

UNIVERZA V MARIBORU  
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO,  
RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

NIKOLA GUID

RAČUNALNIŠKA  
GRAFIKA

MARIBOR, 2009

# Kazalo

<b>1</b>	<b>GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE</b>	<b>1</b>
1.1	2D geometrijske transformacije . . . . .	2
1.1.1	2D premestitev . . . . .	2
1.1.2	2D skaliranje . . . . .	3
1.1.3	2D zasuk . . . . .	4
1.1.4	2D zrcaljenje . . . . .	6
1.1.5	2D strig . . . . .	9
1.2	Homogene koordinate in matrična predstavitev . . . . .	11
1.2.1	2D premestitev s homogenimi koordinatami . . . . .	12
1.2.2	2D skaliranje s homogenimi koordinatami . . . . .	12
1.2.3	2D zasuk s homogenimi koordinatami . . . . .	12
1.2.4	2D zrcaljenje s homogenimi koordinatami . . . . .	12
1.2.5	2D strig s homogenimi koordinatami . . . . .	13
1.3	Kompozicija 2D geometrijskih transformacij . . . . .	14
1.3.1	Premestitve . . . . .	14
1.3.2	Skaliranja . . . . .	14
1.3.3	Zasuki . . . . .	15
1.3.4	Zasuk okoli poljubne točke . . . . .	16
1.3.5	Skaliranje glede na poljubno točko . . . . .	17
1.3.6	Skaliranje in zasuk okrog poljubne točke ter premestitev v drugo poljubno točko . . . . .	18
1.3.7	Komutativnost geometrijskih transformacij . . . . .	19
1.3.8	Analiza učinkovitosti računanja . . . . .	19
1.4	3D geometrijske transformacije . . . . .	20
1.4.1	3D premestitev s homogenimi koordinatami . . . . .	21
1.4.2	3D skaliranje s homogenimi koordinatami . . . . .	21
1.4.3	3D zasuk s homogenimi koordinatami . . . . .	22
1.4.4	3D zrcaljenje s homogenimi koordinatami . . . . .	24
1.4.5	3D strig s homogenimi koordinatami . . . . .	24

---

1.5	Inverzne 3D geometrijske transformacije . . . . .	25
1.6	Kompozicija 3D geometrijskih transformacij . . . . .	26
1.7	Transformacije med koordinatnimi sistemi . . . . .	30

## Poglavje 1

# GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

V mnogih aplikacijah čutimo potrebo po manipulaciji že obstoječih prikazanih objektov. Spreminjamo položaj, orientacijo in velikost objektov. Take spremembe izvršimo z **geometrijskimi transformacijami** (*geometric(al) transformations*), ki povzročijo nov koordinatni opis objektov.

Geometrijske transformacije so dejansko srce mnogih grafičnih aplikacij in zato jim posvetimo celo poglavje. Najprej obravnavamo 2D geometrijske transformacije in nato po uvedbi 3D realnega koordinatnega prostora še 3D geometrijske transformacije.

Pod imenom geometrijske transformacije razumemo v računalniški grafiki naslednje transformacije:

1. **premestitev** (*translation*),
2. **skaliranje** ali spremembo velikosti ali razteg oziroma krčenje (*scaling, zooming*),
3. **zasuk** ali vrtež ali rotacijo (*rotation*),
4. **zrcaljenje** (*reflection*) in
5. **strig** (*shear*).

Premestitev, skaliranje in zasuk so osnovne geometrijske transformacije, medtem ko sta zrcaljenje in strig posebni geometrijski transformaciji.

## 1.1 2D geometrijske transformacije

### 1.1.1 2D premestitev

Premestitev točk v ravnini  $xy$  izvedemo s prištevanjem **premesitvenih razdalj** (*translation distances*)  $t_x$  in  $t_y$  h koordinatam točke. Za točko  $P(x, y)$ , ki jo premaknemo v točko  $P'(x', y')$ , lahko zapišemo enačbi 1.1:

$$x' = x + t_x, \quad y' = y + t_y. \quad (1.1)$$

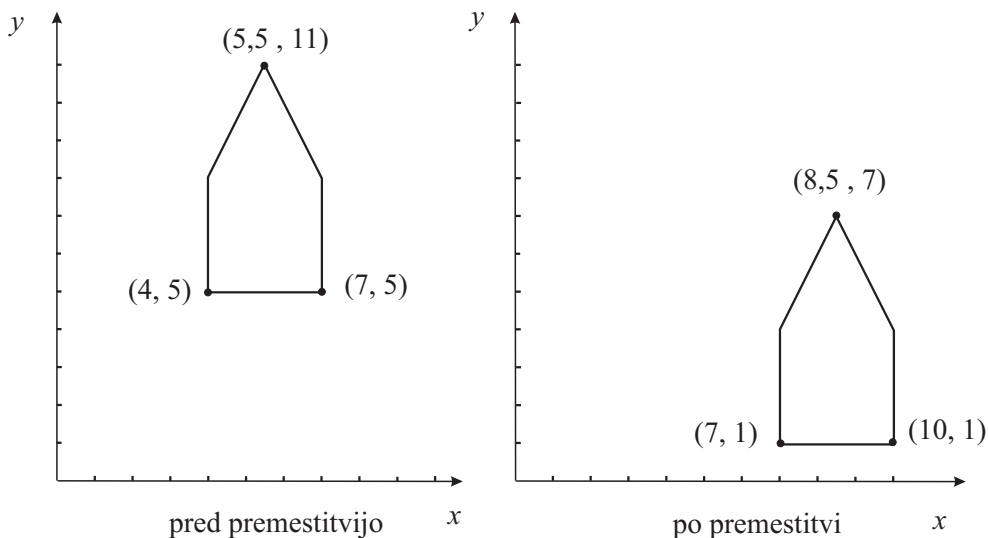
Premestitev, ki jo določata premesitveni razdalji, na primer,  $t_x = 6$  in  $t_y = 4$ , premesti točko  $P(3, -2)$  v točko  $P'(9, 2)$ . Enačbo 1.1 lahko zapišemo v vektorski obliki:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

ali krajše:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{t}, \quad (1.3)$$

pri čemer je  $\mathbf{t}$  **premesitveni vektor** (*translation vector*),  $\mathbf{p}$  vektor točke in  $\mathbf{p}'$  vektor premeščene točke. Primer premestitve objekta (hiše) s premesitvenim vektorjem  $\mathbf{t} = [3 \ -4]^T$  prikazuje slika 1.1.



Slika 1.1: Premestitev objekta

## 1.1.2 2D skaliranje

Točko skaliramo tako, da množimo njene koordinate s **skalirnim faktorjema** (*scaling factors*)  $s_x$  in  $s_y$ :

$$x' = s_x x, \quad y' = s_y y. \quad (1.4)$$

Enačbi 1.4 lahko zapišemo v matrični obliki:

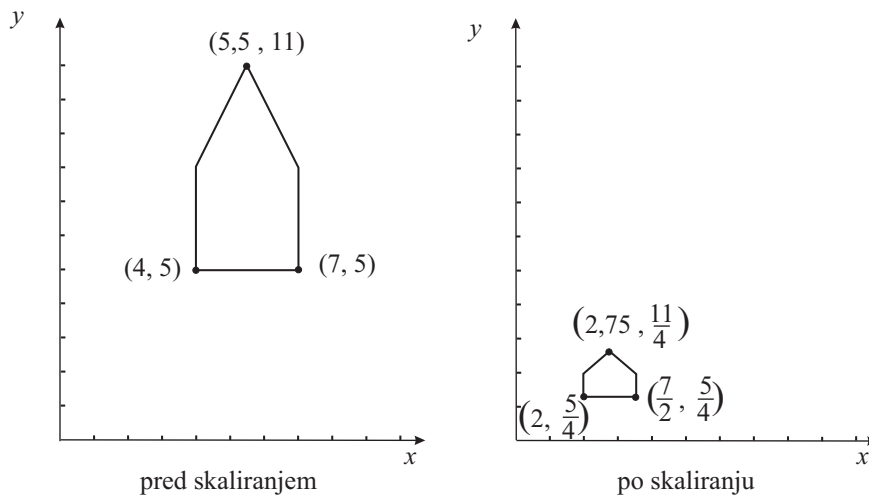
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

ali krajše:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S} \mathbf{p}, \quad (1.6)$$

pri čemer je  $\mathbf{S}$  skalirna matrika. Enačba 1.5 pomeni skaliranje glede na koordinatno izhodišče. Na splošno lahko skaliramo glede na poljubno točko v ravnini  $xy$  (o tem kasneje). Če je  $s_x = s_y$ , imamo opraviti z **enakomernim skaliranjem** (*uniform scaling*), drugače pa z **neenakomernim skaliranjem** (*differential scaling*).

