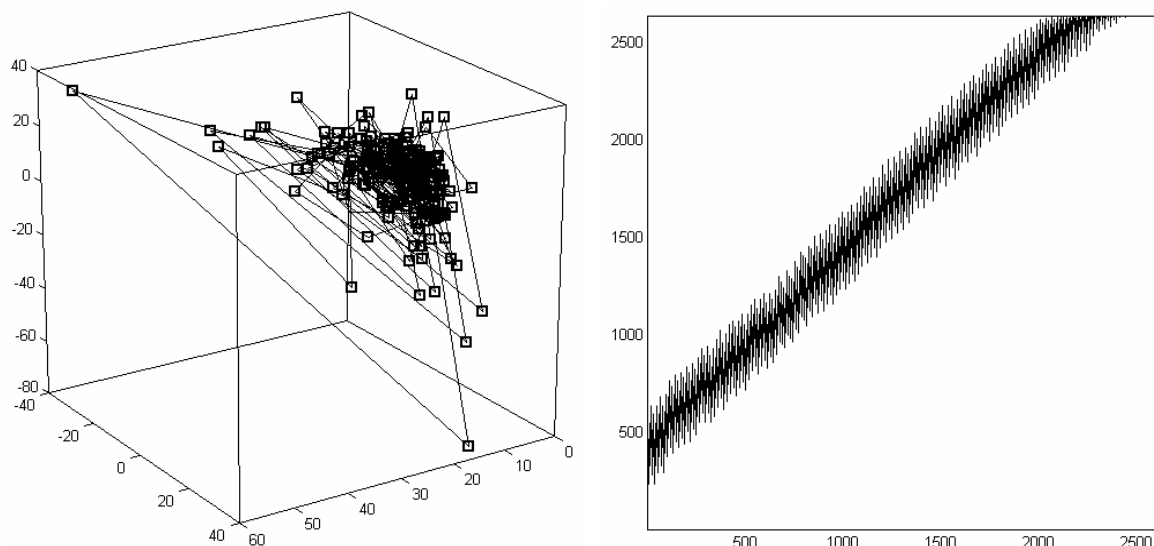


Рис. 5.1. Маркированный контур (слева) и визуализация матрицы смежности фрагментов (справа)

Был осуществлен эволюционный подбор решения (размер популяции 200, показатели вероятности мутации  $\alpha = 0,3$  и  $\beta = 0,1$ , количество шагов ограничения длины: 8, элитарный отбор в новое поколение, тип выбора родителей — аутбридинг, особи в популяции уникальны) и отобрано решение-победитель. Экспериментальная машина: Intel® Core2 CPU 6600 — 2.4 ГГц, 2,93 ГБ ОЗУ. Время проведения этапа предобработки: 12 мин. 43 сек. Время этапа генетического подбора решения: 6 мин. 11 сек., популяция сошлась 8 раз за 652 итераций, решение победитель: схожесть фрагментов 0.576, длина 125.

