

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет

В. І. Симоновський

ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2012

УДК 534.11(075)
ББК 22.236.35я73
С 37

Рецензенти:

С. Д. Косторной – доктор технічних наук, професор Сумського державного університету;
І. Б. Карінцев – кандидат технічних наук, професор Сумського державного університету

*Рекомендовано до друку вченою радою
Сумського державного університету
(протокол № 10 від 14.06.2012)*

Симоновський В. І.

С 37 Теорія коливань : навчальний посібник /
В. І. Симоновський. – Суми : Сумський державний
університет, 2012. - 71 с.
ISBN

У навчальному посібнику в стислій конспективній формі розглядаються основні поняття, методи і формули теорії коливань лінійних систем. Приділена велика увага навичкам складання динамічних моделей технічних об'єктів і використанню сучасних програмних продуктів обчислювальної техніки при розрахунках коливань.

Розрахований на студентів і аспірантів спеціальності «Динаміка і міцність».

УДК 534.11(075)
ББК 22.236.35я73

ISBN

© Симоновський В. І., 2012
© Сумський державний університет, 2012

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
ЛЕКЦІЯ 1. Вступні зауваження. Способи складання рівнянь руху.....	6
1.1. Вступні зауваження	6
1.2. Приклади систем з одним ступенем вільності. Способи складання рівнянь руху	6
ЛЕКЦІЯ 2. Коливання систем з одним ступенем вільності.....	14
2.1. Вільні коливання лінійної системи з одним ступенем вільності.....	14
2.2. Вимушені коливання при гармонійній дії.....	18
ЛЕКЦІЯ 3. Прямі і зворотні форми рівнянь коливань дискретних консервативних систем.....	24
3.1. Прямі і зворотні форми рівнянь коливань консервативних систем із n степенями вільності.....	24
3.2. Приклади.....	27
ЛЕКЦІЯ 4. Власні частоти і форми коливань.....	32
4.1. Власні частоти і форми коливань.....	32
4.2. Приклади обчислення власних частот і форм.....	35
ЛЕКЦІЯ 5. Деякі властивості вільних коливань дискретних консервативних систем.....	40
5.1. Ортогональність власних форм.....	40
5.2. Теорема про вплив на власні частоти змін мас і жорсткостей.....	42
5.3. Парціальні частоти.....	42
ЛЕКЦІЯ 6. Лінійні системи з в'язким тертям.....	45
6.1. Рівняння лінійних систем із в'язким тертям.....	45
6.2. Вимушені гармонійні коливання. Метод комплексних амплітуд.....	47
6.3. Динамічний гаситель коливань.....	49

ЛЕКЦІЯ 7. Поперечні коливання стрижнів із розподіленою масою.....	54
7.1. Рівняння вільних поперечних коливань стрижня ...	54
7.2. Вільні коливання стрижня сталого перерізу	56
ЛЕКЦІЯ 8. Поперечні коливання стрижнів із розподіленою масою (продовження)	59
8.1. Вільні коливання однорідного стрижня на двох шарнірних опорах на краях.	59
8.2. Випадок жорсткого закладення	65
8.3. Вимушені коливання однорідного стрижня із зосередженою гармонійною змушуючою силою	67
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	70

ПЕРЕДМОВА

Порівняно невелика кількість годин (30 лекційних), виділена на курс теорії коливань, змушує до максимально можливої стислості. У той самий час необхідно враховувати, що ця дисципліна є однією з основних, профільних для студентів напряму підготовки "Механіка". Тому в частині "Лінійні коливання", якій приділено всього 16 лекційних годин, вирішувалася проблема ознайомлення головним чином із розділами, найбільш актуальними для сучасних методів динамічних розрахунків вібрацій у техніці.

Курс будувався за схемою ускладнення математичних моделей – від одномасових, потім дискретних і далі – систем з розподіленими параметрами. При цьому приділялася увага навичкам і методам побудови математичних моделей елементів технічних конструкцій із використанням законів і принципів теоретичної механіки. Для дискретних систем поряд зі скалярною розглядалася матрична форма запису рівнянь коливань, яка є особливо актуальною на цей час, тому що є мовою безпосереднього програмування. На багатьох прикладах розглянуті конкретні прийоми розрахунку вільних коливань (власних частот і форм) та вимушених – під дією змушуючих гармонійних сил. Для одержання амплітудних і фазових частотних характеристик у дискретних системах був докладно викладений метод комплексних амплітуд.

ЛЕКЦІЯ 1. Вступні зауваження. Способи складання рівнянь руху

1.1. Вступні зауваження.

1.2. Приклади систем з одним степенем вільності. Способи складання рівнянь руху.

1.1. Вступні зауваження

Теорія коливань є однією з базових дисциплін для інженерів спеціальності «Динаміка та міцність машин». Вібрації в техніці є основною причиною зниження довговічності та надійності устаткування. У той самий час коливальні процеси лежать в основі ряду корисних технологічних процесів. Уміння досліджувати вібраційні процеси на основі створення та вивчення їх математичних моделей і володіння навичками вироблення рекомендацій із забезпечення належної вібронадійності базується в першу чергу на глибокому знанні теорії коливань □ науки про основні закономірності коливальних процесів.

1.2. Приклади систем з одним степенем вільності. Способи складання рівнянь руху

Вивчення основ теорії коливань доцільно почати з розгляду систем з одним степенем вільності. Вони з погляду математичного аналізу максимально прості, у той самий час закономірності їх поведінки характерні і для складніших моделей коливальних систем.

Взагалі, будь-який реальний об'єкт може бути поданий математичними моделями найрізноманітнішої структури та складності. Рівень останньої визначається конкретними практичними задачами. Очевидно, що якщо простіша

модель відображає поведінку об'єкта з достатньою для поставлених практичних цілей точністю, то немає потреби вдаватися до складнішого його математичного опису.

Системою з одним ступенем вільності називається така модель, поведінка якої описується однією координатою.

Розглянемо деякі коливальні об'єкти, які можуть бути описані системою з одним ступенем вільності, а також способи складання їх математичних моделей.

1.2.1. Горизонтальний брус із пружиною, що здійснює рух по змазаній напрямній (рис. 1.1)

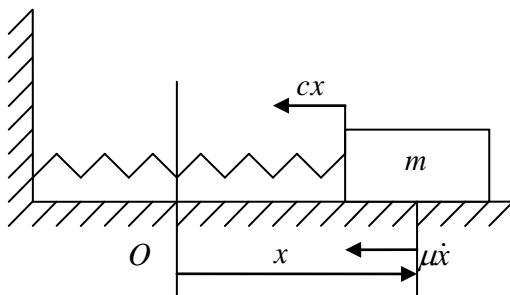


Рисунок 1.1

У даному випадку для виведення рівняння руху достатньо скористатися другим законом Ньютона:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx} = -cx - \mu\dot{x},$$

де x – координата бруса, відлічувана від положення, коли пружина ненапружена;

m – маса бруса;

c і μ – відповідно жорсткість пружини та коефіцієнт в'язкого тертя. Вводячи традиційні позначення

$$\frac{\mu}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = \omega_0^2,$$

запишемо рівняння вільних коливань бруса у вигляді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1)$$

1.2.2. Вертикально підвішений фізичний маятник (рис. 1.2)

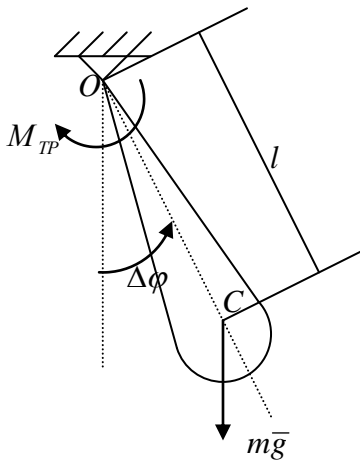


Рисунок 1.2

Для виведення рівняння руху в даному випадку використовується рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$I_0 \cdot \delta\ddot{\varphi} = \Sigma M_0(\overline{F}_k) = M_f + M_p,$$

де $M_f = -\mu \cdot \delta\dot{\varphi}$ – момент в'язкого тертя;

$M_p = -mgl \cdot \sin \delta\varphi \approx -mgl \cdot \delta\varphi$ – момент сили ваги;

m – маса маятника;

$OC = l$ – відстань від осі підвісу O до центра ваги C ;

I_0 – момент інерції маятника відносно осі підвісу;

μ – коефіцієнт в'язкого тертя;

$\delta\varphi$ – малий кут відхилення маятника від вертикального положення.

Позначивши $\omega_0^2 = mgl / I_0$ – квадрат власної частоти малих коливань маятника, $2n = \mu / I_0$, запишемо рівняння вільних коливань маятника у вигляді

$$\delta\ddot{\varphi} + 2n\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\delta\varphi = 0.$$

1.2.3. Рівняння вільних коливань точкового вантажу на пружній невагомій балці (рис. 1.3)

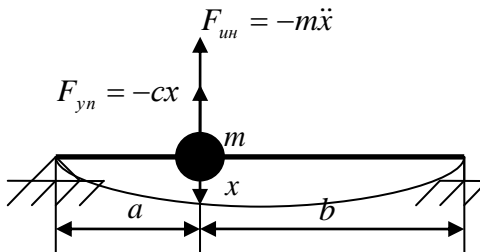


Рисунок 1.3

Запишемо, за принципом Д'Аламбера, умову рівноваги вантажу, додавши до реальної пружної сили $F_n = -cx$ силу інерції $F_i = -m\ddot{x}$:

$$-cx - m\ddot{x} = 0.$$

Згинальна жорсткість балки в точці установки вантажу, як відомо з опору матеріалів,

$$c = 3EI / (a^2 b^2).$$

Розділивши рівняння на масу вантажу, можемо записати рівняння коливань вантажу у вигляді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

де квадрат власної частоти вантажу в даному випадку обчислюється за формулою

$$\omega_0^2 = 3EI / (ma^2 b^2).$$

1.2.4. Розглянемо систему з одним ступенем вільності, що являє собою кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.4).