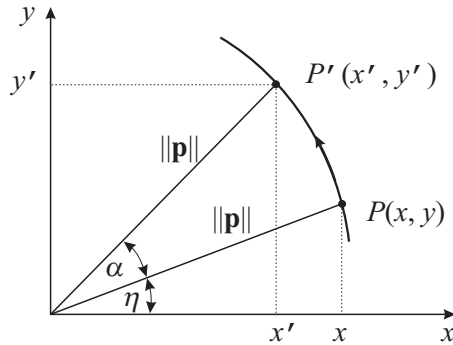
Primer neenakomernega skaliranja kakega objekta (npr. hiše) s skalirno matriko  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  prikazuje slika 1.2. Objekt je manjši in bližji koordinatnemu izhodišču.



Slika 1.2: Neenakomerno skaliranje

## 1.1.3 2D zasuk

Zasuk ali vrtež definiramo s **kotom zasuka**  $\alpha$  in s **središčem zasuka**. Ker se koordinati središča zasuka ne spremenita, tej točki pravimo tudi **mirujoča** (*fixed*) točka. Predpostavimo, da je mirujoča točka koordinatno izhodišče. Pozitivni kot zasuka  $\alpha$  pomeni zasuk v matematičnem pozitivnem smislu oziroma **nasproti gibanju urinega kazalca** (*counterclockwise*).

Slika 1.3: Zasuk točke  $P(x, y)$ 

S slike 1.3 razberemo:

$$x' = \|\mathbf{p}\| \cos(\alpha + \eta), \quad y' = \|\mathbf{p}\| \sin(\alpha + \eta) \quad (1.7)$$

in

$$x = \|\mathbf{p}\| \cos \eta, \quad y = \|\mathbf{p}\| \sin \eta. \quad (1.8)$$

Iz enačbe 1.7 in 1.8 dobimo:

$$\begin{aligned} x' &= \|\mathbf{p}\| \cos \alpha \cos \eta - \|\mathbf{p}\| \sin \alpha \sin \eta = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' &= \|\mathbf{p}\| \sin \alpha \cos \eta + \|\mathbf{p}\| \cos \alpha \sin \eta = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Enačbi 1.9 lahko zapišemo v matrični obliki:

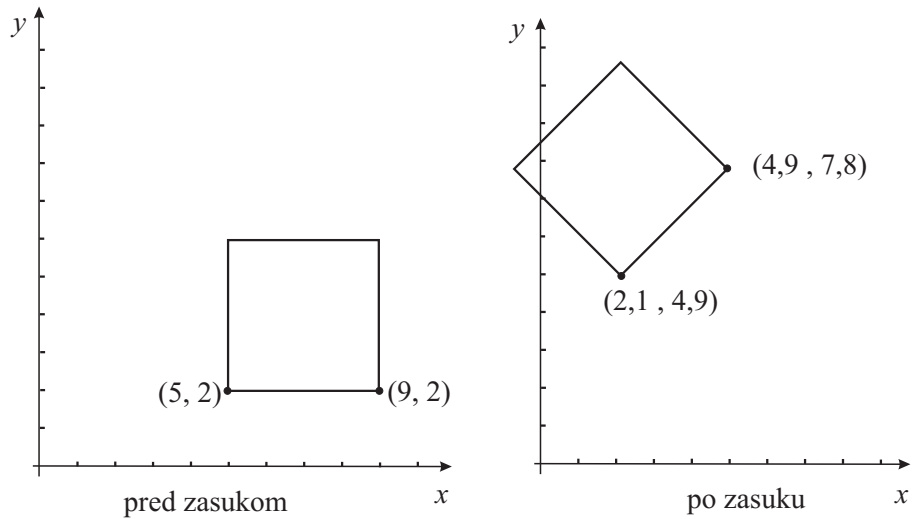
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

ali krajše:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}, \quad (1.11)$$

pri čemer je  $\mathbf{R}$  matrika zasuka.

Primer zasuka določenega objekta (npr. kvadrata) za kot zasuka  $\alpha = 45^\circ$  okrog koordinatnega izhodišča kaže slika 1.4.



Slika 1.4: Zasuk kvadrata

Če izvršimo skalarni zmnožek v matriki  $\mathbf{R}$  poljubne vrstice same s sabo, dobimo 1. Če pa izvedemo skalarni zmnožek poljubnih dveh različnih vrstic, dobimo 0. Isto velja za stolpce. Takim matrikam pravimo, da so **ortogonalne** (*orthogonal*).



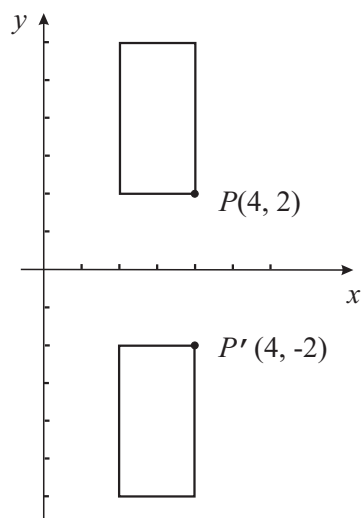
## 1.1.4 2D zrcaljenje

Če uporabimo negativne skalirne faktorje, dobimo zrcaljenje okrog fiksne točke v smeri skaliranja. Zrcaljenje objekta čez os  $x$  (slika 1.5) dosežemo s pomočjo matrike:

$$\mathbf{E}_{y=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Velja:

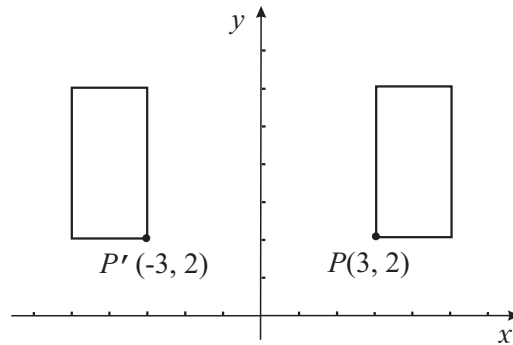
$$\mathbf{p}' = \mathbf{E}_{y=0}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$



Slika 1.5: Zrcaljenje objekta čez os  $x$

Zrcaljenje objekta čez os  $y$  (slika 1.6) izvedemo z matriko:

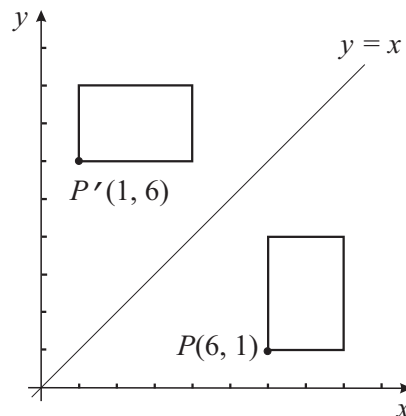
$$\mathbf{E}_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$



Slika 1.6: Zrcaljenje objekta čez os  $y$

Zrcaljenje objekta čez premico  $y = x$  (slika 1.7) določa matrika:

$$\mathbf{E}_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

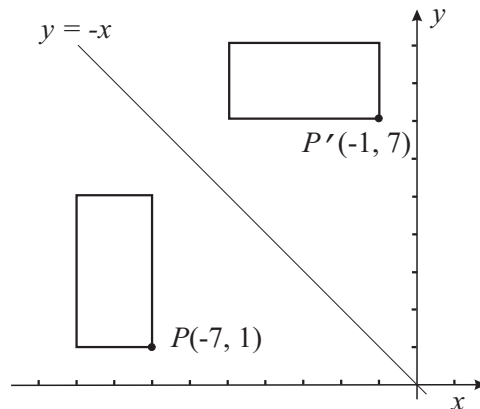


Slika 1.7: Zrcaljenje objekta čez premico  $y = x$

Isti rezultat dobimo, če najprej zasučemo objekt za  $45^\circ$  okoli koordinatnega izhodišča. S tem postavimo premico  $y = x$  na os  $y$ . Nato izvedemo zrcaljenje čez os  $y$  in na koncu še zasuk za  $-45^\circ$  okoli koordinatnega izhodišča.

Zrcaljenje objekta čez premico  $y = -x$  (slika 1.8) izvede matrika:

$$\mathbf{E}_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$



Slika 1.8: Zrcaljenje objekta čez premico  $y = -x$

Enako dobimo, če najprej zasučemo objekt za  $45^\circ$  okoli koordinatnega izhodišča. S tem premico  $y = -x$  postavimo na os  $x$ . Nato izvedemo zrcaljenje čez os  $x$  in na koncu še zasuk za  $-45^\circ$  okoli koordinatnega izhodišča.