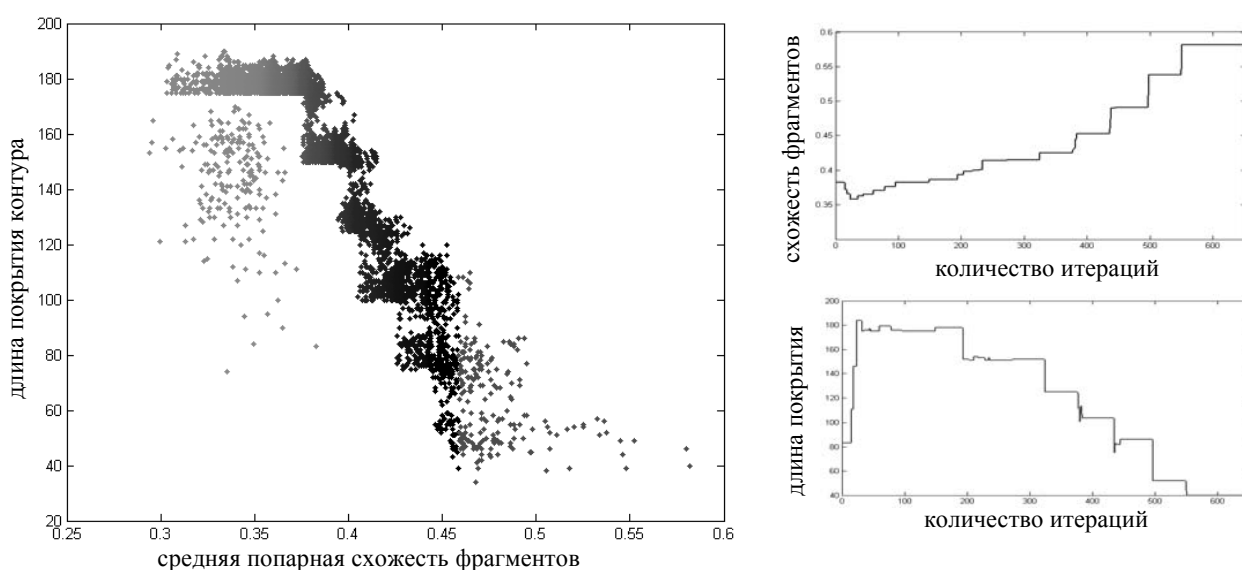


Рис. 5.2. Развитие популяции в пространстве решений (слева) и история развития показателей решения-победителя (справа)

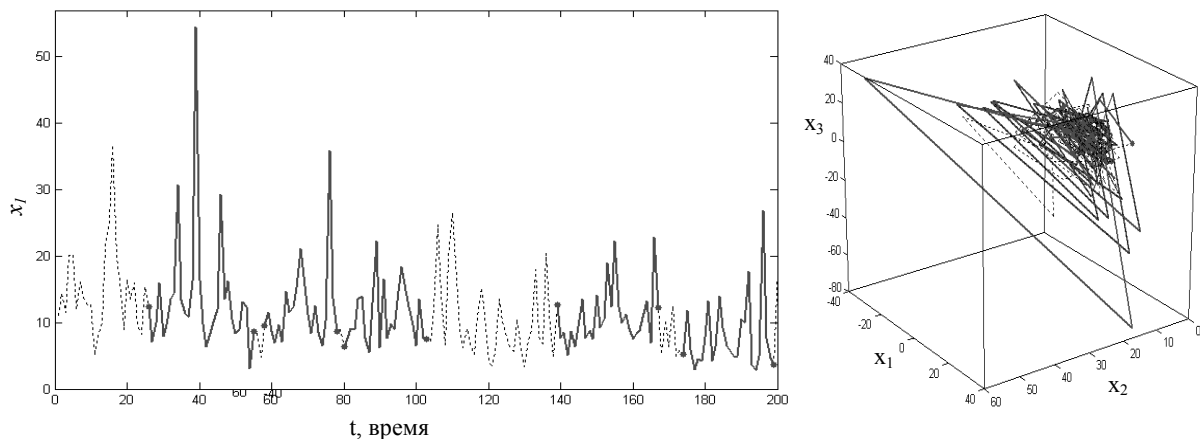


Рис. 5.3. Решение-победитель на исходных данных (слева) и фазовом портрете (справа)

На рис. 5.4, 5.5 приведено сравнение динамики исходной системы и реконструированной модели.