Рівняння коливань такої системи можна одержати, скориставшись рівнянням Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = Q, \quad (1.2)$$

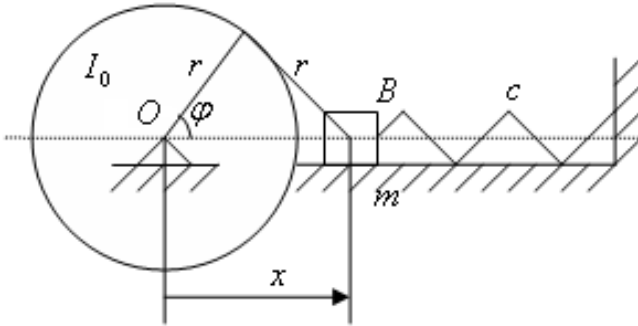


Рисунок 1.4

де φ – узагальнена координата (у даному випадку кут повороту кривошипа OA);

T – кінетична енергія системи;

Q – відповідна даній узагальненій координаті узагальнена сила.

Кінетична енергія даної системи записується у вигляді

$$T = I_0 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

де I_0 – момент інерції маховика з кривошипом відносно осі обертання O;

m – маса повзуна;

x – координата повзуна.

Оскільки

$$x = 2r \cdot \cos\varphi, \dot{x} = -2r \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi},$$

то
$$T = 0,5I_{np}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2, \quad (1.3)$$

де
$$I_{np}(\varphi) = I_0 + 4mr^2 \cdot \sin^2\varphi. \quad (1.4)$$

Узагальнена сила в даному випадку

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{c(x-x_0)^2}{2} = 4cr^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \cdot \sin\varphi, \quad (1.5)$$

де x_0, φ_0 – координати відповідно кривошипа і повзуна в рівноважному стані (в якому пружина жорсткістю c перебуває в недеформованому стані).

Підставляючи (1.3), (1.5) в (1.2), одержимо після очевидних перетворень диференціальне рівняння коливань механізму у вигляді

$$I_{np}(\varphi)\ddot{\varphi} + 0,5\frac{\partial I_{np}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 - 4cr^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\sin\varphi = 0. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) є нелінійним. Далі його можна лінеаризувати та одержати диференціальне рівняння для обчислення малих приростів $\delta\varphi(t)$ щодо рівноважного положення $\varphi = \varphi_0$.

У загальному випадку лінеаризоване рівняння одержують у результаті розкладання початкового рівняння

$$F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0$$

у ряд Тейлора:

$$F(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \approx F(\varphi_0, 0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_0 \delta\varphi + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}}\right)_0 \delta\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\varphi}}\right)_0 \delta\ddot{\varphi}.$$

Враховуючи, що $F(\varphi_0, 0, 0) = 0$,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\varphi}}\right)_0 = I_0 + 4mr^2 \sin^2 \varphi_0, \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_0 = 4cr^2 \sin^2 \varphi_0,$$

запишемо остаточно

$$\delta\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \delta\varphi = 0,$$

де
$$\omega_0^2 = \frac{4cr^2 \sin^2 \varphi_0}{I_0 + 4mr^2 \sin^2 \varphi_0}.$$

Практичний інтерес становить остання формула, за якою обчислюється квадрат власної частоти малих вільних коливань щодо положення рівноваги.

ЛЕКЦІЯ 2. Коливання систем з одним ступенем вільності

2.1. Вільні коливання лінійної системи з одним ступенем вільності.

2.2. Вимушені коливання.

2.1. Вільні коливання лінійної системи з одним ступенем вільності

Виходитимемо із запису диференціального рівняння системи у вигляді (1.1). Відповідне йому характеристичне рівняння

$$p^2 + 2np + \omega_0^2 = 0$$

має корені

$$p_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}.$$

При $\omega_0 > n$ (випадок слабкого тертя) матимемо

$$p_{1,2} = -n \pm i\omega_1,$$

де $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$ – власна кругова частота коливань з урахуванням тертя. У сталевих конструкціях $\omega_0 \gg n$ і

$$\omega_1 \approx \omega_0.$$

Розв'язуючи (1.1) за початкових умов

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

одержимо після відомих перетворень закон вільних коливань

$$x(t) = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (2.1)$$

Розв'язок (2.1) зручно подати у вигляді

$$x = A e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \phi), \quad (2.2)$$

де амплітуда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{\omega_1} \right)^2},$$

а початкова фаза

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega_1}{v_0 + nx_0} & \text{при } v_0 + nx_0 > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega_1}{v_0 + nx_0} + \pi & \text{при } v_0 + nx_0 \leq 0. \end{cases}$$

Графік розв'язку (2.2) наведений на рис. 2.1.

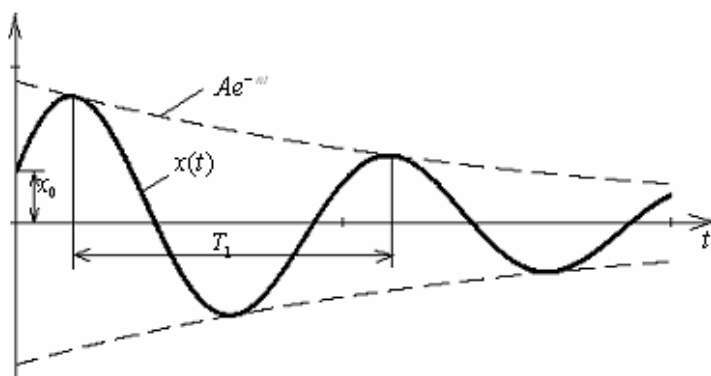


Рисунок 2.1

Хоча цей рух не є періодичним, вводиться поняття періоду $T_1 = 2\pi/\omega_1$ як часу між двома максимальними відхиленнями (рис. 2.1).

Відношення між попереднім і подальшим максимальними відхиленнями $\eta = x_{m_i}/x_{m_{i+1}}$ називається **декрементом коливань**. Для лінійної системи декремент є величиною сталою. Дійсно, нехай деяке максимальне

відхилення досягається при $t = t_i$. Тоді максимум $x_{m,i+1}$ буде при $t = t_i + \frac{2\pi}{\omega_1}$. Згідно зі законом руху (2.2) матимемо:

$$\eta = \frac{x(t_i)}{x\left(t_i + \frac{2\pi}{\omega_1}\right)} = e^{\frac{2\pi}{\omega_1} n}.$$

Для зручності користуються **логарифмічним декрементом коливань**:

$$\delta = \ln \eta = n \frac{2\pi}{\omega_1} = nT_1.$$

При $n = 0$ маємо консервативну систему, що описується рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Для неї розв'язок записується у вигляді

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

або

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (2.3)$$

де

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \phi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega_0}{v_0} & \text{при } v_0 > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega_0}{v_0} + \pi & \text{при } v_0 \leq 0. \end{cases}$$

Графік незгасаючих коливань (2.3) показаний на рис. 2.2.

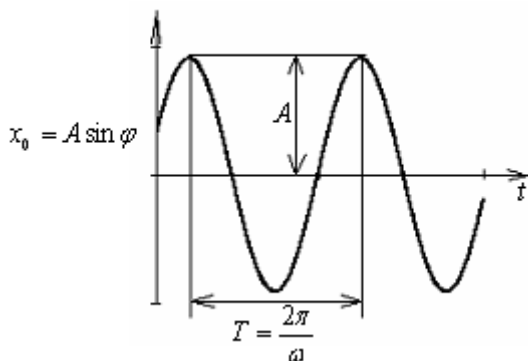


Рисунок 2.2

2.2. Вимушені коливання при гармонійній дії

Якщо на одномасову систему (рис. 1.1) діє гармонійна змушуюча сила

$$F(t) = H \sin \omega t,$$

то, позначивши $h = H/m$ (амплітуда сили на одиницю маси), перепишемо рівняння (1.1) тепер уже з правою частиною у вигляді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = h \sin \omega t . \quad (2.4)$$

Повний розв'язок рівняння (2.4) є сумою вільної та вимушеної складових

$$x = x_{віль} (t) + x_{виму} (t) ,$$

де вільна складова (загальний розв'язок однорідного рівняння) має вигляд

$$x_{віль} (t) = e^{-nt} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) ,$$

а вимушена $x_{виму} (t)$ є частинним розв'язком, що відповідає правій частині.

Практичний інтерес становить звичайно вимушена складова, бо вільна з часом затухає.

Для знаходження частинного розв'язку використовуємо метод комплексних амплітуд. Змушуючу силу подамо в комплексному вигляді

$$\bar{f}(t) = h \exp(i\omega t) . \quad (2.5)$$

Тоді змушуюча сила (права частина рівняння (2.4)) буде уявною частиною (2.5):

$$f(t) = \text{Im } \bar{f}(t) = h \sin \omega t .$$

Очевидно, що вимушена складова рішення (2.4) з правою частиною (2.5) буде деякою комплексною функцією

$$\bar{x}_{\text{внм}}(t) = \bar{X}_m \exp(i\omega t), \quad (2.6)$$

де

$$\bar{X}_m = X_m \exp(i\varphi) \quad (2.7)$$

є шуканою комплексною амплітудою. Модуль цієї амплітуди буде дорівнювати амплітуді вимушених коливань $X_m = |\bar{X}_m|$, а аргумент є фазою коливань відносно гармонійної змушуючої сили:

$$\varphi = \arg \bar{X}_m = \begin{cases} \arctg \frac{X_{mi}}{X_{mr}}, X_{mr} > 0; \\ \arctg \frac{X_{mi}}{X_{mr}} + \pi, X_{mr} \leq 0. \end{cases}$$

В останній формулі X_{mr} , X_{mi} – дійсна та уявна частини комплексної амплітуди $\bar{X}_m = X_{mr} + iX_{mi}$.