Zrcaljenje objekta čez koordinatno izhodišče izvede matrika:

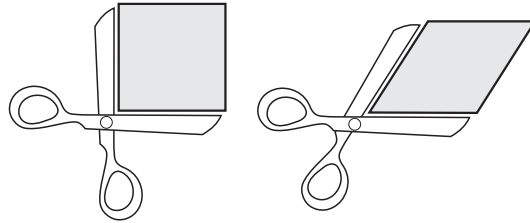
$$\mathbf{E}_{x=0,y=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Isti učinek dobimo, če zasučemo objekt za  $180^\circ$  okoli koordinatnega izhodišča.

Zrcaljenje okoli poljubne premice v ravnini  $xy$  izvedemo tako, da najprej premestimo sceno, tako da premica poteka skozi koordinatno izhodišče. Zatem izvršimo zasuk scene, tako da premica sovpada z eno od koordinatnih osi. Sledi zrcaljenje okoli te osi. Na koncu opravimo še inverzen zasuk in inverzno premestitev, tako da premica leži v prvotnem položaju.

## 1.1.5 2D strig

Strig je tudi afina transformacija (Foley et al., 1995; Angel, 1997). Ime so tej transformaciji očitno navdihnile škarje (slika 1.9) (Salomon, 1999).



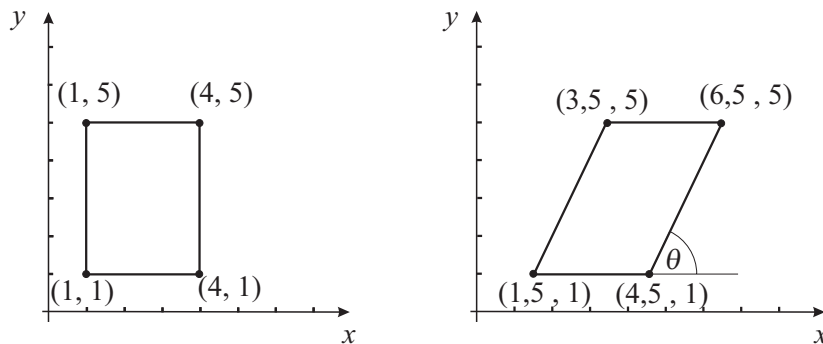
Slika 1.9: Škarje in strig

Poznamo dve vrsti 2D striga: **strig vzdolž osi  $x$**  (*shear along the  $x$  axis*) in **strig vzdolž osi  $y$**  (*shear along the  $y$  axis*). 2D strig vzdolž osi  $x$  definira naslednja matrika:

$$\mathbf{H}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \text{ctg } \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

kjer je  $\theta$  kot upogiba striga (glej sliko 1.10). Velja:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{H}_x \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & \text{ctg } \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \text{ctg } \theta \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Slika 1.10: Strig pravokotnika vzdolž osi  $x$ , ko je  $\text{ctg } \theta = 0,5$ 

Enačba 1.19 pove, da se pri strigu vzdolž osi  $x$  koordinata  $x$  poveča za člen  $y \text{ctg } \theta$ , medtem ko koordinata  $y$  ostane nespremenjena. Objekt se upogne na

dani kot  $\theta$  in pomakne v smeri  $x$  za  $y \operatorname{ctg} \theta$ , medtem ko višina objekta ostane nespremenjena. Vzporedne daljice so še naprej vzporedne. Tak strig lahko učinkovito uporabimo pri načrtovanju poševnih naborov znakov iz pokončnih (slika 1.11) (Farin, 1997).

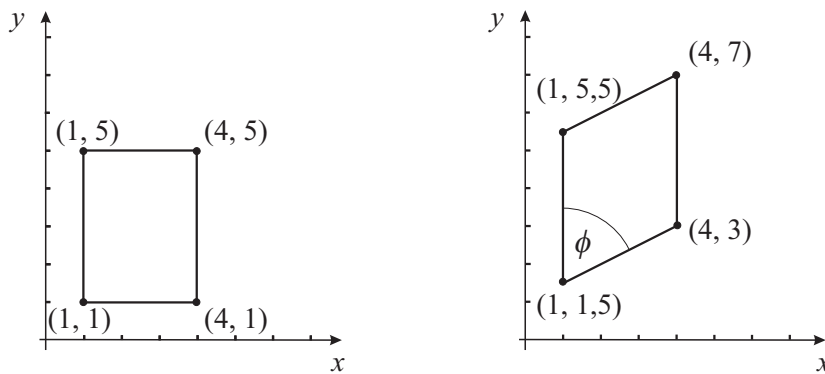


Slika 1.11: Uporaba striga pri načrtovanju poševne pisave

2D strig vzdolž osi  $y$  definira naslednja matrika:

$$\mathbf{H}_y(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{ctg} \phi & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

kjer je  $\phi$  kot upogiba striga. V tem primeru se koordinata  $y$  poveča za člen  $x \operatorname{ctg} \phi$ , medtem ko koordinata  $x$  ostane nespremenjena. Objekt se upogne na dani kot  $\phi$  in pomakne v smeri  $y$  za  $x \operatorname{ctg} \phi$ , širina objekta pa ostane nespremenjena. Tudi ta strig ne vpliva na vzporednost daljic. Učinek striga vzdolž osi  $y$  prikazuje slika 1.12.



Slika 1.12: Strig pravokotnika vzdolž osi  $y$ , ko je  $\operatorname{ctg} \phi = 0,5$

## 1.2 Homogene koordinate in matrična predstavitev 2D transformacij

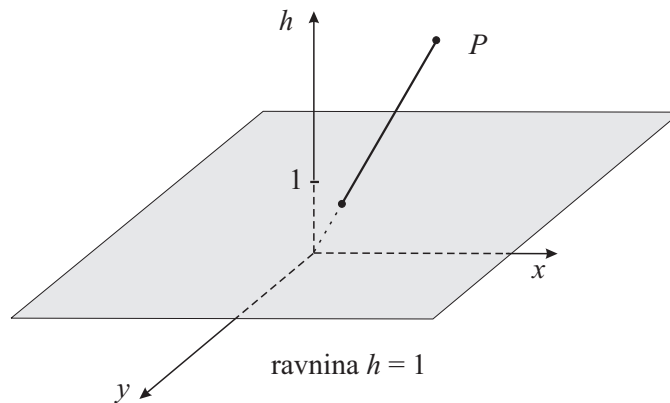
Matrične predstavitve premestitve, skaliranja, zasuka, zrcaljenja in striga so:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{t}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{E}_{y=0}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{H}_x\mathbf{p}. \quad (1.21)$$

Naša želja je predstaviti vseh pet transformacij na enak način, da bi lahko na lahek način obravnavali kompozicijo transformacij. Žal pri zgornjih enačbah to ni mogoče, saj imamo dve različni operaciji: seštevanje in množenje.

Če podamo točke v **homogenih koordinatah** (*homogeneous coordinates*), lahko vse tri transformacije izrazimo z množenjem. Točko  $P(x, y)$  predstavimo s homogenimi koordinatami kot  $P_h(hx, hy, h)$ , kjer je homogeni parameter  $h$  od 0 različno realno število ( $h \neq 0$ ). Če pa imamo dano točko v homogenih koordinatah  $P_h(x_h, y_h, h)$ , lahko poiščemo 2D kartezijske koordinate za točko  $P$  z  $x = x_h/h$  in  $y = y_h/h$ . Deljenje ni potrebno, če postavimo  $h = 1$ . Ker ima ravninska točka tri homogene koordinate, morajo biti ustrezne transformacijske matrike reda  $3 \times 3$ .

Tri koordinate  $(hx, hy, h)$  predstavljajo točke v koordinatnem prostoru  $xyh$ , ki je 3D prostor. Te točke ležijo na premici, ki gre skozi koordinatno izhodišče (slika 1.13). Če delimo koordinate s  $h$  (tj. homogeniziramo to točko), dobimo točko  $(x, y, 1)$ , ki leži na ravnini  $h = 1$ . Lahko rečemo, da homogenizirane točke tvorijo ravnino  $h = 1$  v prostoru  $xyh$ . Točke, ki ležijo v neskončnosti tega prostora, ne moremo homogenizirati.



Slika 1.13: Homogeni koordinatni prostor  $xyh$

### 1.2.1 2D premestitev s homogenimi koordinatami

Enačba 1.2 za premestitev preide s homogenimi koordinatami v:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

ali

$$\mathbf{p}'_h = \mathbf{T}_h \mathbf{p}_h = \mathbf{T}_h(t_x, t_y) \mathbf{p}_h, \quad (1.23)$$

pri čemer je  $\mathbf{T}_h = \mathbf{T}_h(t_x, t_y)$  premestitvena matrika v homogenih koordinatah.