Идентификация параметров системы с помощью метода наименьших квадратов, дает следующий результат для (3.3):

$$A = \begin{bmatrix} 0.9413 & -0.1805 & 0.1164 & -0.0295 \\ -0.0545 & 0.8226 & 0.1622 & 0.1056 \\ 0.0014 & -0.0105 & -0.4455 & 0.8471 \\ -0.0062 & 0.0341 & -0.8860 & -0.5404 \end{bmatrix}, \Psi_0 = \begin{bmatrix} 0.0399 \\ 0.0463 \\ -0.4848 \\ -0.1851 \end{bmatrix} \left( \exp(t^{0.0001}) \sin(t^{0.4}) \right),$$

$$C = 10^4 [ 2.1037 \quad -0.0124 \quad 0.1202 \quad -0.0302 ].$$

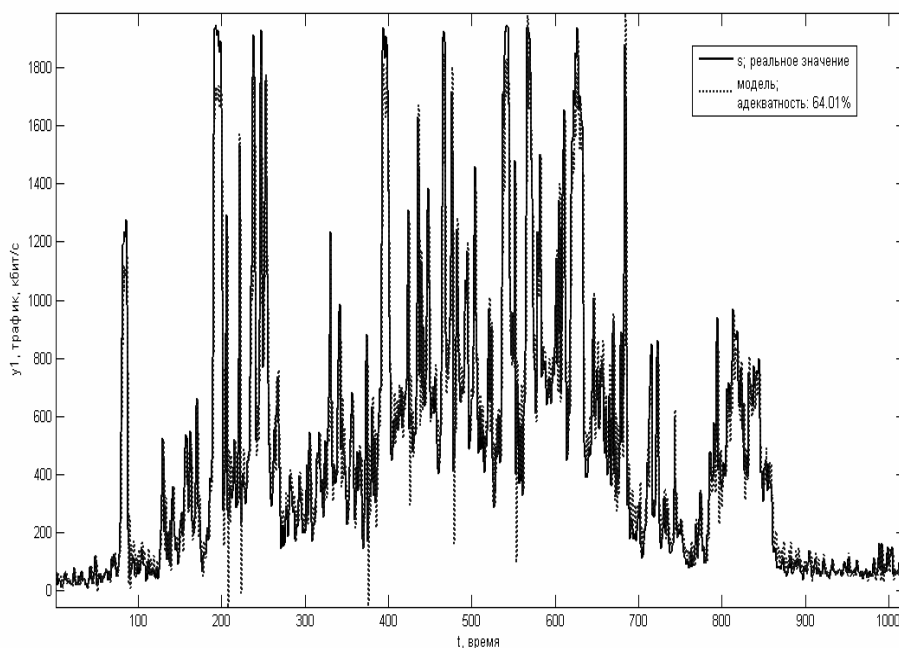


Рис. 5.4. Сравнение динамики модели с реальным трафиком

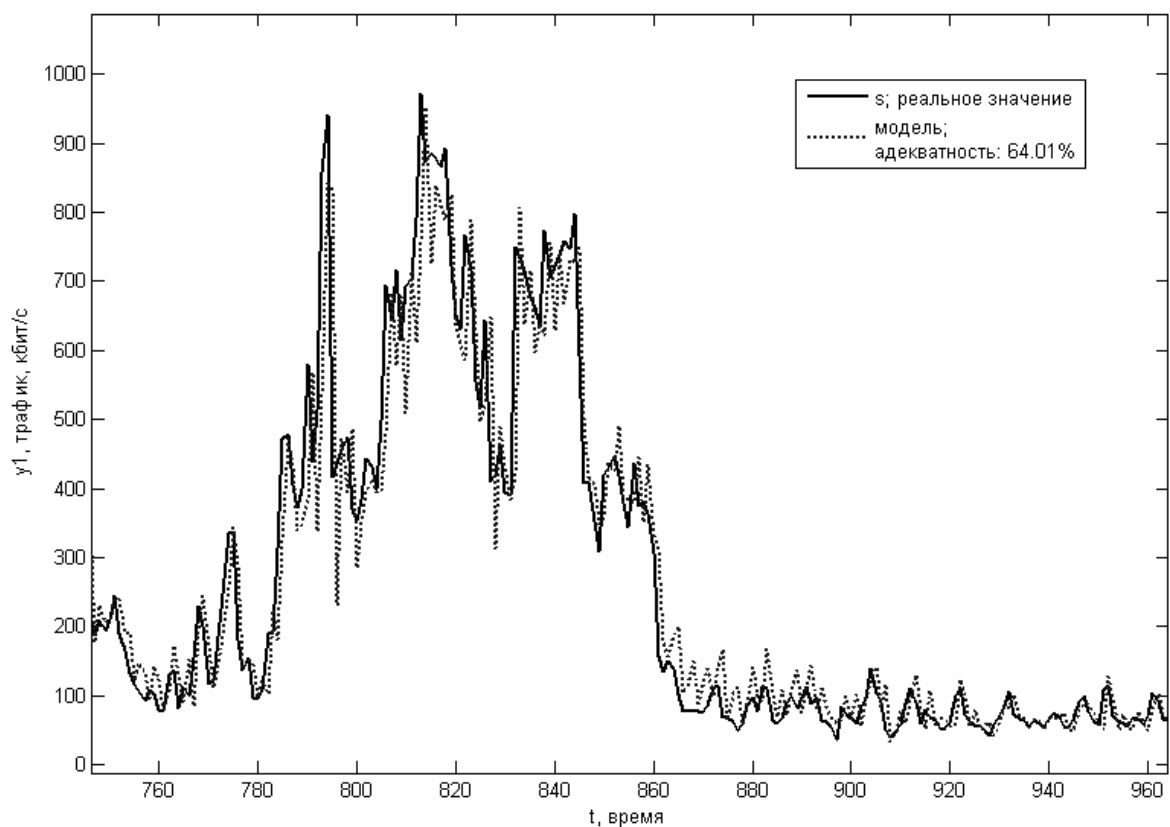


Рис. 5.5. Фрагмент рисунка 5.4

Адекватность полученной модели составляет 64%.

Отметим, что при определении преобразования имеет смысл рассматривать сохранение структурной устойчивости для потоков. На основе эквивалентности всех возмущений при построении модели считается, что из локальной топологической эквивалентности следует сохранение структурной устойчивости, при этом преобразование может быть достаточно близким к тождественному для малых возмущений.

Полученные модели использованы при построении системы управления сетями [62], а также планируется разработка системы диагностики [63].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

---

---

1. *Налимов В. В.* Теория эксперимента / В. В. Налимов. — М. : Наука, 1971.
2. *Ордынцев В. М.* Математическое описание объектов автоматизации / В. М. Ордынцев. — М. : Машиностроение, 1965.