Дійсно, якщо комплексний розв'язок є $\bar{x}_{\text{внм}}(t)$, то відповідно уявна частина його буде шуканим розв'язком $x_{\text{внм}}(t)$:

$$x_{\text{внм}}(t) = \text{Im } \bar{x}_{\text{внм}}(t) = \text{Im } X_m \exp(i(\omega t + \varphi)) = X_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Підставляючи (2.6) в (2.4) з правою частиною (2.5), одержимо після скорочення на $\exp(i\omega t)$ співвідношення для визначення комплексної амплітуди :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i2n\omega)\bar{X}_m = h.$$

Звідки

$$\bar{X}_m = X_m \exp(i\varphi) = h/(-\omega^2 + \omega_0^2 + 2n\omega \cdot i).$$

Прирівнюючи модуль і фазу лівої і правої частини цієї формули, запишемо

$$|\bar{X}_m| = X_m = hA(\omega), \quad (2.8)$$

$$\phi = \arg\left((\omega_0^2 - \omega^2) - 2n\omega \cdot i\right) = \begin{cases} -\arctg \frac{2n}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{якщо } \omega < \omega_0, \\ -\arctg \frac{2n}{\omega_0^2 - \omega^2} - \pi, & \text{якщо } \omega \geq \omega_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}. \quad (2.10)$$

Функцію $A(\omega)$ називають **амплітудною частотною характеристикою**, залежність (2.9) – **фазовою частотною характеристикою**.

Ці характеристики зручно подати в безрозмірній формі. Якщо ввести безрозмірну частоту змушуючої сили $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, то, розділивши ліву і праву частини (2.8) на h/ω_0^2 , можна записати нарешті, що

$$\frac{X_m}{X_{cm}} = \beta(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\bar{n}^2 \bar{\omega}^2}}, \quad (2.11)$$

де $X_{cm} = \frac{H}{c}$ – статичне відхилення пружини під дією постійної сили H , що дорівнює амплітуді даної змушуючої сили;

$\bar{n} = n/\omega_0$ – відносний коефіцієнт опору.

Коефіцієнт $\beta(\bar{\omega})$ називають **коефіцієнтом динамічності**. Він дорівнює відношенню амплітуди коливань до статичного прогину від постійної сили, що дорівнює амплітуді змушуючої сили.

Відповідно фазову характеристику запишемо у вигляді співвідношення

$$\varphi = \begin{cases} -\arctg \frac{2\bar{n}\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2} & \text{при } \bar{\omega} < 1, \\ -\arctg \frac{2\bar{n}\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2} - \pi, & \text{при } \bar{\omega} \geq 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Графіки характеристик (2.11) і (2.12) при різних величинах \bar{n} наведені на рис. 2.3.

Зазначимо деякі особливості цих характеристик. Максимум коефіцієнта динамічності $\beta(\bar{\omega})$ (резонансний

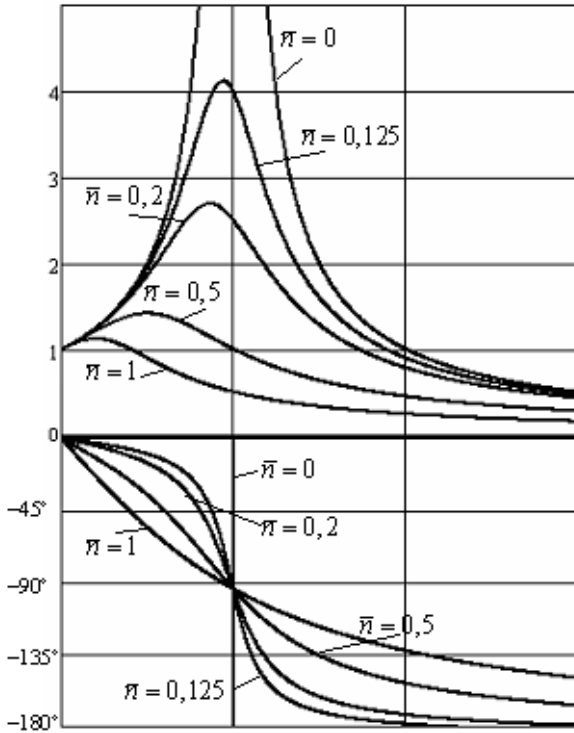


Рисунок 2.3

пiк) у мiру збiльшення коефiцiєнта опору \bar{n} змiщується вiд точки $\bar{\omega} = 1$ влiво i зменшується. Усi кривi фазовi характеристики $\varphi(\bar{\omega})$ при $\bar{\omega} = 1$ (тобто при резонансi консервативної системи) проходять через точку $-\frac{\pi}{2}$. У системах iз слабким демпфiруванням ($\bar{n} \ll 1$) кривi фазовi характеристики пiд час переходу через резонанс практично зазнають стрибка вiд 0 до $-\pi$.

ЛЕКЦІЯ 3. Пряма і зворотна форми рівнянь коливань дискретних консервативних систем

3.1. Пряма і зворотна форми рівнянь коливань консервативних систем із n степенями вільності.

3.2. Приклади.

3.1. Пряма і зворотна форми рівнянь коливань консервативних систем із n степенями вільності.

Рівняння консервативної лінійної системи із n степенями вільності можуть бути подані у вигляді:

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j + Q_i \quad \left(i = \overline{1, n} \right), \quad (3.1)$$

де m_i – i -та узагальнена маса;

x_i – i -та узагальнена координата;

r_{ij} – коефіцієнти жорсткості;

Q_i – i -та узагальнена сила, прикладена до i -ї узагальненої маси в напрямку i -ї узагальненої координати;

$-\sum_{j=1}^n r_{ij} x_j$ – сумарна реакція пружних зв'язків

консервативної системи в напрямку координати x_i .

У матричній формі рівняння (3.1) записують так:

$$\overline{m} \ddot{\bar{x}} + \overline{r} \bar{x} = \overline{Q}, \quad (3.2)$$

де $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор-стовпець координат;

$$\bar{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^T \text{ – вектор-стовпець узагальнених сил;}$$

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix} \text{ – діагональна матриця мас;}$$

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n11} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \text{ – матриця жорсткостей.}$$

Рівняння вигляду (3.1) або (3.2) називають **прямою формою запису диференціальних рівнянь дискретної системи**. Тут сили реакцій пружних зв'язків

$$R_i = -\sum_{j=1}^n r_{ij} x_j$$

виражаються через переміщення (координати) системи. Рівняння (3.1) можна переписати у вигляді

$$Q_i + R_i + (-m_i \ddot{x}_i) = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

який виражає принцип Д'Аламбера: сукупність усіх зовнішніх сил Q_i , реакцій зв'язків R_i і сил інерції $-m_i \ddot{x}_i$ утворює рівноважну систему.

Принцип Д'Аламбера можна використовувати для складання **рівнянь руху в зворотній формі**. Додамо до узагальнених зовнішніх сил Q_j сили інерції $-m_j \ddot{x}_j$,

прикладені до відповідних мас m_j . Тоді, використовуючи вирази для статичних переміщень мас, можемо записати

$$x_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (Q_j - m_j \ddot{x}_j) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3.3)$$

де δ_{ij} – коефіцієнти податливості.

У матричній формі рівняння (3.3) записуються у вигляді

$$\overline{E}\overline{x} = \overline{\delta}(\overline{Q} - \overline{m}\ddot{\overline{x}}), \quad (3.4)$$

де

$$\overline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & & \delta_{nn} \end{bmatrix} - \text{матриця податливостей};$$

\overline{E} – одинична матриця.

Як відомо, $\overline{\delta} \times \overline{r} = \overline{E}$.

Тому $\overline{\delta} = \overline{r}^{-1}$, $\overline{r} = \overline{\delta}^{-1}$.

Рівняння (3.4) можна одержати з (3.2), помноживши останнє на матрицю $\overline{\delta}$ зліва:

$$\overline{\delta}\overline{m}\ddot{\overline{x}} + \overline{\delta}\overline{r}\overline{x} = \overline{\delta}\overline{Q}.$$

Звідки випливає (3.4).

3.2. Приклади

3.2.1. Коливання диска, закріпленого на кінці пружної невагомої балки (рис. 3.1)

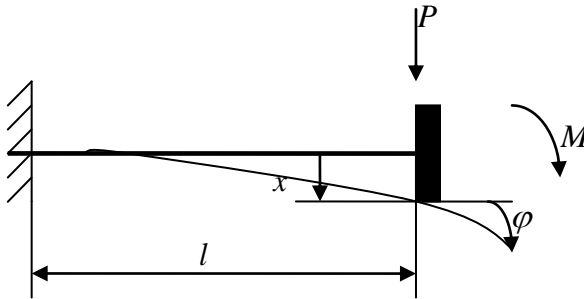


Рисунок 3.1

При малих переміщеннях коливальну модель диска можна подати як систему з двома степенями вільності, що визначається вертикальним переміщенням x центра мас диска і кутом повороту φ диска відносно центра мас диска. Нехай до диска прикладені в позитивних напрямках координат x та φ відповідні узагальнені сили: вертикальна сила P і момент M . Використовуючи зворотну форму диференціальних рівнянь руху (3.3) і принцип Д'Аламбера, можемо записати:

$$\begin{aligned}x &= \delta_{11}(P - m\ddot{x}) + \delta_{12}(M - J_d\ddot{\varphi}), \\ \varphi &= \delta_{21}(P - m\ddot{x}) + \delta_{22}(M - J_d\ddot{\varphi}),\end{aligned}\tag{3.5}$$

де коефіцієнти податливостей, як відомо з опору матеріалів, обчислюються за формулами

$$\delta_{11} = l^3/(3EJ), \quad \delta_{21} = \delta_{12} = l^2/(2EJ), \quad \delta_{22} = l/(EJ),$$

де l – довжина балки;

E – модуль Юнга;

J – момент інерції перетину диска;

m – маса диска;

J_d – момент інерції мас диска щодо осі, що проходить через центр мас диска і є перпендикулярною до площини переміщень.