### 1.2.2 2D skaliranje s homogenimi koordinatami

Podobno lahko enačbo 1.5 za skaliranje predstavimo s homogenimi koordinatami:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

ali krajše:

$$\mathbf{p}'_h = \mathbf{S}_h \mathbf{p}_h = \mathbf{S}_h(s_x, s_y) \mathbf{p}_h, \quad (1.25)$$

pri čemer je  $\mathbf{S}_h = \mathbf{S}_h(s_x, s_y)$  skalirna matrika v homogenih koordinatah.

### 1.2.3 2D zasuk s homogenimi koordinatami

Enačba 1.10 za zasuk ima v homogenih koordinatah naslednjo obliko:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

ali krajše:

$$\mathbf{p}'_h = \mathbf{R}_h \mathbf{p}_h = \mathbf{R}_h(\alpha) \mathbf{p}_h, \quad (1.27)$$

pri čemer je  $\mathbf{R}_h = \mathbf{R}_h(\alpha)$  matrika zasuk v homogenih koordinatah.

### 1.2.4 2D zrcaljenje s homogenimi koordinatami

Enačba 1.12 za zrcaljenje objekta čez os  $x$  preide pri uporabi homogenih koordinat v naslednjo obliko:

$$\mathbf{E}_{y=0,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Na podoben način se spremeni enačba 1.14 za zrcaljenje objekta čez os  $y$ :

$$\mathbf{E}_{x=0,h} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Zrcaljenje objekta čez premico  $y = x$  sedaj določa matrika:

$$\mathbf{E}_{y=x,h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Zrcaljenje objekta čez premico  $y = -x$  v homogenih koordinatah izvede matrika:

$$\mathbf{E}_{y=-x,h} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

### 1.2.5 2D strig s homogenimi koordinatami

2D strig vzdolž osi  $x$  v homogenih koordinatah definira naslednja matrika:

$$\mathbf{H}_{x,h} = \begin{bmatrix} 1 & \text{ctg } \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

2D strig vzdolž osi  $y$  pa je določen v homogenem prostoru z naslednjo matriko:

$$\mathbf{H}_{y,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ctg } \phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$



### 1.3 Kompozicija 2D geometrijskih transformacij

Osnovna ideja kompozicije transformacij je v tem, da je učinkoviteje uporabiti eno samo transformacijo kot vrsto transformacij, drugo za drugo. Kompozicije geometrijskih transformacij ustrezajo zmnožku ustreznih matrik.

#### 1.3.1 Premestitve

**Izrek 1.1** *Kompozicija premestitev  $\mathbf{T}_h(t_{x1}, t_{y1})$  in  $\mathbf{T}_h(t_{x2}, t_{y2})$  ustreza premestitvi  $\mathbf{T}_h(t_{x1} + t_{x2}, t_{y1} + t_{y2})$ .*

**Dokaz:** Točko  $P_h$  premestimo najprej s  $\mathbf{T}_h(t_{x1}, t_{y1})$  v  $P'_h$  in potem s  $\mathbf{T}_h(t_{x2}, t_{y2})$  v  $P''_h$ . Ti dve operaciji zapišemo s:

$$\mathbf{p}'_h = \mathbf{T}_h(t_{x1}, t_{y1})\mathbf{p}_h, \quad (1.34)$$

$$\mathbf{p}''_h = \mathbf{T}_h(t_{x2}, t_{y2})\mathbf{p}'_h. \quad (1.35)$$

Vstavimo enačbo 1.34 v 1.35 in upoštevajmo asociativnost zmnožka:

$$\mathbf{p}''_h = \mathbf{T}_h(t_{x2}, t_{y2})[\mathbf{T}_h(t_{x1}, t_{y1})\mathbf{p}_h] = [\mathbf{T}_h(t_{x2}, t_{y2})\mathbf{T}_h(t_{x1}, t_{y1})]\mathbf{p}_h. \quad (1.36)$$

Zmnožek premestitvenih matrik je:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_h(t_{x2}, t_{y2})\mathbf{T}_h(t_{x1}, t_{y1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x1} \\ 0 & 1 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{x1} + t_{x2} \\ 0 & 1 & t_{y1} + t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_h(t_{x1} + t_{x2}, t_{y1} + t_{y2}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Enačba 1.37 pove, da lahko točko  $P_h$  premestimo s  $\mathbf{T}_h(t_{x1} + t_{x2}, t_{y1} + t_{y2})$  neposredno v  $P''_h$ . Na ta način je izrek dokazan.  $\diamond$

#### 1.3.2 Skaliranja

**Izrek 1.2** *Kompozicija skaliranj  $\mathbf{S}_h(s_{x1}, s_{y1})$  in  $\mathbf{S}_h(s_{x2}, s_{y2})$  ustreza skaliranju  $\mathbf{S}_h(s_{x1}s_{x2}, s_{y1}s_{y2})$ .*

**Dokaz:** Točko  $P_h$  skalirajmo s  $\mathbf{S}_h(s_{x1}, s_{y1})$  v  $P'_h$  in potem s  $\mathbf{S}_h(s_{x2}, s_{y2})$  v  $P''_h$ . Zapišimo to z enačbama:

$$\mathbf{p}'_h = \mathbf{S}_h(s_{x1}, s_{y1})\mathbf{p}_h, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{p}_h'' = \mathbf{S}_h(s_{x2}, s_{y2})\mathbf{p}_h'. \quad (1.39)$$

Vstavimo enačbo 1.38 v 1.39 in upoštevajmo asociativnost zmnožka:

$$\mathbf{p}_h'' = \mathbf{S}_h(s_{x2}, s_{y2})[\mathbf{S}_h(s_{x1}, s_{y1})\mathbf{p}_h] = [\mathbf{S}_h(s_{x2}, s_{y2})\mathbf{S}_h(s_{x1}, s_{y1})]\mathbf{p}_h. \quad (1.40)$$

Zmnožek skalirnih matrik je:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_h(s_{x2}, s_{y2})\mathbf{S}_h(s_{x1}, s_{y1}) &= \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{x1}s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1}s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_h(s_{x1}s_{x2}, s_{y1}s_{y2}). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Enačba 1.41 pove, da lahko točko  $P_h$  skaliramo s  $\mathbf{S}_h(s_{x1}s_{x2}, s_{y1}s_{y2})$  neposredno v  $P_h''$ . S tem smo izrek dokazali.  $\diamond$

### 1.3.3 Zasuki

**Izrek 1.3** *Kompozicija zasukov  $\mathbf{R}_h(\alpha_1)$  in  $\mathbf{R}_h(\alpha_2)$  ustreza zasuku  $\mathbf{R}_h(\alpha_1 + \alpha_2)$ .*

**Dokaz:** Točko  $P_h$  zasučimo najprej z  $\mathbf{R}_h(\alpha_1)$  v  $P_h'$  in potem z  $\mathbf{R}_h(\alpha_2)$  v  $P_h''$ . Ti dve akciji zapišemo z enačbama:

$$\mathbf{p}_h' = \mathbf{R}_h(\alpha_1)\mathbf{p}_h, \quad (1.42)$$

$$\mathbf{p}_h'' = \mathbf{R}_h(\alpha_2)\mathbf{p}_h'. \quad (1.43)$$

Vstavimo enačbo 1.42 v 1.43 in upoštevajmo asociativnost zmnožka:

$$\mathbf{p}_h'' = \mathbf{R}_h(\alpha_2)[\mathbf{R}_h(\alpha_1)\mathbf{p}_h] = [\mathbf{R}_h(\alpha_2)\mathbf{R}_h(\alpha_1)]\mathbf{p}_h. \quad (1.44)$$

Zmnožek matrik zasukov je:

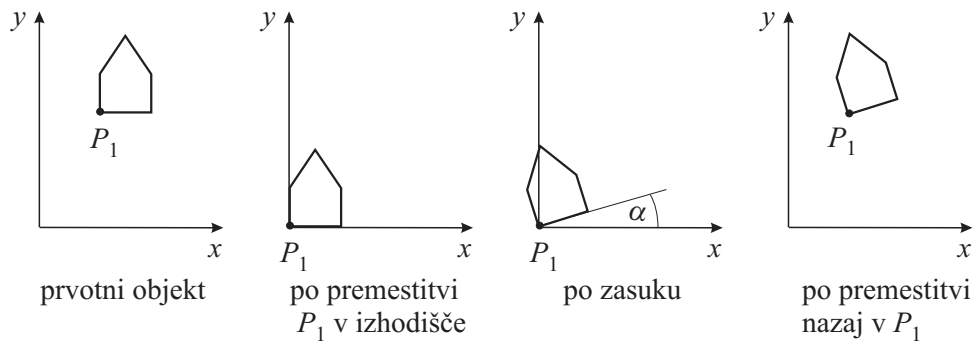
$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h(\alpha_2)\mathbf{R}_h(\alpha_1) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & 0 \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_h(\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Enačba 1.45 pove, da lahko točko  $P_h$  zasučemo z  $\mathbf{R}_h(\alpha_1 + \alpha_2)$  neposredno v  $P_h''$ . S tem smo izrek dokazali.  $\diamond$

### 1.3.4 Zasuk okoli poljubne točke

Zasučimo objekt okrog poljubne točke  $P_1$ ! Ker poznamo zasuk samo okoli izhodišča, pretvorimo problem v tri lažje probleme. Izvesti moramo naslednje tri osnovne transformacije:

1. premestitev  $P_1$  v izhodišče,
2. zasuk in
3. premestitev točke iz izhodišča nazaj v  $P_1$ .