3. *Петров Б. Н.* Теория моделей в процессах управления / Б. Н. Петров, Г. М. Уланов, Н. И. Гольденблат, С. В. Ульянов. — М. : Наука, 1978.
4. *Райбман Н. С.* Построение моделей процессов производства / Н. С. Райбман, В. М. Чадаев. — М. : Энергия, 1975.
5. *Салихов З. Г.* Моделирование процессов управления в технических системах : учеб. пособие / З. Г. Салихов, Е. П. Ступаков. — М. : МИСиС, 2001.
6. *Фельдбаум А. А.* Методы теории автоматического управления / А. А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1971.
7. *Методы* классической и современной теории автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
8. *Самарский А. А.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М. : Наука, Физматгиз, 1997.
9. *Музыкин С. Н.* Моделирование систем : учеб. пособие / С. Н. Музыкин [и др.]. — М. : МГАПИ, 2004.
10. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. — М. : Мир, 1975.
11. *Семенов А. Д.* Идентификация объектов управления : учеб. пособие / А. Д. Семенов, Д. В. Артамонов, А. В. Брюхачев. — Пенза : Пенз. гос. ун-т, 2003.
12. *Дейч А. М.* Методы идентификации динамических объектов / А. М. Дейч. — М. : Энергия, 1979.
13. *Ljung L.* System Identification Toolbox 7. Getting Started Guide / L. Ljung. — Natick: The MathWorks, Inc., 2008.
14. *Попков Ю. С.* Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем / Ю. С. Попков, О. Н. Киселев, Н. П. Петров, Б. Л. Шмульян. — М. : Энергия, 1976.
15. *Слатин В. В.* Определение динамических характеристик объекта регулирования в нормальном режиме его функционирования / В. В. Слатин // Автоматика и телемеханика, 1968.— № 4.