3.2.2. Система брусів, з'єднаних пружинами (рис. 3.2)

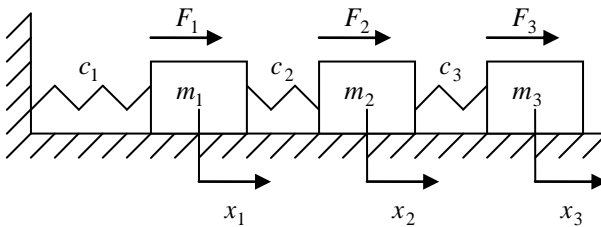


Рисунок 3.2

При складанні рівнянь коливань тут зручно використовувати пряму форму і другий закон Ньютона:

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1 - c_1 x_1 - c_2 (x_1 - x_2),$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= F_2 - c_2(x_2 - x_1) - c_3(x_2 - x_3), \\ m_3 \ddot{x}_3 &= F_3 - c_3(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Для зручності ці рівняння перепишемо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 + 0 \cdot x_3 &= F_1, \\ -c_2 x_1 + m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)x_2 - c_3 x_3 &= F_2, \\ 0 \cdot x_1 - c_3 x_2 + m_3 \ddot{x}_3 + c_3 x_3 &= F_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Систему (3.6) можна подати в матричній формі:

$$\overline{m} \ddot{\overline{x}} + \overline{c} \overline{x} = \overline{F};$$

де діагональна матриця

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix};$$

матриця жорсткостей

$$\overline{c} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix};$$

вектор-стовпець координат

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T;$$

вектор-стовпець змушуючих сил

$$\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)^T.$$

3.2.3. Система точкових вантажів на невагомій пружній балці (рис. 3.3)

Використовуючи формули опору матеріалів для статичних прогинів точок балки, до яких прикладені сили F_1 , F_2 , і додаючи згідно з принципом Д'Аламбера до цих сил сили інерції $\Phi_1 = -m_1\ddot{x}_1$, $\Phi_2 = -m_2\ddot{x}_2$, можемо записати у зворотній формі рівняння динаміки:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \delta_{11}m_1\ddot{x}_1 + \delta_{12}m_2\ddot{x}_2 &= \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2, \\ \delta_{21}m_1\ddot{x}_1 + x_2 + \delta_{22}m_2\ddot{x}_2 &= \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

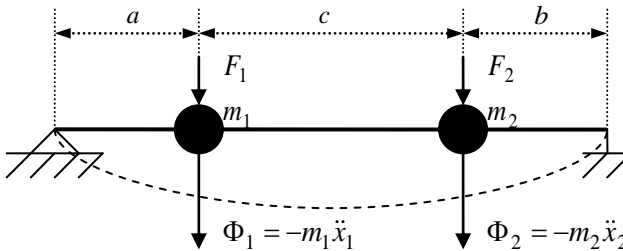


Рисунок 3.3

де згідно з формулами опору матеріалів для податливостей маємо:

$$\delta_{11} = \frac{a^3(c+b)^3}{3EJl^3}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{a^2b^2(3l^2 - 3l(a+b) + 2ab)}{6EJl^3},$$

$$\delta_{22} = \frac{(c+b)^3(a+c)^3}{3EJl^3}, \quad l = a+b+c.$$

У матричній формі рівняння (3.7) можна записати у вигляді

$$\overline{E\bar{x}} + \overline{\delta m \ddot{x}} = \overline{\delta F},$$

де

$$\overline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}; \quad \overline{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};$$

$$\overline{\delta F} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_1 \end{bmatrix};$$

$$\overline{\delta m \ddot{x}} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11}m_1\ddot{x}_1 + \delta_{12}m_2\ddot{x}_2 \\ \delta_{21}m_1\ddot{x}_1 + \delta_{22}m_2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}.$$

ЛЕКЦІЯ 4. Власні частоти і форми коливань

4.1. Власні частоти і форми коливань консервативних дискретних систем.

4.2. Приклади обчислення власних частот і форм.

4.1. Власні частоти і форми коливань

Власними частотами консервативних дискретних систем називаються частоти їх вільних коливань за відсутності зовнішніх сил. При цьому рівняння вільних коливань консервативної системи із n степенями вільності в прямій формі мають вигляд

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.1)$$

Відповідно у зворотній формі записують

$$x_i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j \ddot{x}_j = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.2)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_i = u_i \sin(pt + \varphi) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.3)$$

Підставляючи (4.3) в (4.1), одержимо після скорочення на $\sin(pt + \varphi)$ однорідну систему рівнянь для знаходження амплітуд:

$$-m_i p^2 u_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} u_j = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.4)$$

Аналогічно для запису у зворотній формі (4.2) одержимо:

$$u_i - p^2 \sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j u_j = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.5)$$

Однорідні системи (4.4) і (4.5) можуть мати ненульові рішення лише при рівності нулю їх визначників. Звідки одержуємо рівняння для визначення власних частот. Для прямої форми

$$\begin{bmatrix} r_{11} - p^2 m_1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & r_{22} - p^2 m_2 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & \dots & r_{nn} - p^2 m_n \end{bmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Розкриваючи визначник (4.6), одержимо рівняння n -го порядку відносно квадратів власних частот $\lambda = p^2$. Як відомо, за умови симетричності матриці корені частотного рівняння (4.6) λ_i ($i = \overline{1, n}$) є додатніми числами.

Для зворотної форми умова ненульових розв'язків для однорідної системи (4.5) – рівняння для власних частот, якщо позначити $z = 1/p^2$, перетвориться на

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}m_1 - z & \delta_{12}m_2 & \delta_{1n}m_n \\ & \delta_{22}m_2 - z & \delta_{2n}m_n \\ \delta_{n1}m_1 & & \delta_{nn}m_n - z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

У матричній формі рівняння (4.1) записуються у вигляді

$$\bar{m}\ddot{\bar{x}} + \bar{r}\bar{x} = 0. \quad (4.8)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $\bar{x} = \bar{u} \sin pt$, де вектор-стовпець амплітуд вільних коливань

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)^T.$$

Підставляючи цей розв'язок в (4.8), одержимо запис рівняння для амплітуд у вигляді

$$(\bar{r} - p^2\bar{m})\bar{u} = 0. \quad (4.9)$$

Частотне рівняння (4.6) при цьому записується так:

$$\det(\bar{r} - p^2\bar{m}) = 0. \quad (4.10)$$

Матричний запис рівнянь зворотної форми має такий вигляд:

$$\bar{E}\bar{x} + \bar{\delta}\bar{m}\bar{x} = 0. \quad (4.11)$$

Підставляючи в це рівняння розв'язок $\bar{x} = \bar{u} \sin pt$, одержимо матричний запис системи (4.5):

$$(\bar{E} - p^2 \bar{\delta m}) \bar{u} = 0. \quad (4.12)$$

Відповідно частотне рівняння (4.10) набере вигляд:

$$\det(\bar{\delta m} - \bar{E} z) = 0. \quad (4.13)$$

Кожній власній частоті p_i ($i = \overline{1, n}$) відповідає i -та власна форма коливань, яка є співвідношенням між амплітудами коливань мас при даній власній частоті:

$$u_{1i} : u_{2i} : \dots : u_{ni}. \quad (4.14)$$

Через однорідність рівнянь (4.4) або (4.5) ці співвідношення визначаються з точністю до довільного множника. Наприклад, можна припустити, що $u_{1i} = 1$ і, розв'язуючи при $p = p_i$ систему (4.4) або (4.5), відкинувши в кожній одне з рівнянь, знайти співвідношення (4.14) у вигляді $1 : u_{2i} : \dots : u_{ni}$.

4.2. Приклади обчислення власних частот і форм

4.2.1. Вільні коливання невагомої пружної балки з двома масами (рис. 4.1)

Рівняння коливань у зворотній формі для цієї системи мають вигляд

$$\begin{aligned} x_1 &= -\delta_{11} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{x}_2, \\ x_2 &= -\delta_{21} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{x}_2. \end{aligned}$$

Підставляючи в ці рівняння розв'язок у вигляді

$$x_1 = u_1 \sin pt, \quad x_2 = u_2 \sin pt,$$

одержимо рівняння для амплітуд:

$$\begin{aligned} u_1 &= p^2 (\delta_{11} m_1 u_1 + \delta_{12} m_2 u_2), \\ u_2 &= p^2 (\delta_{21} m_1 u_1 + \delta_{22} m_2 u_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

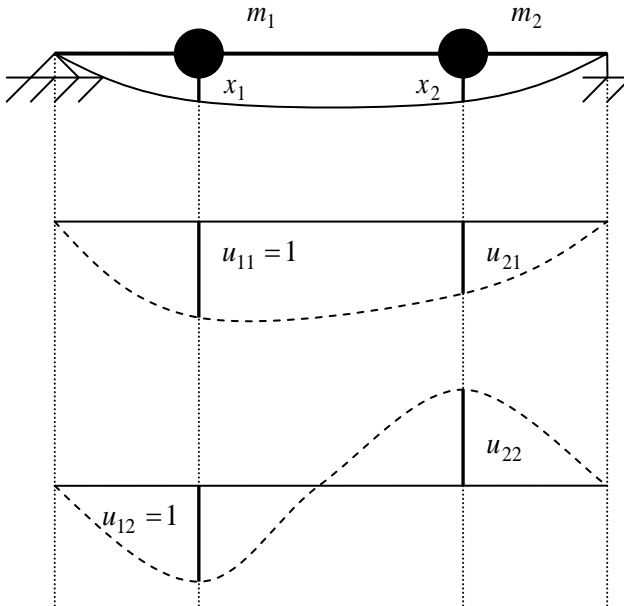


Рисунок 4.1

Позначивши $z = 1/p^2$, запишемо частотне рівняння у вигляді рівності нулю визначника:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}m_1 - z & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - z \end{bmatrix} = 0.$$

Останнє рівняння зводиться до рівняння другого порядку відносно z :

$$z^2 - (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)z + m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Корені цього рівняння обчислюються за формулами:

$$z_{1,2} = 0,5 \left(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 \pm \sqrt{\delta_{11}^2m_1^2 + \delta_{22}^2m_2^2 + 2m_1m_2(2\delta_{12}^2 - \delta_{11}\delta_{22})} \right).$$

Якщо припустити, що $u_{1k} = 1$, то, наприклад, з другого рівняння (4.15) матимемо:

$$u_{2k} = \frac{\delta_{21}m_1}{z_k - m_2\delta_{22}} \quad (k = \overline{1,2}).$$

Кожну k -ту форму тепер можна подати у вигляді співвідношення

$$1 : \delta_{21}m_1 / (z_k - m_2\delta_{22}) \quad (k = \overline{1,2}).$$

На рис. 4.1 показані ці форми. При другій формі амплітуди $u_{12} = 1$, $u_{22} < 0$, що означає, що маси при

коливаннях на другій власній частоті переміщуються у протифазі. Вільні коливання за першою власною частотою відбуваються синфазно.