Slika 1.14: Zasuk objekta okoli poljubne točke  $P_1$

Kompozicijo transformacij opisuje slika 1.14. Vzemimo, da ima točka  $P_1$  koordinate  $(x_1, y_1)$ . Tako je kompozicija transformacij:

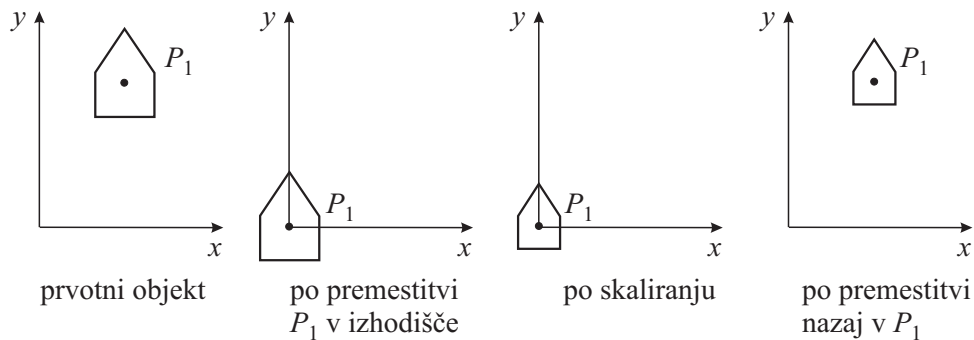
$$\begin{aligned}
 & \mathbf{T}_h(x_1, y_1) \mathbf{R}_h(\alpha) \mathbf{T}_h(-x_1, -y_1) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_1(1 - \cos \alpha) + y_1 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_1(1 - \cos \alpha) - x_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

Ta primer kaže, kako homogene koordinate poenostavljajo kompozicijo transformacij.

## 1.3.5 Skaliranje glede na poljubno točko

Podoben način uporabimo za skaliranje objekta glede na poljubno točko  $P_1$  (slika 1.15). Tako skaliranje sestavljajo naslednje tri temeljne transformacije:

1. premestitev  $P_1$  v izhodišče,
2. skaliranje in
3. premestitev nazaj v  $P_1$ .



Slika 1.15: Skaliranje objekta glede na poljubno točko  $P_1$

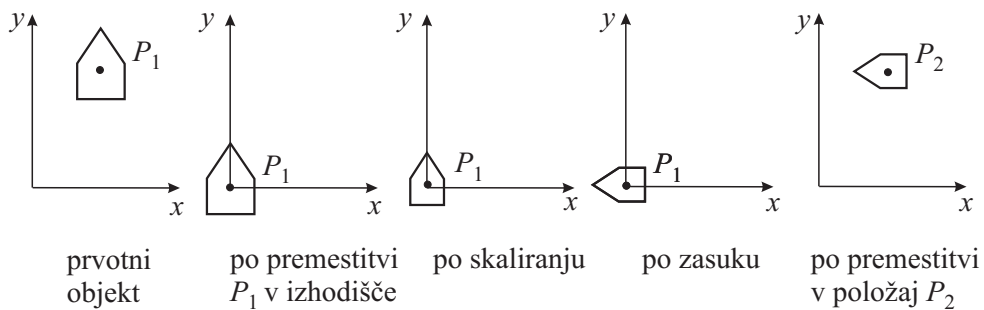
V tem primeru je kompozicija transformacij:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{T}_h(x_1, y_1) \mathbf{S}_h(s_x, s_y) \mathbf{T}_h(-x_1, -y_1) = \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{1.47}$$

### 1.3.6 Skaliranje in zasuk okrog poljubne točke ter premestitev v drugo poljubno točko

Želimo skalirati in zasukati objekt okrog točke  $P_1$  in ga zatem premestiti v  $P_2$ . Kompozicija transformacij je sestavljena iz:

1. premestitve  $P_1$  v izhodišče,
2. skaliranja,
3. zasuka in
4. premestitve na nov položaj  $P_2$ .



Slika 1.16: Skaliranje in zasuk objekta okoli poljubne točke  $P_1$  in premestitev v  $P_2$

Za tako kompozicijo (slika 1.16) lahko napišemo transformacijsko matriko:

$$\mathbf{T}_h(x_2, y_2)\mathbf{R}_h(\alpha)\mathbf{S}_h(s_x, s_y)\mathbf{T}_h(-x_1, -y_1). \quad (1.48)$$

### 1.3.7 Komutativnost geometrijskih transformacij

$\mathbf{M}_1$  in  $\mathbf{M}_2$  naj predstavljata premestitev, skaliranje ali zasuk. Zanima nas, kdaj je operacija dveh geometrijskih transformacij komutativna, tj.:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1. \quad (1.49)$$

Vemo, da matrične operacije na splošno niso komutativne. Komutativnost geometrijskih transformacij velja v primerih, ki so razvidni iz preglednice 1.1.

Preglednica 1.1: Pogoji za komutativnost geometrijskih transformacij

Št. primera	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$
1	premestitev	premestitev
2	skaliranje	skaliranje
3	zasuk	zasuk
4	enakomerno skaliranje	zasuk

Dokazi:

Ad1: Dokaz sledi iz izreka 1.1 (seštevanje je komutativna operacija).

Ad2: Dokaz sledi iz izreka 1.2 (množenje je komutativna operacija).

Ad3: Dokaz sledi iz izreka 1.3 (seštevanje je komutativna operacija).

Ad4: Dokaz opravite sami!

### 1.3.8 Analiza učinkovitosti računanja

Določimo transformacijsko matriko kompozicije, sestavljeno iz naslednjih temeljnih transformacij:

1. zasuka,
2. skaliranja in
3. premestitve.

Zmnožek ustreznih transformacijskih matrik je:

$$\mathbf{T}_h\mathbf{S}_h\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} s_x \cos \alpha & -s_x \sin \alpha & t_x \\ s_y \sin \alpha & s_y \cos \alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Če računamo  $(\mathbf{T}_h\mathbf{S}_h\mathbf{R}_h)\mathbf{p}_h$  kot množenje vektorja z matriko  $3 \times 3$ , opravimo dejansko 9 množenj in 6 seštevanj. Število aritmetičnih operacij zmanjšamo, če

se izognemo matričnemu množenju. Tako enačbi 1.51 zahtevata le 4 množenja in 4 seštevanja za vsako transformirano točko.

$$\begin{aligned}x' &= x(s_x \cos \alpha) + y(-s_x \sin \alpha) + t_x, \\y' &= x(s_y \sin \alpha) + y(s_y \cos \alpha) + t_y.\end{aligned}\tag{1.51}$$

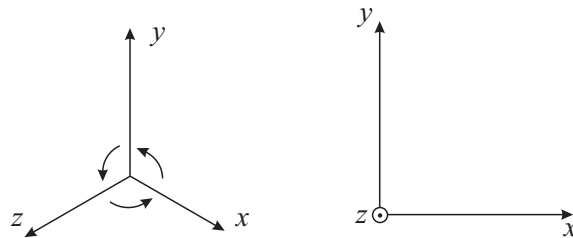
## 1.4 3D geometrijske transformacije

V knjigi bomo uporabljali za predstavitev 3D geometrijskih transformacij **desnoročni** (*right-handed*) 3D koordinatni sistem (slika 1.17), ki je bolj domač večini ljudem in ga uporabljata tudi grafična standarda PHIGS ter OpenGL.

Pozitivni zasuk je definiran s preglednico 1.2, ki velja tako za desnoročni kot levoročni koordinatni sistem. V desnoročnem koordinatnem sistemu je pozitivni zasuk nasproten gibanju urinega kazalca.