16. Браерман Э. М. Восстановление дифференциального уравнения объекта в процессе его нормальной эксплуатации / Э. М. Браерман // Автоматика и телемеханика, 1966.— № 3.
17. Cuenod M. Comparision of Some Methods User for Process Identification / M. Cuenod., A.P. Sage // Automatica, 1968. — V. 4. — N. 4.
18. Никульчев Е.В. Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным : монография / Е. В. Никульчев — М. : МГУП, 2007.
19. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы / Дж. Д. Биркгоф. — М. ; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. (переизд. 1941).
20. Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности : пер. с франц / П. Берже, И. Поио, К. Видаль. — Череповец : Меркурий-ПРЕСС, 1998.
21. Анищенко В. С. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Владивласова [и др.] / под ред. В. С. Анищенко. — М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.
22. Костылев И. А. Параметры порядка в нейронной сети Хопфилда / И. А. Костылев, Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов // Журнал вычисл. математики и матем. физ., 1994. — Т. 34. — С. 1733–1740.
23. Cremers X. Construction of differential equation from experimental data / X. Cremers, A. Hubler // Z. Naturforschung A., 1987. — V. 42. — P. 797–802.
24. Crutchfield J. P. Equations of motion from a data series / J. P. Crutchfield, B. S. McNamara // Complex Systems, 1987. — V. 1. — P. 417–452.
25. Takens F. Detecting nonlinearities in stationary time series / F. Takens // Int. J. of Bifurcation and Chaos, 1993. — V. 3. — P. 241–256.
26. Brawn R. Modelling and synchronizing chaotic systems from time-series data / R. Brawn, N. F. Rulkov, E. R. Tracy // Pthys. Rev. E, 1994. — V. 49.
27. Павлов А. Н. Реконструкция динамических систем / А. Н. Павлов, Н. Б. Янсон, В. С. Анищенко // Радиотехника и электроника, 1999. — Т. 44. — № 9. — С. 1075–1092.
28. Breeden J. L. Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables / J. L. Breeden, A. Hubler // Phys. Rev. A, 1990. — V. 42. — N. 10. — P. 5817–5826.
29. Gouesbet G. Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial  $L_2$  approximation on nets / G. Gouesbet, C. Letellier // Phys. Rev. E, 1994. — V. 49. — P. 4955–4972.
30. Андронов А. А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. — М. : Наука, 1966.
31. Шильников Л. П. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. — М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.

32. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — М: Наука, 1989.
33. *Афраймович В. С.* Основные бифуркации динамических систем / В. С. Афраймович, Н. К. Гаврилов, В. И. Лукьянов, Л. П. Шильников. — Горький : Изд-во ГГУ, 1985.
34. *Магницкий Н. А.* Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров. — М. : Едиториал УРСС, 2004.
35. *Малинецкий Г. Г.* Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. — М. : Эдиториал УРСС, 2000.
36. *Симо К.* Современные проблемы хаоса и нелинейности / К. Симо, Х. Брур, Дж. Джервер, А. Джиорджилли, В. Ф. Лазуткин, Р. Монтгомери, С. Смейл, Т. Стучи, А. Шенсине. — М. ; Ижевск : Изд-во Института компьютерных исследований, 2002.
37. *Kantz H.* Nonlinear time series analysis / H. Kantz, T. Schreiber. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997.
38. *Kaplan D.* Signal separation by nonlinear projections: The fetal electrocardiogram / D. Kaplan, T. Schreiber // Phys. Rev. E, 1996. — V. 53(5). — P. R4326–R4329.
39. *Mira C.* Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps / C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J.-C. Chatala. — World Sci., Series A, 1995.
40. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / В. И. Оселедец // Тр. моск. мат. об-ва, 1968. — Т. 19. — С. 179–210.
41. *Macau E.* Targeting in chaotic scattering / E. Macau // Phys. Rev. E, 1998. — V. 57. — N. 5. — P. 5337–5347.
42. *Schreiber T.* Constrained randomization of time series data / T. Schreiber // Phys. Rev. Lett., 1998. — V. 80(10). — P. 2105–2108.
43. *Рюэль Д.* О природе турбулентности / Д. Рюэль, Ф. Такенс // Сб.: Странные аттракторы. — М.: Мир, 1981. — С. 117–151
44. *Grassberger P.* On noise reduction methods for chaotic data / P. Grassberger, R. Hegger, H. Kantz, C. Schaffrath, T. Schreiber // Chaos, 1993. — V. 3. — P. 127–141.
45. *Sauer T.* Reconstruction of dynamical systems from interspike intervals / T. Sauer // Phys. Rev. Lett., 1994. — V. 72. — P. 3811–3814.
46. *Wolf A.* Determining Lyapunov exponents from a time series / A. Wolf, J. B. Swift, L. Swinney, J. A. Vastano // Physica D, 1985. — V. 16. — P. 285–317.
47. *Rosenstein M. T.* Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times / M. T. Rosenstein, J. J. Collins, C. J. De Luca // Phys. D, 1994. — V. 73. — P. 82–98.
48. *Бланк М. Л.* Устойчивость и локализация в хаотической динамике / М. Л. Бланк. — М. : МЦНМО, 2001.
49. *Packard N. H.* Geometry from a time series / N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw // Phys. Rev. Lett., 1980. — V. 45. — P. 712–716.

50. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // *Dynamical Syst. and Turbulence* / Eds.: D.A. Rand, L.-S. Young. — Berlin: Springer, 1981. — P. 366–381.
51. *Хенон М.* Двумерное отображение со странным аттрактором / М. Хенон // Сб.: Странные аттракторы. — М. : Мир, 1981. — С. 152–163.
52. *King G. P.* Phase space reconstruction for symmetric dynamical systems / G. P. King, I. Steward // *Physica D*, 1992. — V. 58. — P. 216–228.
53. *Крищенко А. П.* Исследования управляемости и множества достижимости нелинейных систем управления / А. П. Крищенко // *Автоматика и телемеханика*, 1984. — № 6. — С. 30–36.
54. *Hegger R.* Practical implementation of nonlinear time series methods / R. Hegger, H. Kantz, T. Schreiber // *The TISEAN package. CHAOS*, 1999. — N. 9.
55. *Schreiber T.* Surrogate time series / T. Schreiber, A. Schmitz // *Physica D*, 2000. — V. 142. 346
56. *Козлов О. В.* Методика эволюционного выявления симметрических закономерностей в многомерных числовых последовательностях / О. В. Козлов // *Известия вузов. Проблемы полиграфии и издательского дела*. — 2008. — № 5. — С.29–41.
57. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации / С. Осовский. — М. : Финансы и статистика, 2002.
58. *Никульчев Е. В.* Геометрический метод реконструкции систем по экспериментальным данным / Е. В. Никульчев // *Письма в ЖТФ*, 2007. — Т. 33. — Вып. 6. — С. 83–89.
59. *Делюкова Я. В.* Редукция определяющих систем при наличии симметрии / Я. В. Делюкова // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2003. — № 2. — С. 1–7.
60. *Яковенко Г. Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ / Г. Н. Яковенко // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2002. — № 3. — С. 40–83.
61. *Дородницын В. А.* Групповые свойства разностных уравнений / В. А. Дородницын. — М. : Физматлит, 2001.
62. *Паяин С. В.* Построение модели загрузки каналов связи в сетях передачи данных на основе геометрического подхода / С. В. Паяин, Е.В. Никульчев // *Известия вузов. Проблемы полиграфии и издательского дела*, 2008. — № 6. — С. 91–95.
63. *Выжигин А. Ю.* Геометрический подход к идентификации и диагностике динамических систем / А. Ю. Выжигин, Е. В. Никульчев // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*, 2009. — Вып. 30. — С. 109–112.