4.2.2. Вільні коливання двох брусків на пружинах (рис. 4.2)

Рівняння коливань тут зручно записати в прямій формі:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Вважаючи, що розв'язок матиме вигляд $x_1 = u_1 \sin pt$, $x_2 = u_2 \sin pt$, можемо записати рівняння для амплітуд у вигляді

$$\begin{aligned} (-p^2 m_1 + c_1 + c_2)u_1 - c_2 u_2 &= 0, \\ -c_2 u_1 + (-p^2 m_2 + c_2)u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

З умови рівності визначника цієї системи нулю одержуємо нарешті частотне рівняння у вигляді

$$m_1 m_2 z^2 - (m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2))z + c_1 c_2 = 0 \quad (z = p^2).$$

Припустивши, що в (4.16) $u_{1k} = 1$, одержимо, наприклад, з першого рівняння (4.16):

$$u_{2k} = \frac{1}{c_2} (c_1 + c_2 - p_k^2 m_1), \quad (k = \overline{1,2}). \quad (4.17)$$

На рис. 4.2 показані форми коливань
 $1: \frac{1}{c_2}(c_1 + c_2 - p_K^2 m_1)$.

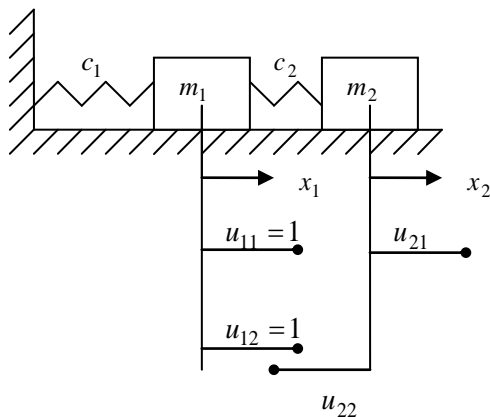


Рисунок 4.2

Помітимо, що для першої власної частоти $u_{2K} > 0$, для другої – $u_{2K} < 0$. Фізично це означає, що при першій власній частоті маси рухаються синфазно (кожного разу в один бік). При другій власній частоті маси переміщуються у протифазі (рухаються або назустріч одна одній, або розходяться в різні боки).

ЛЕКЦІЯ 5. Деякі властивості вільних коливань дискретних консервативних систем

5.1. Ортогональність власних форм.

5.2. Теореми про вплив на власні частоти змін мас і жорсткостей.

5.3. Парціальні частоти.

5.1. Ортогональність власних форм

Щоб у пружній системі із n степенями вільності викликати статичні переміщення за k -ю власною формою

$$x_i = u_{ik} \quad (i = \overline{1, n}),$$

необхідно прикласти сили

$$F_{ik} = \sum_{j=1}^n r_{ij} u_{jk} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.1)$$

Але, враховуючи рівняння (4.4),

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} u_{jk} = m_i p_k^2 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.2)$$

Згідно з теоремою про взаємність робіт на можливих переміщеннях можемо записати:

$$\sum_{i=1}^n F_{ik} u_{il} = \sum_{i=1}^n F_{il} u_{ik}, \quad (5.3)$$

де F_{ik} – сили, що викликають переміщення u_{ik} (які відповідають k -й власній формі);

F_{il} – сили, що викликають переміщення u_{il} , що відповідають l -й власній формі.

З урахуванням співвідношень (5.2), (5.1) рівність (5.3) можна переписати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n p_k^2 m_i u_{ik} u_{il} = \sum_{i=1}^n p_l^2 m_i u_{il} u_{ik}.$$

Звідки

$$(p_k^2 - p_l^2) \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{il} = 0.$$

Оскільки $p_k \neq p_l$, то буде

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{il} = 0. \quad (5.4)$$

Умову (5.4) називають умовою ортогональності форм.

Як приклад, що ілюструє цю умову, розглянемо задачу 4.2.1 попередньої лекції. Тут

$$m_1 \cdot 1 \cdot 1 + m_2 \cdot u_{21} \cdot u_{22} = 0$$

матиме місце, оскільки $u_{21} > 0$ і $u_{22} < 0$. У цьому можна переконатися, підставивши у це співвідношення формули (4.17).

5.2. Теореми про вплив на власні частоти змін мас і жорсткостей

5.2.1. Збільшення будь-якої маси системи зменшує або хоча б залишає незмінними її власні частоти.

Нехай спектр системи із n степенями вільності буде

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n, \quad (5.5)$$

А при збільшенні однієї або декількох мас стане

$$p'_1 < p'_2 < \dots < p'_n.$$

Тоді згідно з теоремою буде

$$p'_1 \leq p_1, \quad p'_2 \leq p_2, \quad \dots, \quad p'_n \leq p_n.$$

5.2.2. Збільшення будь-якої з жорсткостей системи збільшує або хоча б залишає незмінними її власні частоти.

Нехай у системі з власними частотами (5.5) збільшили одну або декілька жорсткостей і спектр системи став

$$p'_1 < p'_2 < \dots < p'_n.$$

Тоді згідно з теоремою матиме місце

$$p'_1 \geq p_1, \quad p'_2 \geq p_2, \quad \dots, \quad p'_n \geq p_n.$$

5.3. Парціальні частоти

Розглянемо консервативну систему з двома степенями вільності, описувану системою рівнянь в прямій формі:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + r_{11} x_1 + r_{12} x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + r_{21} x_1 + r_{22} x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Частотне рівняння цієї системи (4.6) зводять до вигляду

$$m_1 m_2 p^4 - (r_{22} m_1 + r_{11} m_2) p^2 + r_{11} r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Нехай власні частоти, що є коренями останнього бікватратного рівняння, будуть p_1, p_2 .

Введемо поняття парціальних частот:

$$p_I = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \text{ – парціальна власна частота першої підсистеми,}$$

яку отримуємо, якщо закріпити другу координату ($x_2 \equiv 0$);

$$p_{II} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \text{ – парціальна власна частота другої підсистеми,}$$

яку отримуємо, якщо закріпити першу координату ($x_1 \equiv 0$).

Нехай далі $p_1 < p_2$.

Можна довести, що при будь-яких поєднаннях мають місце такі співвідношення:

$$p_1 \leq p_I; p_{II}; \quad p_2 \geq p_I; p_{II}. \quad (5.6)$$

Тобто будь-яка з парціальних частот знаходиться між першою і другою власними частотами початкової системи.

Розглянемо приклад: система двох брусів, з'єднаних між собою пружинами так, як це показано на рис. 5.1.

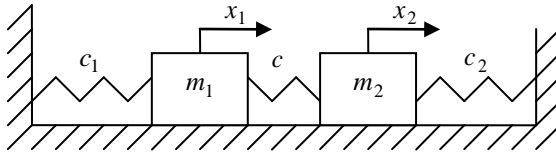


Рисунок 5.1

Рівняння вільних коливань цих брусів (якщо не враховувати сил тертя) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c)x_1 - cx_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c + c_2)x_2 - cx_1 &= 0. \end{aligned}$$

Частотне рівняння системи зводять до вигляду

$$m_1 m_2 p^4 - (m_1(c_2 + c) + m_2(c_1 + c))p^2 + c_1 c_2 + c(c_1 + c_2) = 0.$$

Нехай корені цього рівняння будуть $p_1, p_2, p_1 < p_2$.

Корені парціальних систем тут

$$p_I = \sqrt{\frac{m_1}{c + c_1}}, \quad p_{II} = \sqrt{\frac{m_2}{c + c_2}}.$$

Через співвідношення (5.6) при будь-яких m_1, m_2, c_1, c_2 матимуть місце такі співвідношення:

$$p_I < \sqrt{\frac{m_1}{c + c_1}}, \quad \sqrt{\frac{m_2}{c + c_2}} < p_2.$$

ЛЕКЦІЯ 6. Лінійні системи з в'язким тертям

6.1. Рівняння лінійних систем із в'язким тертям.

6.2. Вимушені гармонійні коливання. Метод комплексних амплітуд.

6.3. Динамічний гаситель коливань.

6.1. Рівняння лінійних систем із в'язким тертям

Розглянемо рівняння руху системи із n степенями вільності в прямій формі:

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} \dot{x}_j = Q_i - R_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.1)$$

де R_i – сили в'язкого тертя.

У випадку зовнішнього в'язкого (лінійного) тертя

$$R_i = -\beta_i \dot{x}_i,$$

де β_i – коефіцієнт опору зовнішнього середовища для i -ї маси. При внутрішньому терті сили взаємодії між i -ю і j -ю масами залежать від їх відносної швидкості (рис. 6.1):

$$R_i = -\sum_{j=1}^n \beta_i (\dot{x}_i - \dot{x}_j).$$

У загальному випадку (за наявності як зовнішнього, так і внутрішнього в'язкого тертя) узагальнену силу в'язкого тертя R_i , що діє на i -ту узагальнену масу, завжди можна подати у вигляді

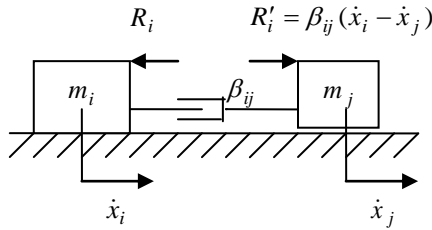


Рисунок 6.1

$$R_i = -\sum_{j=1}^n R_{ij} \dot{x}_j \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6.2)$$

Тоді рівняння (6.1), враховуючи (6.2), можуть бути записані у вигляді

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j = Q_i \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6.3)$$

У матричній формі ці рівняння записуються так:

$$\overline{m} \ddot{\overline{x}} + \overline{\alpha} \overline{x} + \overline{r} \overline{x} = \overline{Q}, \quad (6.4)$$

де

$$\overline{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nm} \end{bmatrix} \text{ – матриця коефіцієнтів опору.}$$

6.2. Вимушені гармонійні коливання. Метод комплексних амплітуд

Нехай

$$Q_i = Q_{mi} \sin(\omega t + \psi_i) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.5)$$

де Q_i – амплітуда i -ї гармонійної змущуючої сили;

ω – частота;

ψ_i – початкова фаза.