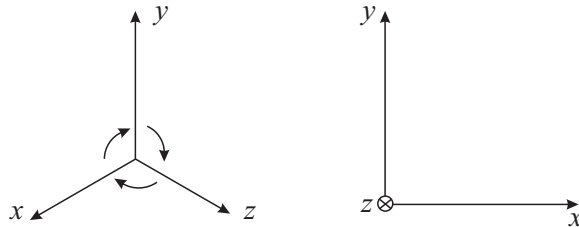
Preglednica 1.2: Smer pozitivnega zasuka

os zasuka	smer pozitivnega zasuka
$x$	od $y$ k $z$
$y$	od $z$ k $x$
$z$	od $x$ k $y$



Slika 1.17: Desnoročni koordinatni sistem

V 3D grafiki še vedno često naletimo na **levoročni** (*left-handed*) 3D koordinatni sistem, ki je na zaslonu prikazovalnika orientiran tako, da os  $z$  kaže v zaslon (slika 1.18). V levoročnem koordinatnem sistemu imajo pozitivni zasuki **smer gibanja urinega kazalca** (*clockwise*).



Slika 1.18: Levoročni koordinatni sistem

Matrika, ki pretvarja točke, predstavljene v levoročnem koordinatnem sistemu in homogenih koordinatah, v točke, predstavljene v desnoročnem koordinatnem sistemu, in obratno, je:

$$\mathbf{M}_{R \leftarrow L, h} = \mathbf{M}_{L \leftarrow R, h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

#### 1.4.1 3D premestitev s homogenimi koordinatami

Premestitev v 3D je preprosta razširitev premestitve iz 2D. Premestitvena matrika v homogenih koordinatah ima obliko:

$$\mathbf{T}_h = \mathbf{T}_h(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

#### 1.4.2 3D skaliranje s homogenimi koordinatami

Skaliranje v 3D preprosto razširimo iz 2D skaliranja. Skalirna matrika ima v predstavitvi s homogenimi koordinatami obliko:



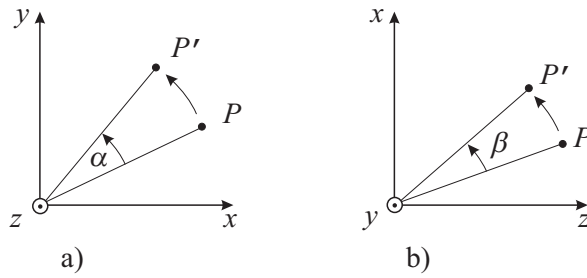
$$\mathbf{S}_h = \mathbf{S}_h(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

### 1.4.3 3D zasuk s homogenimi koordinatami

Izpeljan 2D zasuk v podrazdelku 1.1.3 v bistvu pomeni zasuk okoli osi  $z$  v 3D. Sliko 1.3 dopolnimo z osjo  $z$  (slika 1.19a). Zasuk okoli osi  $z$  spremeni samo koordinati  $x$  in  $y$  točke  $P$ , koordinata  $z$  ostane nespremenjena ( $z' = z$ ). Enačbi 1.9 razširimo:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + z \cdot 0, \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + z \cdot 0, \\ z' &= x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Enačbe 1.55 lahko zapišemo v matrični obliki:



Slika 1.19: Zasuk točke okoli: a) osi  $z$ , b) osi  $y$

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{p}. \quad (1.56)$$

Matriko zasuk  $\mathbf{R}_z(\alpha)$  za zasuk objekta okoli osi  $z$  za kot  $\alpha$  lahko zapišemo za homogene koordinate:

$$\mathbf{R}_{z,h}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Pri izpeljavi matrice  $\mathbf{R}_{y,h}(\beta)$  za zasuk objekta okoli osi  $y$  za kot  $\beta$  si pomagamo s sliko 1.19b, ki je analogna sliki 1.19a. V slednji postavimo namesto osi  $x$  os  $z$ , namesto osi  $y$  os  $x$ , namesto osi  $z$  os  $y$  in namesto kota  $\alpha$  kot  $\beta$ . Te zamenjave izvršimo v enačbah 1.55 in dobimo:

$$\begin{aligned} z' &= z \cos \beta - x \sin \beta + y \cdot 0, \\ x' &= z \sin \beta + x \cos \beta + y \cdot 0, \\ y' &= z \cdot 0 + x \cdot 0 + y \cdot 1. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Enačbe 1.58 uredimo:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \beta + y \cdot 0 + z \sin \beta, \\ y' &= x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0, \\ z' &= -x \sin \beta + y \cdot 0 + z \cos \beta. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Iz enačb 1.59 in z upoštevanjem, da transformacija deluje nad točkami v homogenem prostoru, dobimo matriko:

$$\mathbf{R}_{y,h}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

Analogno izpeljemo matriko zasuka  $\mathbf{R}_{x,h}(\gamma)$ , če zasučemo objekt okoli osi  $x$  za kot  $\gamma$ :

$$\mathbf{R}_{x,h}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.61)$$

Splošni zasuk v 3D prostoru poteka hkrati v vseh smereh. Opišemo ga z matriko zasuka, ki jo dobimo z množenjem matrik zasukov (enačbe 1.57, 1.60 in 1.61). Ker matrična operacija ni komutativna, moramo privzeti določeni red v izvršitvi zasuka. Običajni dogovor je, da najprej izvršimo zasuk okoli osi  $x$ , potem okoli osi  $y$  in na koncu okoli osi  $z$ . Torej je splošna matrika zasuka  $\mathbf{R}_h(\gamma, \beta, \alpha)$ :

$$\mathbf{R}_h(\gamma, \beta, \alpha) = \mathbf{R}_{z,h}(\alpha) \mathbf{R}_{y,h}(\beta) \mathbf{R}_{x,h}(\gamma) = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 \\ D & E & F & 0 \\ G & H & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.62)$$

pri čemer so  $A, B, \dots, I$  naslednji izrazi:

$$\begin{aligned}
 A &= \cos \alpha \cos \beta, \\
 B &= -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\
 C &= \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 D &= \sin \alpha \cos \beta, \\
 E &= \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\
 F &= -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 G &= -\sin \beta, \\
 H &= \cos \beta \sin \gamma, \\
 I &= \cos \beta \cos \gamma.
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

#### 1.4.4 3D zrcaljenje s homogenimi koordinatami

Zrcaljenje objekta čez ravnino  $x = 0$  (slika 1.5) dosežemo s pomočjo matrike:

$$\mathbf{E}_{x=0,h} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.64}$$

Na analogni način lahko razvijemo matrike za zrcaljenja preko drugih ravnin.

#### 1.4.5 3D strig s homogenimi koordinatami

3D strig hkrati vzdolž osi  $x$  in  $y$  definira naslednja matrika (Foley et al., 1995):

$$\mathbf{H}_{xy,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{ctg } \theta & 0 \\ 0 & 1 & \text{ctg } \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.65}$$

ki poljubno točko pretvori v  $[x + z \text{ctg } \theta \quad y + z \text{ctg } \phi \quad z \quad 1]^T$ . To pomeni, da se objekt upogne vzdolž osi  $x$  na kot  $\theta$  in vzdolž osi  $y$  na kot  $\phi$ , medtem ko ostane v smeri  $z$  enako visok. 3D strig vzdolž osi  $x$  dobimo, če postavimo v enačbi 1.65  $\text{ctg } \phi = 0$ . Na analogen način izpeljemo enačbo za 3D strig vzdolž osi  $y$ .

## 1.5 Inverzne 3D geometrijske transformacije

Vse transformacijske matrice so invertibilne. Inverzno premestitveno matriko matrice  $\mathbf{T}_h(t_x, t_y, t_z)$  dobimo tako, da v tej matriki spremenimo predznak vsem premestitvenim veličinam:

$$\mathbf{T}_h^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \mathbf{T}_h(-t_x, -t_y, -t_z). \quad (1.66)$$

Inverzno skalirno matriko matrice  $\mathbf{S}_h(s_x, s_y, s_z)$  dobimo tako, da v tej matriki nadomestimo skalirne faktorje z njihovimi recipročnimi vrednostmi:

$$\mathbf{S}_h^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \mathbf{S}_h(s_x^{-1}, s_y^{-1}, s_z^{-1}). \quad (1.67)$$