## Список цитируемых авторов

Андронов А. А.	30	Симо К.	36
Анищенко В. С.	21, 27	Слатин В. В.	15
Арнольд В. И.	32	Смейл С.	36
Астахов В. В.	21	Тураев Д. В.	31
Афраймович В. С.	33	Фельдбаум А. А.	6
Берже П. и др.	20	Хенон М.	51
Биркгоф Дж. Д.	19	Чадеев В. М.	4
Бланк М. Л.	48	Чуа Л.	31
Браерман Э. М.	16	Шильников А. Л.	31
Бутковский А. Г.	6	Шильников. Л. П.	31, 33
Владивласова Т. Е.	21	Эйкхофф П..	10
Выжигин А. Ю.	63	Яковенко Г. Н.	60
Гаврилов Н. К.	33	Янсон Н. Б.	21, 27
Гордон И. И.	30	Brawn R.	26
Дейч А. М..	12	Breeden J. L.	28
Делюкова Я. В.	59	Cremers X.	23
Дородницын В. А..	61	Crutchfield J. P.	24
Козлов О. В.	56	Cuenod M.	17
Костылев И. А.	22	Gouesbet G.	29
Крищенко А. П.	7, 53	Grassberger P.,	44
Леонтович Е. А.	30	Hegger R.	44, 54
Лукьянов В. И.	33	Hubler A.	28, 23
Магницкий Н. А.	34	Kantz H.	37, 44, 54
Майер А. Г.	30	Kaplan D.	38
Малинецкий Г. Г.	22,35	King G. P.	52
Михайлов А. П.	8	Letellier C.	29
Монтгомери Р.	36	Ljung L.	13
Музыкин С. Н.	9	Macau E.	41
Налимов В. В.	1	McNamara B. S.	24
Никульчев Е. В.	18, 58, 62,	Mira C. etc.	39
	63	Packard N. H. etc.	49
Ордынцев В. М..	2	Rosenstein M. T. etc.	47
Оселедец В. И.	40	Rulkov N. F.	26
Осовский С..	57	Sage A.P.	17
Павлов А. Н.	21, 27	Sauer T.	45
Паяин С. В.	62	Schaffrath C.	44
Петров Б. Н. и др..	3	Schmitz A.	55
Попков Ю. С. и др.	14	Schreiber T.	37, 38, 42,
Потапов А. Б.	22, 35		44, 54, 55
Райбман Н. С.	4	Steward I.	52
Рюэль Д.	43	Takens F.	25, 43, 50
Салихов З. Г.	5	Tracy E. R.	26
Самарский А. А.	8	Wolf A. etc	46
Семенов А. Д. и др.	11		
Сидоров С. В.	34		

*Учебное издание*

Никульчев Евгений Витальевич

**Идентификация динамических систем  
на основе симметрий реконструированных  
аттракторов**

Учебное пособие

*Печатается в авторской редакции  
с подготовленного автором оригинал-макета*

Корректор Н. В. Моисеева

Подписано в печать 23.06.10. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 6,37. Тираж 100 экз. Заказ № 165/135

---

Московский государственный университет печати.  
127550, Москва, ул. Прянишникова, 2а.  
Отпечатано в РИЦ МГУП



### *Об авторе*

Никульчев Евгений Витальевич (1975 г. р.)  
доктор технических наук,  
заведующий кафедрой прикладной математики  
и моделирования систем  
Московского государственного университета печати

Закончил Московскую государственную академию  
приборостроения и информатики в 1997 г.  
Специалист в области прикладных приложений сис-  
темного анализа, теории управления, геометрических  
методов исследования дифференциальных уравнений,  
математических пакетов прикладных программ.  
Победитель конкурсов на Грант Президента РФ  
(2007–08), Грант Российского фонда фундаменталь-  
ных исследований (2008–2011) и др.