Розв'язок для вимушених складових коливань, як відомо, також матимуть гармонійний характер тієї самої частоти:

$$x_i = X_{mi} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.6)$$

де X_{mi} , φ_i ($i = \overline{1, n}$) – шукані амплітуди і фази вимушених коливань.

Найзручнішим та універсальним способом знаходження амплітуд і фаз вимушених коливань є метод комплексних амплітуд, який полягає у такому.

Дійсній змущуючій силі $Q_i(t)$ (6.5) можна поставити у відповідність комплексну:

$$Q_i(t) = Q_{mi} \exp(i(\omega t + \psi)) = \overline{Q}_{mi} \exp(i\omega t), \quad (6.7)$$

де $\overline{Q}_{mi} = Q_{mi} \exp(i\psi)$ – комплексна амплітуда.

Очевидно, що дійсна функція $Q_i(t)$ (6.5), по суті, є уявною частиною $\bar{Q}_{mi}(t)$ (6.7). При підстановці в (6.3) замість $Q_i(t)$ відповідно комплексних $\bar{Q}_i(t)$ розв'язок шукатимемо також у вигляді комплексних виразів:

$$\bar{x}_{ei}(t) = \bar{X}_{mi} e^{i\omega t}, \quad (6.8)$$

де $\bar{X}_{mi} = X_{mi} e^{i\varphi_i}$ – комплексна амплітуда,

X_{mi} , φ_i – шукані дійсна амплітуда і фаза вимушених коливань i -ї маси.

Очевидно, що шуканий закон вимушених коливань $x_i(t) = \text{Im } \bar{x}_{ei}(t)$ матиме вигляд (6.6).

Таким чином, якщо ми знайдемо комплексні числа (амплітуди) \bar{X}_{mi} ($i = \overline{1, n}$), то модулі цих чисел будуть дорівнювати амплітудам вимушених коливань i -х мас X_{mi} , а аргументи – фазам φ_i .

Після підстановки в (6.3) правих частин (6.7) і розв'язків (6.8) і скорочення на $\exp(i\omega t)$ одержимо систему комплексних рівнянь у вигляді

$$-m_i \omega^2 \bar{X}_{mi} + i\omega \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{X}_{mj} + \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{X}_{mj} = \bar{Q}_{mi} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6.9)$$

Розв'язання цієї системи (наприклад, за допомогою програмного комплексу MathCAD) дасть набір шуканих комплексних амплітуд \bar{X}_{mi} ($i = \overline{1, n}$), за якими потім

обчислюються амплітуди X_{mi} і фази φ_i вимушених коливань.

У матричній формі рівняння (6.9) набирають вигляду:

$$(-\omega^2 \bar{m} + i\omega \bar{a} + \bar{r}) \bar{X}_m = \bar{Q}, \quad (6.10)$$

де $\bar{Q} = (\bar{Q}_{m1}, \dots, \bar{Q}_{mn})^T$ – вектор-стовпець заданих комплексних амплітуд змушуючих сил;

$\bar{X}_m = (\bar{X}_{m1}, \dots, \bar{X}_{mn})^T$ – вектор-стовпець шуканих комплексних амплітуд вимушених коливань.

6.3. Динамічний гаситель коливань

Як приклад дослідження вимушених коливань розглянемо динамічний гаситель коливань, принципова схема якого подана на рис. 6.2.

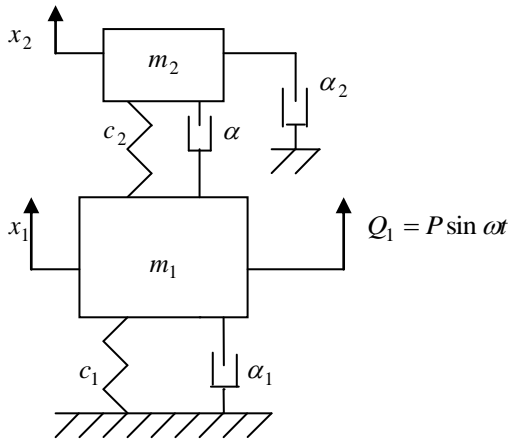


Рисунок 6.2

На основну масу m_1 діє гармонійна сила $P \sin \omega t$. До основної маси за допомогою пружини жорсткістю c_2 прикріплена додаткова маса m_2 . Як буде показано нижче, підбором величин m_2 , c_2 можна істотно зменшити амплітуду коливань маси m_1 . Будемо враховувати як зовнішнє тертя мас m_1 , m_2 (коефіцієнти опору відповідно α_1 , α_2), так і внутрішнє з коефіцієнтом α , обумовлене спеціальним демпфірувальним пристроєм.

Рівняння коливань у прямій формі тут мають вигляд

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (\alpha_1 + \alpha) \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - \alpha \dot{x}_2 - c_2 x_2 &= P_0 \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 + (\alpha + \alpha_2) \dot{x}_2 + c_2 x_2 - \alpha \dot{x}_1 - c_2 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

У матричній формі (6.10) матриці і стовпці будуть такими:

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, & \bar{\alpha} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha_2 + \alpha \end{bmatrix}, \\ \bar{c} &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, & \bar{X} &= (\bar{X}_{m1}, \bar{X}_{m2})^T, & \bar{Q} &= (P_0, 0)^T. \end{aligned}$$

У скалярно-комплексній формі рівняння (6.9) в даному випадку наберуть вигляду (нехтуватимемо зовнішнім опором, припустивши, що $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$):

$$\begin{aligned} (-\omega^2 m_1 + i\omega\alpha + (c_1 + c_2))\bar{X}_{m_1} - (i\omega\alpha + c_2)\bar{X}_{m_2} &= P_0, \\ -(i\omega\alpha + c_2)\bar{X}_{m_1} + (-\omega^2 m_2 + i\omega\alpha + c_2)\bar{X}_{m_2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Далі нас цікавитиме амплітуда \bar{X}_{m_1} основної маси. З (6.12) одержимо:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{m_1} &= P_0 W(i\omega) = \\ &= P_0 \frac{-\omega^2 m_1 + c_2 + i\omega\alpha}{(-\omega^2 m_1 + c_1 + c_2 + i\omega\alpha)(-\omega^2 m_1 + c_2 + i\omega\alpha) - (c_2 + i\omega\alpha)^2}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

де $W(i\omega)$ називають динамічним комплексним коефіцієнтом впливу, що є відношенням комплексної амплітуди коливань до амплітуди змушуючої сили. Зліва і справа в (6.13) комплексні величини, в яких повинні бути рівними модулі і фази. Тому шукані амплітуда і фаза коливань основної маси будуть рівними:

$$\begin{aligned} X_{mi} &= P_0 |W(i\omega)| = P_0 A(\omega), \\ \varphi_1 &= \arg W(i\omega) = \varphi_1(\omega). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Залежність $A(\omega)$ називається **амплітудною частотною характеристикою**, $\varphi_1(\omega)$ – **фазовою частотною характеристикою**. Значення $A(\omega)$ дорівнює відношенню амплітуди переміщення до амплітуди змушуючої сили при даній частоті ω . Величина $\varphi_1(\omega)$ є фазою коливань (у даному випадку маси m_1) відносно гармонійної змушуючої сили.

Для спрощення аналізу розглянемо спочатку амплітудну частотну характеристику для основної маси, нехтуючи демпфіруванням ($\alpha = 0$). Тоді можемо записати

$$A(\omega) = \frac{|c_2 - \omega^2 m_2|}{|(c_1 + c_2 - \omega^2 m_1)(c_2 - \omega^2 m_1) - c_2^2|}. \quad (6.15)$$

Значимо, що $A(\omega) = 0$ при частоті обертання $\omega = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$, яка дорівнює парціальній власній частоті ω_{2II} гасника. Величина $A(\omega) \rightarrow \infty$ при $\omega = \omega_1$ або $\omega = \omega_2$, де ω_1, ω_2 – власні частоти даної двомасової системи, які визначаються з частотного рівняння

$$(c_1 + c_2 - \omega^2 m_1)(c_2 - \omega^2 m_1) - c_2^2 = 0.$$

Як відомо, $\omega_1 < \omega_{2II} < \omega_2$. Амплітудна частотна характеристика консервативної моделі даної системи (при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 0$) наведена на рис. 6.3 (крива 1). При $\omega = \omega_{2II}$ амплітуда маси m_2 дорівнює нулю. У цьому і полягає ефект віброгасіння: при настройці параметрів віброгасника так, щоб його парціальна власна частота дорівнювала частоті змушуючої сили, амплітуда основної маси стає мінімальною.

Істотним недоліком такого віброгасіння є та обставина, що при $m_2 \ll m_1$ (це повинно бути для практичної доцільності) гілки кривої 1 в області ω_{2II} дуже тісно

примикають до вертикалі, і щонайменше відхилення частоти змушуючої сили від парціальної $\omega_{2П}$ зводить нанівець ефект віброізоляції. З урахуванням демпфірування крива амплітудної характеристики згладжується (крива 2 на рис. 6.3), проте навіть при частоті настройки амплітуда коливань основної маси m_1 не дорівнює нулю.

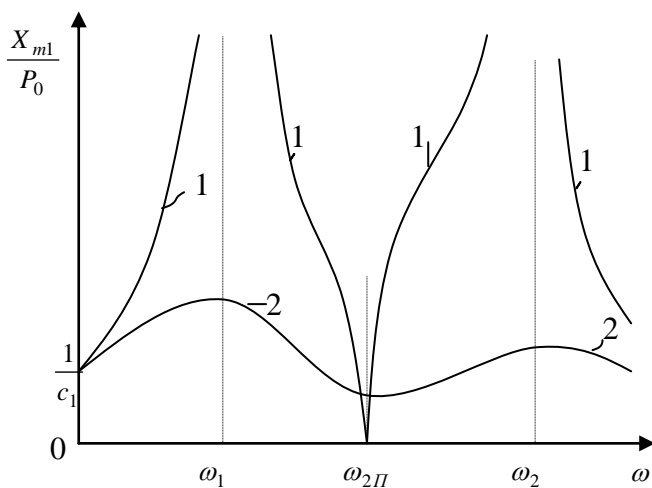


Рисунок 6.3

ЛЕКЦІЯ 7. Поперечні коливання стрижнів із розподіленою масою

7.1. Рівняння вільних поперечних коливань стрижня.

7.2. Вільні коливання стрижня сталого перерізу.

7.1. Рівняння вільних поперечних коливань стрижня

Розглянемо стрижень, на який діє довільне розподілене навантаження $q(z)$ (рис. 7.1).

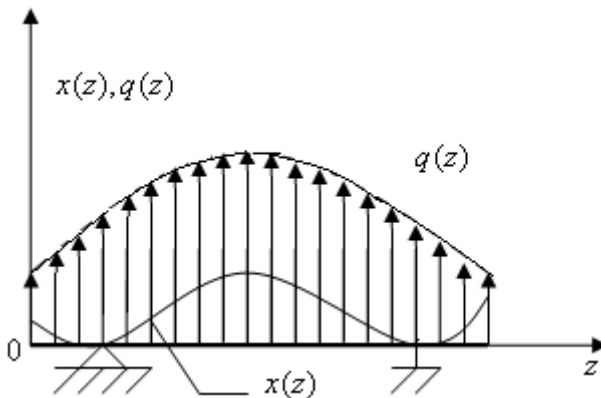


Рисунок 7.1

Як відомо з курсу опору матеріалів, диференціальна залежність між внутрішнім згинальним моментом $M(z)$ і розподіленим навантаженням $q(z)$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 M(z)}{\partial z^2} = q(z), \quad (7.1)$$

причому

$$M(z) = EI(z) \frac{\partial^2 x(z)}{\partial z^2}, \quad (7.2)$$

де $EI(z)$ – згинальна жорсткість;

$x(z)$ – закон зміни прогину стрижня уздовж його осі Oz .

При вільних коливаннях як навантаження відповідно до принципу Д’Аламбера варто прийняти сили інерції елементарних мас стрижня

$$\Delta F_{ин} = -\mu(z) \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2},$$

де $\mu(z)$ – погонна щільність стрижня;

$\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}$ – прискорення елементарної маси в точці

стрижня з координатою z .

Розглянуте навантаження від сил інерції буде $q(z) = \frac{\Delta F_{ин}}{\Delta z} = -\mu(z) \cdot \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}$. Підставляючи цей вираз та формулу для моменту (7.2) у рівняння (7.1), одержимо рівняння вільних коливань стрижня у вигляді такого рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (7.3)$$

7.2. Вільні коливання стрижня сталого перерізу

У цьому випадку $EI = const$ та рівняння (7.3) набирає вигляду

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (7.4)$$

Розв'язок (7.4) шукають у вигляді

$$x(z, t) = u(z) \sin pt, \quad (7.5)$$

де $u(z)$ називають формою вільних коливань. Після підстановки (7.5) в (7.4) і скорочення на $\sin pt$ одержимо диференціальне рівняння для форм вільних коливань:

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} - p^2 \mu \cdot u = 0. \quad (7.6)$$

Якщо позначити

$$\alpha^4 = \frac{p^2 \mu}{EI}, \quad (7.7)$$

то рівняння (7.6) набере вигляду:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \alpha^4 u = 0. \quad (7.8)$$

Для лінійного диференціального рівняння четвертого порядку (7.8) характеристичне рівняння

$$r^4 - \alpha^4 = 0$$

має чотири корені:

$$r_{1,2} = \pm i\alpha, \quad r_{3,4} = \pm \alpha.$$

Як відомо, розв'язок у загальному вигляді (з точністю до довільних постійних) у цьому випадку можна записати так:

$$u(z) = A_1 \cos(\alpha z) + A_2 \sin(\alpha z) + A_3 \exp(\alpha z) + A_4 \exp(-\alpha z).$$

Однак, як ми побачимо з подальшого, зручно цей розв'язок подати у вигляді комбінації так званих функцій Крилова:

$$u(z) = c_1 K_1(\alpha z) + c_2 K_2(\alpha z) + c_3 K_3(\alpha z) + c_4 K_4(\alpha z). \quad (7.9)$$

Функції Крилова визначаються такими формулами:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha z) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha z) + \cos(\alpha z)), \\ K_2(\alpha z) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha z) + \sin(\alpha z)), \\ K_3(\alpha z) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha z) - \cos(\alpha z)), \\ K_4(\alpha z) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha z) - \sin(\alpha z)). \end{aligned} \quad (7.10)$$

З огляду на те, що (схема рис. 7.2)

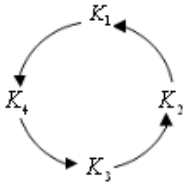


Рисунок 7.2

$$\frac{dK_1}{dz} = \alpha K_4, \quad \frac{dK_2}{dz} = \alpha K_1,$$

$$\frac{dK_3}{dz} = \alpha K_2, \quad \frac{dK_4}{dz} = \alpha K_3$$

і $K_1(0) = 1$, $K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0$, неважко переконатися, що

$$c_1 = u(0), \quad c_2 = \theta(0)/\alpha, \quad c_3 = \frac{M(0)}{\alpha^2 EI}, \quad c_4 = \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI},$$

де $u(0)$; $\theta(0) = \frac{du}{dz}(0)$; $M(0) = EI \frac{d^2 u}{dz^2}(0)$;

$Q(0) = \frac{dM}{dz} = EI \frac{d^3 u}{dz^3}(0)$ – відповідно прогин, кут повороту, момент і поперечна сила на лівому кінці стрижня.

Таким чином, рівняння форми стрижня сталого перерізу можна подати у вигляді:

$$u(z) = u(0)K_1(\alpha z) + \frac{1}{\alpha} \theta(0)K_2(\alpha z) + \frac{M(0)}{\alpha^2 EI} K_3(\alpha z) + \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI} K_4(\alpha z). \quad (7.11)$$

Помітимо, що це розв'язання лежить в основі методу початкових параметрів (МПП), за допомогою якого розроблені сучасні програми розрахунку на ПК вільних і вимушених коливань балок та роторів довільної конструкції.

ЛЕКЦІЯ 8. Поперечні коливання стрижнів із розподіленою масою (продовження)

8.1. Вільні коливання стрижня на двох шарнірних опорах.

8.2. Випадок жорсткого закладення.

8.3. Вимушені коливання однорідного стрижня із зосередженою гармонійною змушуючою силою.

8.1. Вільні коливання однорідного стрижня на двох шарнірних опорах на краях (рис. 8.1).

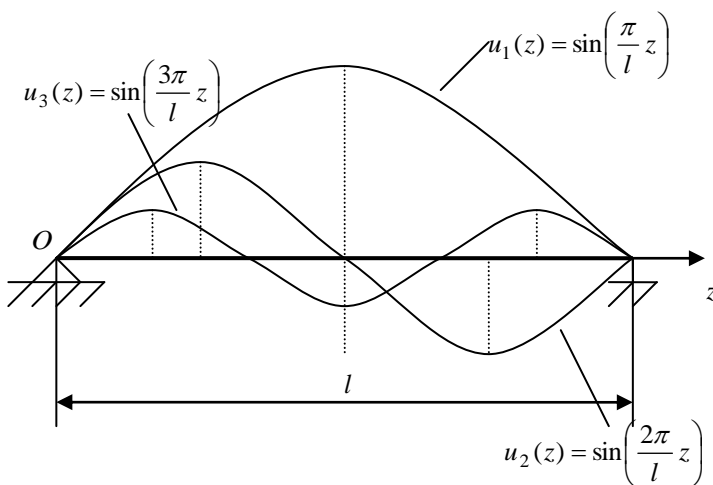


Рисунок 8.1

З граничних умов на лівому та правому кінцях можемо записати:

$$u(0) = 0, M(0) = 0; \quad (8.1)$$

$$u(l) = 0, \quad M(l) = 0. \quad (8.2)$$

Враховуючи умови на лівому кінці (8.1), розв'язок (7.11) матиме вигляд

$$u(z) = c_2 K_2(\alpha z) + c_4 K_4(\alpha z). \quad (8.3)$$

З умов на правому кінці (8.2) можемо написати співвідношення для знаходження сталих c_2 та c_3 :

$$\begin{aligned} u(l) &= c_2 K_2(\alpha \cdot l) + c_4 K_4(\alpha \cdot l) = 0, \\ M(l) &= c_2 K_4(\alpha \cdot l) + c_4 K_2(\alpha \cdot l) = 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Умова нетривіальності розв'язку ($c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$) приводить до частотного рівняння:

$$K_2^2(\alpha \cdot l) + K_4^2(\alpha \cdot l) = 0.$$

Неважко показати, враховуючи вираз для функцій Крилова (7.10), що останнє рівняння зводять до вигляду

$$\sin(\alpha \cdot l) = 0,$$

або

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Звідки, враховуючи позначення для α^4 (7.7), одержимо формулу для знаходження власних частот:

$$P_K = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \quad (8.5)$$

Для стрижня круглого перерізу $\mu = \frac{\pi d^2}{4} \rho$, $I = \frac{\pi d^4}{64}$ і

$$P_K = \frac{k^2 \pi^2 d}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Остання формула становить інтерес для оцінки власних частот валів, що обертаються. Як випливає з цієї формули, власні частоти однорідного вала співвідносяться як квадрат цілих чисел натурального ряду:

$$p_1 : p_2 : p_3 \dots = 1 : 4 : 9 \dots$$

При цьому кожна власна частота пропорційна діаметру вала й обернено пропорційна квадрату його довжини.

З першої умови (8.4) випливає, що

$$c_4 = -c_2 \frac{K_2(\alpha l)}{K_4(\alpha l)}.$$

При цьому розв'язок (8.3) можна подати у вигляді

$$u(z) = \frac{c_2}{2} \left(K_2(\alpha z) - \frac{K_2(\alpha l)}{K_4(\alpha l)} K_4(\alpha z) \right).$$

Враховуючи вираз для функції Кривола (7.10), останній вираз можна звести до вигляду

$$u(z) = \frac{c_2}{2} \left(1 + \frac{K_2(\alpha l)}{K_4(\alpha l)} \right) \sin(\alpha z) = D \sin(\alpha z),$$

де D – деяка довільна стала. Очевидно, що будь-який доданок вигляду

$$x_k(z, t) = D_k \sin(\alpha_k z) \sin(p_k t + \varphi_k)$$

задовольняє рівняння (7.4), (7.6) з граничними умовами (8.1), (8.2).

Враховуючи те, що

$$D_k \sin(p_k t + \varphi_k) = A_k \cos p_k t + B_k \sin p_k t,$$

повний розв'язок для вільних коливань можна подати у вигляді суми нескінченного ряду:

$$x_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\alpha_k z) (A_k \cos p_k t + B_k \sin p_k t), \quad (8.6)$$

де $\sin(\alpha_k z) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right) = u_k(z)$ – так звана нормована

власна форма для випадку вільних коливань шарнірного обпертого однорідного стрижня. Графіки перших трьох цих форм показані на рис. 8.1.

Сталі A_k , B_k знаходяться з початкових умов

$$\begin{aligned}
 x(z,0) = f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(z), \\
 \dot{x}(z,0) = \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k p_k u_k(z).
 \end{aligned}
 \tag{8.7}$$

Для визначення A_k , B_k використається умова ортогональності власних форм, яка для системи з розподіленими параметрами записується у вигляді

$$\int_0^l \mu(z) \cdot u_i(z) \cdot u_k(z) dz = 0$$

при будь-яких $i \neq k$.

Для однорідного стрижня ($\mu(z) = const$) ця умова набере вигляду:

$$\int_0^l u_i(z) \cdot u_k(z) dz = 0 \quad (i \neq k).
 \tag{8.8}$$

Помножимо ліву й праву частини (8.7) на $u_k(z)$ та проінтегруємо за довжиною стрижня. Враховуючи (8.8), будемо мати:

$$A_k = \int_0^l f(z) u_k(z) dz \Big/ \int_0^l u_k^2(z) dz.
 \tag{8.9}$$

Аналогічно одержимо:

$$B_k = \int_0^l \varphi(z) u_k(z) dz \Big/ \left(p_k \int_0^l u_k^2(z) dz \right). \quad (8.10)$$

Враховуючи те, що для однорідного шарнірно обертого стрижня $u_k(z) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right)$ та

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{k\pi}{l} z\right) dz = \frac{l}{2}, \text{ можемо записати:}$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right) dz, \quad B_k = \frac{2}{lp_k} \int_0^l \varphi(z) \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right) dz.$$

Якщо, наприклад, $f(z,0) = H \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right)$, $\varphi(z,0) = 0$, то $B_k = 0$ ($k=1,2, \dots$), $A_k = 0$ ($k=2,3, \dots$), $A_1 = H$ і $x(z,t) = H \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) \cdot \sin(p_1 t)$.

Таким чином, якщо в початковий момент стрижень вигнути за першою власною формою й відпустити без поштовху, то вільні коливання будуть мати моногармонійний характер з першою власною частотою. Можна показати, що початковий прогин за k -ю власною формою призведе до вільних коливань з k -ю власною частотою.

8.2. Випадок жорсткого закладення (рис. 8.2)

З граничних умов

$$u(0) = \theta(0) = 0.$$

Розв'язок для форми $u(z)$ (7.10) запишемо у вигляді

$$u(z) = c_3 K_3(\alpha z) + c_4 K_4(\alpha z). \quad (8.11)$$

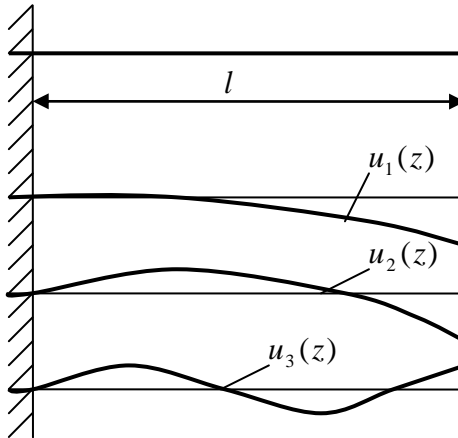


Рисунок 8.2

Умови на правому кінці

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2}(kl) = \frac{d^3 u(z)}{dz^3}(\alpha l) = 0$$

дають систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_3 K_1(\alpha z) + c_4 K_2(\alpha z) = 0, \\ c_3 K_4(\alpha z) + c_4 K_1(\alpha z) = 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Звідки одержуємо частотне рівняння у вигляді

$$K_1^2(\alpha z) - K_2(\alpha z) \cdot K_4(\alpha z) = 0.$$

Це рівняння з урахуванням виразів для функцій Крилова (7.10) зводиться до трансцендентного рівняння:

$$1 + ch(\alpha l) \cos(\alpha l) = 0.$$

Перші три корені цього рівняння будуть дорівнювати:

$$\lambda_1 = \alpha_1 l = 1,875, \quad \lambda_2 = \alpha_2 l = 4,694, \quad \lambda_3 = \alpha_3 l = 7,855.$$

Враховуючи позначення (7.7), можемо записати формулу для i -ї власної частоти:

$$p_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$

Рівняння для i -ї форми одержимо, виразивши з (8.12):

$$c_4 = -c_3 \frac{K_1(\alpha l)}{K_2(\alpha l)}.$$

Підставляючи останній вираз у розв'язок (8.11), можемо записати:

$$u_k(z) = c_3 \cdot \left(K_3(\alpha_k z) - \frac{K_1(\alpha_k l)}{K_2(\alpha_k l)} K_4(\alpha_k z) \right).$$

На рис. 8.2 показані перші три власні форми коливань стрижня із жорстким закладенням.

8.3. Вимушені коливання однорідного стрижня із зосередженою гармонійною змушуючою силою (рис. 8.3)

Рівняння вимушених коливань у цьому випадку буде мати вигляд

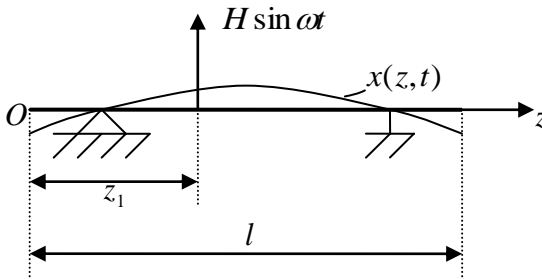


Рисунок 8.3

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = H \sigma_1(z - z_1) \sin \omega t, \quad (8.13)$$

де $\sigma_1(z - z_1)$ – так звана імпульсивна функція першого роду, що визначається так: $\sigma_1(z - z_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_1^*(z - z_1)$.

Функція $\sigma_1^*(z - z_1)$ задається умовою (рис. 8.4):

$$\sigma_1^*(z - z_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < z_1, \\ \frac{1}{h} & \text{при } z_1 \leq z \leq z_1 + h, \\ 0 & \text{при } z > z_1 + h. \end{cases}$$

Очевидно, що $\int_0^{\infty} \sigma_1^*(z - z_1) dz = 1$. Зазначимо, що розмірність $[\sigma_1] = \frac{1}{m}$.

Вимушену складову розв'язку (8.13) шукаємо в розкладанні за власними формами:

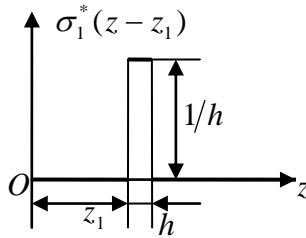


Рисунок 8.4

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(z) \sin \omega t. \quad (8.14)$$

Нагадаємо, що кожна власна форма задовольняє рівняння

$$EI \frac{d^4 u_k(z)}{dz^4} - \mu \cdot p_k^2 u_k(z) = 0. \quad (8.15)$$

Якщо підставити розв'язок (8.14) у рівняння (8.13), то, враховуючи (8.15), можемо записати після скорочення на $\sin \omega t$:

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} (p_k^2 - \omega^2) c_k u_k(z) = H \sigma_1(z - z_1). \quad (8.16)$$

Помножимо ліву й праву частини (8.16) на $u_k(z)$ та проінтегруємо по довжині стрижня. З огляду на властивість ортогональності (8.8) одержимо розрахункові формули для коефіцієнтів c_k :

$$c_k = H u_k(z_1) / \left((p_k^2 - \omega^2) \mu \int_0^l u_k^2(z) dz \right).$$

Помітимо, що при частоті змушуючої сили, близькій до k -ї власної частоти ($\omega \approx p_k$), у розкладанні (8.14) превалює k -та складова. Це означає, що форма вимушених коливань при частоті ω , близькій до резонансу на k -й власній частоті, практично збігається з k -ю власною формою незалежно від точки прикладання змушуючої сили.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1965. – 559 с.
2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Изд-во «Высшая школа», 1980. – 408 с.
3. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания / Дж. П. Ден-Гартог. – М. : Физматиз, 1960. – 580 с.
4. Симоновський В. І. Коливання нелінійних систем / В. І. Симоновський. – Суми : Вид-во СумДУ, 1999. – 131 с.

Навчальне видання

Симоновський Віталій Іович

ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки

Редактор Т.Г. Чернишова

Комп'ютерне верстання Л.Ю. Равлюк

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 6,74. Обл.-вид. арк. 4,91. Тираж 40 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач

Сумський державний університет

вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007