Inverzno matriko zasuka matrice  $\mathbf{R}_{x,h}(\gamma)$  ( $\mathbf{R}_{y,h}(\beta)$  in  $\mathbf{R}_{z,h}(\alpha)$ ) dobimo tako, da spremenimo predznak kotu zasuka:

$$\mathbf{R}_{x,h}^{-1}(\gamma) = \mathbf{R}_{x,h}(-\gamma). \quad (1.68)$$

Stolpci (in vrstice) v zgornji levi podmatriki (reda  $3 \times 3$ ) matrik  $\mathbf{R}_{x,h}(\gamma)$ ,  $\mathbf{R}_{y,h}(\beta)$  in  $\mathbf{R}_{z,h}(\alpha)$  so med seboj pravokotni enotski vektorji. Isto velja v 2D matriki zasuka, samo da je tam podmatrika reda  $2 \times 2$ . Podmatrika zasuka  $3 \times 3$  (oziroma  $2 \times 2$ ) je ortogonalna, ker so njeni stolpci in vrstice medsebojno ortogonalni enotski vektorji. Za vsako ortogonalno matriko  $\mathbf{M}$  pa velja, da je njena inverzna matrika enaka transponirani matriki. Torej  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$  ali npr.:

$$\mathbf{R}_{x,h}^{-1}(\gamma) = \mathbf{R}_{x,h}^T(\gamma). \quad (1.69)$$

Inverzna transformacija zrcaljenja je enaka sami transformaciji zrcaljenja, ne glede na kaj zrcalimo. Tako lahko zapišemo na primer:

$$\mathbf{E}_{x=0,h}^{-1} = \mathbf{E}_{x=0,h} \quad (1.70)$$

Inverzno matriko matrice striga  $\mathbf{H}_{x,h}(\theta)$  vzdolž osi  $x$  dobimo tako, da spremenimo predznak kotu striga (Angel, 1997):

$$\mathbf{H}_{x,h}^{-1}(\theta) = \mathbf{H}_{x,h}(-\theta). \quad (1.71)$$

## 1.6 Kompozicija 3D geometrijskih transformacij

Če računamo transformacije v homogenih koordinatah, se poljubna kompozicija 3D geometrijskih transformacij prevede na množenje ustreznih matrik reda  $4 \times 4$ .

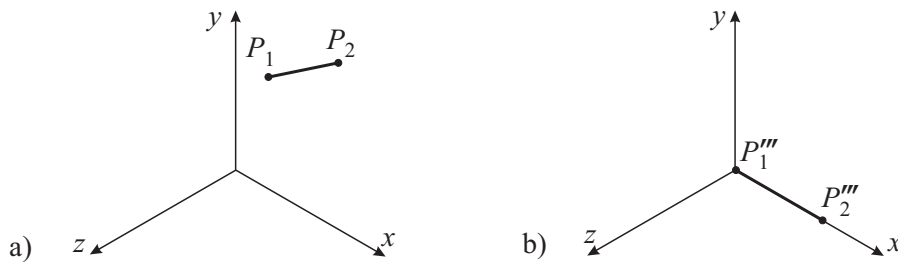
### Zgled 1: Kompozicija zasuka, skaliranja in premestitve

Če hočemo izvršiti najprej splošni zasuk, potem skaliranje in na koncu še premestitev, ni potrebno opraviti posamičnih transformacij, ampak lahko vse dane transformacije prevedemo na izvršitev kompozicije transformacij s transformacijsko matriko  $(\mathbf{TSR})_h$ :

$$(\mathbf{TSR})_h = \mathbf{T}_h \mathbf{S}_h \mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} As_x & Bs_x & Cs_x & t_x \\ Ds_y & Es_y & Fs_y & t_y \\ Gs_z & Hs_z & Is_z & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \diamond \quad (1.72)$$

### Zgled 2: Postavitev daljice iz prostora na pozitivno os $x$

Želimo postaviti daljico  $P_1P_2$ , ki se nahaja poljubno v prostoru, tako da bo



Slika 1.20: Transformacija daljice  $P_1P_2$  iz začetnega (a) v končni (b) položaj

ležala na pozitivni osi  $x$  s točko  $P_1$  v koordinatnem izhodišču (slika 1.20).

Želena transformacijo lahko izvršimo v treh korakih:

1. Premestimo točko  $P_1$  v koordinatno izhodišče. Dobimo:

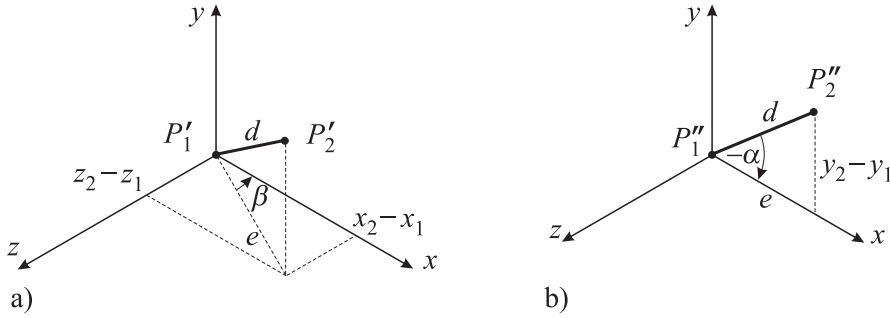
$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_{1h} &= \mathbf{T}_h(-x_1, -y_1, -z_1)\mathbf{p}_{1h} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\ \mathbf{p}'_{2h} &= \mathbf{T}_h(-x_1, -y_1, -z_1)\mathbf{p}_{2h} = [x_2 - x_1 \ y_2 - y_1 \ z_2 - z_1 \ 1]^T.\end{aligned}\quad (1.73)$$

2. Zasučemo daljico  $P'_1P'_2$  za kot  $\beta$  okoli osi  $y$ . S pomočjo slike 1.21a dobimo enačbe:

$$\sin \beta = \frac{z_2 - z_1}{e}, \quad \cos \beta = \frac{x_2 - x_1}{e}, \quad (1.74)$$

pri čemer je  $e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ . Po zasuku dobimo:

$$\mathbf{p}''_{2h} = \mathbf{R}_{y,h}(\beta)\mathbf{p}'_{2h} = [e \ y_2 - y_1 \ 0 \ 1]^T. \quad (1.75)$$



Slika 1.21: a) Daljica  $P_1P_2$  po premestitvi točke  $P_1$  v koordinatno izhodišče, b) Daljica  $P'_1P'_2$  po zasuku okoli osi  $y$  za kot  $\beta$  v ravnino  $xy$

3. Sledi zasuk daljice  $P''_1P''_2$  okoli osi  $z$  za kot  $-\alpha$  (slika 1.21b). Veljajo enačbe:

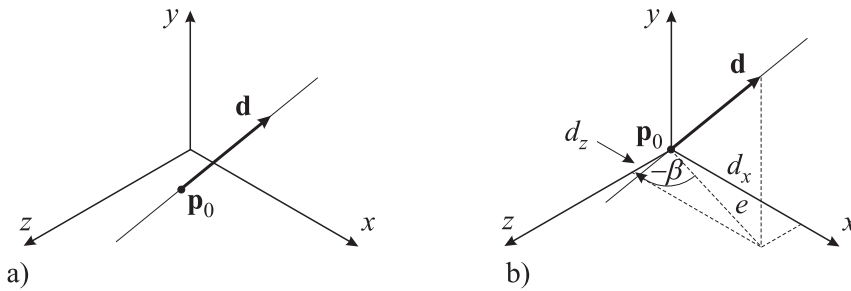
$$\cos \alpha = \frac{e}{d}, \quad \sin \alpha = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad (1.76)$$

pri čemer je  $d = \overline{P''_1P''_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ . Končni rezultat je:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'''_{2h} &= \mathbf{R}_{z,h}(-\alpha)\mathbf{p}''_{2h} = \mathbf{R}_{z,h}(-\alpha)\mathbf{R}_{y,h}(\beta)\mathbf{T}_h(-x_1, -y_1, -z_1)\mathbf{p}_{2h} \\ &= [d \ 0 \ 0 \ 1]^T. \diamond\end{aligned}\quad (1.77)$$

**Zgled 3: Zasuk okoli poljubne premice**

Želimo zasukati objekt za kot  $\theta$  okoli premice z enačbo  $\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{d}$ , pri čemer je  $\mathbf{p}_0$  krajevni vektor točke  $P_0$  na premici in  $\mathbf{d}$  smerni vektor vzdolž premice (slika 1.22a). Predpostavimo, da je  $\|\mathbf{d}\| = 1$ . Najprej izvršimo premestitev točke  $P_0$  v koordinatno izhodišče z matriko  $\mathbf{T}_h(-x_0, -y_0, -z_0)$ . Položaj po premestitvi kaže slika 1.22b.



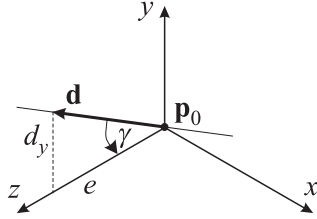
Slika 1.22: a) Poljubna premica v kartezijskem koordinatnem sistemu, b) Premica po premestitvi točke  $P_0$  v koordinatno izhodišče

Sedaj moramo premico zasukati v eno od glavnih osi. Katero os izberemo, je čisto vseeno. Tak zasuk lahko vedno izvedemo v dveh korakih. Denimo, da želimo postaviti premico v os  $z$ . V prvem koraku premico zasučemo okoli osi  $y$ , tako da bo ležala v ravnini  $yz$ . Zasukati jo moramo za kot  $-\beta$ . Veljajo enačbe (slika 1.22b):

$$\cos \beta = \frac{d_z}{e}, \quad \sin \beta = \frac{d_x}{e}, \quad e = \sqrt{d_x^2 + d_z^2}. \quad (1.78)$$

Uporabimo matriko  $\mathbf{R}_{y,h}(-\beta)$  in dobimo položaj, ki ga ponazarja slika 1.23. Sedaj zasučimo premico v os  $z$ . Zasučemo jo za kot  $\gamma$  okoli osi  $x$  z matriko  $\mathbf{R}_{x,h}(\gamma)$ , pri čemer je:

$$\cos \gamma = \frac{e}{\|\mathbf{d}\|} = e, \quad \sin \gamma = \frac{d_y}{\|\mathbf{d}\|} = d_y. \quad (1.79)$$



Slika 1.23: Premica po zasuku v ravnino  $yz$

Sledi zasuk objekta okoli osi  $z$  za želeni kot  $\theta$  (to je isto, kot da bi objekt zasukali okoli poljubne premice, saj je le-ta identična z osjo  $z$ ). Po tem zasuku moramo postaviti poljubno premico na staro mesto v prostor. To izvršimo z naslednjo kompozicijo inverznih transformacij:

$$\mathbf{T}_h(x_0, y_0, z_0) \mathbf{R}_{y,h}(\beta) \mathbf{R}_{x,h}(-\gamma) \quad (1.80)$$

Na koncu lahko zapišemo celotno kompozicijo, ki izvrši zasuk za kot  $\theta$  okoli poljubne premice:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_h &= \\ &= \mathbf{T}_h(x_0, y_0, z_0) \mathbf{R}_{y,h}(\beta) \mathbf{R}_{x,h}(-\gamma) \mathbf{R}_{z,h}(\theta) \mathbf{R}_{x,h}(\gamma) \mathbf{R}_{y,h}(-\beta) \mathbf{T}_h(-x_0, -y_0, -z_0). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Torej, če hočemo zasukati objekt okoli poljubne premice v prostoru, moramo izvršiti kar sedem elementarnih geometrijskih operacij.  $\diamond$



## 1.7 Transformacije med koordinatnimi sistemi

Drugačni, toda ekvivalentni način razmišljanja je, če transformacijo obravnavamo kot spremembo koordinatnih sistemov. Tak način je koristen, ko obravnavamo množico objektov, od katerih je vsak definiran v svojem lastnem lokalnem koordinatnem sistemu in ko želimo izraziti njihove koordinate v določenem globalnem koordinatnem sistemu. To se često uporablja v robotiki in animaciji artikuliranih figur.

Naj  $\mathbf{M}_{i \leftarrow j, h}$  označuje transformacijo, ki spreminja predstavitev točke v koordinatnem sistemu  $j$  (tj.  $\mathbf{p}^{(j)}$ ) v njeno predstavitev v koordinatnem sistemu  $i$  (tj.  $\mathbf{p}^{(i)}$ ). Puščico v levo uporabljamo zato, ker ponazarja gibanje z desne v levo tudi vrstni red izvajanja operacij. Velja:

$$\mathbf{p}_h^{(i)} = \mathbf{M}_{i \leftarrow j, h} \mathbf{p}_h^{(j)}, \quad (1.82)$$

$$\mathbf{p}_h^{(j)} = \mathbf{M}_{j \leftarrow k, h} \mathbf{p}_h^{(k)}. \quad (1.83)$$

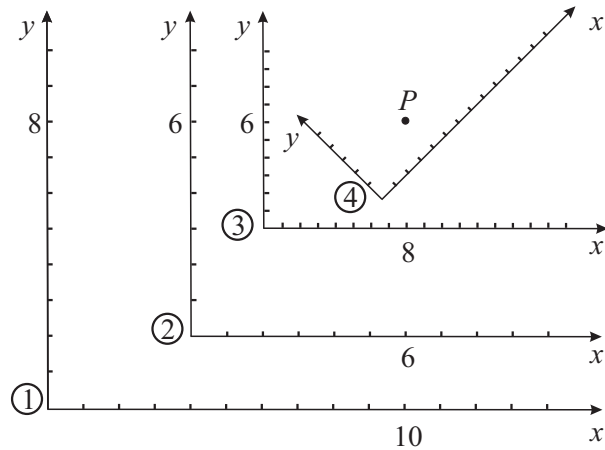
Če vstavimo enačbo 1.83 v 1.82, dobimo:

$$\mathbf{p}_h^{(i)} = \mathbf{M}_{i \leftarrow j, h} \mathbf{p}_h^{(j)} = \mathbf{M}_{i \leftarrow j, h} \mathbf{M}_{j \leftarrow k, h} \mathbf{p}_h^{(k)} = \mathbf{M}_{i \leftarrow k, h} \mathbf{p}_h^{(k)}. \quad (1.84)$$

Iz enačbe 1.84 sledi:

$$\mathbf{M}_{i \leftarrow k, h} = \mathbf{M}_{i \leftarrow j, h} \mathbf{M}_{j \leftarrow k, h}. \quad (1.85)$$

Slika 1.24 prikazuje štiri različne koordinatne sisteme. Točka, ki je definirana v kakem koordinatnem sistemu, ima lahko svoj določeni položaj v kateremkoli drugem koordinatnem sistemu. Točka  $P$  na sliki 1.24 ima npr. koordinati v koordinatnem sistemu 1 (10, 8), v 2 (6, 6), v 3 (8, 6) in v 4 (4, 2).



Slika 1.24: Točka  $P$  in štiri koordinatni sistemi

Transformacija iz koordinatnega sistema 1 v 2 je:

$$\mathbf{M}_{2 \leftarrow 1, h} = \mathbf{T}_h(-4, -2), \quad (1.86)$$

iz 2 v 3:

$$\mathbf{M}_{3 \leftarrow 2, h} = \mathbf{S}_h(2, 2)\mathbf{T}_h(-2, -3), \quad (1.87)$$

iz 3 v 4:

$$\mathbf{M}_{4 \leftarrow 3, h} = \mathbf{R}_h(-45^\circ)\mathbf{T}_h(-6, 7, -1, 8). \quad (1.88)$$

Preverimo enačbo 1.86 za prehod iz koordinatnega sistema 1 v 2 na točki  $P$ :

$$\mathbf{p}_h^{(2)} = \mathbf{M}_{2 \leftarrow 1, h} \mathbf{p}_h^{(1)} = \mathbf{T}_h(-4, -2) \mathbf{p}_h^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.89)$$

Transformacija  $\mathbf{M}_{1 \leftarrow 2, h}$  iz koordinatnega sistema 2 v 1 je seveda inverzna transformacija od  $\mathbf{M}_{2 \leftarrow 1, h}$ :

$$\mathbf{M}_{1 \leftarrow 2, h} = \mathbf{M}_{2 \leftarrow 1, h}^{-1} = \mathbf{T}_h(4, 2). \quad (1.90)$$

Podobno je:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{2\leftarrow 3,h} &= \mathbf{M}_{3\leftarrow 2,h}^{-1} = [\mathbf{S}_h(2, 2)\mathbf{T}_h(-2, -3)]^{-1} = \mathbf{T}_h^{-1}(-2, -3)\mathbf{S}_h^{-1}(2, 2) \\ &= \mathbf{T}_h(2, 3)\mathbf{S}_h(0, 5, 0, 5).\end{aligned}\quad (1.91)$$

Pri gornjem izračunu smo upoštevali lastnost, da je inverzna matrika zmnožka več matrik enaka zmnožku inverznih matrik v obratnem vrstnem redu. Nadalje je:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{3\leftarrow 1,h} &= \mathbf{M}_{3\leftarrow 2,h}\mathbf{M}_{2\leftarrow 1,h} = \mathbf{S}_h(2, 2)\mathbf{T}_h(-2, -3)\mathbf{T}_h(-4, -2) \\ &= \mathbf{S}_h(2, 2)\mathbf{T}_h(-6, -5).\end{aligned}\quad (1.92)$$

V enačbi 1.92 smo upoštevali izrek 1.1.

Seveda lahko analogne transformacije koordinatnih sistemov izvršimo tudi znotraj 3D prostora.

# Bibliography

- Angel, E. (1997). *Computer Graphics: A Top Down Approach with OpenGL*. Addison-Wesley.
- Farin, G. (1997). *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*. Academic Press, New York, NY, USA, forth edition.
- Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K. in Hughes, J. F. (1995). *Computer Graphics — Principles and Practice (2nd Ed. in C)*. Addison-Wesley.
- Salomon, D. (1999). *Computer Graphics and Geometric Modeling*. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc.